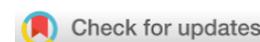
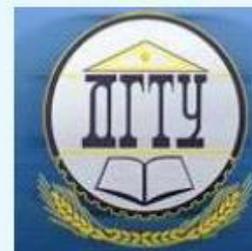


ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 519.6

Научная статья

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-20-27>



Применение модификации сеточно-характеристического метода с использованием наложенных сеток для явного выделения границы раздела сред при моделировании рельефа океанического шельфа

В.О. Стецюк

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Российская Федерация,
г. Москва, ул. Керченская, 1А, корп. 1

✉ stetsyuk@phystech.edu

Аннотация

Введение. Задача моделирования распространения упругих волн имеет большое практическое значение при проведении сейсморазведки, поскольку на ее основе выполняется построение модели исследуемой среды. При этом качество построенной модели определяется точностью решения задачи моделирования, что обеспечивает постоянно возрастающие требования к точности моделирования. Для точного моделирования важно корректно описывать и учитывать границы раздела сред. При этом важным фактором остается ресурсоемкость используемого метода моделирования, поскольку использование менее ресурсоемких методов позволяет выполнить больше итераций расчета для инверсии или использовать сетки с меньшим шагом для повышения точности.

Материалы и методы. В данной работе рассматривается модификация сеточно-характеристического метода на прямоугольных сетках, использующая наложенные сетки для описания границы раздела сред сложной формы. Данный подход ранее использовался для описания поверхности земли при проведении моделирования на суше. В данной работе описывается его применение при моделировании рельефа океанического шельфа.

Результаты исследования. Использование наложенной сетки позволяет уменьшить погрешность моделирования, количество паразитных волн и артефактов и получить более наглядную картину.

Обсуждение и заключения. Наложённые сетки могут быть применены для описания границы раздела сред при моделировании сейсморазведки океанического шельфа. Их использование позволяет повысить точность моделирования и снизить количество артефактов по сравнению с использованием только одной сетки.

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-11-00139).

Ключевые слова: сеточно-характеристический метод, метод наложенных сеток, метод сеток-химер, шельфовая сейсморазведка

Для цитирования. Стецюк В.О. Применение модификации сеточно-характеристического метода с использованием наложенных сеток для явного выделения границы раздела сред при моделировании рельефа океанического шельфа. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):20–27. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-20-27>

Application of a Modification of the Grid-Characteristic Method using Overset Grids for Explicit Interface Description to Modelling the Relief of the Ocean Shelf

Vladislav O Stetsyuk

Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), 1A, build 1, Kerchenskaya St., Moscow, Russian Federation

✉ stetsyuk@phystech.edu

Abstract

Introduction. The problem of modelling the propagation of elastic waves is of great practical importance when conducting seismic exploration. Based on it, a model of the environment under study is being built. At the same time, the quality of the constructed model is determined by the accuracy of solving the modelling problem, which ensures constantly increasing requirements for modelling accuracy. For accurate modelling, it is important to correctly describe and take into account the boundaries of the media. At the same time, the quality of the constructed model is determined by the accuracy of solving the modelling problem, which ensures constantly increasing requirements for modelling accuracy.

Materials and Methods. We have studied a modification of the grid-characteristic method on rectangular grids using overset grids to describe the interface of media of complex shape. This approach has previously been used to describe the earth's surface when conducting simulations on land. This paper describes its application in modelling the relief of the ocean shelf.

Results. The use of the overset grid reduces the modelling error, the number of parasitic waves and artifacts and makes it possible to get a more visual picture.

Discussion and Conclusions. Overset grids can be used to describe the interface of media in modelling seismic exploration of the ocean shelf. Their use makes it possible to increase the accuracy of modelling and reduce the number of artifacts compared to using only one grid.

Funding information: This work was funded by Russian Scientific Foundation (project no. 21-11-00139).

