

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 519.6

Научная статья

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-28-38>


Сеточно-характеристический метод с использованием наложенных сеток в задаче сейсморазведки трещиноватых геологических сред

И.А. Митьковец, Н.И. Хохлов ✉

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Российская Федерация,
г. Москва, ул. Керченская, 1А, корп. 1

✉ k_h@inbox.ru

Аннотация

Введение. Сейсморазведка в условиях гетерогенности среды является актуальной темой для нефтегазовой промышленности. Следовательно, остается актуальным развитие численных методов решения прямой задачи сейсморазведки как необходимого звена при разработке и усовершенствовании методов решения обратной задачи. Модель тонкой трещины Шонберга хорошо себя показала при численном решении задач, требующих явного учета геологических неоднородностей.

Материалы и методы. В данной работе авторы рассматривают модификацию сеточно-характеристического метода применением наложенных сеток. Представленный подход позволяет проводить вычислительные эксперименты, явно учитывая трещиноватые неоднородности с произвольной пространственной ориентацией. Для этого помимо основной регулярной вычислительной сетки вводится понятие наложенных сеток. Неоднородности, такие как трещины, описываются в рамках наложенной сетки и, в свою очередь, не имеют ограничений, связанных с основной сеткой. Таким образом, производя операцию интерполирования между наложенными основными сетками, мы можем обойти требование соосности трещин и ребер основной сетки.

Результаты исследования. Предлагаемый подход позволил произвести исследование зависимости анизотропии сейсмического отклика трещиноватого кластера от дисперсии углов наклона трещин.

Обсуждение и заключения. Предложена модификация сеточно-характеристического метода с применением наложенных сеток для явного учета трещиноватых неоднородностей в гетерогенной геологической среде.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00139. <https://rscf.ru/project/21-11-00139/>

Ключевые слова: сеточно-характеристический метод, наложенные сетки, химерные сетки, сейсмика, сейсморазведка, гетерогенная геологическая среда

Для цитирования. Митьковец И.А., Хохлов Н.И. Сеточно-характеристический метод с использованием наложенных сеток в задаче сейсморазведки трещиноватых геологических сред. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):28–38. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-28-38>

Original article

Grid-characteristic method using superimposed grids in the problem of seismic exploration of fractured geological media

Ivan A Mitkovets, Nikolay I Khokhlov ✉

Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), 1A, build 1, Kerchenskaya St., Moscow, Russian Federation

✉ k_h@inbox.ru

Abstract

Introduction. Seismic exploration in conditions of heterogeneity of the environment is an urgent topic for the oil and gas industry. Consequently, the development of numerical methods for solving the direct problem of seismic exploration remains relevant as a necessary link in the development and improvement of methods for solving the inverse problem.

The Schonberg thin crack model has performed well in the numerical solution of problems requiring explicit consideration of geological inhomogeneities.

Materials and Methods. In this paper, we consider a modification of the grid-characteristic method using superimposed grids. The presented approach makes it possible to conduct computational experiments, explicitly taking into account fractured inhomogeneities with arbitrary spatial orientation. For this, in addition to the basic regular computational grid, there is the concept of superimposed grids. Inhomogeneities, such as cracks, are described within the framework of the superimposed grid and, in turn, have no restrictions associated with the main grid. Thus, by performing an interpolation operation between the superimposed main grids, we can bypass the requirement of alignment of cracks and edges of the main grid.

Results. The proposed approach made it possible to study the dependence of the anisotropy of the seismic response of a fractured cluster on the dispersion of the angles of inclination of the cracks.

Discussion and Conclusions. A modification of the grid-characteristic method using superimposed grids is proposed to explicitly account for fractured inhomogeneities in a heterogeneous geological environment.

Funding information. The research was carried out at the expense of the grant of the Russian Science Foundation no. 21-11-00139. <https://rscf.ru/project/21-11-00139/>

Keywords: grid-characteristic method, superimposed grids, chimeric grids, seismics, seismic exploration, heterogeneous geological environment

For citation. Mitkovets IA, Khokhlov NI. Grid-characteristic method using superimposed grids in the problem of seismic exploration of fractured geological media. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):28–38. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-28-38>

Введение. На сегодняшний день методики поиска и исследования нефтегазовых месторождений включают в себя эффективное решение обратной задачи сейсморазведки в условиях гетерогенной геологической среды. Это становится неотъемлемо важным, учитывая, что известные нефтегазовые залежи постепенно истощаются, а для поддержания уровня добычи необходим поиск новых месторождений либо добыча полезных ископаемых из уже выработанных месторождений с использованием современных методов. Зачастую потенциальные участки расположены в регионах, богатых трещиноватостями неоднородностями. Дополнительно современные технологии увеличения добычи на месторождениях предусматривают применение такого инструмента, как гидроразрыв пласта. Современные подходы к гидроразрыву, основанные на многоступенчатых процедурах, открывают возможности для возобновления добычи даже на тех месторождениях, которые были признаны истощенными на протяжении многих лет. Геофизическая информация, собранная в результате сейсморазведки, позволяет проводить моделирование процесса гидроразрыва пласта, что является критическим элементом для адаптации технологии к конкретному месторождению. С учетом расположения уже существующих трещин, а также с учетом параметров трещиноватости (что можно определить с помощью сейсморазведки) можно контролировать форму образующегося разрыва. Такой контроль над формой создаваемой трещины актуален из-за риска возникновения пробок в образовавшихся каналах, что может привести к их блокировке и, как следствие, к снижению эффективности эксплуатации месторождения. Для успешного проведения такого рода манипуляции первостепенная важность придается наличию точной картины структуры трещин и разломов, скрытых под земной поверхностью.

В процессе проведения сейсморазведки данные, полученные на множестве сейсмических датчиков, расположенных на незначительной глубине в земной поверхности, интерпретируются современными методами вычислительной математики для воссоздания модели геологической среды в изучаемой области. Однако проверить результаты, полученные таким образом, затруднительно за неимением возможности получить подробную и качественную модель геологической среды альтернативными способами. Таким образом, для развития возможностей и точности современных методов решения обратной задачи сейсморазведки критически важно развивать возможности и точность методов решения прямой задачи сейсморазведки.

