МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
MATHEMATICAL MODELING

УДК 519.6
https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-73-80

Научная статья

Существование и единственность решения начально-краевой задачи транспорта многокомпонентных наносов прибрежных морских систем

В.В. Сидорякина

Таганрогский институт им. А. П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), Российская Федерация, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48

cvv9@mail.ru

Аннотация

Введение. Настоящая работа посвящена исследованию нестационарной двумерной модели транспорта наносов в прибрежных морских системах. Модель учитывает сложный многокомпонентный состав наносов; действие силы тяжести и тангенциального напряжения, вызванного воздействием волн; турбулентный обмен; динамически изменяемый рельеф дна и другие факторы. Целью работы являлось проведение аналитического исследования условий существования и единственности начально-краевой задачи, соответствующей указанной модели.

Материалы и методы. В работе на временной равномерной сетке выполнена линеаризация начально-краевой задачи, при которой нелинейные коэффициенты квазилинейного параболического уравнения берутся с «запаздыванием» на один шаг сетки. Тем самым строится цепочка задач, связанных по начальным условиям и финальным решениям. Привлекая методы математического и функционального анализа, а также методы решения дифференциальных уравнений, проводится исследование существования и единственности задач, входящих в данную цепочку, а потому и в целом исходной задачи.

Результаты исследования. На основе анализа существующих результатов математического моделирования гидродинамических процессов ранее была исследована нелинейная пространственно-двумерная модель транспорта наносов в случае донных отложений, состоящих из частиц, имеющих одинаковые характерные размеры и плотность (однокомпонентный состав). В настоящей работе предыдущие результаты исследования распространены на случай наносов многокомпонентного состава, а именно определены условия существования и единственности решения начально-краевой задачи, соответствующей рассматриваемой модели.

Обсуждение и заключения. Модель транспорта многокомпонентных наносов может быть полезна для прогноза распространения загрязняющих веществ, а также при исследовании динамики изменения рельефа дна как при антропогенном воздействии, так и в силу естественно протекающих природных процессов в морских системах.

Ключевые слова: транспорт многокомпонентных наносов, прибрежная морская система, начально-краевая задача, существование решения, единственность решения.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No. 23-21-00509, https://rscf.ru/project/23-21-00509

Для цитирования. Сидорякина В.В. Существование и единственность решения начально-краевой задачи транспорта многокомпонентных наносов прибрежных морских систем. *Computational Mathematics and Information Technologies.* 2023;7(2):73–80. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-73-80

Original article

Existence and Uniqueness of the Initial-Boundary Value Problem Solution of Multicomponent Sediments Transport in Coastal Marine Systems

Valentina V Sidoryakina

Taganrog Institute named after A. P. Chekhov (branch) of RSUE, 48, Initiative St., Taganrog, Russian Federation

cvv9@mail.ru

Abstract

Introduction. This work is devoted to the study of a non-stationary two-dimensional model of sediment transport in coastal marine systems. The model takes into account the complex multi-fractional composition of sediments, the gravity effect and tangential stress caused by the impact of waves, turbulent exchange, dynamically changing bottom topography, and other factors. The aim of the work was to carry out an analytical study of the conditions for the initial-boundary value problem existence and uniqueness corresponding to the specified model.

Materials and Methods. Linearization of the initial-boundary value problem is performed on a temporary uniform grid. The nonlinear coefficients of a quasilinear parabolic equation are taken with a "delay" by one grid step. Thus, a chain of correlated by initial conditions is the final solutions of problems is built. The study of the existence and uniqueness of the problems included in this chain, and therefore the original problem as a whole, is carried out involving the methods of mathematical and functional analysis, as well as methods for solving differential equations.

Results. Earlier, the authors investigated the existence and uniqueness of the initial-boundary value problem of the transport of sediments of a single-component composition. In the present work, the result obtained is extended to the case of multi-fractional sediments.

Discussion and Conclusions. The non-linear spatial two-dimensional model of sediment transport was previously investigated by the team of authors in the case of bottom sediments consisting of particles having the same characteristic dimensions and density (single-component composition) based on the analysis of the existing results of mathematical modeling of hydrodynamic processes. In this paper, the previous results of the study are extended to the case of sediments of a multicomponent composition, namely, the conditions for the existence and uniqueness of the solution of the initial-boundary value problem corresponding to the considered model are determined.

