

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELING



УДК 519.6

Научная статья

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-49-63>


Сопоставление результатов численного моделирования процессов гидродинамики в мелководных водоемах на основе трехмерной модели и двумерной модели, усредненной по глубине

С.В. Проценко, Е.А. Проценко ✉, А.В. Харченко

Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), Российская Федерация, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48

✉ eapros@rambler.ru

Аннотация

Введение. Двумерные гидродинамические модели доказали свою способность адекватно описывать процессы стока и транспортировки в реках, озерах, эстуариях, дельтах и морях. Практика показывает, что даже там, где ожидаются значительные трехмерные эффекты, например, при ветровых потоках, двумерный подход может работать эффективно. Однако в некоторых случаях двумерная модель недостаточно точно отражает фактические структуры потока. Например, в мелководных водоемах со сложной батиметрией неоднородный рельеф и динамика могут привести к тому, что профиль скорости будет неоднородным. Целью исследования является разработка основы для определения того, в каких случаях двумерной модели, усредненной по глубине, достаточно для моделирования процессов гидродинамики в мелководных водоемах, подобных Азовскому морю, а в каких случаях для получения точных результатов целесообразно использование трехмерной модели.

Материалы и методы. Локальные аналитические решения получены для распространения преобладающей сингулярной прогрессивной волны в мелководном, хорошо перемешанном водоеме. Адвективными слагаемыми и слагаемыми Кориолиса пренебрегают, вихревая вязкость принимается постоянной, а слагаемое нижнего трения линеаризуется. Последнему уделяется особое внимание, поскольку характеристики моделей существенно зависят от способа определения коэффициентов нижнего трения. Аналитический метод, разработанный в исследовании, показывает, что определенные комбинации более высоких скоростей течения ($u \approx 1$ м/с) и глубин воды ($d > 50$ м) могут вызывать значительные различия между результатами модели, усредненной по глубине, и модели, содержащей информацию по вертикали.

Результаты исследования. Полученные результаты проверяются численным моделированием стационарных и нестационарных периодических течений в схематизированном прямоугольном бассейне. Результаты, полученные в результате трехмерного моделирования, сравниваются с результатами двумерного моделирования, усредненного по глубине. Оба моделирования показывают хорошее соответствие аналитическим решениям.

Обсуждение и заключения. Аналитические решения были найдены путем линеаризации уравнений, что, очевидно, имеет свои ограничения. Отмечается два вида нелинейных эффектов — вызванных членами более высокого порядка в уравнениях движения, т. е. членами адвективного ускорения и трения и вызванных геометрическими нелинейностями, что связано, например, с различной глубиной воды и шириной водоема, что будет важно при моделировании реального моря.

Ключевые слова: гидродинамика, мелководный водоем, волновое движение, численное моделирование

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-00015. <https://rscf.ru/project/22-71-00015/>

Для цитирования. Проценко С.В., Проценко Е.А., Харченко А.В. Сопоставление результатов численного моделирования процессов гидродинамики в мелководных водоемах с аналитическим решением. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):49–63 <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-49-63>

Comparison of Hydrodynamic Processes Modelling Results in Shallow Water Bodies Based on 3D Model and 2D Model Averaged by Depth

Sofia V Protsenko, Elena A Protsenko ✉, Anton V Kharchenko

Taganrog Institute named after A.P. Chekhov (branch) of RSUE, 48, Initiative St., Taganrog, Russian Federation

✉ capros@rambler.ru

Abstract

Introduction. Two-dimensional hydrodynamic models have proven their ability to adequately describe the processes of runoff and transportation in rivers, lakes, estuaries, deltas and seas. Practice shows that even where significant three-dimensional effects are expected, for example, with wind flows, a two-dimensional approach can work effectively. However, in some cases, the two-dimensional model does not accurately reflect the actual flow structures. For example, in shallow waters with complex bathymetry, heterogeneous terrain and dynamics can lead to a non-uniform velocity profile. The aim of the study is to develop a basis for determining in which cases a two-dimensional model averaged in depth is sufficient for modelling hydrodynamic processes in shallow waters like the Azov Sea, and in which cases it is advisable to use a three-dimensional model to obtain accurate results.

