MАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
MATHEMATICAL MODELING

Check for updates

УДК 519.872.6
https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-60-72

Обзорная статья

Моделирование движения автомобильного транспорта с использованием макро- и микроскопических моделей

М.А. Трапезникова, А.А. Чечина, Н.Г. Чурбанова

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Российская Федерация, г. Москва, Миусская пл., 4

✉ nataimamod@mail.ru

Аннотация

Для эффективного регулирования дорожного движения на магистралях и сетях современных мегаполисов необходимо внедрение Интеллектуальных транспортных систем, включающих в себя множество инновационных решений, в частности, математические модели описания динамики транспортных потоков.

Статья кратко описывает современное состояние транспортных систем и их развитие: от простейших макроскопических и микроскопических моделей, ставших классическими, до современных разработок.

Особое внимание уделяется разработанным авторами статьи оригинальным многополосным моделям в рамках обоих подходов. Макроскопическая модель основана на квазигазодинамическом подходе, а микроскопическая использует идеологию клеточных автоматов и является обобщением модели Нагеля-Шрекенберга на многополосный случай.

Кратко описывается различие в способе представления и математическом аппарате для макроскопического и микроскопического описания транспортных потоков. Дальше следует обзор основных моделей на разных этапах их развития, принадлежащих зарубежным и российским авторам.

Рассматривается трехфазная теория Бориса Кернера и модели, построенные в рамках этой теории.

Приводятся примеры современного программного обеспечения для транспортного моделирования.

Кратко описывается оригинальная квазигазодинамическая модель транспортных потоков, использующая приближение сплошной среды и построенная по аналогии с известной моделью газовой динамики. Благодаря введению скорости перестроения модель обобщена на многополосный случай.

Описывается оригинальная микроскопическая модель, основанная на теории клеточных автоматов, которая является обобщением модели Нагеля-Шрекенберга на многополосный случай. Модель получила дальнейшее развитие путем учета различных водительских стратегий и поведенческих аспектов.

В статье представлен краткий обзор состояния в области математического моделирования транспортных потоков, а также представлены оригинальные макроскопическая и микроскопическая модели, разработанные авторами для случая многополосного движения.

Ключевые слова: математическое моделирование, транспортные потоки, микроскопические и макроскопические модели, клеточные автоматы, многополосное движение.

Для цитирования. Трапезникова М.А., Чечина А.А., Чурбанова Н.Г. Моделирование движения автомобильного транспорта с использованием макро- и микроскопических моделей. *Computational Mathematics and Information Technologies.* 2023;7(2):60–72. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-60-72

Review article

Simulation of Vehicular Traffic using Macro- and Microscopic Models

Marina A Trapeznikova, Antonina A Chechina, Natalya G Churbanova

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, 4, Miusskaya Sq., Moscow, Russian Federation

nataimamod@mail.ru

Abstract

To effectively regulate traffic on highways and networks of modern megacities, it is necessary to introduce Intelligent Transport Systems, which include many innovative solutions, in particular, mathematical models for describing the dynamics of traffic flows.

The article is devoted to a brief description of the current state in this area in its development — from the simplest macroscopic and microscopic models that have become classic to modern developments.

Special attention is paid to the original multilane models developed by the authors of the article within both approaches. The macroscopic model is based on the quasigasdynamic approach, while the microscopic one uses the ideology of cellular automata and constitutes a generalization of the Nagel-Schreckenberg model for the multilane case.

The difference in the representation method and the mathematical apparatus for the mac-roscopic and microscopic description of traffic flows is briefly described, followed by the review of the main models at different stages of their development, presented by foreign and Russian authors.

Special attention is paid to the three-phase theory of Boris Kerner and models built in the framework of this theory.

Examples of modern software for traffic modeling are given.

The original quasigasdynamic model of traffic flows, which uses the continuum approximation and is constructed by analogy with the well-known model of gas dynamics, is briefly described. Due to the introduction of the lateral speed, the model is generalized to the multilane case.

An original microscopic model based on the cellular automata theory and representing a generalization of Nagel-Schreckenberg model for the multilane case is described. The model has been further developed by taking into account various driving strategies and behavioral aspects.

The article presents a brief overview of the state of the art in the field of mathematical modeling of traffic flows, as well as original macroscopic and microscopic models developed by the authors for the case of multilane traffic.

Keywords: mathematical modeling, traffic flows, microscopic and macroscopic models, cellular automata, multilane traffic.

For citation. Trapeznikova MA, Chechina AA, Churbanova NG. Simulation of vehicular traffic using macro- and microscopic models. *Computational Mathematics and Information Technologies.* 2023;7(2):60–72. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-60-72

Мировой опыт показывает, что в крупных городах необходимо внедрение Интеллектуальной транспортной системы (ИТС) для эффективного строительства новых транспортных сетей со сложной многоуровневой структурой, а также для оперативного регулирования на них дорожного движения. ИТС представляет собой совокупность систем, основанных на информационных, коммуникационных и управленческих технологиях, встроенных в транспортные средства и дорожную инфраструктуру. Она сочетает в себе множество инновационных решений: от математических моделей и методов описания трафика до систем поддержки принятия решений по управлению трафиком, не говоря уже о технических и инженерных аспектах.

Предлагаемая статья посвящена краткому описанию классических и современных тенденций в области математического моделирования автотранспортных потоков. Рассматриваются два основных направления в этой области: макроскопические и микроскопические модели.

Приводится также обзор готовых программных средств для моделирования потоков автомобильного транспорта.

Отдельное внимание уделяется разработанным авторами статьи оригинальным многополосным моделям в рамках обоих подходов. Макроскопическая модель рассматривает транспортный поток как движение слабосжимаемого газа и использует идеологию кинетически-согласованных разностных схем и квазигазодинамической (КГД) системы уравнений [1]. В последнее время появилась современная вычислительная техника сверхвысокой производительности и значительно возросла популярность микроскопических моделей. Однако, благодаря своей экономичности, и макроскопические модели не теряют актуальности при определении основных характеристик дорожного движения, необходимых для транспортного планирования.

Оригинальная микроскопическая модель основана на теории клеточных автоматов (*Cellular Automata* — CA), адаптированной к моделированию потоков транспорта на многополосных магистралях и основных элементах улично-дорожной сети (УДС) [2]. Этот подход позволяет учитывать многие технические параметры автомобилей и особенности поведения водителей. Такие модели могут включать подробное описание движения автомобилей на перекрестках и в местах сужения дорог, обгона и перестроения, обеспечивая высокую степень соответствия модели реальной ситуации.

Оба предложенных подхода обладают внутренним параллелизмом и подходят для быстрых и эффективных расчетов на суперкомпьютерах даже для моделирования крупномасштабных дорожных сетей с несколькими миллионами транспортных средств.

В настоящее время теория транспортных потоков является самостоятельным научным направлением, в основе которого — так называемая физика транспортных потоков — математическое и имитационное моделирование. Математические модели трафика используются как в исследовательской, так и в практической деятельности для обоснования планирования и принятия управленческих решений в транспортной отрасли.

Моделирование автотранспортных потоков начало развиваться в США с 30-х годов 20-го столетия. Но в связи с возрастающим повсюду объемом транспортных перевозок, а также все более доступной компьютеризацией, в 1990-е годы эта область стала притягивать все больше внимания. Возникло два основных направления этого развития: макроскопическое моделирование и микроскопическое моделирование, которые различаются по способу представления реальной действительности, и по своему математическому описанию.