Keywords: multicomponent sediments' transport, coastal marine system, initial-boundary value problem, solution existence, solution uniqueness.

Funding information. The study was supported by the Russian Science Foundation grant no. 23-21-00509. https://rscf.ru/project/23-21-00509

For citation. Sidoryakina VV. Existence and uniqueness of the solution of the initial-boundary value problem of transport of multicomponent sediments of coastal marine systems. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):73–80. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-73-80

Введение. При решении ряда практических задач, связанных с экологической оценкой состояния водного объекта, необходимо использовать комплекс моделей различных по пространственным и временным масштабам [1–6]. В последние десятилетия активное развитие получили исследования математических моделей гидрофизических процессов, которые характеризуются множеством параметров [7–14]. В настоящей работе рассматривается 2D математическая модель для расчета транспорта многокомпонентных наносов применительно к прибрежным морским системам. Совокупность уравнений конвекции-диффузии для каждой компоненты наносов (или фракции) формирует данную математическую модель с учетом турбулентного обмена, действия силы тяжести, тангенциального напряжения, динамически изменяемого рельефа дна и других факторов [15–17].

В статье представлены результаты проведения теоретического исследования существования и единственности начально-краевой задачи, базирующейся на построенной модели. В соответствии с поставленной целью рассматривается начально-краевая задача для квазилинейного уравнения параболического типа, для которой методами математического и функционального анализа, а также методами решения дифференциальных уравнений определены достаточные условия существования и единственности решения.

Материалы и методы

1. Начально-краевая задача транспорта многокомпонентных наносов. Запишем уравнение транспорта многокомпонентных наносов [16, 17]:

$$(1-\varepsilon_r)\frac{\partial H}{\partial t}+\operatorname{div}\left(V_r k_r \vec{\tau}_b\right)=\operatorname{div}\left(V_r k_r \frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\operatorname{grad}H\right)+\frac{w_{g,r}}{\rho_r}c_r,\quad r=\overline{1,R}. \tag{1}$$

Здесь $H = H(x, y, t)$ — глубина водоема; ε_r — пористость r-ой компоненты в составе наносов; V_r — объемная доля r-ой компоненты; $\vec{\tau}_b$ — вектор касательного тангенциального напряжения на дне водоема; $\tau_{bc,r}$ — критическое значение тангенциального напряжения для r-ой компоненты наносов, $\tau_{bc,r} = a_r \sin\varphi_0$, a_r — некоторый коэффициент для r-ой компоненты наносов, φ_0 — угол естественного откоса грунта в водоеме; $w_{g,r}$ — гидравлическая крупность или скорость осаждения r-ой компоненты; ρ_r — плотность r-ой компоненты донного материала; $k_r = k_r(H, x, y, t)$ — нелинейный коэффициент, определяемый соотношением:

$$k_r = \frac{A\tilde{\omega}d_r}{((\rho_r - \rho_0)gd_r)^{\beta}} \left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\operatorname{grad}H \right|^{\beta-1},$$

где $\tilde{\omega}$ — усредненная частота волн; d_r — характерный размер r-ой компоненты; g — ускорение силы тяжести; ρ_0 — плотность водной среды; A и β — безразмерные постоянные.

Пусть процесс транспорта наносов происходит в области D, D, $D(x, y) = \{0 < x < L_x, 0 < y < L_y\}$ с границей S, представляющей кусочно-гладкую линию. Считаем, что трехмерный цилиндр $Ц_T = D \times (0, T)$ высоты T с основанием S есть область задания уравнения (1). Граница этого цилиндра состоит из боковой поверхности $S \times [0, T]$ и двух оснований — $\overline{D} \times \{0\}$ и $\overline{D} \times \{T\}$.