Materials and Methods. Local analytical solutions have been obtained for the propagation of the predominant singular progressive wave in a shallow, well-mixed reservoir. Advective terms and Coriolis terms are neglected, the vortex viscosity is assumed to be constant, and the lower friction term is linearized. Special attention is paid to the latter, since the characteristics of the models significantly depend on the method of determining the coefficients of lower friction. The analytical method developed in the study shows that certain combinations of higher flow velocities ($u \approx 1$ m/s) and water depths ($d > 50$ m) can cause significant differences between the results of the depth-averaged model and the model containing vertical information.

Results. The results obtained are verified by numerical simulation of stationary and non-stationary periodic flows in a schematized rectangular basin. The results obtained as a result of three-dimensional modelling are compared with the results of two-dimensional modelling averaged in depth. Both simulations show good compliance with analytical solutions.

Discussion and Conclusions. Analytical solutions were found by linearization of the equations, which obviously has its limitations. A distinction is made between two types of nonlinear effects — nonlinearities caused by higher-order terms in the equations of motion, i.e. terms of advective acceleration and friction, and nonlinear effects caused by geometric nonlinearities, this is due, for example, to different water depths and reservoir widths, which will be important when modelling a real sea.

Keywords: hydrodynamics, shallow water reservoir, wave motion, numerical modelling

Funding information. The study was supported by the Russian Science Foundation grant no. 22-71-00015. <https://rscf.ru/project/22-71-00015/>

For citation. Protsenko SV, Protsenko EA, Kharchenko AV. Comparison of Hydrodynamic Processes Modelling Results in Shallow Water Bodies Based on 3D Model and 2D Model Averaged by Depth. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):49–63. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-49-63>

Введение. В мелководных водоемах со сложной батиметрией неоднородный рельеф и динамика могут привести к тому, что профиль скорости будет неоднородным, в данном случае двумерная модель недостаточно точно отражает фактические структуры потока. Основной целью данного исследования является разработка теоретической основы для определения того, в каких конкретных случаях двумерной модели достаточно для моделирования процессов течения в мелководных морях типа Азовского моря. С этой целью изучено, оказывает ли сокращение с 3D до 2D существенное влияние на выходные данные модели гидродинамики, такие как уровни воды и усредненные по глубине скорости течения. Изучено, какие упрощения применяются к задаче о течении, чтобы позволить использовать двумерные уравнения, усредненные по глубине, а не трехмерные уравнения для мелководья. Исследовано, какие параметры важны при сравнении модели, усредненной по глубине, с моделью, содержащей информацию по вертикали; в каких случаях двумерная модель, усредненная по глубине, является репрезентативной. Аналитический подход позволил выявить эффект усреднения по глубине с помощью аналитических решений для сильно упрощенных ситуаций.

Несмотря на проведение широкого круга исследований, ориентированных на рассматриваемую проблему, в них недостаточно полно отражена вся совокупность разнообразных факторов и процессов: гидрофизических, гидродинамических, гидробиологических, метеорологических и антропогенных [1–2]. Области применения представленных в исследовании моделей являются приливы и отливы, вызванные ветром (например, штормовые нагоны). Речные потоки и стратифицированные потоки, определяемые плотностью, выходят за рамки данного исследования [3–5].

Рассмотрим наиболее важные явления для мелководных морей, подобных Азовскому морю, и определим характерные масштабы протяженности, времени и скорости. В Азовском море формирование течений в основном обусловлено тремя факторами: ветровым режимом, стоком впадающих рек и водообменом с Чёрным морем. Большая изменчивость течений является следствием неустойчивости ветрового режима, мелководности моря и его сравнительно небольшой площади. В открытых районах моря под действием ветра, как правило, происходит поступательное движение водной среды, охватывающее всю толщу от поверхности до придонных горизонтов. Преобладающая скорость течений в Азовском море составляет 10–20 см/с, максимальная скорость — 180–100 см/с [6].