В первом случае движение транспорта использует приближение сплошной среды и рассматривает поток автомобилей аналогично потоку слабосжимаемого газа. Основные исследуемые величины: поле плотности (количество автомобилей на единицу длины дороги и на дорожную полосу) и поле средней скорости, а также поток (количество автомобилей, проехавших заданную точку на дороге в единицу времени). Модель состоит из системы дифференциальных уравнений в частных производных и решается хорошо известными конечно-разностными методами.

В случае микроскопического моделирования предметом исследования является движение одного отдельно взятого автомобиля и его взаимодействие с остальными участниками движения, реакция на окружающую обстановку и на её возможные изменения этой обстановки.

Такие модели описываются, как правило, обыкновенными дифференциальными уравнениями, для решения которых также существуют известные численные методы, например, метод Рунге-Кутты второго или четвертого порядков.

Макроскопическими моделями удобно описывать достаточно плотный поток автотранспорта, когда все водители вынуждены придерживаться одинаковых стратегий и ехать приблизительно с одной скоростью. С помощью таких моделей обычно исследуют общие закономерности движения транспорта. Микроскопические модели позволяют более детально рассматривать движение транспортной единицы «водитель-автомобиль». При этом учитываются не только характеристики самого автомобиля, но и поведенческие особенности водителя, а возможно даже и его психологический тип. С помощью таких моделей можно описывать не только разреженный поток, но и плотный поток автотранспорта благодаря сегодняшним вычислительным возможностям.

Одна из первых простейших моделей макроскопического типа — модель Лайтхилла-Уизема-Ричардса (LWR) [3]. Она характеризуется единственным динамическим уравнением, являющимся следствием закона сохранения числа автомобилей:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dQ_e(\rho)}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,$$

где ρ — плотность автомобильного потока; Q_e — равновесный поток.

В данной модели предполагается, что поток или средняя скорость всегда находятся в локальном равновесии относительно действительной плотности и мгновенно меняются вместе с ней, то есть возникают неоправданно высокие ускорения: $V = V_e(\rho)$, $Q = Q_e(\rho)$. Модели такого типа, ввиду отсутствия конечного ускорения, не могут описывать рост волн трафика и неустойчивость транспортного потока.

На следующем этапе появились модели, включающие в себя помимо уравнения неразрывности второе динамическое уравнение — уравнение ускорения, которое описывает локальное ускорение как функцию от плотности, скорости, их градиентов и других возможных внешних факторов. Такой класс моделей известен как класс *моделей второго порядка*, в отличие от моделей LWR, которые называются *моделями первого порядка*.

В книге [4] приводится модель Пэйна [5], для которой уравнение ускорения имеет вид:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_e(\rho) - V}{\tau} + \frac{V_e'(\rho)}{2\rho\tau}\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

с постоянным временем релаксации τ и модель Кернера-Конхойзера [6]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_e(\rho) - V}{\tau} - \frac{c_0^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

Здесь вводится аналог звуковой скорости $\pm c_0$ и динамическая вязкость η. Эта модель чисто феноменологическая.

Модели Пэйна и многим впоследствии предложенным моделям второго порядка, в том числе с диффузионными поправками, присущи некоторые недостатки. В частности, при сильных пространственных неоднородностях начальных условий могут возникать отрицательные значения скоростей, плотности, превышающие максимально допустимые, а также, согласно этим моделям, на движение автомобиля заметное влияние оказывают автомобили, находящиеся сзади, что в случае одной полосы нереалистично. В дальнейшем много усилий было потрачено на то, чтобы сделать макромодели анизотропными, то есть в соответствии с этими моделями автомобили должны реагировать только на ситуацию перед ними. Наиболее известные модели, решающие перечисленные проблемы, — модели Ава-Раскла [7] и Занга [8].

В рамках микроскопического подхода наиболее простой явилась модель следования за лидером [9], которая могла воспроизводить только основные детали и особенности потоков транспорта. Простейшим представителем этого класса является непрерывная по времени модель оптимальной скорости:

$$\dot{v} = \frac{v_{\text{opt}}(s) - v}{\tau},$$

которая описывает адаптацию действительной скорости автомобиля v к оптимальной скорости $v_{\text{opt}}(s)$ за временной масштаб, задаваемый *временем адаптации* τ. Ее аналогом является дискретная по времени модель Нюэлла [10]:

$$v_\alpha(t + \Delta t) = v_{\text{opt}}(s(t)) = \min\left(v_0, \frac{s}{\Delta t}\right),$$

$$x_\alpha(t + \Delta t) = x_\alpha(t) + \frac{v_\alpha(t) + v_\alpha(t + \Delta t)}{2}\Delta t.$$

Еще одним интересным примером простейшей модели следования за лидером является модель Пайпса [11], основанная на правиле безопасного вождения, разработанном в Калифорнии: «правило для следования за впереди идущим транспортным средством на безопасном расстоянии состоит в том, чтобы держать расстояние между вашим автомобилем и автомобилем впереди вас не меньше, чем наименьшая длина автомобиля на каждые десять миль в час от скорости, с которой вы путешествуете». В переводе на математический язык эту модель можно сформулировать следующим образом:

$$s_i(t)_{\min} = \frac{l_i}{0{,}44}\dot{x}_i(t) + l_{i-1},$$

здесь $s_i(t)$ — зазор между текущим и впереди идущим автомобилями, а l_i — длина i-ого автомобиля.

Дальнейшим развитием моделей следования за лидером явились модели разумного водителя (Intelligent Driver Model, IDM). Непрерывная по времени IDM — это самая простая полная и безаварийная модель, дающая реалистичные профили ускорения и правдоподобное поведение во всех однополосных транспортных ситуациях. Наиболее известной моделью этого класса является модель Трайбера [12], которая демонстрирует реалистичное поведение при разгоне и торможении.

Отдельно следует отметить микроскопические модели Пригожина, основанные на кинетической теории Больцмана [13, 14]. В модели вводится функция типа функции распределения в кинетической теории $f(x,u,t)$, которая обозначает число автомобилей, находящихся в момент времени t в точке пространства между x и $x+dx$ и имеющих скорость между u и $u+du$. Вводится также понятие желаемого распределения, которое является идеализацией той цели, к которой стремится данный транспортный поток. Реальное и желаемое распределения могут различаться по различным многим причинам: дорожные условия, погодные условия, взаимодействие с другими автомобилями и т. д. Сами по себе эти причины могут также меняться со временем и, следовательно, реальное распределение будет приближаться к желаемому за какое-то время релаксации. На основе этих предположений для реального распределения записывается уравнение типа уравнения Больцмана:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{rel} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{int},$$

где $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{rel}$ — переход реального распределения к желаемому при отсутствии взаимодействия автомобилей, а изменение реального распределения, возникающее из-за взаимодействий между автомобилями, — $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{int}$.

Члены в правой части могут задаваться различными способами, функция распределения также может иметь более сложный вид. Благодаря этому существует достаточное число разновидностей данной модели: например, в модели Павери-Фонтана [15] в дополнение к реальной вводится «желаемая» скорость данного автомобиля. Подход Пригожина был впоследствии развит в работах Хельбинга и др. [16, 17].

В дальнейшем модели обоих макро- и микроскопического типов развивались в направлении учета человеческого фактора. Появились модели с безопасной скоростью движения [18], неравновесные модели с реалистичным ускорением [19], модели, описывающие движение на сложных дорожных развязках [20, 21], описывающие смешанные потоки, состоящие из неоднородных транспортных средств [22, 23] и т. д.