Уравнение (1) рассматривается с начальным условием:

$$H(x, y, 0) = H_0(x, y), \tag{2.1}$$

$$H_0(x, y) \in C^2(D) \cap C(\overline{D}), \tag{2.2}$$

$$\operatorname{grad}_{(x,y)} H_0 \in C(\overline{D}), \tag{2.3}$$

$$(x, y) \in \overline{D} \tag{2.4}$$

и условиями на границе области $\overline{D}$:

$$\left|\overrightarrow{\tau_b}\right|\Big|_{y=0} = 0, \tag{3}$$

$$H(L_x, y, t) = H_2(y, t),\ 0 \le y \le L_y, \tag{4}$$

$$H(0, y, t) = H_1(y, t),\ 0 \le y \le L_y, \tag{5}$$

$$H(x, 0, t) = H_3(x),\ 0 \le x \le L_x. \tag{6}$$

$$H(x, L_y, t) = 0,\ 0 \le x \le L_x. \tag{7}$$

Предполагаем:

$$\operatorname{grad}_{(x,y)} H \in C(\overline{Ц_T}) \cap C^1(Ц_T),$$

$$\tau_{bx} = \tau_{bx}(x, y, t),$$

$$k_r \ge k_{0r} = \text{const} > 0,\ \forall (x, y) \in \overline{D},\ 0 < t \le T,$$

2. Линеаризация начально-краевой задачи транспорта многокомпонентных наносов. Построим временную сетку ω_τ, с шагом τ: $\omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0,1,\dots, N,\ N\tau = T\}$.

Если n=1, то глубина водоема $H^{(1)}(x, y, t_0)$ является известной и определяется из начального условия, т. е. $H^{(1)}(x, y, t_0) = H_0(x, y)$. Если же $n = 2,\dots, N$, то глубина водоема $H^{(n)}(x, y, t_{n-1})$ также будет известной, поскольку является решенной задача (1)−(7) для временного промежутка $t_{n-2} < t \le t_{n-1}$, т. е. $H^{(n)}(x, y, t_{n-1}) = H^{(n-1)}(x, y, t_{n-1})$.

Обозначим:

$$k_r^{(n-1)} \equiv \frac{A\tilde{\omega}d_r}{((\rho_r - \rho_0)gd_r)^{\beta}} \left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\operatorname{grad}H^{(n-1)}(x, y, t_{n-1}) \right|^{\beta-1},\ n = 1, 2,\dots, N. \tag{8}$$

После линеаризации уравнение (1) и начальное условие примут вид:

$$(1 - \varepsilon_r)\frac{\partial H^{(n)}}{\partial t} = \operatorname{div}\left(V_r k_r^{(n-1)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\operatorname{grad}H^{(n)}\right) - \operatorname{div}\left(V_r k_r^{(n-1)}\vec{\tau}_b\right) + \frac{w_{g,r}}{\rho_r}c_r,\ r = \overline{1, R}, \tag{9}$$

$$t_{n-1} < t \le t_n,\ n = 1, 2,\dots, N,$$

$$H^{(1)}(x, y, t_0) = H_0(x, y),\ H^{(n)}(x, y, t_{n-1}) = H^{(n-1)}(x, y, t_{n-1}),\ (x, y) \in \overline{D},\ n = 2,\dots, N. \tag{10}$$

Граничные условия (3)−(7) предполагаются выполненными для всех промежутков времени $t_{n-1} < t \le t_n$, $n = 1, 2,\dots, N$.

Результаты исследования

1. Исследование существования решения линеаризованной начально-краевой задачи транспорта многокомпонентных наносов. Положим $n = i,\ \ i = 1, 2, ..., N$ в уравнении (9).

Имеем:

$$\left(1-\varepsilon_r\right)\frac{\partial H^{(i)}}{\partial t} = \operatorname{div}\left(V_r k_r^{(i-1)}\frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\operatorname{grad}H^{(i)}\right) - \operatorname{div}\left(V_r k_r^{(i-1)}\vec{\tau}_b\right) + \frac{\mathrm{w}_{g,r}}{\rho_r}c_r,\ \ r = \overline{1, R}. \qquad (11)$$

Уравнение (11) дополняется условиями (10) и (3)–(7).