Режим волнения Азовского моря обусловлен небольшой площадью моря, малыми глубинами и значительной изрезанностью берегов. В описываемом районе преобладают высоты волн менее 1 м (повторяемость их достигает 75 %). Повторяемость высот волн 1–2 м составляет 20–45 %, а высот волн 2–3 м — не более 13 %. В центральной, самой глубоководной части моря, высоты волн не превышают 3,5 м и только в очень редких случаях они достигают 4 м. В наиболее штормовые месяцы (декабрь–март) развитие волнения в описываемом районе ограничивается наличием льда [6]. Как и для нагонных явлений, перед которыми зачастую возникает мощный по силе сгон, для сильного волнения характерно некоторое уменьшение высоты волн перед началом шторма и далее — их стремительное увеличение. Нередко процессы развития и затухания сгонно-нагонных и штормовых явлений в Азовском море являются синхронными, таким образом, возникают опасные явления.

В Азовском море наблюдаются волны, имеющие длину в основном 15–25 м, и только иногда — 80 м. Период волны обычно менее 5 с, крайне редко — 7–8 с. В описываемом районе отмечаются короткие и очень крутые волны, представляющие опасность для малых судов.

В мелководном Азовском море сейшевые колебания происходят постоянно. Сейши — это свободные колебания, которые происходят в бассейнах умеренного размера (гаванях, озерах, заливах или даже в море). Это стоячие волны с частотой, равной резонансной частоте бассейна, в котором они возникают. Продолжительность сейшей может варьироваться от нескольких минут до нескольких часов. Причиной их появления в Азовском море становится не только изменение ветра или атмосферного давления над морем, но и волны штормовых нагонов из Чёрного моря. Поскольку сейши являются резонансным явлением, очевидно, что размер бассейна по отношению к длине волны является важным фактором.

Материалы и методы

1. Постановка задачи. Трёхмерные уравнения Навье–Стокса используются в качестве основы для решения задач о течении жидкости [7–8]. Предполагая, что вода является несжимаемой жидкостью, применяют уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$$

с компонентами скорости u, v, ω в направлении x, y и z соответственно. Сохранение импульса выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(pu)}{\partial t} + \frac{\partial(pu^2)}{\partial x} + \frac{\partial(puv)}{\partial y} + \frac{\partial(pu\omega)}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f v + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \\ \frac{\partial(pv)}{\partial t} + \frac{\partial(puv)}{\partial x} + \frac{\partial(pv^2)}{\partial y} + \frac{\partial(pv\omega)}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho f u + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}, \\ \frac{\partial(p\omega)}{\partial t} + \frac{\partial(pu\omega)}{\partial x} + \frac{\partial(pv\omega)}{\partial y} + \frac{\partial(p\omega^2)}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}, \end{aligned}$$

где ρ — плотность воды; p — давление; f — параметр Кориолиса; τ_{ij} — вязкое напряжение сдвига в i -направлении на j -плоскости.

Напряжения определяют как:

$$\tau_{ij} = \rho \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

где ν — кинематическая вязкость.

Используется также сокращенное обозначение, где $x_i = (x, y, z)$ и $u_i = (u, v, \omega)$ для $i = 1, 2, 3$.

Для учета турбулентности в уравнениях Навье–Стокса переменные разлагаются на среднее значение и вариацию: $u = \bar{u} + u'$. Подставим разложение по всем переменным в уравнения импульса и средние результаты — в усредненные по Рейнольдсу уравнения движения, которые имеют ту же форму, что и исходные уравнения Навье–Стокса, с дополнительными турбулентными напряжениями, называемыми напряжениями Рейнольдса: $\tau_{ij} = \rho \bar{u'_i u'_j}$ [9].

Проблема замыкания является одной из основных задач исследования турбулентности. Простая модель турбулентности использует гипотезу Буссинеска для описания турбулентных движений аналогично молекулярным движениям, но с коэффициентами вихревой вязкости ν_i^h и ν_i^v для горизонтального и вертикального направлений [10].