Keywords: grid-characteristic method, overset grid, chimera grid, shelf seismic exploration

For citation. Stetsyuk VO. Application of a modification of the grid-characteristic method using overset grids for explicit interface description to modelling the relief of the ocean shelf. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):20–27. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-20-27>

Введение. Процесс распространения упругих и акустических волн в среде является предметом изучения целого ряда научных и инженерных дисциплин. К наиболее важным практическим задачам из числа рассматриваемых этими дисциплинами относятся анализ сейсмической устойчивости, неразрушающее обнаружение дефектов и сейсмическая разведка. При решении всех этих задач широко используется численное моделирование. Можно выделить два основных типа задач моделирования — собственно, задачу моделирования распространения волновых возмущений в среде с известными свойствами (прямая задача) и задачу построения модели среды по известным характеристикам сигнала-источника и показаниям приемников (обратная задача). Эти задачи не являются независимыми, решение обратной задачи обычно полагается на несколько итераций решения прямой задачи и внесения уточнений в модель.

При выборе численного метода, используемого для моделирования, необходимо учитывать его особенности и ограничения, а также объем вычислительных ресурсов, которых он требует. Для моделирования распространения механических волн широко используется метод конечных элементов, метод конечных разностей и сеточно-характеристический метод.

Метод конечных элементов [1] использует неструктурные сетки, чаще всего тетраэдральные, что позволяет с хорошей точностью описывать границы области моделирования, а также лежащие внутри нее неоднородности и стыки между слоями. В основе этого метода лежит аппроксимация искомой функции внутри каждой из ячеек с использованием заданного базиса. Также он позволяет хорошо описывать поглощающие граничные условия при помощи метода PML [2]. Его основным недостатком является большая ресурсоемкость.

Основной идеей метода конечных разностей является замена в моделируемом уравнении операций дифференцирования на недифференциальные выражения, определяемые используемой разностной схемой. Конечно-разностные схемы обычно используют структурные прямоугольные сетки. Их преимуществом является низкая ресурсоемкость при хорошей точности [3].

Сеточно-характеристический метод [4–5] во многом схож с методом конечных разностей. Вместо прямой замены дифференцирования на разностное выражение он использует замену переменной, которая позволяет

перейти от исходного уравнения к уравнению переноса. Это уравнение переноса решается при помощи поиска характеристик, вдоль которых выполняется перенос значений. В данной работе используется модификация сеточно-характеристического метода, в которой вместо использования характеристик уравнение переноса решается при помощи разностных схем.

В случаях, когда для моделирования используются методы, основанные на структурных сетках, а в области моделирования присутствуют границы сложной формы, возникает необходимость как-то адаптировать метод для их описания. В данной работе для описания криволинейных границ используются наложенные криволинейные сетки. Выбор этого метода обусловлен его хорошей точностью и небольшой ресурсоемкостью. Ранее в [6] было показано, как при помощи этого метода можно описывать свободную поверхность сложной формы, а в данной работе он используется для описания границы раздела сред.

Материалы и методы

1. Физическая модель. В данной работе рассматриваются процессы распространения волн в упругих и акустических средах. Рассмотрим сначала модель упругой среды. В точке с радиус-вектором \vec{x} обозначим вектор смещения в момент времени t как $u(\vec{x}, t)$. Второй закон Ньютона по оси i будет иметь вид [7]:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - f_i = 0.$$

Мы предполагаем, что все смещения малы. Тогда можно записать закон Гука:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3,3} C_{ijkl} \epsilon_{kl},$$

где C_{ijkl} называется тензором жесткости, а ϵ_{ij} — тензор деформации Коши-Грина:

$$\epsilon_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_l \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Тензоры σ и ϵ симметричны и, следовательно, содержат не более 6 независимых компонент каждый. Тензор C_{ijkl} также симметричен, поэтому количество его независимых компонент не превышает 21, и он может быть записан в нотации Фойгта [8] в виде симметричной матрицы 6×6 . В данной работе рассматриваются только изотропные среды. В таких средах эта матрица еще упрощается и имеет вид [9]:

$$C_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

Можно ввести вектор скорости смещения в точке v как производную вектора смещения по времени. Система уравнений примет вид:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = (\nabla \cdot \sigma)^T + \vec{f},$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \lambda (\nabla \cdot \vec{v}) \mathbf{I} + \mu (\nabla \otimes \vec{v} + \nabla \otimes \vec{v})^T.$$