Если $i = 1$, то на основании сделанных ранее предположений можем записать:

$$V_r k_r^{(0)}\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0} \in C^1\left(Ц_\infty\right),\ \ V_r k_r^{(0)}\vec{\tau}_\mathrm{b} \in C^1\left(Ц_\infty\right). \qquad (12)$$

Из [18] можно заключить, что при выполнении условия (12), решение начально-краевой задачи (11), (10), (2)–(7), $t_0 < t \le t_1,\ \ i = 1,$ существует и принадлежит классу:

$$H^{(1)}(x, y, t) \in C^2\left(Ц_{t1}\right) \cap C\left(\overline{Ц}_{t1}\right),\ \operatorname{grad}_{(x,y)}H^{(1)} \in C\left(\overline{Ц}_{t1}\right).$$

Если $i = 2,$ то начально-краевая задача будет иметь начальным условием $H^{(2)}(x, y, t_1) \equiv H^{(1)}(x, y, t_1).$ Его гладкость совпадает с гладкостью начального условия для уравнения (11) номера $i = 1,$ а именно:

$$H^{(2)}(x, y, t) \in C^2\left(Ц_{t2}\right) \cap C\left(\overline{Ц}_{t2}\right),\ \operatorname{grad}_{(\mathrm{x},\mathrm{y})}H^{(2)} \in C\left(\overline{Ц}_{t2}\right).$$

Очевидно, что опять применимы условия из [18], и решение задачи (11), (10), (2)–(7) для номера $i = 2$ существует.

Далее, если $i,\ \ i = 3, ..., N,$ то для каждого случая будем иметь смешанную задачу для линейного уравнения параболического типа. Начальные и граничные условия данной задачи имеют гладкость, достаточную для существования функций $H^{(i)}(x, y, t),\ \ t_{i-1} < t \le t_i,\ \ i = 1, 2, ..., N$ класса $C^2\left(Ц_{t_i}\right) \cap C\left(\overline{Ц}_{t_i}\right),\ \operatorname{grad}_{(x,y)}H^{(i)} \in C\left(\overline{Ц}_{t_i}\right),$ являющихся решением начально-краевых задач (11), (10), (2)–(7) [19].

2. Исследование единственности решения линеаризованной начально-краевой задачи транспорта многокомпонентных наносов. Запишем уравнение (11) при $n = 1$:

$$\left(1-\varepsilon_r\right)\frac{\partial H^{(1)}}{\partial t} = \operatorname{div}\left(V_r k_r^{(0)}\frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\operatorname{grad}H^{(1)}\right) - \operatorname{div}\left(V_r k_r^{(0)}\vec{\tau}_b\right) + \frac{w_{g,r}}{\rho_r}c_r,\ \ r = \overline{1, R}. \qquad (13)$$

Допустим существование двух различных его решений, а именно:

$$H' = H'(x, y, t),\ \ H'' = H''(x, y, t),\ \ (x, y) \in \overline{D},\ \ t_0 < t \le t_1.$$

Обозначим:

$$w^{(1)}(x, y, t) \equiv H'(x, y, t) - H''(x, y, t),\ \ t_0 < t \le t_1,\ \ w^{(1)}(x, y, t) \not\equiv 0,\ \ w^{(1)}(x, y, t_0) \equiv 0.$$

Начально-краевая задача для функции $w(x, y, t) \equiv w^{(1)}(x, y, t)$ будет иметь вид:

$$\left(1-\varepsilon_r\right)\frac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{div}\left(V_r k_r^{(0)}\frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\operatorname{grad}w\right),\ \ r = \overline{1, R}, \qquad (14)$$

$$w(x, y, 0) = 0,\ \ (x, y) \in \overline{D}, \qquad (15)$$

$$\left|\vec{\tau}_b\right|\Big|_{y=0} = 0, \qquad (16)$$

$$w(x, L_y, t) = 0,\ \ 0 \le x \le L_x, \qquad (17)$$

$$w(0, y, t) = 0,\ \ 0 \le y \le L_y, \qquad (18)$$

$$w(L_x, y, t) = 0,\ \ 0 \le y \le L_y, \qquad (19)$$

$$w(x, 0, t) = 0,\ \ 0 \le x \le L_x. \qquad (20)$$

Обе части уравнения (14) умножим на функцию $w(x, y, t) \not\equiv 0,\ \ t_0 < t \le t_1,\ \ (x, y) \in \overline{D},$ а далее выполним интегрирование по переменным $t,\ \ t_0 < t \le t_1$ и (x, y) в области D. Получим:

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\left(1-\varepsilon_\mathrm{r}\right)\iint_D w\frac{\partial w}{\partial t}\,dxdy\right)dt = \int_{t_0}^{t_1}\left(\iint_D w\,div\left(V_r k_r^{(0)}\frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\operatorname{grad}w\right)dxdy\right)dt,\ \ r = \overline{1, R}. \qquad (21)$$