Сегодня известно несколько методик, которые учитывают присутствие трещиноватых структур при моделировании распространения волн упругих возмущений в подлинных геологических формациях. Одна из наиболее распространенных — это математический подход, основывающийся на модели линейного скольжения, предложенной Шонбергом (LSM), что было описано в статье, опубликованной в 1980 году [1], и получило дальнейшее экспериментальное подтверждение в других источниках [2–3]. Тем не менее, при моделировании областей с разломами использование анизотропных моделей [4] оказывается наиболее эффективным на больших длинах волн, хотя и не учитывает большую часть характеристик. Альтернативным методом для моделирования зоны с разломами является эксплицитный подход [5], который имеет свои преимущества. Были также изучены и другие методики, включая добавление дополнительных узлов, как показано в работах [6–7], а также применение дополнительных вычислительных сеток для описания процесса распространения волн внутри разлома [8].

В рамках данного исследования авторы представляют новый вариант сеточно-характеристического метода [9], в котором применяется техника наложенных сеток. Первые концепции этого подхода были изложены в источнике [10]. Одной из первоначальных работ, посвященных применению наложенных (или адаптивных) вычислительных сеток, стала работа авторов по фамилии Бергер и Джозеф [11], а также Стегер и Бэнек [12–13]. Идея использования наложенных сеток успешно развивалась и в настоящее время применяется для решения различных задач, как показано в исследованиях [14–18]. Инновационность предлагаемой авторами методики заключается в применении наложенных сеток при решении задач сейсморазведки трещиноватых областей и в организации этих сеток вокруг трещин таким образом, чтобы якобиан преобразования стремился к единице. В данном исследовании авторы фокусируются на 2D геологических моделях.

Материалы и методы

1. Уравнение упругости. Одним из ключевых уравнений в линейной теории упругости считается уравнение Гука, которое осуществляет связь между тензором напряжений и тензором деформаций [19–20]. Уравнения сохранения массы и импульса также применяются для описания процесса распространения волн в среде. Более сложное представление упругих сред возможно с помощью расширенных уравнений, учитывающих нелинейные и неоднородные характеристики среды. В этих уравнениях могут присутствовать нелинейные связи между напряжением и деформацией, а также могут быть учтены разнообразные физические процессы, например, анизотропия или диссипация энергии. В рамках исследования для решения обобщенной задачи моделирования распространения сейсмической волны в грунте выбрана модель линейно-упругой и изотропной среды. Эта модель была изучена в ряде предыдущих работ [21–24].

В каждой точке линейно-упругой среды выполняется второй закон Ньютона:

$$\rho \vec{v}_t = (\nabla \cdot \mathbf{T})^T, \quad (1)$$

где $\mathbf{T}$ — тензор напряжений Коши, ρ — плотность среды, $\mathbf{v}$ — скорость перемещения среды.

Закон Гука в тензорной форме имеет вид:

$$\mathbf{T} = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{u} + (\mathbf{u} \otimes \nabla)^T), \quad (3)$$

где $\mathbf{u}$ — тензор смещения, $\mathbf{I}$ — единичный тензор, λ и μ — параметры Ламе, характеристики упругих деформаций, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор деформаций, $\otimes$ — оператор тензорного произведения $(\nabla \otimes \mathbf{v})_{i,j} = \nabla_i v_j$.

Тогда, учитывая воздействие внешней силы $\vec{f}$, из уравнений (1)–(3) можно получить систему уравнений для линейно-упругой изотропной среды в следующем виде:

$$\mathbf{T} = \lambda (\nabla \cdot \vec{v}) \mathbf{I} + \mu (\nabla \otimes \vec{v} + (\nabla \otimes \vec{v})^T), \quad (4)$$

$$\rho \vec{v}_t = (\nabla \cdot \mathbf{T})^T + \vec{f}. \quad (5)$$

Система из уравнений (4) и (5) может быть представлена в виде системы дифференциальных уравнений, тут и далее в работе полагаем отсутствие внешней силы:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{T}_{ij} = \lambda \left(\sum_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) I_{ij} + \mu (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i), \quad (6)$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} v_j = \frac{\partial \mathbf{T}_{ji}}{\partial x_i}. \quad (7)$$

Систему дифференциальных уравнений теории линейной упругости (6) и (7), можно представить в матричном виде, который удобно использовать при изучении характеристических методов вычислительной математики. Введем обозначения $\vec{u} = (u_1, \dots, u_5)^T = (v_1, v_2, \mathbf{T}_{11}, \mathbf{T}_{22}, \mathbf{T}_{12})^T$, тогда система уравнений в декартовой системе координат приобретает вид:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \mathbf{A}_2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} = 0, \quad (8)$$

$$\mathbf{A}_1 = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} \\ \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\mathbf{A}_2 = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Для описания упругих свойств среды удобно использовать скорости звуковых волн: продольную C_p и поперечную C_s . Продольная скорость отражает скорость волны по направлению силы, поперечная — в перпендикулярном. Они вычисляются через параметры Ламе и плотность среды следующим образом:

$$C_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (11)$$

$$C_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (12)$$

В настоящей работе для моделирования распространения упругих волн в присутствии трещин используется модель двух береговой тонкой трещины Шонберга. В случае, когда трещина ориентирована вдоль оси O_y , граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{xx}^0 &= \mathbf{T}_{xx}^1, \\ \mathbf{T}_{xy}^0 &= \mathbf{T}_{xy}^1, \\ \frac{\partial \mathbf{T}_{xx}^0}{\partial t} &= K_T (v_x^1 + v_x^0), \\ \frac{\partial \mathbf{T}_{xy}^0}{\partial t} &= K_N (v_y^1 + v_y^0). \end{aligned}$$