Современные исследования динамики транспортных потоков идут, в основном, по пути усложнения уже существующих моделей. Можно привести, например, публикации [24–26], посвященные макроскопическим моделям гидродинамического типа.

В области микроскопического моделирования в последнее время быстро развивается отдельное специфическое направление, использующее теорию клеточных автоматов (Cellular Automata — CA). Эти модели можно разделить на две группы: детерминистические и стохастические. Примером детерминистической модели является Правило 184 Вольфрама. Данная модель относится к классу элементарных клеточных автоматов. Это группа из 256 (2^{2^3}) одномерных моделей с числом соседей 3, их можно найти в Атласе Вольфрама [27].

Одна из первых реалистичных стохастических моделей транспортных потоков — широко известная модель Нагеля-Шрекенберга [28]. Эта модель требует подробного рассмотрения, поскольку на ней основаны многие современные модели, развиваемые исследователями во всем мире.

Трасса в модели Нагеля-Шрекенберга представляется в виде одномерной решетки, каждая ячейка которой может быть либо пустой, либо содержать частицу, обозначающую транспортное средство. Частицы перемещаются из одной ячейки в другую (свободную) в одном направлении. В случае однополосного движения они не могут обгонять друг друга. Вся система — пространство, время, скорость — дискретна. Скорость показывает, на сколько ячеек автомобиль перемещается за один шаг по времени. Ускорение происходит мгновенно между шагами. На каждом шаге по времени происходит обновление состояния системы по определённым правилам:

1. Ускорение. Скорость автомобиля i увеличивается на единицу, если максимальная разрешенная скорость не достигнута: $V_i \to \min(V_i+1, V_{\max})$.
2. Торможение. Скорость автомобиля уменьшается на единицу, если есть угроза столкновения с впереди идущим автомобилем: $V_i \to \min(V_i, D_i - 1)$, где D_i — расстояние до впереди идущего автомобиля.
3. Случайные возмущения. Если скорость автомобиля положительна, то она может быть уменьшена на единицу с некоторой вероятностью: $V_i \to \max(V_i - 1, 0)$ с вероятностью p.
4. Движение. Каждый автомобиль продвигается вперед на количество ячеек, соответствующее его новой скорости после выполнения предыдущих шагов: $X_i \to X_i + V_i$.

Для упрощения записи считаем, что скорость и расстояние измеряются в ячейках, а время безразмерно. По этой причине величины можно складывать, вычитать и сравнивать друг с другом.

На сегодняшний день существуют более сложные и детальные CA модели. В статье [29] приведено интересное обобщение теории клеточных автоматов на случай морских перевозок в применении к морскому транспорту. В этом случае правила дискретизации по пространству дополняются правилами картографирования. Авторы статьи [30] исследуют пропускную способность автомагистрали с двумя въездами и одним промежуточным съездом между ними также с использованием модели клеточных автоматов. Целью исследований является максимизация пропускной способности системы путем установления оптимального потока для двух въездов. В работе [31] представлена надежная при численной реализации модель клеточных автоматов, ориентированная на то, чтобы точно воспроизводить замедление и ускорение в соответствии с реалистичными реакциями водителей, когда рассматриваются транспортные средства с различными возможностями замедления.

При помощи клеточных автоматов можно моделировать большие сети дорог. В качестве примера приведем модель, созданную А.П. Буслаевым [32] и коллегами в МАДИ. В основе их подхода — кольцевые структуры из клеточных автоматов с общими ячейками, за которые происходит конкуренция. Подобные структуры колец могут иметь различную топологию, движение по ним имитирует движение по УДС с перекрестками.

В начале 2000-х годов появилась альтернативная теория транспортных потоков, а именно была предложена трехфазная теория Бориса Кернера. Первые работы относятся к 2002-му году, однако, основные положения теории были сформулированы позже в книгах [33] и [34]. В отличие от прежних теорий, где рассматривались две основные фазы транспортных потоков (свободное движение и плотный поток), автор рассматривает существование трех фаз: свободный поток, синхронизованное движение и широкий движущийся кластер, то есть в плотном потоке выделяются две фазы. Это дает возможность предсказать и объяснить эмпирические свойства перехода от свободного к плотному потоку, а также особенности образующихся пространственно-временных структур трафика. Сам автор называет свою теорию эмпирической, качественной, основанной на данных наблюдений, что допускает создание различных математических моделей в рамках этой теории. Автором и другими исследователями были созданы модели на основе клеточных автоматов [35, 36]. В частности, в модели Кернера-Кленова [37, 38] для соответствия теории трех фаз вводятся понятия переускорения и расстояния синхронизации. Благодаря математическому описанию стохастического переускорения с задержкой и эффекта адаптации внутри синхронизованного потока, в разработанной модели переход от свободного к плотному потоку — это $F \to S$ переход (согласно теории трех фаз Кернера) в метастабильном свободном потоке, что наблюдается во всех эмпирических данных. Также Кернером и Кленовым была предложена детерминистическая модель [39]. В работах [40, 41] предложены варианты макроскопических моделей, реализующих трехфазную теорию.

Вообще, модели, соответствующие теории трех фаз Кернера, характеризуются способностью описывать неустойчивости, неизбежно возникающей в реальном трафике. Такие модели демонстрируют один из основных тезисов теории трех фаз: переходы между фазами от свободного потока к синхронизированному и от синхронизированного — к широким движущимся кластерам могут происходить под влиянием случайных процессов и при различных значениях потока, а не быть привязанными четко к конкретному его значению потока. Большинство существующих на сегодняшний день моделей не обладают этим свойством.

В настоящее время теория трёх фаз приобретает всё больше последователей, о чём свидетельствует множество публикаций, например, [42, 43]. В статье [44] представлена недавно модифицированная модель KKW (Kerner-Klenov-Wolf), включающая различные типы транспортных средств. Вводится переменная чувствительность водителя к колебаниям скорости. Делаются выводы о влиянии изменения скорости одного или нескольких транспортных средств на общую скорость потока при различной интенсивности начального потока.

Отечественные разработки в области транспортного моделирования соответствуют основным мировым тенденциям. Выше были упомянуты работы по сетям Буслаева, проводимые в МАДИ, там же исследуются стохастические модели, а также применение теории массового обслуживания для решения транспортных проблем. В МФТИ совместно с зарубежными коллегами активно ведутся исследования на основе теории трех фаз Кернера, развиваются модели клеточных автоматов [35, 37–39], модели гидродинамического типа [45, 46], имитационные модели, разрабатываются численные методы поиска равновесий в больших транспортных сетях [47]. Следует отметить работы коллектива авторов из МГУ им. М. В. Ломоносова [48, 49], посвященные вопросам организации дорожного движения и исследованию нестабильности потоков на основе гидродинамических моделей. Решением задач оптимального управления транспортными потоками на УДС [50], в том числе с применением генетических алгоритмов, активно занимаются в ФИЦ «Информатика и управление» РАН. Двумерная квазигазодинамическая модель транспортных потоков и многополосная CA модель, разработанные в ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, представлены ниже.

На сегодняшний день существует огромное количество программных решений для транспортного моделирования. Пакеты, обзор которых дан в сборнике [51], продолжают развиваться. Наиболее известными среди коммерческих пакетов являются:

– PTV Vision Traffic Suite [52];

– Aimsun (TSS-Transport Simulation Systems) [53].

Имеется также свободное программное обеспечение с открытым исходным кодом, например:

– MATSim [54, 55];

– Eclipse SUMO [56, 57].

