ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
COMPUTATIONAL MATHEMATICS

УДК 519.213.2, 517.443, 517.518.45
https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-7-11

Краткое сообщение

Семиинварианты, моменты Сенатова и разложение плотности

А.Е. Кондратенко ✉, В.Н. Соболев

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1

✉ ae_cond@mech.math.msu.su

Аннотация
Предлагается ввести в программы курсов теории вероятностей рассмотрение относительно новой моментной характеристики случайных величин — моментов Сенатова. Естественность этого предложения подтверждается тремя взглядами на возникновение моментов Сенатова, а их введение позволит ответить на вопрос, что является аналогом ряда Тейлора функции для плотности.

Ключевые слова: моменты, семиинварианты, моменты Сенатова, преобразование Фурье, ряд Фурье, разложение плотности

Благодарности: авторы выражают благодарность профессорам А.В. Булинскому, Е.Б. Яровой и академику А.Н. Ширяеву за внимание к работе.

Для цитирования: Кондратенко А.Е., Соболев В.Н. Семиинварианты, моменты Сенатова и разложение плотности. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):7−11. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-7-11

Short report

Semiinvariants, Senatov Moments and Density Decomposition

Alexander E Condratenko, Vitaly N Sobolev

Lomonosov Moscow State University, 1, Lenin Mountains, Moscow, Russian Federation

✉ ae_cond@mech.math.msu.su

Abstract
It is proposed to introduce into Probability Theory courses such a new moment characteristic of random variable as Senatov moment. Naturalness of this proposal is confirmed by three views of appearance of Senatov moments. Introducing of them will answer the question about what is analogue of Taylor series of function for density.

Keywords: moments, semiinvariants, Senatov moments, Fourier transform, Fourier series, density decomposition

Acknowledgments: the authors are grateful to Professors A.V. Bulinsky, E.B. Yarova and academician A.N. Shiryaev for their attention to the work.

For citation: Condratenko AE, Sobolev VN. Semiinvariants, Senatov Moments and Density Decomposition. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):7−11. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-7-11

Введение. В курсах теории вероятностей помимо обычных моментов случайной величины ξ:

$$\alpha_k = M\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x), k \in Z_+,$$

где $F(x)$ — функция распределения рассматриваемой случайной величины, рассказывается также и о других моментных характеристиках, например:
об абсолютных

$$M\,|\xi|^k,$$

центральных

$$M\,(\xi - M\,\xi)^k$$

и факториальных

$$M\xi^{[k]} = M\,\xi(\xi-1)\ldots(\xi-k+1)$$

моментах.

Более того, центральная задача теории вероятностей — центральная предельная теорема — привела в своем развитии к появлению еще двух моментных характеристик, получивших названия семиинвариантов, о которых рассказывается студентам-математикам, и моментов Сенатова, которые пока только начинают входить в программы курсов.

Хотя статья носит научно-методический характер, аппарат определения моментов, предложенный В.В. Сенатовым, возможно использовать и в прикладных задачах, например, при вычислении коэффициентов турбулентного обмена для уравнений гидродинамики систем со свободной поверхностью, в том числе морских и прибрежных [1].

Цель работы. По мнению авторов, моменты Сенатова заслуживают включения в программы курсов теории вероятностей. В работе это будет обосновано при помощи трех вопросов, на первый взгляд, никак не связанных друг с другом.

Для простоты дальнейшего изложения будем считать рассматриваемые в работе случайные величины центрированными, нормированными и абсолютно непрерывными, у которых существуют моменты всех натуральных порядков, а характеристическая функция:

$$f(t) = Me^{it\xi}$$

представима своим рядом Тейлора и абсолютно интегрируема.

Первый вопрос. Как известно, четные моменты стандартной нормальной случайной величины возрастают и возрастают быстро — стандартный нормальный момент порядка $2k$ равен $(2k-1)!!$, $k \in N$ (в дальнейшем будем считать k неотрицательным целым числом, если не оговорено иное). Но исследовать сходимость центрированных и нормированных сверток к стандартной нормальной случайной величине, исследуя сходимость числовой последовательности к ненулевому числу, обычно технически сложнее, чем исследовать сходимость к нулю. Соответственно, возникает необходимость ввести новые естественные моментные характеристики, которые у стандартной нормальной случайной величины будут равны нулю, за исключением, быть может, самых начальных порядков. Так как моменты связаны с производными характеристической функцией равенством:

$$i^k \alpha_k = (f(t))^{(k)}_{t=0},$$

а стандартная нормальная характеристическая функция есть $\exp(-t^2/2)$, то необходимо предложить такое преобразование последней, чтобы производные полученной композиции в нуле *быстро* становились нулевыми.

Использовать логарифмирование в качестве первого такого преобразования предложил в 1889 году датский астрономом и математик Торвальд Николай Тиле, назвав полученные характеристики семиинвариантами:

$$i^k \kappa_k = (\ln(f(t)))^{(k)}_{t=0}.$$

Действительно, $\ln(\exp(-t^2/2)) = -t^2/2$, тогда $\kappa_0 = 0$, $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = 1$ и $\kappa_k = 0$ при $k > 3$.