После ряда преобразований равенства (21), получим:

$$\frac{1}{2}(1-\varepsilon_r)\left[\iint_D w^2(x,y,t_1)dxdy-\iint_D \mathrm{w}^2(x,y,t_0)dxdy\right]=\int_{t_0}^{t_1}\left(\iint_D w div\left(V_r k_r^{(0)}\frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\operatorname{grad} w\right)dxdy\right)dt. \quad (22)$$

Равенство (22) при условии (15) запишется в виде:

$$\frac{1}{2}(1-\varepsilon_r)\iint_D w(x,y,t_1)^2 dxdy=\int_{t_0}^{t_1}\left(\iint_D w div\left(V_r k_r^{(0)}\frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\operatorname{grad} w\right)dxdy\right)dt. \quad (23)$$

Пусть:

$$R(w)\equiv\int_{t_0}^{t_1}\left(\iint_D w div\left(V_r k_r^{(0)}\frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\operatorname{grad} w\right)dxdy\right)dt. \quad (24)$$

Имеет место равенство:

$$\begin{aligned}&\iint_D\left[w\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(V_r k_r^{(0)}\frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(V_r k_r^{(0)}\frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\right)\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]dxdy=\\&=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(w\left(V_r k_r^{(0)}\frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(w\left(V_r k_r^{(0)}\frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\right)\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]dxdy-\\&-\iint_D\left[\left(V_r k_r^{(0)}\frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(V_r k_r^{(0)}\frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dxdy.\end{aligned} \quad (25)$$

С другой стороны, с учетом граничных условий (16)−(20) и в силу теоремы Остроградского-Гаусса [19], имеем:

$$\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(w\left(V_r k_r^{(0)}\frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(w\left(V_r k_r^{(0)}\frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\right)\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]dxdy=0. \quad (26)$$

Из равенств (25) и (26) находим:

$$R(w)\equiv-\int_{t_0}^{t_1}\left(\iint_D V_r k_r^{(0)}\frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dxdy\right)dt. \quad (27)$$

С учетом (27) равенство (22) запишется в виде:

$$\frac{1}{2}(1-\varepsilon_r)\iint_D w^2(x,y,t_1)dxdy=-\int_{t_0}^{t_1}\left(\iint_D V_r k_r^{(0)}\frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dxdy\right)dt. \quad (28)$$

Далее преобразуем правую часть равенства (28). Привлекая неравенство Пуанкаре [20], получаем:

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left[\iint_D V_r k_r^{(0)}\frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right)dxdy\right]dt\le -V_r k_r^{(0)}\frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\int_{t_0}^{t_1}\left[\iint_D\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right)dxdy\right]dt. \quad (29)$$

Из неравенства (29) следует оценка:

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left[\iint_D V_r k_r^{(0)}\frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right)dxdy\right]dt\le -\pi^2 V_r k_r^{(0)}\frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\left(\frac{1}{L_x^2}+\frac{1}{L_y^2}\right)\int_{t_0}^{t_1}\left[\iint_D w^2 dxdy\right]dt. \quad (30)$$

Из равенств (33) и (35) получено неравенство:

$$\frac{1}{2}(1-\varepsilon_r)\iint_D w^2(x,y,t_1)dxdy\le -\pi^2 V_r k_r^{(0)}\frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\left(\frac{1}{L_x^2}+\frac{1}{L_y^2}\right)\int_{t_0}^{t_1}\left[\iint_D w^2 dxdy\right]dt. \quad (31)$$

Так как $w(x,y,t)\not\equiv 0,$ то выполнено $w^2(x,y,t^*)>0.$ В силу непрерывности функции $w^2(x,y,t)$ в некоторой окрестности точки t^* при $t_0<t^*\le t_1,$ имеем $\iint_D w^2(x,y,t)dxdy>0,$ а потому:

$$-\pi^2 V_r k_r^{(0)}\frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\left(\frac{1}{L_x^2}+\frac{1}{L_y^2}\right)\int_{t_0}^{t_1}\left[\iint_D w^2 dxdy\right]dt<0. \quad (32)$$

Из полученных неравенств (31) и (32) будет следовать противоречивое неравенство:

$$\frac{1}{2}\left(1-\varepsilon_r\right)\iint\limits_D w^2\left(x,y,t_1\right)dxdy<0. \tag{33}$$

Следовательно, справедливо тождество $w(x,y,t_1)\equiv 0$. В силу произвольности временного шага τ, $\tau>0$, имеем:

$$w(x,y,t)=0,\quad t_0<t\le t_1.$$

Очевидно, что $w(x,y,t)\equiv 0$ при $(x,y)\in\overline{D}$, $t_{n-1}\le t\le t_n$, $n=2,...,N$.