PTV Vision Traffic Suite включает продукты:

– PTV Visum (стратегическое планирование, расчет спроса на транспорт, анализ транспортной сети городов, мегаполисов, стран и регионов на основе макромоделирования);

– PTV Vissim (имитационное моделирование дорожного движения, проверка гипотез по организации дорожного движения);

– PTV Viswalk (имитационное моделирование пешеходных потоков, планирование массовых мероприятий, разработка эвакуационных планов);

– PTV Vistro (работа на сетевом уровне, учитывая сразу несколько видов пересечений — регулируемых и нерегулируемых, оптимизации режимов регулирования).

Aimsun в настоящее время превратился из микросимулятора в полностью интегрированное приложение для моделирования дорожного движения, которое объединяет прогноз спроса на поездки, макроскопические функции и мезоскопический-микроскопический гибридный симулятор.

Продукты PTV и Aimsun реализованы для операционной системы Windows.

MATSim основан на мультиагентном подходе для крупномасштабного транспортного моделирования, состоит из нескольких модулей, которые можно комбинировать или использовать по отдельности. Модули могут быть заменены пользовательскими реализациями.

SUMO является академической разработкой для моделирования транспортных систем, включающих автомобили, общественный транспорт и пешеходов. Программы основаны на микроскопическом подходе. В состав SUMO входит множество вспомогательных инструментов, которые автоматизируют основные задачи и позволяют осуществлять импорт сети, расчет маршрута, визуализацию, а также расчет выбросов загрязняющих веществ и расчет шума. SUMO можно дополнить настраиваемыми моделями и предоставить интерфейсы для удаленного управления моделированием. Отличительные черты SUMO — переносимость (portability) и расширяемость (extensibility). Разработаны версии пакета для ряда популярных операционных систем, в частности, для Linux.

Отметим, что существуют также программные пакеты для реализации концепции BIM, 3D моделирования и создания цифровых двойников в области комплексного проектирования дорог и транспортной инфраструктуры, в частности, продукты компании Bentley Systems [58], среди которых OpenRoads и OpenCities Planner.

Таким образом, в мире накоплен уже достаточно большой опыт по моделированию транспортных потоков, разработаны эффективные программные средства, которые становятся неотъемлемой частью как краткосрочного, так и долгосрочно транспортного планирования, закладывают основу интеллектуальных транспортных систем.

Как упоминалось выше, многие модели макроскопического типа описывают движение автотранспорта по аналогии с газодинамическим течением. Следовательно, основой моделей служит система уравнений газовой динамики. Авторами данной статьи некоторое время назад была разработана двумерная многополосная макроскопическая модель для описания транспортных потоков, построенная по аналогии с КГД системой уравнений [59]. КГД система была создана для описания газодинамических течений в широком диапазоне чисел Маха, в том числе хорошо зарекомендовала себя при моделировании существенно дозвуковых течений. Поэтому естественно было использовать ее при построении модели транспортных потоков в приближении сплошной среды. Уравнения

КГД системы, в отличие от традиционных газодинамических уравнений, содержат в правой части дополнительные диффузионные члены. В случае транспортных потоков их можно рассматривать как естественную вязкость, позволяющую сглаживать решения при больших градиентах и реализовывать численные алгоритмы сквозным счетом, без выделения особенностей.

Отличительной чертой многополосной модели является наличие в системе уравнения для «поперечной» компоненты скорости, которая имеет смысл скорости перестроения из полосы в полосу. Поэтому модель может быть использована для моделирования движения по трассе с учетом ее реальной геометрии. Многополосность и изменение числа полос учитывается путем задания конкретной вычислительной области, а не при помощи источников в правых частях уравнений. Подробное описание КГД модели транспортных потоков содержится в работах [1, 60, 61]. Система уравнений предложенной модели выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho U)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho V)=\\ =\frac{\partial}{\partial x}\frac{\tau_x}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho U^2+P_x\right)-f_x+\frac{\partial}{\partial y}(\rho UV)\right)+\\ +\frac{\partial}{\partial y}\frac{\tau_y}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho V^2+P_y\right)-f_y+\frac{\partial}{\partial x}(\rho UV)\right),\end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho U}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho U^2+P_x\right)-f_x+\frac{\partial}{\partial y}(\rho UV)=\\ =\frac{\partial}{\partial x}\frac{\tau_x}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho U^3+3P_xU\right)-3f_xU\right)+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\tau_y}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho UV^2+P_yU\right)-f_yU\right)+\\ +\frac{\partial}{\partial x}\frac{\tau_x}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho U^2V+P_yV\right)-f_yV\right)+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\tau_y}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho U^2V+P_xV\right)-f_xV\right),\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho V}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho V^2+P_y\right)-f_y+\frac{\partial}{\partial x}(\rho UV)=\\ =\frac{\partial}{\partial x}\frac{\tau_x}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho U^2V+P_xV\right)-f_xV\right)+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\tau_y}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho V^3+3P_yV\right)-3f_yV\right)+\\ +\frac{\partial}{\partial x}\frac{\tau_x}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho V^2U+P_yU\right)-f_yU\right)+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\tau_y}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho V^2U+P_xU\right)-f_xU\right).\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь использованы следующие обозначения: ρ — плотность транспортного потока; U — продольная, вдоль дороги, компонента скорости; V — поперечная компонента скорости (скорость перестроения); $P=\lambda\rho^\beta/\beta$ — аналог давления; $f=a\cdot\rho$ — сила ускорения или замедления, где $a=(U_{eq}-U)/T$ — ускорение.

Равновесная продольная скорость вычисляется согласно параболической фундаментальной диаграмме:

$$U_{eq}=U_{free}(1-\rho/\rho_{jam})/T.$$

$T=t_0(1+r\rho/(\rho_{jam}-r\rho))$ можно рассматривать как время релаксации. Уравнения также дополняет ряд феноменологических констант.

Приведенная система содержит уравнение для поперечной скорости, аналогичное уравнению продольной скорости. Однако проведенные тестовые расчеты показали, что более удобным является использование вместо дифференциального уравнения (3) алгебраического уравнения:

$$V_1=k_u\rho\frac{\partial U}{\partial y}-k_\rho U\frac{\partial\rho}{\partial y}+k_{des}\frac{U^2}{(x_{des}-x)^2}(y_{des}-y), \tag{4}$$

где первое слагаемое соответствует желанию водителя ехать с большей скоростью, второе — желанию ехать по полосе с меньшей плотностью и третье — достичь определенной цели. Здесь k_u, k_ρ, k_{des} — константы; (x_{des}, y_{des}) — координаты цели водителя. Использование уравнения (4) упрощает процесс решения и повышает устойчивость разностной схемы.

Следует отметить, что в некоторых случаях неоднородной, но не очень сложной трассы качественно верные результаты можно получить при помощи одномерной КГД модели [60, 62]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\tau}{2}\frac{\partial\left(\frac{Q^2}{\rho}+P\right)}{\partial x}+F_\rho, \tag{5}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{Q^2}{\rho}+P\right]=f+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\tau}{2}\frac{\partial\left(\frac{Q^3}{\rho^2}+P\frac{Q}{\rho}\right)}{\partial x}+F_U. \tag{6}$$

В этих уравнениях, записанных в консервативной форме, транспортный поток: $Q=\rho\cdot U$. Источниковые члены в правой части F_ρ и F_U равны нулю на однородной дороге и не равны нулю, если есть въезды или съезды с основной дороги или есть изменение числа полос.