где индексы 0 и 1 используются для отметки отношения величины к левой и правой стороне трещины соответственно, K_T и K_N параметры трещины, которые в нашем случае тонкой заполненной жидкостью трещины равны:

$$\begin{aligned} K_T &= \infty, \\ K_N &= 0. \end{aligned}$$

2. Сеточно-характеристический метод. В данной работе для получения численного решения системы уравнений, описывающих линейно-упругую среду, применяется сеточно-характеристический метод. Этот метод был впервые представлен в работах [25–27]. В контексте данного исследования, которое ограничено численным решением системы уравнений гиперболического типа, можно утверждать, что для матрицы $\mathbf{A}_j$ всегда существует N собственных значений и N линейно независимых собственных векторов. Это в свою очередь подтверждает возможность существования обратной матрицы для $\mathbf{\Omega}_j$. Тогда с учетом расщепления по компонентам уравнение (8) принимает вид:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{\Omega}_j^{-1} \mathbf{A}_j \mathbf{\Omega}_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}, j = 1, 2, \quad (13)$$

где $\mathbf{\Omega}_j$ состоит из столбцов, являющихся собственными векторами матрицы $\mathbf{A}_j$, а $\mathbf{A}_j$ — диагональная матрица, состоящая из собственных значений матрицы $\mathbf{A}_j$. При этом, $\mathbf{A}_j$ при любом j имеет одинаковый вид:

$$\Lambda = \text{dia } g\sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, -\sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \sqrt{\mu/\rho}, -\sqrt{\mu/\rho}, -\sqrt{\mu/\rho}, 0, 0, 0. \quad (14)$$

Принимая во внимание выражения (11) и (12), можно привести уравнение (14) к виду:

$$\Lambda = \text{diag}\{C_p, -C_p, C_s, -C_s, C_s, -C_s, 0, 0, 0\}.$$

Произведем характеристическую замену переменных $\mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \mathbf{u}$ ($\mathbf{u} = \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{v}$) в уравнении (13), b помножим слева на матрицу $\mathbf{\Omega}^{-1}$:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0.$$

Таким образом, вычисление значения для каждого элемента вектора $\mathbf{u}$ на последующем временном шаге, обозначаемом как $n+1$, осуществляется при условии, что известно значение $\mathbf{v}^{(n+1)}$: $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{v}^{n+1}$.

3. Наложенные сетки. На старте каждого этапа вычислительного процесса, который ограничен определенным временным шагом, после произведения вычислений в узлах основной вычислительной сетки осуществляется прямая интерполяция из основной сетки во внешние узлы наложенной сетки. Это действие является необходимым для учета изменения напряженности и векторного смещения среды, вызванных процессом распространения волны в рамках основной сетки. После чего производятся вычисления новых значений в узлах наложенной сетки. В завершении каждого временного шага производится обратная интерполяция из узлов наложенной сетки в основную. Этот процесс обеспечивает синхронизацию изменений, которые имели место на протяжении данного этапа вычислений. Такой подход обусловлен необходимостью учесть влияние разнообразных неоднородностей, представленных в наложенных сетках, при выполнении расчетов на следующем временном этапе [28].

В данной работе авторы использовали функцию билинейной интерполяции для поиска значений искомых функций в точке по значениям функции в четырех известных точках:

$$F_{x,y} = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 xy.$$

Применение наложенных сеток

1. Реализация. При применении наложенной сетки для определения положения наклонной трещины сплошная среда может быть представлена с использованием одной основной прямоугольной сетки. В то же время, трещины можно задать с помощью наложенных сеток, которые расположены в соответствии с ориентацией каждой отдельной трещины. Методика расчета прямой трещины на регулярной прямоугольной сетке и ее применение в рамках сеточно-характеристического метода были подробно описаны в научной работе [9]. Важно отметить, что применение наложенной сетки не является обязательным для учета трещины, соосных с ребрами основной вычислительной сетки.

На рисунке 1 представлено расположение используемых сеток и трещины, также обозначены узлы наложенной сетки, участвующие в интерполяции между сетками. На рисунке черным цветом представлены границы основной прямоугольной регулярной сетки, представляющие окружающую среду. Ребра наложенной сетки выделены синим цветом. Зеленым цветом отмечены дополнительные «призрачные» узлы наложенной сетки, куда осуществляется интерполяция из основной сетки. Оранжевым цветом выделена часть узлов наложенной сетки, откуда происходит интерполяция. Красная линия указывает на местоположение трещины.

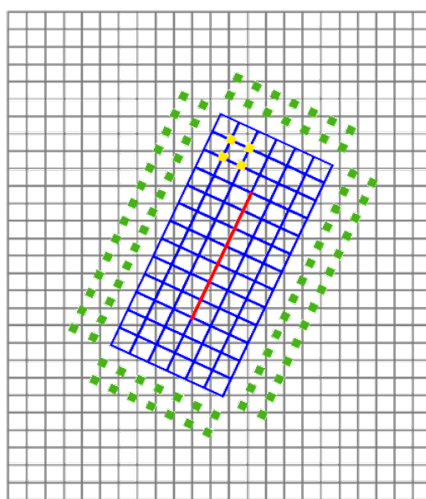


Рис. 1. Использование наложенной сетки для учета трещины

2. Верификация. Для оценки точности предложенной модификации проведем сравнение показаний, получаемых на виртуальных приемниках в ходе моделирования взаимодействия упругой волны с трещиной. В одном случае трещина совпадает с горизонтальной осью основной сетки, а в другом — она повернута относительно этой оси с использованием наложенной сетки. Чтобы осуществить такой поворот, необходимо корректно обрабатывать данные, полученные с виртуальных приемников, а также корректно проводить поворот трещины и приемников, и источника упругой волны.

Волновые картины в один из моментов времени для сравниваемых постановок, а также расположения приемников и наложенной сетки представлены на рисунке 2 (а, б).