Все вышесказанное приводит к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + f v + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_t^h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_t^h \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t^v \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} - f u + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_t^h \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_t^h \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t^v \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho}{\rho_0} g + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_t^h \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_t^h \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t^v \frac{\partial \omega}{\partial z} \right). \quad (3)$$

Для усредненного по глубине потока предполагается, что напряжение сдвига в слое, вызванное турбулентным потоком, определяется квадратичным законом трения:

$$\tau_b = \frac{\rho_0 g |U| U}{C_1^2} = \rho_0 c_{f1} |U| U,$$

где $|U|$ — величина усредненной по глубине горизонтальной скорости, а C_1 — коэффициент Шези (Chezy) для модели, усредненной по глубине [11].

Для моделей с вертикальной информацией (2DV или 3D), используется квадратичная формулировка напряжений в слое. Напряжение сдвига слоя в 3D может быть связано с током непосредственно над слоем:

$$\tau_b = \rho_0 c_{f2} |u_b| u_b,$$

где u_b — величина горизонтальной скорости непосредственно над слоем.

2. Аналитическое исследование. Предположим, что U характеризует масштабы горизонтальных скоростей u и v ; L характеризует горизонтальные масштабы длины x и y ; H — вертикальный масштаб z . Затем масштабирование уравнения неразрывности приводит к выражению для шкалы вертикальной скорости W :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{U}{L} + \frac{U}{L} + \frac{W}{H} = 0 \Rightarrow W \approx O\left(\frac{UH}{L}\right).$$

Согласно данным Единой государственной системы информации об обстановке в Мировом океане [6], горизонтальная составляющая скорости на несколько порядков больше вертикальной составляющей скорости для приливов, штормовых волн и сейш в Азовском море. Следовательно, вертикальной составляющей скорости можно пренебречь, в данном исследовании она не будет рассматриваться.

Уравнение вертикального импульса сводится к гидростатическому балансу:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

Интегрирование данного уравнения в вертикальном направлении дает:

$$p(z) = -\rho g(\zeta - z) + p_{atm}, \text{ при } \frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

где ζ — высота свободной поверхности (рис. 1); p_{atm} — атмосферное давление на свободной поверхности.

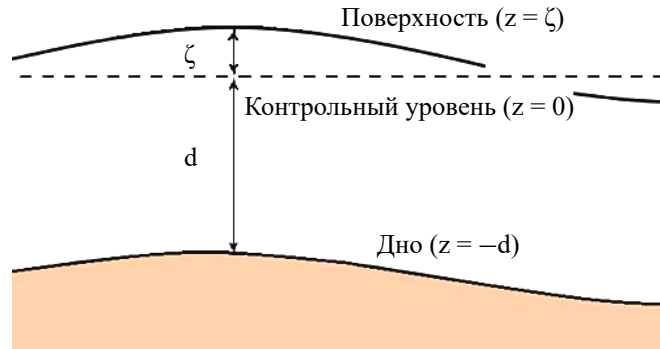


Рис. 1. Определение высоты поверхности ζ и глубины невозмущенной воды d

Теперь:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \text{если } \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

Подставляя это в уравнения горизонтального импульса (1) и (2), получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + f v, \quad (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - f u. \quad (6)$$

Наряду с пренебрежением вертикальной составляющей скорости и заменой градиента давления градиентом уровня воды, были проигнорированы несколько других членов, чтобы перейти от уравнений (1) и (2) к (5)–(6). Вязкие напряжения не принимаются во внимание в силу того, что турбулентные напряжения на много порядков превышают вязкие напряжения, поскольку молекулярная вязкость важна только в пределах нескольких миллиметров от границы. Кроме того, не учитываются горизонтальные турбулентные напряжения.

Используя уравнения (5)–(6), определим относительные порядки величин слагаемых, чтобы получить представление о параметрах, которые являются наиболее важными в определенной ситуации, а какие незначительны. Рассмотрим каждое слагаемое по отдельности и проведем масштабирование:

– инерция: $\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{U}{T}$;

– адвекция: $u \frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{U^2}{L}$;

– вертикальная диффузия импульса: $\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial u}{\partial z} \right) \approx \nu \frac{U}{H^2}$;

– градиент давления: $-g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \approx g \frac{\Delta H}{L}$;

– сила Кориолиса: $f v \approx f U$.