Предлагаемые модели численно реализуются с помощью конечно-разностных схем. Система аппроксимируется явными разностными схемами второго порядка по пространству. Отметим, что структура явного вычислительного алгоритма хорошо ложится на архитектуру многопроцессорных вычислительных систем с распределённой памятью и при необходимости выполнения большого объема вычислений может быть распараллелена с достаточно высокой эффективностью [62, 63].

Вторая модель, предложенная авторами ранее и являющаяся перспективной для реализации в интерактивной программе, — это многополосная модель, использующая идеологию клеточных автоматов. Подробное описание этой модели изложено в работах [2, 60, 64]. Здесь опишем ее кратко.

Расчетная область представляет собой двумерную решетку. Количество ячеек в поперечном направлении соответствует количеству полос на рассматриваемом участке магистрали, а ширина ячейки равна ширине реальной дорожной полосы (рис. 1).

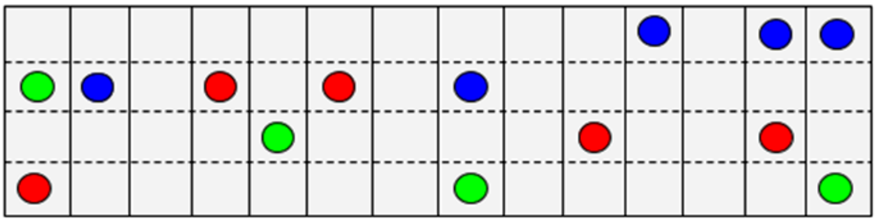

Рис. 1. Расчетная область в модели CA

Количество ячеек вдоль дороги зависит от конкретной задачи с учетом того, что продольный размер ячейки равен средней длине автомобиля плюс ширина зазора между автомобилями при максимальной плотности потока, то есть, в «пробке». В литературе приводится длина 7,5 м как стандартная величина ячейки для легковых автомобилей. Время в таких моделях дискретно, система обновляется на каждом шаге по времени. При стандартных расчетах этот шаг равен 1 с, хотя в более развитых и реалистичных моделях эта величина может меняться. В каждый момент времени ячейки решетки могут находиться в одном из двух состояний: ячейка либо занята (что соответствует присутствию в ней автомобиля), либо пуста. На рис. 1 показано состояние расчетной области в некоторый момент времени. Разный цвет элементов движения соответствует разным выбранным целям. В следующий момент времени происходит обновление состояния ячеек в два этапа по определенным правилам.

На первом этапе каждый водитель проверяет, хочет ли он перестроиться в соседнюю полосу и имеет ли для этого возможность. Он перестраивается, если:

– это необходимо для достижения его цели (например, подъехать к выезду с дороги) или необходимо объехать препятствие;

– он получает преимущество после перестроения — едет с большей скоростью или с меньшей плотностью;

– для перестроения есть возможность — перестроение разрешено и соседняя ячейка пуста;

– выполнены условия безопасности.

После выбранного решения относительно перестроения и выполненного в соответствии с этим действия происходит движение вперед по выбранной полосе по правилам однополосного движения Нагеля-Шрекенберга [28], приведённым в разделе 1 данной статьи.

Следует отметить, что здесь описана первоначальная, простейшая версия стратегии перестроения. В более сложных модификациях модели [65] правила перестроения зависят от типа дорожного элемента (X-образный перекрёсток, T-образный перекрёсток, разворот, участок с сужением/расширением и т. д.), дорожных знаков и разметок. Учитываются также различные водительские стратегии и поведенческие аспекты. В модель введены понятия «агрессивный», «осторожный», «вежливый» водитель. Процентные соотношения того или иного типа водителей могут меняться в процессе расчета. Также разработан алгоритм «медленный старт».

Для реализации модели разработан программный комплекс CAM-2D [66], имеющий помимо вычислительных модулей интегрированный web-интерфейс и модуль визуализации. Параллельная версия предназначена для расчётов дорожных сетей на CPU многопроцессорных систем с использованием технологии MPI [62, 63].

В статье представлен обзор работ в области моделирования транспортных потоков, охватывающий широкий спектр подходов — макро- и микроскопические модели, а также модели клеточных автоматов. Отдельное внимание уделено оригинальным разработкам авторов статьи как в области макроскопического, так и в области микроскопического (а именно, клеточных автоматов) моделирования. Обе разработки имеют свои преимущества, такие, например, как возможность моделировать движение автомобильного транспорта с учётом реальной геометрии дороги, даже в случае макромоделирования. Модели неоднократно апробированны в расчётах и, кроме того, допускают эффективную реализацию на суперкомпьютерах, так как обладают внутренним параллелизмом. Последнее свойство является особенным преимуществом в условиях моделирования движения на транспортных сетях многомиллионных мегаполисов.

Список литературы

1. Сухинова А.Б., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н. и др. Двумерная макроскопическая модель транспортных потоков. *Математическое моделирование*. 2009;21(2):118–126.

2. Трапезникова М.А., Фурманов И.Р., Чурбанова Н.Г. и др. Моделирование многополосного движения автотранспорта на основе теории клеточных автоматов. *Математическое моделирование*. 2011;23(6):133–146.

3. Lighthill M.J., Witham G.B. On kinematic waves (Part II): A theory of traffic flow on long crowded roads. *In Proceedings of Royal Society*. Ser. A. 1955;229:317–345.

4. Treiber M., Kesting A. *Traffic flow dynamics. Data, models and simulation*. Berlin-Heidelberg: Springer; 2013. 503 p.

5. Payne H. Models of freeway traffic and control. In: Bekey, G.A. (ed.) *Mathematical Models of Public Systems*. Simulation Council, La Jolla, CA. 1971;1:51–61.

6. Kerner B., Konhäuser P. Structure and parameters of clusters in traffic flow. *Physical Review E*. 1994;50:54–83.

7. Aw A., Rascle M. Resurrection of “second order models” of traffic flow. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2000;60:916–938.

8. Zhang H.M. A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior. *Transportation Research*. B. 2002;36(3):275–290.

9. Gazis D.C., Herman, R., Rothery R.W. Nonlinear follow-the-leader models of traffic flow. *Operations Research*. 1961;9(4):545–567.

10. Newell G.F. A simplified car-following theory: a lower order model. *Transportation Research*. Part B: Methodological. 2002;36:195–205.

11. Pipes L.A. An operational analysis of traffic dynamics. *Journal of Applied Physics*. 1954;24(3):274–281.

12. Treiber M., Hennecke A., Helbing D. Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations. *Physical Review E*. 2000;62(2):1805–1824.

13. Progogine I., Andrews, F.C. A Boltzmann like approach for traffic flow. *Operations Research*. 1960;8(6):789–797.

14. Prigogine I., Herman R. *Kinetic Theory of Vehicular Traffic*. Amsterdam, Elsevier; 1971.

15. Paveri-Fontana S.L. On Boltzmann like treatments for traffic flow. *Transportation Research*. 1975;9:225–235.

16. Helbing D., Treiber M. Enskog equations for traffic flow evaluated up to Navier-Stokes order. *Granular Matter*. 1998;1:21–31.

17. Treiber M., Hennecke A., Helbing D. Derivation, properties, and simulation of a gas-kinetic-based, non-local traffic model. *Physical Review E*. 1999;59(1):239–253.

18. Gipps P.G. A behavioural car-following model for computer simulation. *Transportation Research.* Part B: Methodological. 1981;15(2):105–111.