Параметры λ и μ называются параметрами Ламе. Вместе с плотностью они задают свойства среды в точке. Скорости продольных и поперечных волн можно выразить через них следующим образом:

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}},$$

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Для описания акустических сред используются уравнение непрерывности и уравнение Эйлера. Обозначим давление, плотность и скорость в точке с радиус-вектором \vec{x} в момент времени t как $p_A(x, t)$, $\rho_A(x, t)$ и $v_A(x, t)$ соответственно. Уравнения имеют следующий вид [10]:

$$\frac{\partial p_A}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_A \vec{v}_A) = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{v}_A}{\partial t} + (\bar{v}_A \nabla) \bar{v}_A = -\frac{1}{\rho_A} \nabla p.$$

В данной работе рассматриваются задачи, в которых до начала распространения волновых возмущений среды находятся в состоянии покоя. Кроме того, изменения давления и плотности, вызванные распространением волн, полагаются малыми по сравнению с их значениями в состоянии покоя. Обозначим давление и плотность в состоянии покоя в выбранной точке как $p_0(x, t)$ и $\rho_0(x, t)$, а их изменения, вызванные распространяющимися волнами, как $p(x, t)$ и $\rho(x, t)$. В предположениях выше, уравнения акустической среды могут быть приведены к такому виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c^2 \nabla \cdot \bar{v} &= 0. \end{aligned}$$

В используемом приближении распространение акустических волн можно рассматривать как частный случай распространения упругих волн в среде, где распространяются только P -волны. Параметры такой упругой среды будут задаваться следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} c_p &= c \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}, \\ c_s &= 0, \\ \mu &= 0. \end{aligned}$$

2. Сеточно-характеристический метод. Рассмотрим применение сеточно-характеристического метода для решения уравнений, описывающих упругую среду. Соберем все неизвестные в этих уравнениях в один вектор [11]:

$$q = [v_1, v_2, v_3, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}].$$

Производные по каждой из координат соберем вместе. Получим матричное уравнение следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} - \mathbf{A}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{q} - \mathbf{A}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{q} - \mathbf{A}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{q} = 0.$$

Выполним расщепление по пространственным координатам [12], то есть разделим одну систему на три разных, по одной для каждой оси. Поскольку изначально система уравнений является гиперболической, то можно выполнить диагонализацию матриц A_i :

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{\Omega}_i^{-1} \mathbf{\Lambda}_i \mathbf{\Omega}_i,$$

где $\mathbf{\Lambda}_i$ — диагональная матрица, состоящая из собственных чисел Λ_p , а $\mathbf{\Omega}_i$ состоит из столбцов, равных собственным векторам \mathbf{A}_i .

Далее можно выполнить замену переменной $\omega_i = \mathbf{\Omega}_i q$, после чего системы по осям примут вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_i + \mathbf{\Lambda}_i \omega_i = 0.$$

Поскольку матрицы $\mathbf{\Lambda}_i$ диагональные, то мы фактически имеем дело с набором отдельных уравнений переноса для каждой из компонент ω_i . Эти отдельные уравнения переноса можно решать при помощи метода характеристик [4], однако в данной работе для их решения используются конечно-разностные схемы.

Таким образом, шаг моделирования по времени происходит следующим образом: сначала выполняется переход к новым переменным и уравнениям переноса, затем выполняется шаг по времени в этих переменных, после чего выполняется обратная замена и вычисляются новые значения исходных переменных в узлах сетки.