Тем самым сделан первый шаг индукции при $n=1$. Аналогичным образом строятся рассуждения для $n=s$, $s=2,..,N$, что приводит к равенству:

$$w(x,y,t_s)\equiv 0.$$

Результатом проведенных рассуждений служит следующая теорема.

Теорема. Пусть даны уравнения (11):

$$\left(1-\varepsilon_r\right)\frac{\partial H^{(n)}}{\partial t}=\operatorname{div}\left(V_r k_r^{(n-1)}\frac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\operatorname{grad}H^{(n)}\right)-\operatorname{div}\left(V_r k_r^{(n-1)}\vec{\tau}_b\right)+\frac{w_{g,r}}{\rho_r}c_r,\quad r=\overline{1,R},$$

$$t_{n-1}<t\le t_n,\ n=1,2,...,N,$$

в прямоугольной области:

$$D(x,y)=\{0<x<L_x, 0<y<L_y\},$$

где $k_r^{(n-1)}\equiv\dfrac{A\tilde{\omega}d_r}{\left(\left(\rho_r-\rho_0\right)gd_r\right)^\beta}\left|\vec{\tau}_b-\dfrac{\tau_{bc,r}}{\sin\varphi_0}\operatorname{grad}H^{(n-1)}\left(x,y,t_{n-1}\right)\right|^{\beta-1}$ с начальными и граничными условиями (11), (3)–(7).

Тогда, если выполнены условия $k_r^{(n-1)}\ge k_{0r}>0$, $k_r^{(n-1)}\in C^1\left(\overline{D}\right)$, то $\forall n$, $n=1,2,...,N$ функция $H^{(n)}(x,y,t)$, $t_{n-1}<t\le t_n$, $n=1,2,...,N$ класса $C^2\left(Ц_Т\right)\cap C\left(\overline{Ц_Т}\right)$, $\operatorname{grad}_{(x,y)}H^{(n)}\in C\left(\overline{Ц_Т}\right)$ будет решением уравнения номера n в цилиндре $Ц_Т=D\times\left(0,T\right)$, и это решение единственно.

Обсуждение и заключения. Новизна данной работы определяется постановкой нестационарной пространственно-двумерной математической задачи транспорта наносов, учитывающей их сложный многокомпонентный состав. Линеаризация соответствующей начально-краевой задачи выполнена на сетке по времени и для произвольного временного шага $t_{n-1}<t\le t_n$, $n=1,2,...,N$, получены условия существования и единственности решения начально-краевой задачи.

Список литературы

1. Леонтьев И.О. *Прибрежная динамика: волны, течения потоки наносов*. Москва: ГЕОС; 2001. 272 с.

2. Xiaoying Liu, Shi Qi, Yuan Huang, et al. Predictive modeling in sediment transportation across multiple spatial scales in the Jialing River Basin of China. *International Journal of Sediment Research*. 2015;30(3):250–255. https://doi.org/10.1016/j.ijsrc.2015.03.013

3. Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б. *Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации*. Ленинград: Гидрометеоиздат; 1987. 296 с.

4. Gic-Grusza G., Dudkowska A. Numerical modeling of hydrodynamics and sediment transport — an integrated approach. *Ocean Dynamics*. 2017;67:1283–1292. https://doi.org/10.1007/s10236-017-1085-9

5. Ouda M., Toorman E.A. Development of a new multiphase sediment transport model for free surface flows. *International Journal of Multiphase Flow*. 2019;117:81–102. https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2019.04.023

6. Aksoy H., Kavvas M.L. A review of hillslope and watershed scale erosion and sediment transport models. *Catena*. 2005;64(2–3):247–271. https://doi.org/10.1016/j.catena.2005.08.008