Важным в исследовании является слагаемое, отвечающее за трение, поскольку в моделях оно определяется по-разному. Для трехмерной модели соотношение между коэффициентом трения и коэффициентом инерции может быть выражено как:

$$\frac{\text{friction}}{\text{inertia}} \approx \frac{\nu U / H^2}{U / T} \approx \frac{\nu}{\omega H^2},$$

где $\omega \approx \frac{1}{T}$.

Кроме того, важными параметрами являются вязкость ν , частота волн ω и вертикальная шкала длины (например, глубина воды d). Безразмерная комбинация этих параметров ($\omega d^2 / \nu$), широко используемая в аналитическом подходе, описана в [12], где проведено сравнение динамического выражения для напряжения фазового сдвига с выражением, в котором донное напряжение пропорционально усредненной по глубине скорости в установившемся состоянии. Результатом является соотношение, показанное на рисунке 2, только в зависимости от параметра $\omega d^2 / \nu$.

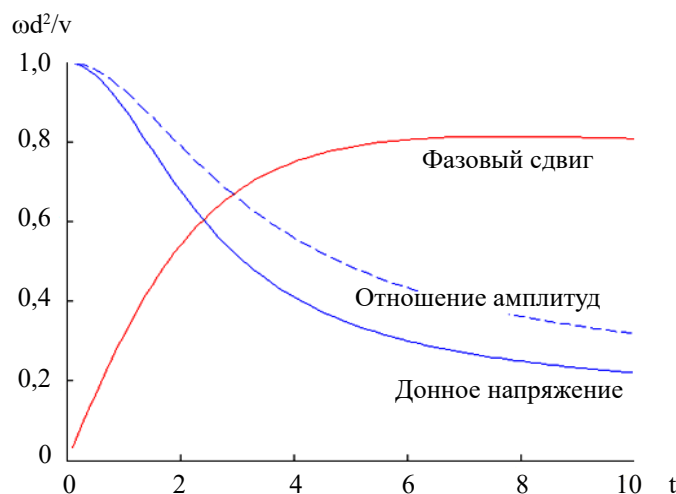


Рис. 2. Соотношение напряжений сдвига слоя при динамическом и установившемся течении

Когда $\omega d^2 / \nu$ очень мало, отношение приближается к единице, это означает, что напряжение сдвига слоя реагирует на периодический поток так, как если бы оно было постоянным в каждый момент времени: $\omega d^2 / \nu < 0,5$. Также это можно записать, как $d^2 / \nu < 0,5 \cdot T / 2\pi \approx 0,08 \cdot T$, где T — период колеблющегося потока. Величину d^2 / ν

можно интерпретировать как время, необходимое вязкому потоку для изменения профиля скорости на глубине d . Таким образом, ожидается квазистационарное напряжение сдвига слоя, когда время регулировки составляет менее 8 % от периода.

Для турбулентного течения на мелководье оценка вихревой вязкости составляет [13]:

$$\nu = \frac{1}{6} \kappa du_* = 0,067 du_*.$$

Здесь $u_* \approx \sqrt{c_f \cdot \bar{u}}$, при 0,0015 в качестве оценки для c_f становится $\nu = 0,0025 d \bar{u}$. Для такого моря, как Азовское, со средней глубиной воды $d \approx 7,4$ м и средней амплитудой течения по глубине $\bar{u} \approx 0,5$ м/с, оценка вихревой вязкости — $\nu = 0,00925$ м/с.