3. Метод наложенных сеток. Метод наложенных сеток, впервые описанный в [13], позволяет объединить преимущества использования криволинейных сеток, позволяющих хорошо описывать границы сложной формы с низкой ресурсозатратностью структурных сеток. При использовании этого метода сначала строится основная сетка — большая структурная сетка, покрывающая всю область моделирования. После этого области вблизи границ, которые необходимо описать, покрываются отдельными криволинейными сетками меньшего размера. Если области, покрытые наложенными сетками, составляют незначительную часть от всей области моделирования, то и доля вычислительных ресурсов, затрачиваемая на расчет в наложенных сетках незначительна, то есть добавление наложенных сеток в этом случае не приводит к заметному росту ресурсоемкости расчета.

При использовании наложенных сеток шаг моделирования по времени выполняется в два этапа. Сначала выполняется шаг по времени независимо по каждой из сеток. После этого выполняется перенос значений между сетками. В областях, которые покрыты наложенными сетками, значения в узлах основной сетки перезаписываются значениями из соответствующих наложенных сеток. У каждой из наложенных сеток несколько ближайших

к границе слоев узлов по всем осям называются ghost-узлами (фантомными узлами). Значения в этих узлах не используются для вычисления новых значений в узлах основной сетки, а наоборот, значения в них перезаписываются значениями из основной сетки [6]. Количество используемых слоев фантомных узлов определяется исходя из используемой разностной схемы, в нашем случае оно равно двум, так как используется пятиточечная разностная схема.

Поскольку узлы основной и наложенных сеток не совпадают, а для каждой сетки в каждый момент времени значения функции известны только в узлах, то для вычисления новых значений при перезаписи используется интерполяция. Поскольку в задачах, рассматриваемых в данной работе, не происходит изменений геометрии расчетной области, узлы сеток в ходе расчета остаются неподвижными. Это позволяет перенести часть расчетов, необходимых для интерполяции, на этап предварительной обработки для экономии вычислительных ресурсов в ходе расчета. Во время этой предварительной обработки для всех узлов основной сетки, значения в которых будут перезаписываться, находятся узлы наложенной сетки, значения в которых будут участвовать в вычислении новых значений в узле основной сетки и веса суммирования и, наоборот, для фантомных узлов наложенных сеток ищутся узлы-источники значений из основной сетки и их веса. Таким образом, во время расчета выполняется только взвешенное суммирование с известными коэффициентами.

К часто используемым методам многомерной интерполяции относятся метод ближайшего соседа, метод обратных расстояний [14], метод естественной окрестности (также известный как метод Сибсона [15]) и методы локального разложения по базису. В расчете в данной работе использовался метод локального разложения по функциям радиального вида (Radial Basis Function, RBF).

Вычислительный эксперимент. В рамках данного исследования было проведено моделирование распространения волновых возмущений от точечного источника. Размер моделируемой области составлял 1080×1320 метров, верхняя граница области совпадала с поверхностью воды, а нижняя находилась на глубине 720 метров. Источник возмущений располагался вблизи поверхности воды. Также вблизи поверхности располагались приемники. Карта глубин была взята из набора данных [16]. Плотность среды шельфа полагалась равной 2400 кг/м^3 , скорости продольных и поперечных волн в ней — 2850 м/с и 1650 м/с соответственно. Скорость волн в воде полагалась равной 1500 м/с , а плотность воды — 1050 кг/м^3 . В качестве сигнала источника использовался импульс Рикера. Шаг моделирования по времени составлял 1 мс .

Было рассмотрено два основных подхода к моделированию данной области. В первом подходе использовалась только одна прямоугольная сетка размером $180 \times 220 \times 120$ узлов с шагом 6 метров по всем осям. В зависимости от того, находятся ли узлы выше или ниже поверхности дна, им назначались физические свойства воды или материала дна. При использовании этого подхода поверхность раздела сред фактически имела лестничную структуру. Во втором подходе для описания границы раздела сред использовалась дополнительно наложенная криволинейная сетка размером $192 \times 234 \times 11$ узлов с шагом примерно 6 метров, форма которой повторяла границу раздела. Иллюстрация описания границы раздела этими способами приведена на рисунке 1.