19. Kesting A., Treiber M., Helbing D. Enhanced Intelligent Driver Model to access the impact of driving strategies on traffic capacity simulations. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. 2010;368:4585–4605.

20. Su Z., Liu S., Deng W., et al. Transportation dynamics on networks of heterogeneous mobile agents. *Physics Letters A*, 2019;523:1379–1386.

21. Yao W., Jia N., Zhong S., et al. Best response game of traffic on road network of non-signalized intersections. *Physica A: Statistical mechanics and its applications*. 2018;490:P.386–401.

22. Dong P., Wang X., Yun L., et al. Research on the characteristics of mixed traffic flow based on an improved bicycle model simulation. *Simulation, SAGE Publications*. 2018;94(5):451–462.

23. Zeng J.W., Qian Y.S., Wang H., et al. Modeling and simulation of traffic flow under different combination setting of taxi stop and bus stop. *Modern Physics.* Letters B. 2018;32(25):1850301.

24. Zhou J., Zhang H.L., Wang C.P., et al. A new lattice model for single-lane traffic flow with the consideration of driver’s memory during a period of time. *International Journal of Modern Physics C*. 2017;28(7):1750086.

25. Jin D., Zhou J., Zhang H.L., et al. Lattice hydrodynamic model for traffic flow on curved road with passing. *Nonliear Dynamics*. 2017;89(1):107–124.

26. Kaur R., Sharma S. Analysis of driver’s characteristics on a curved road in lattice model. *Physica A: Statstical Mechanics and its Applications.* 2017;471:59–67.

27. The Wolfram atlas of simple programs [Электронный ресурс]. URL: http://atlas.wolfram.com/ (дата обращения: 18.05.2023).

28. Nagel K., Schreckenberg M. A cellular automaton model for freeway traffic. *Journal de Physique I France*. 1992:2221–2229.

29. Qi L., Zheng Z., Gang L. A cellular automation model for ship traffic flow in waterways. *Physica A: Statistical Mechanics And Its Applications*. 2017;471:705–717.

30. Chen J., Jiang R., Lin L. Assigning on ramp flows to maximize capacity of highway with two on-ramps and one off-ramp in between. *Physica A: Statistical Mechanics And Its Applications*. 2017;465:347–357.

31. Guzman H.A., Larraga M.E., Alvarez-Icaza L., et al. A cellular automata model for traffic flow based on kinetics theory, vehicles capabilities and driver reactions. *Physica A: Statistical Mechanics And Its Applications*. 2018;491:528–548.

32. Бугаев А.С., Буслаев А.П., Козлов В.В. и др. Обобщенная транспортно-логистическая модель как класс динамических систем. *Математическое моделирование.* 2015;27(12):65–87.

33. Kerner B.S. *The Physics of Traffic*. Berlin: Springer; 2004.

34. Kerner B.S. *Introduction to Modern Traffic Flow Theory and Control*. Berlin: Springer; 2009.

35. Kerner B.S., Klenov S.L., Wolf D.E. Cellular automata approach to three-phase traffic theory. *Journal Physics A: Mathematical and General*. 2002;35:9971–10013.

36. Jiang R., Wu Q.S. Spatial-temporal patterns at an isolated on-ramp in a new cellular automata model based on three-phase traffic theory. *Journal Physics A: Mathematical and General*. 2004;37:8197–8213.

37. Kerner B., Klenov S., Schreckenberg M. Simple cellular automaton model for traffic breakdown, highway capacity, and synchronized flow. *Physical Review E*. 2011;84:046110.

38. Kerner B., Klenov S., Hermanns G., et al. Effect of driver over-acceleration on traffic breakdown in three-phase cellular automaton traffic flow models. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2013;392(18):4083–4105.

39. Kerner B.S., Klenov S.L. Deterministic microscopic three-phase traffic flow models. *Journal Physics A: Mathematical and General.* 2006;39:1775.

40. Hoogendoorn S., Van Lint J.W.C., Knoop V.L. *Macroscopic modeling framework unifying kinematic wave modeling and three-phase traffic theory*. Trans. Res. Rec. 2008;2088(1):102–108.

41. Laval J.A. *Lane-changing in traffic streams.* In: Traffic and Granular Flow' 05. Proc. of the International Workshop, ed. by A. Schadschneider, et al. Berlin: Springer; 2007. pp. 521–526.

42. Tian J., et al. Improved 2D intelligent driver model in the framework of three-phase traffic theory simulating synchronized flow and concave growth pattern of traffic oscillations. *Transportation Research*. 2016;41(F):55–65.

43. Xue Y., et al. Long-range correlations in vehicular traffic flow studied in the framework of Kerner's three-phase theory based on rescaled range analysis. *Communications in Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. 2015;22:285–296.

44. Qian Y.S., Feng X., Zeng J.W. A cellular automata traffic flow model for three phase theory. *Physica A: Statistical Mechanics And Its Applications*. 2017;479:509–52.

45. Морозов И.И., Гасников А.В., Тарасов В.Н. и др. Численное исследование транспортных потоков на основе гидродинамических моделей. *Компьютерные исследования и моделирование*. 2011;3(4): 389–412.

46. Kholodov Y., Alekseenko A., Kazorin V., et al. Generalization second order macroscopic traffic models via relative velocity of the congestion propagation. *Mathematics*. 2021;9(16):2001.

47. Kubentayeva M., Gasnikov A. Finding equilibria in the traffic assignment problem with primal-dual gradient methods for stable dynamics model and Beckmann model. *Mathematics*. 2021;9(11):1217.

48. Киселев А.Б., Кокорева А.В., Никитин В.Ф. и др. *Математическое моделирование движения автотранспортных потоков методами механики сплошной среды. Исследование влияния искусственных дорожных неровностей на пропускную способность участка дороги. Современные проблемы математики и механики*. Прикладные исследования, под ред. В.В. Александрова и В.Б. Кудрявцева. Москва: Изд-во МГУ. 2009;1:311–322.

49. Smirnov N., Kiselev A., Nikitin V., et al. Hydrodynamic traffic flow models and its application to studying traffic control effectiveness. *WSEAS Transactions on Fluid Mechanics*. 2014;9:178–186.

50. Дивеев А.И., Софронова Е.А. Задача оптимального управления потоками транспорта в сети городских дорог. *Вопросы теории безопасности и устойчивости*. 2018;20:89-99.

51. *Fundamentals of Traffic Simulation*. In: International Series in Operations Research & Management Science. J. Barcelo (Ed.). Springer. 2010;145. 452 p.

52. PTV Vision Traffic Suite [Электронный ресурс]. URL: https://ptv-vision.ru/ (дата обращения: 18.05.2023).

53. Aimsun: Simulation and AI for future mobility [Электронный ресурс]. URL: https://www.aimsun.com/ (дата обращения: 18.05.2023).

54. MATSim: Multi-Agent Transport Simulation [Электронный ресурс]. URL: https://www.matsim.org/ (дата обращения: 18.05.2023).

55. Horni A., Nagel K., Axhausen K.W. (Eds.) *The Multi-Agent Transport Simulation MATSim*. London: Ubiquity Press; 2016.

56. SUMO: Simulation of Urban MObility [Электронный ресурс]. URL: https://www.eclipse.org/sumo/ (дата обращения: 18.05.2023).

57. Lopez P.A., et al. *Microscopic Traffic Simulation using SUMO*. In: 21st Int. Conf. on Intelligent Transportation Systems (ITSC). 2018:2575–2582.