Необходимо отметить следующее важное исключительное свойство семиинвариантов. Так как характеристическая функция свертки равна произведению характеристических функций слагаемых, то семиинварианты свертки равны сумме семиинвариантов слагаемых. Но работа с комплексным логарифмом требует особой аккуратности и часто сопряжена с существенными техническими трудностями.

Другое преобразование не менее естественно — в 2001 году профессором кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова Владимиром Васильевичем Сенатовым были окончательно определены характеристики, называемые с 2021 года (после его смерти) моментами Сенатова:

$$i^k \theta_k = (\exp(t^2/2) f(t))^{(k)}_{t=0}.$$

Как видно, все моменты Сенатова стандартной нормальной случайной величины равны нулю, кроме $\theta_0 = 1$.

Все упомянутые моментные характеристики произвольной случайной величины существуют либо не существуют одновременно, всегда $\kappa_0 = 0$, $\theta_0 = 1$, у центрированных и нормированных случайных величин $\kappa_1 = \theta_1 = \theta_2 = 0$, $\kappa_2 = 1$.

Второй вопрос связан с тем, что представление характеристической функции своим рядом Тейлора:

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_k}{k!}(it)^k$$

не позволяет найти плотность $p(x)$ через формулу обращения:

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}f(t)dt,$$

так как преобразования Фурье степенной функции не существует.

Из кажущегося тупика можно выйти именно при помощи семиинвариантов и моментов Сенатова. Для этого вспомним, что являющиеся собственными функциями уравнения Шредингера [2–3] и образующие на множестве действительных чисел ортогональную систему с весом стандартной нормальной плотности $\varphi(x)=e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ многочлены Чебышева-Эрмита:

$$H_k(x)=(-1)^k e^{x^2/2}\left(e^{-x^2/2}\right)^{(k)}$$

обладают свойством (1):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}(it)^k e^{-t^2/2}dt=H_k(x)\varphi(x).$$

Так, для характеристической функции справедливо представление:

$$f(t)=\exp(\mathrm{In}(f(t)))=\exp\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\kappa_k}{k!}(it)^k\right)=e^{-t^2/2}\exp\left(\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\kappa_k}{k!}(it)^k\right),$$

и поэтому свойство (1) позволяет, представив вторую ее экспоненту рядом Тейлора, применить формулу обращения.

Аналогичные рассуждения с использованием моментов Сенатова позволяют ответить на третий вопрос — какой аналог ряда Тейлора функции можно предложить для случайной величины в лице ее плотности. Так как:

$$f(t)=e^{-t^2/2}\left(e^{t^2/2}f(t)\right)=e^{-t^2/2}\left(\sum_{k=o}^{\infty}\frac{\theta_k}{k!}(it)^k\right)=e^{-t^2/2}\left(1+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\theta_k}{k!}(it)^k\right),$$

то свойство (1) позволяет сразу применить формулу обращения и получить разложение для плотности в виде соответствующего ряда Фурье:

$$p(x)=\varphi(x)+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\theta_k}{k!}H_k(x)\varphi(x).$$

Для центрированных и нормированных сумм n независимых случайных величин такие разложения называются асимптотическими [4], так как все слагаемые под знаком суммы будут стремиться к нулю с ростом n, что следует из выражения моментов сверток через моменты исходного распределения:

$$\frac{\theta_k(F_n)}{k!}=\sum\frac{n!}{j_0!\,j_3!\ldots j_n!}\left(\frac{\theta_3}{3!n^{\frac{3}{2}}}\right)^{j_3}\cdots\left(\frac{\theta_k}{k!n^{\frac{k}{2}}}\right)^{j_k},$$

где суммирование производится по целым неотрицательным наборам:

$$j_0+j_3+j_4+\ldots j_k=n,\ 3j_3+4j_4+\ldots kj_k=k.$$

Интересна скорость стремления к нулю «тройками» (табл. 1):

$$\theta_k(F_n)=O\left(n-\frac{\left[\frac{k}{3}+3\left\{\frac{k}{3}\right\}\right]}{2}\right),n\to\infty\ .$$

Таблица 1

Скорость стремления к нулю «троек» слагаемых

k	3	<u>4</u>	5	6	<u>7</u>	8	9	<u>10</u>	11	…
$\dfrac{\left[\frac{k}{3}\right]+3\left\{\frac{k}{3}\right\}}{2}$	0,5	<u>1</u>	1,5	1	<u>1,5</u>	2	1,5	<u>2</u>	2,5	…

Например:

$$\theta_3(F_n)=\frac{\theta_3}{\sqrt{n}},\ \theta_4(F_n)=\frac{\theta_4}{n},\ \theta_5(F_n)=\frac{\theta_5}{n^{1,5}},\ \theta_6(F_n)=\frac{6!}{n^2}\left(\frac{n-1}{2!}\frac{\theta_3^2}{3!^2}+\frac{\theta_6}{6!}\right).$$

Магической же связью моментов Сенатова с многочленами Чебышева-Эрмита является следующее равенство:

$$\theta_k=\int_{-\infty}^{\infty}H_k(x)\,dF(x).$$

Именно так определил их В.В. Сенатов в 2001 году [5], назвав из-за этой связи моментами Чебышева-Эрмита, поэтому в литературе и исследованиях до прошлого года они встречаются и используются под таким именем. Теперь в знак памяти о выдающемся ученом, работавшем в Московском университете и предложившем, в частности, асимптотические разложения с явной оценкой точности, которые можно доводить до численных значений, будем называть их моментами Сенатова [6].