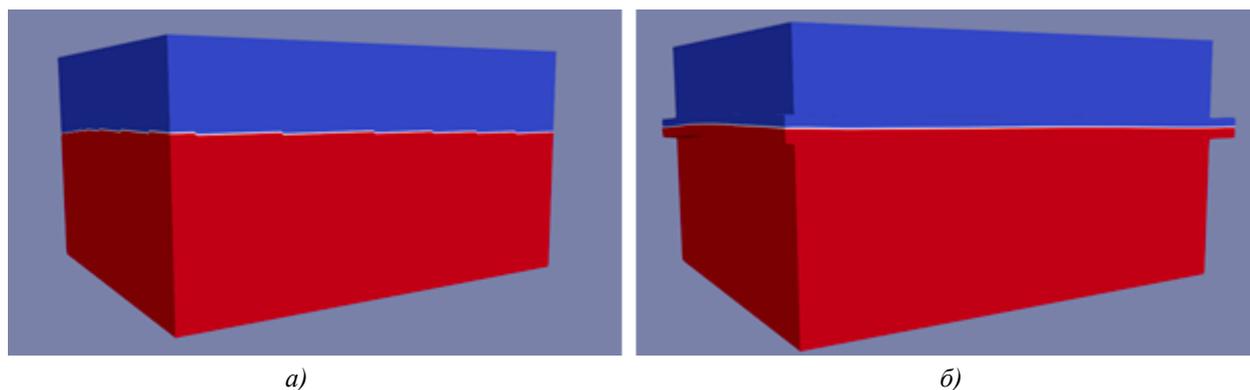


Рис. 1. Моделирование границы раздела:

а) без использования наложенной сетки; б) с использованием наложенной сетки

В данном случае есть два варианта использования наложенных сеток. Можно использовать две наложенные сетки, каждая из которых будет находиться с одной из сторон от границы и задавать между ними контактное условие, а можно ограничиться одной сеткой, в которой будут узлы с разными свойствами. В данном эксперименте использовался второй подход, поскольку в основной сетке все равно присутствуют узлы с различными свойствами, однако если бы области с разных сторон от границы описывались двумя разными основными сетками, то использование первого подхода было бы предпочтительным.

Результаты исследования. Используя показания приемников, полученные в ходе моделирования, были построены синтетические сейсмограммы вертикальной компоненты скорости смещения, приведенные на рисунке 2.

Можно видеть, что эти сейсмограммы качественно совпадают, однако на сейсмограмме, которая была построена с использованием наложенной сетки для описания границы раздела сред, волны видны лучше, а количество артефактов и шума меньше. На рисунке 3 приведено сравнение показаний одного из приемников.