58. Bentley Systems [Электронный ресурс]. URL: https://www.bentley.com (дата обращения: 18.05.2023).

59. Четверушкин Б.Н. *Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений*. Москва: МАКС Пресс; 2004. 332 с.

60. Churbanova N.G.; Chechina A.A.; Trapeznikova M.A. Simulation of traffic flows on road segments using cellular automata theory and quasigasdynamic approach. *Mathematica Montisnigri*. 2019;XLVI:72–90.

61. Трапезникова М.А., Чечина А.А., Чурбанова Н.Г. и др. Математическое моделирование потоков автотранспорта на основе макро- и микроскопических подходов. *Вестник АГТУ*, Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика. 2014;1:130–139.

62. Соколов П.А., Школина И.В., Трапезникова М.А. и др. Моделирование на суперкомпьютерах движения автотранспорта на основе КГД системы уравнений. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2019;7:159–169.

63. Chetverushkin B., Chechina A., Churbanova N., et al. Development of parallel algorithms for intelligent transportation systems. *Mathematics*. 2022;10(4):643.

64. Трапезникова М.А., Чечина А.А., Чурбанова Н.Г. Двумерная модель клеточных автоматов для описания динамики транспортных потоков на элементах улично-дорожной сети. *Математическое моделирование*. 2017;29(9):110–120.

65. Chechina A., Churbanova N., Trapeznikova M. Driver behaviour algorithms for the cellular automata-based mathematical model of traffic flows. *EPJ Web of Conferences*. 2021;248:02002.

66. Чечина А.А., Герман М.С., Ермаков А.В. и др. Моделирование и визуализация потоков автотранспорта на элементах улично-дорожной сети с использованием комплекса программ CAM-2D. *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша.* 2016;124. 17 с.

References

1. Sukhinova AB, Trapeznikova MA, Chetverushkin BN, et al. Two-dimensional macroscopic model of traffic flows. *Mathematical modeling*. 2009;21(2):118–126. (In Russ.).

2. Trapeznikova MA, Furmanov IR, Churbanova NG, etc. Modeling of multi-lane vehicle traffic based on the theory of cellular automata. *Mathematical modeling*. 2011;23(6):133–146. (In Russ.).

3. Lighthill MJ, Witham GB. On kinematic waves (Part II): A theory of traffic flow on long crowded roads. *In Proceedings of Royal Society*. Ser. A. 1955;229:317–345.

4. Treiber M, Kesting A. *Traffic flow dynamics. Data, models and simulation*. Berlin-Heidelberg: Springer; 2013. 503 p.

5. Payne H. Models of freeway traffic and control. In: Bekey, G.A. (ed.) *Mathematical Models of Public Systems. Simulation Council, La Jolla, CA*. 1971;1:51–61.

6. Kerner B, Konhäuser P. Structure and parameters of clusters in traffic flow. *Physical Review E*. 1994;50:54–83.

7. Aw A, Rascle M. Resurrection of "second order models" of traffic flow. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2000;60:916–938.

8. Zhang HM. A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior. *Transportation Research*. B. 2002;36(3):275–290.

9. Gazis DC, Herman R, Rothery RW. Nonlinear follow-the-leader models of traffic flow. *Operations Research*. 1961;9(4):545–567.

10. Newell GF. A simplified car-following theory: a lower order model. *Transportation Research*. *Part B: Methodological.* 2002;36:195–205.

11. Pipes LA. An operational analysis of traffic dynamics. *Journal of Applied Physics.* 1954;24(3):274–281.

12. Treiber M, Hennecke A, Helbing D. Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations. *Physical Review E*. 2000;62(2):1805–1824.

13. Progogine I, Andrews FC. A Boltzmann like approach for traffic flow. *Operations Research.* 1960;8(6):789–797.

14. Prigogine I, Herman R. *Kinetic Theory of Vehicular Traffic*. Amsterdam, Elsevier; 1971.

15. Paveri-Fontana S.L. On Boltzmann like treatments for traffic flow. *Transportation Research*. 1975;9:225–235.

16. Helbing D., Treiber M. Enskog equations for traffic flow evaluated up to Navier-Stokes order. *Granular Matter*. 1998;1:21–31.

17. Treiber M, Hennecke A, Helbing D. Derivation, properties, and simulation of a gas-kinetic-based, non-local traffic model. *Physical Review E*. 1999;59(1):239–253.

18. Gipps PG. A behavioural car-following model for computer simulation. Transportation *Research Part B: Methodological.* 1981;15(2):105–111.

19. Kesting A, Treiber M, Helbing D. Enhanced Intelligent Driver Model to access the impact of driving strategies on traffic capacity simulations. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. 2010;368:4585–4605.

20. Su Z, Liu S, Deng W, et al. Transportation dynamics on networks of heterogeneous mobile agents. *Physics Letters A*. 2019;523:1379–1386.

21. Yao W, Jia N, Zhong S, et al. Best response game of traffic on road network of non-signalized intersections. *Physica A: Statistical mechanics and its applications*. 2018;490:P.386–401.

22. Dong P, Wang X, Yun L, et al. Research on the characteristics of mixed traffic flow based on an improved bicycle model simulation. *Simulation, SAGE Publications*. 2018;94(5):451–462.

23. Zeng JW, Qian YS, Wang H, et al. Modeling and simulation of traffic flow under different combination setting of taxi stop and bus stop. *Modern Physics Letters B*. 2018;32(25):1850301.

24. Zhou J, Zhang HL, Wang CP, et al. A new lattice model for single-lane traffic flow with the consideration of driver's memory during a period of time. *International Journal of Modern Physics C*. 2017;28(7):1750086.

25. Jin D, Zhou J, Zhang HL, et al. Lattice hydrodynamic model for traffic flow on curved road with passing. *Nonliear Dynamics*. 2017;89(1):107–124.

26. Kaur R, Sharma S. Analysis of driver's characteristics on a curved road in lattice model. *Physica A: Statstical Mechanics and its Applications.* 2017;471:59–67.

27. The Wolfram atlas of simple programs [Electronic resource]. URL: http://atlas.wolfram.com/ (date of application:

18.05.2023).

28. Nagel K, Schreckenberg M. A cellular automaton model for freeway traffic. *Journal de Physique I France*. 1992:2221–2229.

29. Qi L, Zheng Z, Gang L. A cellular automation model for ship traffic flow in waterways. *Physica A: Statistical Mechanics And Its Applications*. 2017;471:705–717.

30. Chen J, Jiang R, Lin L. Assigning on ramp flows to maximize capacity of highway with two on-ramps and one off-ramp in between. *Physica A: Statistical Mechanics And Its Applications*. 2017;465:347–357.

31. Guzman H.A., Larraga M.E., Alvarez-Icaza L., et al. A cellular automata model for traffic flow based on kinetics theory, vehicles capabilities and driver reactions. *Physica A: Statistical Mechanics And Its Applications*. 2018;491:528–548.

32. Bugaev A.S., Buslaev A.P., Kozlov V.V. et al. Generalized transport and logistics model as a class of dynamic systems. *Mathematical modeling*. 2015;27(12):65–87. (In Russ.).

33. Kerner BS. *The Physics of Traffic*. Berlin: Springer; 2004.

34. Kerner BS. *Introduction to Modern Traffic Flow Theory and Control*. Berlin: Springer; 2009.

35. Kerner BS, Klenov SL, Wolf DE. Cellular automata approach to three-phase traffic theory. *Journal Physics A: Mathematical and General*. 2002;35:9971–10013.