В ходе вычислительных экспериментов начальные условия предполагали наличие упругих возмущений плоского фронта, заданных гауссовой функцией с шириной в 10 метров. Фронт инициируемой плоской волны был повернут относительно моделируемой трещины на угол, составляющий 30 градусов. Длина тонкой трещины составляла 52 метра. В вычислении с применением наложенной сетки система «волна-трещина-приемники» была повернута на угол в 30 градусов. Приемники были размещены на линии, перпендикулярной моделируемой трещине и проходящей через ее центр, на отдалении 30 метров от нее. Продольная скорость упругой волны в среде

составляла $C_p = 3000$ м/с, поперечной — $C_s = 1500$ м/с, шаг по времени — $dt = 0,0002$ секунды, пространственный шаг сеток — $h = 2,0$.

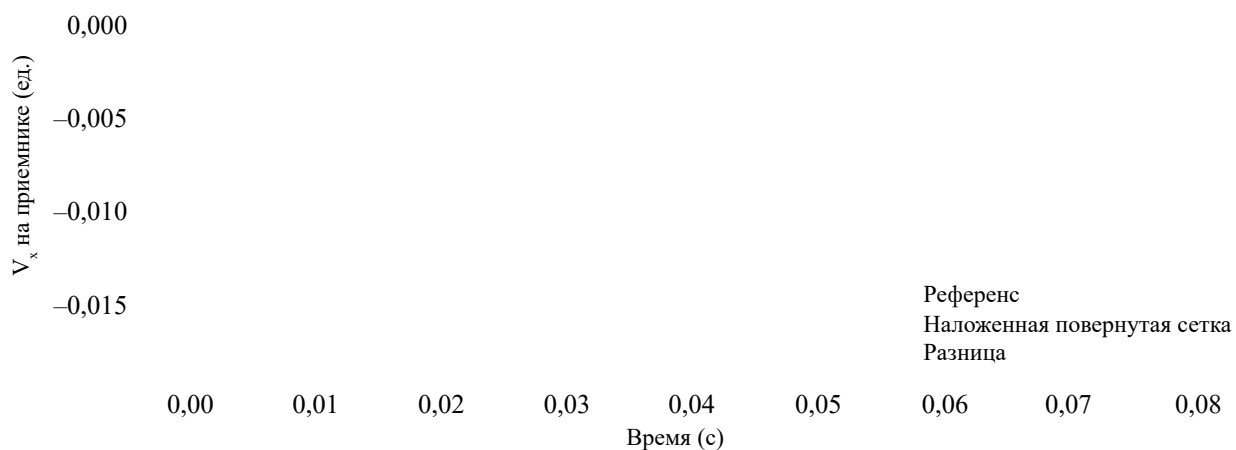


Рис. 2. Волновые картины в один из моментов времени:

а) без использования наложенной сетки (зеленым отмечено положение приёмников); б) с использованием наложенной сетки, отмеченной белым цветом, зеленым — приёмники

Сравнение значений компонент скорости смещения среды, полученные в результате проведения описанных выше экспериментов, представлены на рисунках 3 и 4, для приёмников над трещиной и за ней соответственно.