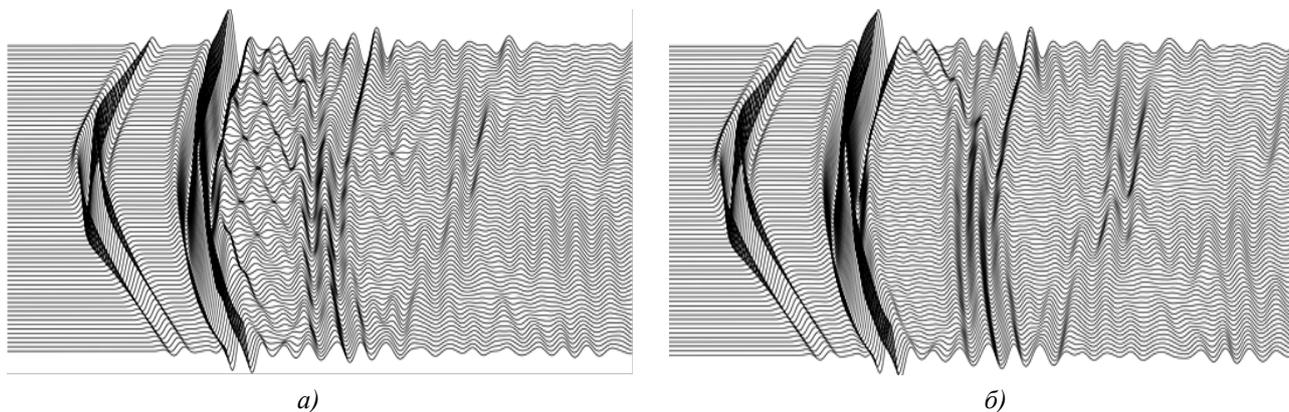


Рис. 2. Синтетические сейсмограммы вертикальной компоненты скорости смещения: а) без использования наложенной сетки; б) с использованием наложенной сетки

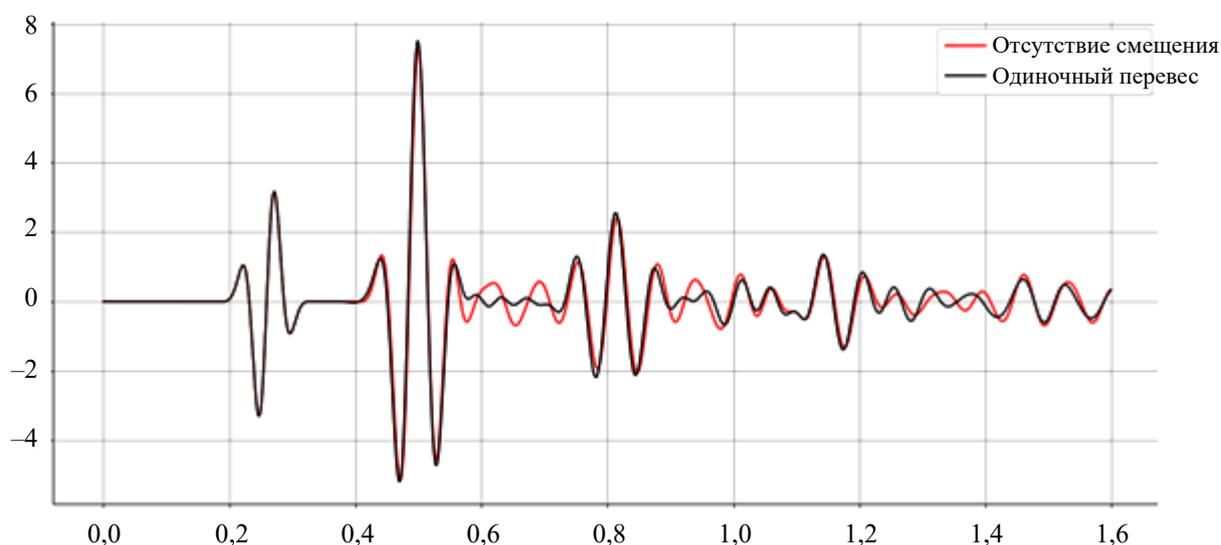


Рис. 3. Сравнение показаний сейсмограммы на одном приемнике

Это сравнение также подтверждает сделанный вывод: использование наложенной сетки позволяет уменьшить погрешность моделирования, количество паразитных волн и артефактов и получить более наглядную картину.

При этом увеличение времени расчета при добавлении наложенной сетки было незначительным и не превышало 10 % от времени расчета с использованием одной сетки.

Обсуждение и заключения. В данном исследовании показано, что наложенные сетки, ранее использовавшиеся для выделения свободной границы при моделировании вблизи поверхности земли на суше, также могут быть применены для описания границы раздела сред при моделировании сейсморазведки океанического шельфа. Их использование позволяет повысить точность моделирования и снизить количество артефактов по сравнению с использованием только одной сетки. При этом использование наложенных сеток не приводит к значительному увеличению ресурсоемкости вычислительного комплекса. Кроме того, наложенные сетки не требуют модификации основной расчетной сетки или внесения значительных изменений в процесс моделирования. Из этого можно сделать вывод, что использование наложенных сеток в подобных задачах зачастую оправдано, поскольку позволяет повысить точность с незначительными издержками.