36. Jiang R, Wu QS. Spatial-temporal patterns at an isolated on-ramp in a new cellular automata model based on three-phase traffic theory. *Journal Physics A: Mathematical and General.* 2004;37:8197–8213.

37. Kerner B, Klenov S, Schreckenberg M. Simple cellular automaton model for traffic breakdown, highway capacity, and synchronized flow. *Physical Review E*. 2011;84:046110.

38. Kerner B, Klenov S, Hermanns G, et al. Effect of driver over-acceleration on traffic breakdown in three-phase cellular automaton traffic flow models. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2013;392(18):4083–4105.

39. Kerner B.S., Klenov S.L. Deterministic microscopic three-phase traffic flow models. *Journal Physics A: Mathematical and General.* 2006;39:1775.

40. Hoogendoorn S, Van Lint JWC, Knoop VL. Macroscopic modeling framework unifying kinematic wave modeling and three-phase traffic theory. *Transportation Research Record*. 2008;2088(1):102–108.

41. Laval JA. *Lane-changing in traffic streams.* In: Traffic and Granular Flow' 05. Proceedings of the International Workshop, ed. by A. Schadschneider, et al. Berlin: Springer; 2007. pp. 521–526.

42. Tian J, et al. Improved 2D intelligent driver model in the framework of three-phase traffic theory simulating synchronized flow and concave growth pattern of traffic oscillations. *Transportation Research*. 2016;41(F):55–65.

43. Xue Y, et al. Long-range correlations in vehicular traffic flow studied in the framework of Kerner's three-phase theory based on rescaled range analysis. *Communications in Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. 2015;22:285–296.

44. Qian YS, Feng X, Zeng JW. A cellular automata traffic flow model for three phase theory. *Physica A: Statistical Mechanics And Its Applications*. 2017;479:509–52.

45. Morozov II, Gasnikov AV, Tarasov VN, et al. Numerical study of transport flows based on hydrodynamic models. *Computer research and modeling.* 2011;3(4): 389–412. (In Russ.).

46. Kholodov Y., Alekseenko A., Kazorin V., et al. Generalization second order macroscopic traffic models via relative velocity of the congestion propagation. *Mathematics*. 2021;9(16):2001.

47. Kubentayeva M, Gasnikov A. Finding equilibria in the traffic assignment problem with primal-dual gradient methods for stable dynamics model and Beckmann model. *Mathematics*. 2021;9(11):1217.

48. Kiselev AB, Kokoreva AV, Nikitin VF, etc. Mathematical modeling of traffic flows by methods of continuum mechanics. Investigation of the influence of artificial road irregularities on the capacity of a road section. *Modern problems of mathematics and mechanics.* Applied Research, edited by VV Alexandrov and VB Kudryavtsev. Moscow: Publishing House of Moscow State University; 2009;1:311–322. (In Russ.).

49. Smirnov N, Kiselev A, Nikitin V, et al. Hydrodynamic traffic flow models and its application to studying traffic control effectiveness. *WSEAS Transactions on Fluid Mechanics*. 2014;9:178–186.

50. Diveev AI, Sofronova EA. The problem of optimal control of traffic flows in the urban road network. *Questions of the theory of security and stability.* 2018;20:89–99. (In Russ.).

51. *Fundamentals of Traffic Simulation*. In: International Series in Operations Research & Management Science. J Barcelo (Ed.). Springer. 2010;145. 452 p.

52. PTV Vision Traffic Suite [Electronic resource]. URL: https://ptv-vision.ru/ (date of application: 18.05.2023).

53. Aimsun: Simulation and AI for future mobility [Electronic resource]. URL: https://www.aimsun.com/ (date of application: 18.05.2023).

54. *MATSim: Multi-Agent Transport Simulation* [Electronic resource]. URL: https://www.matsim.org/ (date of application: 18.05.2023).

55. Horni A, Nagel K, Axhausen KW (Eds.) *The Multi-Agent Transport Simulation MATSim*. London: Ubiquity Press; 2016.

56. *SUMO: Simulation of Urban MObility* [Electronic resource]. URL: https://www.eclipse.org/sumo/ (date of application: 18.05.2023).

57. Lopez PA, et al. Microscopic Traffic Simulation using SUMO. *21st international conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*. 2018:2575–2582.

58. *Bentley Systems* [Electronic resource]. URL: https://www.bentley.com (date of application: 18.05.2023).

59. Chetverushkin BN. *Kinetic schemes and quasi-gas-dynamic system of equations*. Moscow: MAKS Press; 2004. 332 p. (In Russ.).

60. Churbanova NG, Chechina AA, Trapeznikova MA. Simulation of traffic flows on road segments using cellular automata theory and quasigasdynamic approach. *Mathematica Montisnigri*. 2019;XLVI:72–90.

61. Trapeznikova MA, Chechina AA, Churbanova NG, et al. Mathematical modeling of traffic flows based on macro- and microscopic approaches. *Bulletin of ASTU, Ser.: Management, Computer engineering and Computer Science.* 2014;1:130–139. (In Russ.).

62. Sokolov PA, Shkolina IV, Trapeznikova MA, et al. Simulation of vehicle traffic on supercomputers based on the SRG system of equations. *News of the SFU. Technical sciences*. 2019;7:159–169. (In Russ.).

63. Chetverushkin B, Chechina A, Churbanova N, et al. Development of parallel algorithms for intelligent transportation systems. *Mathematics*. 2022;10(4):643.

64. Trapeznikova MA, Chechina AA, Churbanova NG. Two-dimensional model of cellular automata for describing the dynamics of traffic flows on the elements of the road network. *Mathematical modeling*. 2017;29(9):110–120. (In Russ.).

65. Chechina A, Churbanova N, Trapeznikova M. Driver behaviour algorithms for the cellular automata-based mathematical model of traffic flows. *EPJ Web of Conferences*. 2021;248:02002.

66. Chechina AA, Herman MS, Ermakov AV, et al. Modeling and visualization of traffic flows on the elements of the road network using the SAM-2D software package. *Preprints of the IAM named after M. V. Keldysh*. 2016;124. 17 p. (In Russ.).

Об авторах:

Трапезникова Марина Александровна, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (РФ, 125047, Москва, Миусская пл., 4), кандидат физико-математических наук, ORCID, mtrapez@yandex.ru

Чечина Антонина Александровна, младший научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (РФ, 125047, Москва, Миусская пл., 4), кандидат физико-математических наук, ORCID, chechina.antonina@yandex.ru

Чурбанова Наталья Геннадьевна, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (РФ, 125047, Москва, Миусская пл., 4), кандидат физико-математических наук, ORCID, nataimamod@mail.ru

Поступила в редакцию 11.04.2023.
Поступила после рецензирования 16.05.2023.
Принята к публикации 17.05.2023.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Marina A Trapeznikova, Senior Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS (4, Miusskaya Sq., Moscow, 125047, RF), Cand.Sci. (Phys.-Math.), ORCID, mtrapez@yandex.ru

Antonina A Chechina, Junior Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS (4, Miusskaya Sq., Moscow, 125047, RF), Cand.Sci. (Phys.-Math.), ORCID, chechina.antonina@yandex.ru

Natalia G Churbanova, Senior Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS (4, Miusskaya Sq., Moscow, 125047, RF), Cand.Sci. (Phys.-Math.), ORCID, nataimamod@mail.ru

Received 11.04.2023.
Revised 16.05.2023.
Accepted 17.05.2023.

Conflict of interest statement

The authors does not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.