7. Sukhinov A., Sidoryakina V. Two-Dimensional-One-Dimensional Alternating Direction Schemes for Coastal Systems Convection-Diffusion Problems. *Mathematics*. 2021;9:3267. https://doi.org/10.3390/math9243267

8. Sukhinov A., Belova Y., Nikitina A., et al. Sufficient Conditions for the Existence and Uniqueness of the Solution of the Dynamics of Biogeochemical Cycles in Coastal Systems Problem. *Mathematics*. 2022;10:2092. https://doi.org/10.3390/math101220928

9. Sukhinov A., Belova Y., Panasenko N., et al. Research of the Solutions Proximity of Linearized and Nonlinear Problems of the Biogeochemical Process Dynamics in Coastal Systems. *Mathematics*. 2023;11:575. https://doi.org/10.3390/math11030575

10. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Бондаренко Ю.С. Оценка погрешности решения уравнения диффузии погрешности на основе схем с весами. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2011;8(121):6–13.

11. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Шишеня А.В. Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами. Математическое моделирование. 2013;25(11):53–64; *Mathematical Models and Computer Simulation*. 2014;6(3):324–331. https://doi.org/10.1134/S2070048214030120

12. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Угольницкий Г.А. и др. Теоретико-игровые регламенты механизмов управления устойчивым развитием мелководных экосистем. *Автоматика и телемеханика*. 2017;6:122–137. *Automation and Remote Control*. 2017;78(6):1059–1071. https://doi.org/10.1134/S0005117917060078

13. Сухинов А.И., Сидорякина В.В. О сходимости решения линеаризованной последовательности задач к решению нелинейной задачи транспорта наносов. *Математическое моделирование*. 2017;29(11):19–39.

14. Сидорякина В.В., Сухинов А.И. Исследование корректности и численная реализация линеаризованной двумерной задачи транспорта наносов. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2017;57(6):985–1002; *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2017;57(6):978–994. https://doi.org/10.7868/S0044466917060138

15. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Построение дискретной двумерной математической модели транспорта наносов. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2011;8(121):32–44.

16. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Sidoryakina V.V. Parallel Solution of Sediment and Suspension Transportation Problems on the Basis of Explicit Schemes. *Communications in Computer and Information Science*. 2018;910:306–321. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99673-8_22

17. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Атаян А.М. и др. Математическая модель процесса осаждения на дно многокомпонентной взвеси и изменения состава донных материалов. *Известия ИМИ УдГУ*. 2022;60:73–89. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2022-60-05

18. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики*. Учебник. 4-е изд., испр. и доп. Москва: Наука; 1981. 512 с.

19. Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики*. Москва: Наука; 1973. 407 с.

20. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*. Москва: Наука; 1967. 736 с.

References

1. Leontiev IO. *Coastal dynamics: waves, currents, sediment flows*. Moscow: GEOS; 2001. 272 p. (In Russ.).

2. Xiaoying Liu, Shi Qi, Yuan Huang, et al. Predictive modeling in sediment transportation across multiple spatial scales in the Jialing River Basin of China. *International Journal of Sediment Research*. 2015;30(3):250–255. https://doi.org/10.1016/j.ijsrc.2015.03.013

3. Marchuk GI, Dymnikov VP, Zalesny VB. *Mathematical models in geophysical hydrodynamics and numerical methods of their implementation*. Leningrad: Hydrometeoizdat; 1987. 296 p. (In Russ.).

4. Gic-Grusza G, Dudkowska A. Numerical modeling of hydrodynamics and sediment transport — an integrated approach. *Ocean Dynamics*. 2017;67:1283–1292. https://doi.org/10.1007/s10236-017-1085-9

5. Ouda M, Toorman EA. Development of a new multiphase sediment transport model for free surface flows. *International Journal of Multiphase Flow*. 2019;117:81–102. https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2019.04.023

6. Aksoy H, Kavvas ML. A review of hillslope and watershed scale erosion and sediment transport models. *Catena*. 2005;64(2–3):247–271. https://doi.org/10.1016/j.catena.2005.08.008

7. Sukhinov A, Sidoryakina V. Two-Dimensional-One-Dimensional Alternating Direction Schemes for Coastal Systems Convection-Diffusion Problems. *Mathematics*. 2021;9:3267. https://doi.org/10.3390/math9243267