Предложенный метод может быть использован также для описания границ раздела геологических слоев в твердой среде, поскольку принципиального различия между этими задачами нет. Однако там могут потребоваться дополнительные модификации метода для учета случаев, когда в одной точке смыкаются несколько границ раздела. Исследование этого вопроса пока не проводилось, однако может служить темой последующих работ.

Список литературы

1. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Robert L., et al. *The finite element method: its basis and fundamentals*. 7th ed. Elsevier, 2013. 756 p.
2. Komatitsch D., et al. A perfectly matched layer absorbing boundary condition for the second-order seismic wave equation. *Geophysical Journal International*. 2003;154(1):146–153. <https://doi.org/10.1046/J.1365-246X.2003.01950.X>
3. Zang N., Zhang W., Chen X. An overset-grid finite-difference algorithm for simulating elastic wave propagation in media with complex free-surface topography. *Geophysics*. 2021;86(4):1–97. <https://doi.org/10.1190/geo2020-0915.1>
4. Магомедов К.М., Холодов А.С. О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1969;9(2):158–176. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(69\)90099-8](https://doi.org/10.1016/0041-5553(69)90099-8)
5. Магомедов К.М., Холодов А.С. *Сеточно-характеристические численные методы*, 2-е изд. Москва: Юрайт, 2023. 313 с.
6. Khokhlov N.I., Stetsyuk V.O., Mitskovets I.A. Overset grids approach for topography modelling in elastic-wave modelling using the grid-characteristic method. *Computer Research and Modelling*. Institute of Computer Science. 2019; 11(6):1049–1059. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2019-11-6-1049-1059>
7. Новацкий В. *Теория упругости*. Москва: Мир, 1975. 872 с.
8. Voigt W. *Lehrbuch der kristallphysik (mit ausschluss der kristalloptik)*. Leipzig; Berlin: B.G. Teubner, 1910. 998 p.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, в 10 т. *Теория упругости*, 5-е изд. Д.А. Миртова (ред.). Москва: Физматлит, 2003. Т. 7. 264 с.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Учебное пособие, в 10 т. *Гидродинамика*, 6-е изд. Л.П. Питаевский (ред.). Москва: Физматлит, 2015. Т. 6. 728 с.
11. Favorskaya A.V. et al. Modelling the wave phenomena in acoustic and elastic media with sharp variations of physical properties using the grid-characteristic method. *Geophysical Prospecting*. Blackwell Publishing Ltd, 2018;66(2):1485–1502. <https://doi.org/10.1111/1365-2478.12639>
12. LeVeque R.J. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511791253>
13. Benek J.A. Steger J.L.; Dougherty F.C., et al. *Chimera: A Grid-Embedding Technique*. 1986. 300 p.
14. Shepard D. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. In: *Proceedings of the 1968 23rd ACM National Conference, 27–29 August 1968*. New York, 1968. Pp. 517–524. <https://doi.org/10.1145/800186.810616>
15. Sibson R. *A Brief Description of Natural Neighbor Interpolation*. V. Barnett (ed., Interpreting Multivariate Data, John Wiley & Sons, New York, 1981. Pp. 21–36.
16. Butman B., Danforth W.W., Clark J.H., et al. *Bathymetry and backscatter intensity of the sea floor of the Hudson Shelf Valley*. U.S. Geological Survey, 2017. <https://doi.org/10.5066/F7C53J1Z>