Сравнение V_x



Сравнение V_y

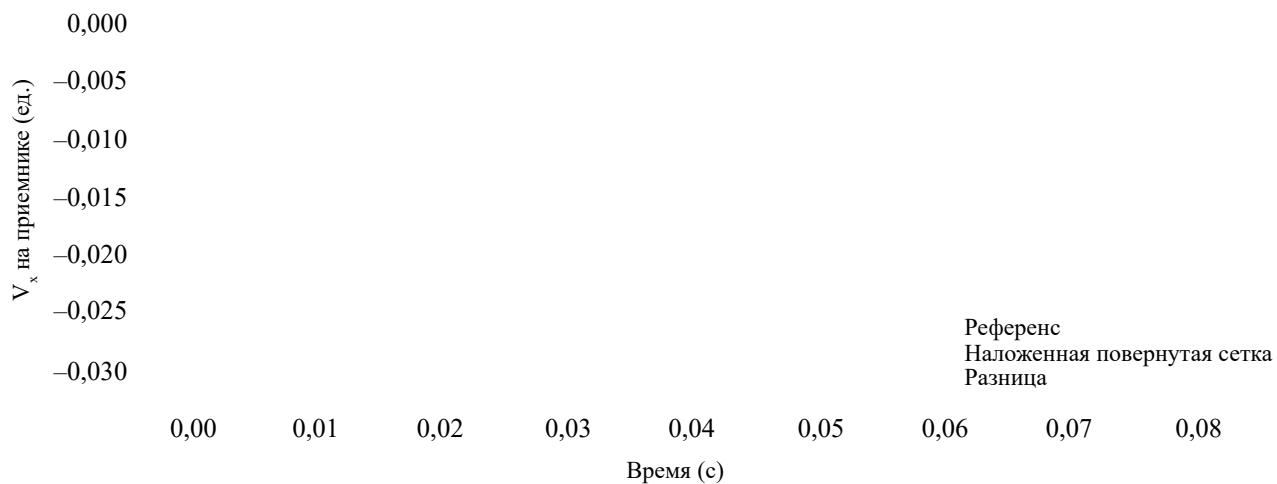


Рис. 3. Сравнение сигналов на приёмниках над трещиной

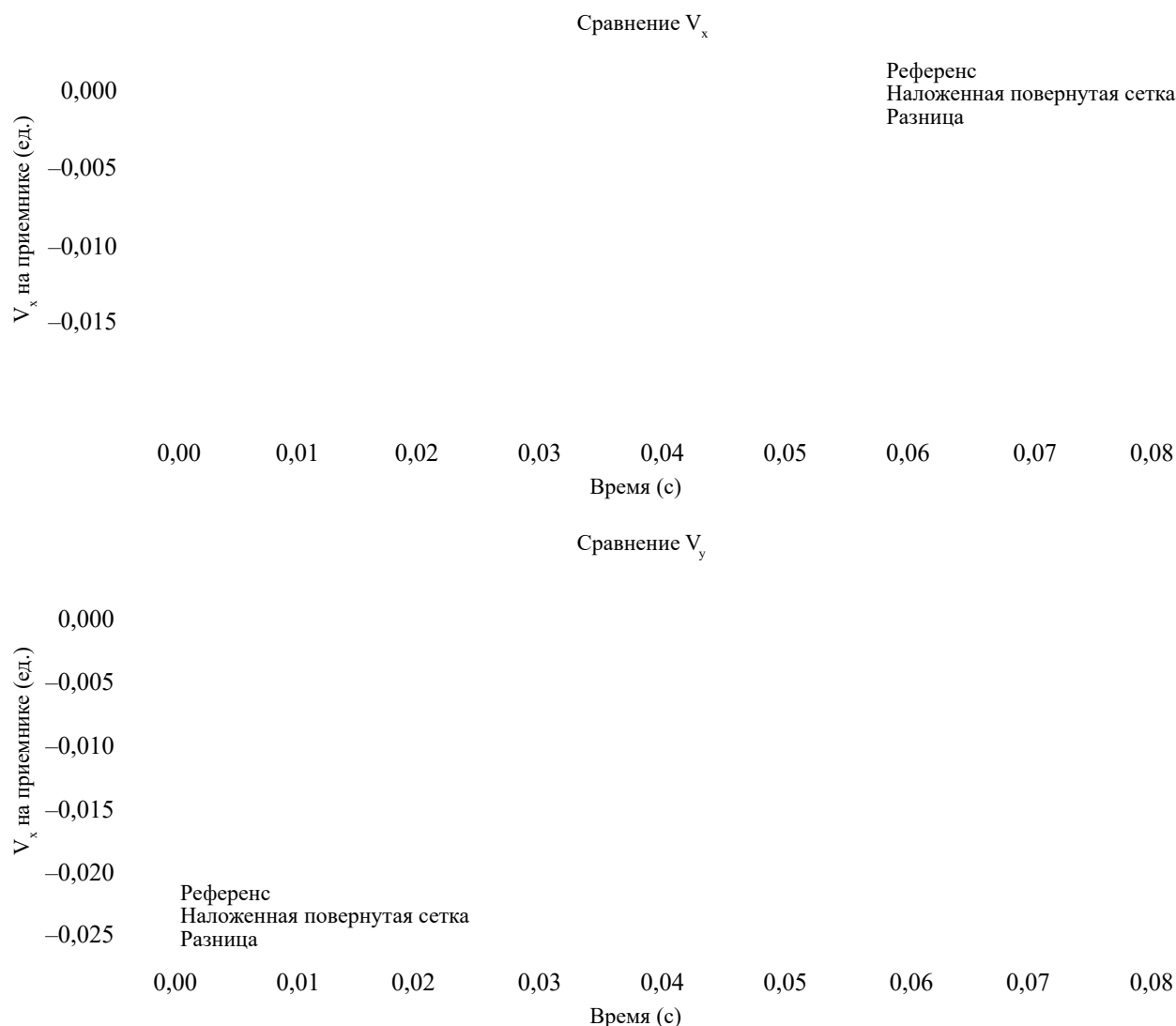


Рис. 4. Сравнение сигналов на приемниках под трещиной

Результаты исследования. В рамках настоящего исследования был проведен анализ анизотропии сейсмического ответа трещиноватого кластера в упругой геологической среде, взаимосвязанной с дисперсией наклона трещин. Подобный анализ, относящийся к анизотропии сейсмического ответа трещиноватого кластера, зависящего от изменяемого расстояния между трещинами и частоты источника, был проведен в работе [29]. Задача численного моделирования сейсмического ответа от трещиноватых кластеров субвертикальных трещин с использованием сеточно-характеристического метода была рассмотрена в ряде научных статей [30–33].

В рамках данного исследования было использовано фиксированное расстояние в 30 метров между соседними по вертикали и горизонтали трещинами. Всего было размещено 128 трещин, которые были организованы в 8 слоев и 16 колонок. Каждая трещина была наклонена под произвольным углом относительно вертикали и имела длину 10 метров. В каждом отдельном эксперименте углы поворота трещин соответствовали нормальному распределению со средним значением 45 градусов и дисперсией, варьирующейся от 0 до 20 градусов. Схема задачи и расположение кластера трещин в моделируемом полупространстве представлены на рисунке 5.

В ряде вычислительных экспериментов использовался источник плоской волны длиной 50 метров, который вертикально падал и был задан функцией Рикера. Шаг интеграции по времени составил $3 \cdot 10^{-4}$ секунды, общее количество шагов составило 3000. Для регистрации сейсмического отклика в экспериментах использовались 300 приемников, равномерно распределенных на глубине 6 метров от поверхности моделируемой области. Для выделения сейсмического отклика от волны, проходящей через приемники, в процессе обработки результатов показания приемников за время эксперимента, меньше 0,0801 секунды, были проигнорированы. Продольная скорость упругой волны в среде составляла $C_p = 3000$ м/с, поперечной — $C_s = 1500$ м/с, пространственный шаг сеток — $h = 2,0$.

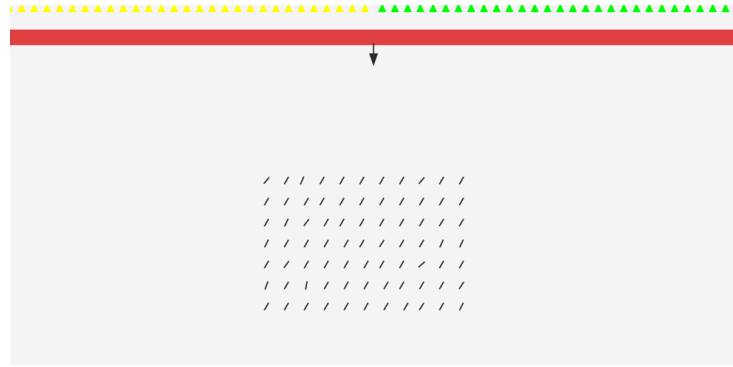


Рис. 5. Схема вычислительного эксперимента. Желтыми и зелеными треугольниками обозначены «левая» и «правая» группы приёмников