Заключение. Использование моментов Сенатова позволило настолько качественно продвинуть задачу исследования скорости сходимости в центральной предельной теореме, что эти моментные характеристики стали восприниматься очень естественно. Это позволяет, по мнению авторов, поднять вопрос о включении их в программу тех курсов теории вероятностей, где центральная предельная теорема доказывается методом характеристических функций. А для студентов-математиков сделать это просто необходимо в целях подготовки к изучению специального курса «Дополнительные главы теории вероятностей».

Список литературы

1. Сухинов А.И., Проценко С.В., Проценко Е.А. Фильтрация натурных данных для численного моделирования трехмерных турбулентных течений с применением подхода LES. *Вестник Южно-Уральского университета. Серия: Математика. Механика. Физика*. 2022;14(4): 40–51. https://doi.org/10.14529/mmph220406

2. Шредингер Э. *Избранные труды по квантовой механике*. Москва: Наука; 1976. 424 с.

3. Тайманов И.А., Царев С.П. О преобразовании Мутара и его применениях к спектральной теории и солитонным уравнениям. *Современная математика. Фундаментальные направления*. 2010;170(3):371–387. https://doi.org/10.1007/s10958-010-0092-x

4. Сенатов В.В. *Центральная предельная теорема: точность аппроксимации и асимптотические разложения.* Москва: Книжный дом «ЛИБРОКОМ»; 2009. 352 с.

5. Сенатов В.В. Применение моментов Чебышева-Эрмита в асимптотических разложениях. В ст.: «XX международный семинар по проблемам устойчивости стохастических моделей». *Теория вероятностей и ее применения.* 2001; 46(1):190–193.

6. Соболев В.Н., Кондратенко А.Е. О моментах Сенатова в асимптотических разложениях в центральной предельной теореме. *Теория вероятностей и ее применения*. 2022; 67(1):193–198. https://doi.org/10.4213/tvp5483

References

1. Sukhinov AI, Protsenko SV, Protsenko EA. Field Data Filtering for the Digital Simulation of Three-Dimensional Turbulent Flows Using The Les Approach. *Vestnik Yuzhno-Uralskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Fizika*. 2022;14(4): 40–51. (In Russ.). https://doi.org/10.14529/mmph220406

2. Schrodinger E. *Selected works on quantum mechanics*. Moscow: Nauka; 1976. 424 p. (In Russ.).

3. Taimanov IA, Tsarev SP. On the Moutard transformation and its applications to spectral theory and Soliton equations. *Journal of Mathematical Sciences*. 2010;170(3):371–387. https://doi.org/10.1007/s10958-010-0092-x

4. Senatov VV. *Central limit theorem: accuracy of approximation and asymptotic expansions.* Moscow: Book House “LIBROCOM”; 2009. 352 p.

5. Senatov VV. Application of the Chebyshev-Hermite moments in asymptotic decompositions. In: “Twentieth international seminar on stability problems for stochastic models”. *Theory of Probability and its Applications*. 2001;46(1):190–193.

6. Sobolev VN, Kondratenko AE. On Senatov Moments in Asymptotic Expansions in the Central Limit Theorem. *Theory of Probability and its Applications*. 2022;67(1):154–157. https://doi.org/10.4213/tvp5483

Об авторах:

Кондратенко Александр Евгеньевич, доцент кафедры теории вероятностей, МГУ им. М. В. Ломоносова (119991, РФ, г. Москва, Ленинские горы, 1), кандидат физико-математических наук, ae_cond@mech.math.msu.su

Соболев Виталий Николаевич, доцент/с.н.с. по специальности № 01.01.05 МГУ им. М. В. Ломоносова (119991, РФ, г. Москва, Ленинские горы, 1), кандидат физико-математических наук, sobolev_vn@mail.ru

Заявленный вклад соавторов:
Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Поступила в редакцию 25.07.2023
Поступила после рецензирования 17.08.2023
Принята к публикации 18.08.2023

Конфликт интересов
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Alexander E Kondratenko, Associate Professor of the Department of Probability Theory, Lomonosov Moscow State University (1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, RF), Candidate of Physical and Mathematical Sciences, ae_cond@mech.math.msu.su

Vitaly N Sobolev, Associate Professor/PhD in specialty no. 01.01.05 Lomonosov Moscow State University (1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, RF), Candidate of Physical and Mathematical Sciences, sobolev_vn@mail.ru

Claimed contributorship:
All authors have made an equivalent contribution to the preparation of the publication.

Received 25.07.2023
Revised 17.08.2023
Accepted 18.08.2023

Conflict of interest statement
The authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.