References

1. Zienkiewicz OC, Taylor RL, Robert L, et al. *The finite element method: its basis and fundamentals*. 7th ed. Elsevier, 2013. 756 p.
2. Komatitsch D, et al. A perfectly matched layer absorbing boundary condition for the second-order seismic wave equation. *Geophysical Journal International*. 2003;154(1):146–153. <https://doi.org/10.1046/J.1365-246X.2003.01950.X>
3. Zang N, Zhang W, Chen X. An overset-grid finite-difference algorithm for simulating elastic wave propagation in media with complex free-surface topography. *Geophysics*. 2021;86(4):1–97. <https://doi.org/10.1190/geo2020-0915.1>
4. Magomedov KM, Kholodov AS. On the construction of difference schemes for hyperbolic equations based on characteristic relations. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1969;9(2):158–176. (In Russ.). [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(69\)90099-8](https://doi.org/10.1016/0041-5553(69)90099-8)
5. Magomedov KM, Kholodov AS. *Grid-characteristic numerical methods*, 2nd ed. Moscow: Yurayt, 2023. 313 p. (In Russ.).
6. Khokhlov NI, Stetsyuk VO, Mitskovets IA. Overset grids approach for topography modelling in elastic-wave modelling using the grid-characteristic method. *Computer Research and Modelling*. Institute of Computer Science. 2019;11(6):1049–1059. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2019-11-6-1049-1059>
7. Novatsky V. *Theory of elasticity*. Moscow: Mir, 1975. 872 p. (In Russ.).
8. Voigt W. *Lehrbuch der kristallphysik (mit ausschluss der kristalloptik)*. Leipzig; Berlin: B.G. Teubner, 1910. 998 p.
9. Landau LD, Lifshits EM. Theoretical physics, in 10 vols. *Theory of Elasticity*, 5th ed., by DA Mirtov (ed.). Moscow: Fizmatlit, 2003. Vol. 7. 264 p. (In Russ.).
10. Landau LD, Lifshits EM. Theoretical physics. Textbook, in 10 t. *Hydrodynamics*, 6th ed., by LP Pitaevsky (ed.). Moscow: Fizmatlit, 2015. Vol. 6. 728 P.
11. Favorskaya AV, et al. Modelling the wave phenomena in acoustic and elastic media with sharp variations of physical properties using the grid-characteristic method. *Geophysical Prospecting*. Blackwell Publishing Ltd, 2018;66(2):1485–1502. <https://doi.org/10.1111/1365-2478.12639>

12. LeVeque RJ. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511791253>
13. Benek JA, Steger JL, Dougherty FC, et al. *Chimera: A Grid-Embedding Technique*. 1986. 300 p.
14. Shepard D. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. In: *Proceedings of the 1968 23rd ACM National Conference, 27–29 August 1968*. New York, 1968. Pp. 517–524. <https://doi.org/10.1145/800186.810616>
15. Sibson R. *A Brief Description of Natural Neighbor Interpolation*, by V Barnett (ed.). *Interpreting Multivariate Data*, John Wiley & Sons, New York, 1981. Pp. 21–36.
16. Butman B, Danforth WW, Clark JH, et al. *Bathymetry and backscatter intensity of the sea floor of the Hudson Shelf Valley*. U.S. Geological Survey, 2017. <https://doi.org/10.5066/F7C53J1Z>

Об авторе:

Стецюк Владислав Олегович, ассистент, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), (РФ, 117303, г. Москва, ул. Керченская, 1А, корп. 1), Math-Net.Ru, stetsyuk@phystech.edu

Поступила в редакцию 24.07.2023

Поступила после рецензирования 16.08.2023

Принята к публикации 17.08.2023

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

About the Author:

Vladislav O Stetsyuk, Assistant, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), (bldg. 1, 1A, Kerchenskaya Street, Moscow, 117303, RF), Math-Net.Ru, stetsyuk@phystech.edu

Received 24.07.2023

Revised 16.08.2023

Accepted 17.08.2023

Conflict of interest statement

The author does not have any conflict of interest.

The author has read and approved the final manuscript.