Для оценки анизотропии сейсмического отклика, используемые приёмники были разделены на две равные группы: группа приемников с индексом L располагалась слева от середины (по оси O_x) основной наложенной сетки, а группа приемников с индексом R — справа. Пусть скорость смещения среды в проекции на ось O_x , зарегистрированная в конце i -ого вычислительного шага, на j -ом виртуальном приемнике в группе L обозначается $V_{x,L}^{ij}$ (для проекции на O_y , соответственно, $V_{y,L}^{ij}$). Тогда анизотропию сейсмического отклика A в заданном эксперименте можем рассчитать по следующим формулам:

$$E_R = \sum_{i=1}^{150} \sum_{j=267}^{3000} \left((V_{x,L}^{i,j})^2 + (V_{y,L}^{i,j})^2 \right),$$

$$E_L = \sum_{i=1}^{150} \sum_{j=267}^{3000} \left((V_{x,R}^{i,j})^2 + (V_{y,R}^{i,j})^2 \right),$$

$$A = \frac{E_L - E_R}{E_L + E_R}.$$

Результаты серии вычислительных экспериментов представлены на рисунке 6.

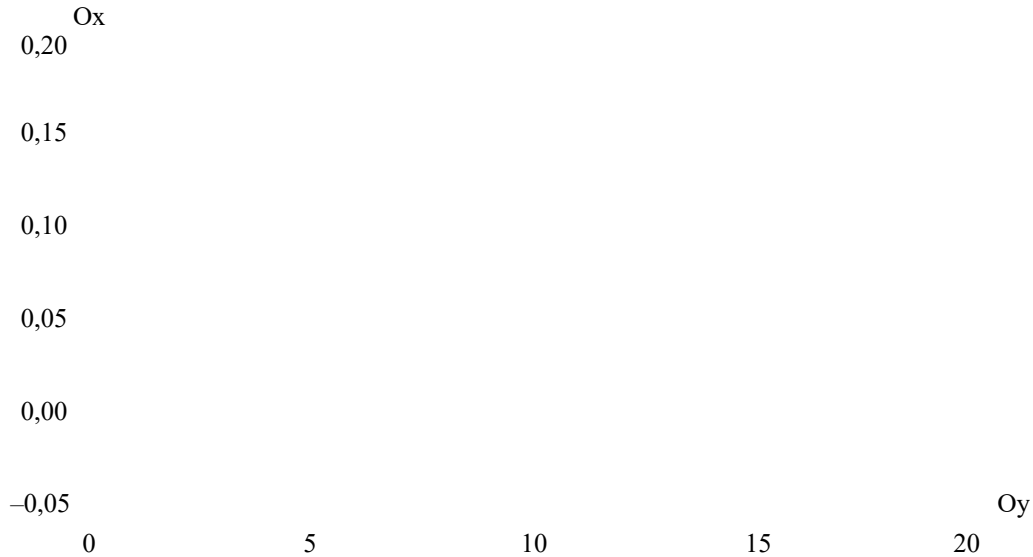


Рис. 6. Зависимость анизотропии от дисперсии наклона трещин в кластере

Обсуждение и заключения. Предложена модификация сеточно-характеристического метода с применением наложенных сеток для явного учета трещиноватых неоднородностей в гетерогенной геологической среде.

Проведено верификационное исследование, которое показало высокую точность предлагаемого подхода и не вносит значительной ошибки по сравнению с использованием классической реализации тонкой трещины Шонберга в сеточно-характеристическом методе и при этом расширяет ряд прикладных задач, доступных для численного моделирования данным методом.

Исследована зависимость анизотропии сейсмического отклика от трещиноватого кластера в зависимости от дисперсии угла наклона трещин в последнем. Полученная зависимость показывает значительный разброс результатов, что демонстрирует сложность обратной задачи сейсморазведки гетерогенных геологических структур.

В заключение можно сделать вывод, что использование наложенных сеток позволяет явно учитывать геологические неоднородности, такие как трещины, при численном решении задачи моделирования распространения упругих волн в геологической среде. Представленный подход к описанию неоднородностей обладает высоким потенциалом в вычислительной математике и вызывает интерес к его дальнейшему изучению.