8. Sukhinov A, Belova Y, Nikitina A, et al. Sufficient Conditions for the Existence and Uniqueness of the Solution of the Dynamics of Biogeochemical Cycles in Coastal Systems Problem. *Mathematics*. 2022;10:2092. https://doi.org/10.3390/math101220928

9. Sukhinov A, Belova Y, Panasenko N, et al. Research of the Solutions Proximity of Linearized and Nonlinear Problems of the Biogeochemical Process Dynamics in Coastal Systems. *Mathematics*. 2023;11:575. https://doi.org/10.3390/math11030575

10. Sukhinov AI, Chistyakov AE, Bondarenko YuS. Error estimation of the solution of the error diffusion equation based on schemes with weights. News of the SFU. *Technical sciences*. 2011;8(121):6–13. (In Russ.).

11. Sukhinov AI, Chistyakov AE, Shishenya AV. Estimation of the error of solving the diffusion equation based on schemes with weights. *Mathematical modeling*. 2013;25(11):53–64; *Mathematical Models and Computer Simulation*. 2014;6(3):324–331. (In Russ.). https://doi.org/10.1134/S2070048214030120

12. Sukhinov AI, Chistyakov AE, Ugolnitsky GA., et al. Game-theoretic regulations of mechanisms for managing the sustainable development of shallow-water ecosystems. *Automation and telemechanics*. 2017; 6:122–137; *Automation and Remote Control*. 2017;78(6):1059–1071. (In Russ.). https://doi.org/10.1134/S0005117917060078

13. Sukhinov AI, Sidoryakina VV. On the convergence of the solution of a linearized sequence of problems to the solution of a nonlinear sediment transport problem. *Mathematical modeling*. 2017;29(11):19–39. (In Russ.).

14. Sidoryakina VV., Sukhinov AI. Correctness study and numerical implementation of a linearized two-dimensional sediment transport problem. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2017;57(6):985–1002; Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2017;57(6):978-994. (In Russ.) https://doi.org/10.7868/S0044466917060138

15. Sukhinov AI, Chistyakov AE, Protsenko EA. Construction of a discrete two-dimensional mathematical model of sediment transport. News of the SFU. *Technical sciences*. 2011;8(121):32–44. (In Russ.).

16. Sukhinov AI, Chistyakov AE, Sidoryakina VV. Parallel Solution of Sediment and Suspension Transportation Problems on the Basis of Explicit Schemes. *Communications in Computer and Information Science*. 2018;910:306–321. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99673-8_22

17. Sukhinov AI, Chistyakov AE, Atayan AM., et al. Mathematical model of the process of deposition to the bottom of a multicomponent suspension and changes in the composition of bottom materials. Izvestiya IMI UdGU. 2022;60:73–89. (In Russ.). https://doi.org/10.35634/2226-3594-2022-60-05

18. Vladimirov VS. *Equations of mathematical physics.* Textbook. 4th ed., ispr. and add. Moscow: Nauka; 1981. 512 p. (In Russ.).

19. Ladyzhenskaya OA. *Boundary value problems of mathematical physics*. Moscow: Nauka; 1973. 407 p. (In Russ.).

20. Ladyzhenskaya OA, Solonnikov VA, Uraltseva NN. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*. Moscow: Nauka; 1967. 736 p. (In Russ.).

Об авторе:

Сидорякина Валентина Владимировна, доцент кафедры математики, Таганрогский институт имени А. П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), (РФ, 347936, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), кандидат физико-математических наук, MathSciNet, eLibrary.ru, ORCID, ResearcherID, ScopusID, cvv9@mail.ru

Поступила в редакцию 18.04.2023.
Поступила после рецензирования 24.05.2023.
Принята к публикации 25.05.2023.

Конфликт интересов
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

About the Author:

Valentina V Sidoryakina, Associate Professor of the Mathematics Department, Taganrog Institute named after A. P. Chekhov (branch) of RSUE (48, Initiative St., Taganrog, 347936, RF), PhD (Physical and Mathematical Sciences), MathSciNet, eLibrary.ru, ORCID, ResearcherID, ScopusID, cvv9@mail.ru

Received 18.04.2023.
Revised 24.05.2023.
Accepted 25.05.2023.

Conflict of interest statement
The author does not have any conflict of interest.

The author has read and approved the final manuscript.