Список литературы

1. Schoenberg M. Elastic Wave Behavior Across Linear Slip Interfaces. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1980;68:1516–21. <https://doi.org/10.1121/1.385077>
2. Pyrak-Nolte L.J., Myer L.R., Cook N.G.W. Anisotropy in Seismic Velocities and Amplitudes from Multiple Parallel Fractures. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 1990;95:11345–58. <https://doi.org/10.1029/JB095IB07P11345>
3. Chaur-Jian H., Schoenberg M. Elastic Waves Through a Simulated Fractured Medium. *Geophysics*. 1993;58:924–1060. <https://doi.org/10.1190/1.1443487>
4. Backus G.E. Long-Wave Elastic Anisotropy Produced by Horizontal Layering. *Journal of Geophysical Research*. 1962;67:4427–40. <https://doi.org/10.1029/JZ067I011P04427>
5. Zhang J. Elastic Wave Modeling in Fractured Media with an Explicit Approach. *Geophysics*. 2005;70. <https://doi.org/10.1190/1.2073886>
6. Slawinski R.A., Krebes E.S. Finite-Difference Modeling of SH-Wave Propagation in Nonwelded Contact Media. *Geophysics*. 2002;67:1656–63. <https://doi.org/10.1190/1.1512753>
7. Slawinski R.A., Krebes E.S. The Homogeneous Finite-Difference Formulation of the p-SV-Wave Equation of Motion. *Studia Geophysica Et Geodaetica*. 2002;46:731–51. <https://doi.org/10.1023/A:1021133606779>
8. Zhang J., Gao H. Elastic Wave Modelling in 3-d Fractured Media: An Explicit Approach. *Geophysical Journal International*. 2009;177:1233–41. <https://doi.org/10.1111/J.1365-246X.2009.04151.X>
9. Favorskaya A.V., Zhdanov M.S., Khokhlov N.I., et al. Modelling the wave phenomena in acoustic and elastic media with sharp variations of physical properties using the grid-characteristic method. *Geophysical Prospecting*. 2018;66(8):1485–1502.
10. Ruzhanskaya A., Khokhlov N. Modelling of Fractures Using the Chimera Grid Approach. In 2nd Conference on Geophysics for Mineral Exploration and Mining. *European Association of Geoscientists & Engineers*. 2018;1:1–5.
11. Berger M.J., Olinger J. Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. *Journal of Computational Physics*. 1984;53(3):484–512.
12. Steger J.L., Dougherty F.C., Benek J.A. A chimera grid scheme. 1983;5:55–70.
13. Steger J.L., Benek J.A. On the use of composite grid schemes in computational aerodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1987;64(1):301–320.
14. Chan W. Overset grid technology development at NASA Ames Research Center. *Computers & Fluids*. 2009;38:496–503.
15. Mayer U.M., Popp A., Gerstenberger A., et al. 3D fluid–structure–contact interaction based on a combined XFEM FSI and dual mortar contact approach. *Computational Mechanics*. 2010;46(1):53–67.
16. Zhang Y., Yim S.C., Del Pin F.A. nonoverlapping heterogeneous domain decomposition method for three-dimensional gravity wave impact problems. *Computers & Fluids*. 2015;106:154.
17. Nguyen V.T., Vu D.T., Park W.G., et al. Navier–Stokes solver for water entry bodies with moving Chimera grid method in 6DOF motions. *Computers & Fluids*. 2016;140:19–38.
18. Formaggia L., Vergara C., Zonca S. Unfitted extended finite elements for composite grids. *Computers & Mathematics with Applications*. 2018;76(4):893–904.
19. Лурье А. И. *Теория упругости*. Москва: Наука. 1970. 940 с.
20. Новацкий В. *Теория упругости*. Москва: МИР. 1975. 872 с.
21. Keiiti A., Richards P.G. *Quantitative Seismology*, 2nd ed. Quse. 2002;68:1546.
22. Randall J. LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. 2002. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511791253>
23. Zhdanov M.S. *Geophysical Inverse Theory and Regularization Problems*. Elsevier Science Ltd. 2002;609.
24. Zhdanov M.S. *Inverse Theory and Applications in Geophysics*. Elsevier Inc. 2015. <https://doi.org/10.1016/C2012-0-03334-0>
25. Ivanov D.V., Kondaurov V.I., Petrov I.B., et al. Calculation of Dynamic Deformation and Destructure of Elastic-Plastic Body by Grid-Characteristic Methods. *Matematicheskoe modelirovanie*. 1990;2(11):10–29. <http://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1124094>
26. Golubev V.I., Petrov I.B., Khokhlov N.I. Numerical Simulation of Seismic Activity by the Grid-Characteristic Method. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2013;53:1523–1533. <https://doi.org/10.1134/S0965542513100060>
27. Magomedov K.M., Kholodov A.S. The Construction of Difference Schemes for Hyperbolic Equations Based on Characteristic Relations. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1969;9(2):158–76. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(69\)90099-8](https://doi.org/10.1016/0041-5553(69)90099-8)

28. Petrov I.B., Khokhlov N.I. Modeling 3D Seismic Problems Using High-Performance Computing Systems. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2014;6:342–50. <https://doi.org/10.1134/S2070048214040061>
29. Kvasov I.E., Pankratov S.A., Petrov I.B. Numerical Study of Dynamic Processes in a Continuous Medium with a Crack Initiated by a Near-Surface Disturbance by Means of the Grid-Characteristic Method. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2011;3:399–409. <https://doi.org/10.1134/S2070048211030070>
30. Kvasov I.E., Petrov I.B. Numerical Study of the Anisotropy of Wave Responses from a Fractured Reservoir Using the Grid-Characteristic Method. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2012;4:336–43. <https://doi.org/10.1134/S2070048212030064>
31. Muratov M.V., Petrov I.B. Estimation of Wave Responses from Subvertical Macrofracture Systems Using a Grid Characteristic Method. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2013;5:479–91.
32. Golubev V.I., Petrov I.B., Khokhlov N.I. Numerical Simulation of Seismic Activity by the Grid-Characteristic Method. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2013;53:1523–33. <https://doi.org/10.1134/S0965542513100060>
33. Favorskaya A.V., Petrov I.B. The Use of Full-Wave Numerical Simulation for the Investigation of Fractured Zones. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2019;11:518–30. <https://doi.org/10.1134/S2070048219040069>

References

1. Schoenberg M. Elastic Wave Behavior Across Linear Slip Interfaces. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1980;68:1516–21. <https://doi.org/10.1121/1.385077>
2. Pyrak-Nolte LJ, Myer LR, Cook NGW. Anisotropy in Seismic Velocities and Amplitudes from Multiple Parallel Fractures. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 1990;95:11345–58. <https://doi.org/10.1029/JB095IB07P11345>
3. Chaur-Jian H, Schoenberg M. Elastic Waves Through a Simulated Fractured Medium. *Geophysics*. 1993;58:924–1060. <https://doi.org/10.1190/1.1443487>
4. Backus GE. Long-Wave Elastic Anisotropy Produced by Horizontal Layering. *Journal of Geophysical Research*. 1962;67: 4427–40. <https://doi.org/10.1029/JZ067I011P04427>
5. Zhang J. Elastic Wave Modeling in Fractured Media with an Explicit Approach. *Geophysics*. 2005;70. <https://doi.org/10.1190/1.2073886>
6. Slawinski RA, Krebes ES. Finite-Difference Modeling of SH-Wave Propagation in Nonwelded Contact Media. *Geophysics*. 2002;67:1656–63. <https://doi.org/10.1190/1.1512753>
7. Slawinski RA, Krebes ES. The Homogeneous Finite-Difference Formulation of the p-SV-Wave Equation of Motion. *Studia Geophysica Et Geodaetica*. 2002;46:731–51. <https://doi.org/10.1023/A:1021133606779>
8. Zhang J, Gao H. Elastic Wave Modelling in 3-d Fractured Media: An Explicit Approach. *Geophysical Journal International*. 2009;177:1233–41. <https://doi.org/10.1111/J.1365-246X.2009.04151.X>
9. Favorskaya AV, Zhdanov MS, Khokhlov NI, et al. Modelling the wave phenomena in acoustic and elastic media with sharp variations of physical properties using the grid-characteristic method. *Geophysical Prospecting*. 2018;66(8):1485–1502.
10. Ruzhanskaya A, Khokhlov N. Modelling of Fractures Using the Chimera Grid Approach. In 2nd Conference on Geophysics for Mineral Exploration and Mining. *European Association of Geoscientists & Engineers*. 2018;1:1–5.
11. Berger MJ, Oliger J. Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. *Journal of Computational Physics*. 1984;53(3):484–512.
12. Steger JL, Dougherty FC, Benek JA. *A chimera grid scheme*. 1983;5:55–70.
13. Steger JL, Benek JA. On the use of composite grid schemes in computational aerodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1987;64(1):301–320.
14. Chan W. Overset grid technology development at NASA Ames Research Center. *Computers & Fluids*. 2009;38:496–503.
15. Mayer UM, Popp A, Gerstenberger A, et al. 3D fluid–structure–contact interaction based on a combined XFEM FSI and dual mortar contact approach. *Computational Mechanics*. 2010;46(1):53–67.
16. Zhang Y, Yim SC, Del Pin F. A nonoverlapping heterogeneous domain decomposition method for three-dimensional gravity wave impact problems. *Computers & Fluids*. 2015;106:154.
17. Nguyen VT, Vu DT, Park WG, et al. Navier–Stokes solver for water entry bodies with moving Chimera grid method in 6DOF motions. *Computers & Fluids*. 2016;140:19–38.
18. Formaggia L, Vergara C, Zonca S. Unfitted extended finite elements for composite grids. *Computers & Mathematics with Applications*. 2018;76(4):893–904.
19. Lurie AI. *Theory of Elasticity*. Moscow: Nauka. 1970. 940 p. (In Russ.).
20. Nowacki V. *Theory of Elasticity*. Moscow: MIR. 1975. 872 p. (In Russ.).
21. Keiiti A, Richards PG. *Quantitative Seismology*, 2nd ed. Quse. 2002;68:1546.
22. Randall J LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. 2002. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511791253>
23. Zhdanov MS. *Geophysical Inverse Theory and Regularization Problems*. Elsevier Science Ltd. 2002;609.
24. Zhdanov MS. *Inverse Theory and Applications in Geophysics*. Elsevier Inc. 2015. <https://doi.org/10.1016/C2012-0-03334-0>

25. Ivanov DV, Kondauron VI, Petrov IB, et al. Calculation of Dynamic Deformation and Destructure of Elastic-Plastic Body by Grid-Characteristic Methods. *Mathematical Modeling*. 1990;2:11–29. <http://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1124094>
26. Golubev VI, Petrov IB, Khokhlov NI. Numerical Simulation of Seismic Activity by the Grid-Characteristic Method. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2013;53:1523–1533. <https://doi.org/10.1134/S0965542513100060>
27. Magomedov KM, Kholodov AS. The Construction of Difference Schemes for Hyperbolic Equations Based on Characteristic Relations. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1969;9(2):158–76. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(69\)90099-8](https://doi.org/10.1016/0041-5553(69)90099-8)
28. Petrov IB, Khokhlov NI. Modeling 3D Seismic Problems Using High-Performance Computing Systems. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2014;6:342–50. <https://doi.org/10.1134/S2070048214040061>
29. Kvasov IE, Pankratov SA, Petrov IB. Numerical Study of Dynamic Processes in a Continuous Medium with a Crack Initiated by a Near-Surface Disturbance by Means of the Grid-Characteristic Method. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2011;3:399–409. <https://doi.org/10.1134/S2070048211030070>
30. Kvasov IE, Petrov IB. Numerical Study of the Anisotropy of Wave Responses from a Fractured Reservoir Using the Grid-Characteristic Method. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2012;4:336–43. <https://doi.org/10.1134/S2070048212030064>
31. Muratov MV, Petrov IB. Estimation of Wave Responses from Subvertical Macrofracture Systems Using a Grid Characteristic Method. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2013;5:479–91.
32. Golubev VI, Petrov IB, Khokhlov NI. Numerical Simulation of Seismic Activity by the Grid-Characteristic Method. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2013;53:1523–33. <https://doi.org/10.1134/S0965542513100060>
33. Favorskaya AV, Petrov IB. The Use of Full-Wave Numerical Simulation for the Investigation of Fractured Zones. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2019;11:518–30. <https://doi.org/10.1134/S2070048219040069>

Об авторах:

Иван Анатольевич Митьковец, аспирант, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (РФ, 117303, г. Москва, ул. Керченская, 1А, корп. 1), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9151-9151), mitkovets@phystech.edu

Николай Игоревич Хохлов, доцент, заведующий кафедрой информатики и вычислительной математики, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (РФ, 117303, г. Москва, ул. Керченская, 1А, корп. 1), кандидат физико-математических наук, [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9151-9151), [Math-Net.Ru](https://math-net.ru), elibrary.ru, [ResearcherID](https://researcherid.com), k_h@inbox.ru

Заявленный вклад соавторов:

все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Поступила в редакцию 24.07.2023

Поступила после рецензирования 16.08.2023

Принята к публикации 17.08.2023

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Ivan A Mitkovets, PhD student, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University) (bldg. 1, 1A, Kerchenskaya St., Moscow, 117303, RF), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9151-9151), mitkovets@phystech.edu

Nikolay I Khokhlov, Associate Professor, Head of the Department of Computer Science and Computational Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University) (bldg. 1, 1A, Kerchenskaya St., Moscow, 117303, RF), Candidate of physical and mathematical Sciences, [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9151-9151), [Math-Net.Ru](https://math-net.ru), elibrary.ru, [ResearcherID](https://researcherid.com), k_h@inbox.ru

Claimed contributorship:

all authors have made an equivalent contribution to the preparation of the publication.

Received 24.07.2023

Revised 16.08.2023

Accepted 17.08.2023

Conflict of interest statement

the authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.