Аналитические решения могут быть получены только для значительно упрощенных форм уравнений движения. Поскольку члены адвекции нелинейны, необходимо исключить их из уравнения импульса для аналитического подхода. Когда скорость распространения волны определяется как длина волны за период волны $c = L/T$, соотношение между членом адвекции и членом инерции приводит к числу Фруда, определяемому, как $F_r = u/c$. $F_r \ll 1$ означает, что член инерции намного важнее члена адвекции и поэтому членом адвекции можно пренебречь. Это относится к длинным волнам с малыми амплитудами по отношению к глубине воды. Набор уравнений без адвективных членов сводится к:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu_t \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + f v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \nu_t \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - f u, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \end{aligned} \quad (7)$$

Будем рассматривать периодический поток, ограниченный одним горизонтальным измерением, заданным уравнением (7). Основное внимание будет уделено влиянию изменений в плоскости (x, z) . С учетом этих допущений базовое уравнение 2DV принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu_t \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= F, \\ F &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение (8) может быть интегрировано по глубине воды d , чтобы получить одномерное уравнение импульса в направлении x :

$$d \frac{\partial U}{\partial t} - \nu_t \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z(z=0)} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z(z=-d)} \right) = F d,$$

где U — усредненная по глубине скорость.

На поверхности моря ($z = 0$) напряжение сдвига равно нулю, так как свободная поверхность не создает никакого трения (при отсутствии ветра). В пласте ($z = -d$) принято связывать напряжение сдвига со скоростью, усредненной по глубине, с коэффициентом трения c_f для модели, усредненной по глубине. Итак, при:

$$\nu_t \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_b \approx c_{f1} |U| U,$$

одномерное усредненное по глубине уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{c_{f1} |U| U}{d} = F. \quad (9)$$

Здесь член трения пропорционален $|U|U$ и, следовательно, нелинеен. Поскольку линейные уравнения гораздо легче решать аналитически, удобно применять метод линеаризации. Лоренц [14] предложил такую линеаризацию напряжения сдвига слоя, которая на протяжении многих десятилетий служила основой для простых решений. Предположим, что скорость потока изменяется синусоидально во времени:

$$U(t) = \hat{U} \cos(\omega t). \quad (10)$$

Рассматривается только действительная часть из выражения для U , которое используется далее. На рисунке 3 показано соответствующее $|U|U/\hat{U}^2 = |\cos(\omega t)|\cos(\omega t)$, которое представляет собой трение как функцию времени, показывающую отклонения от чистой функции косинуса.

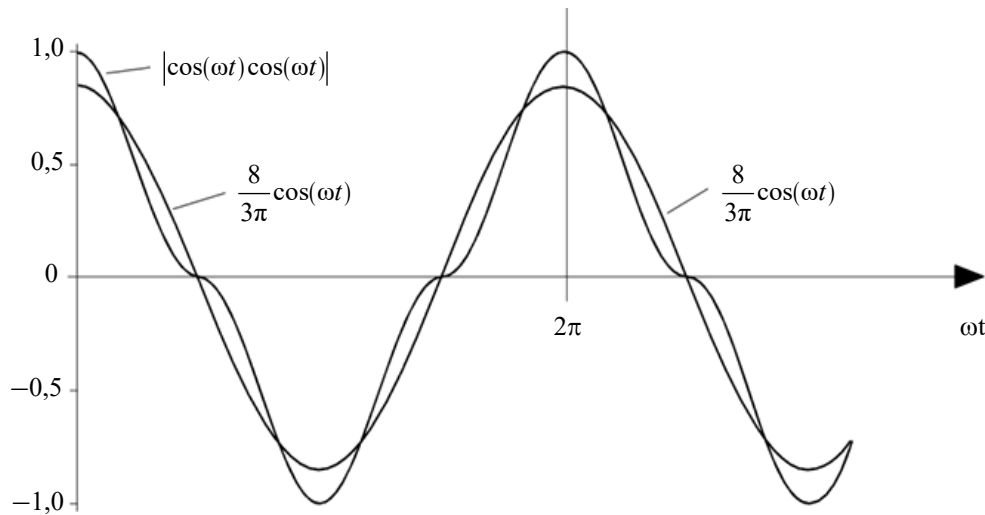


Рис. 3. Линеаризация квадратичного члена трения [15]

Обоснование линеаризации заключается в том факте, что она, как принято считать, не воспроизводит точную функцию косинуса до тех пор, пока сохраняется демпфирующий эффект трения. С этой целью энергия, которая теряется за цикл из-за трения, устанавливается равной для обоих случаев. Этот подход позволяет получить подходящую оценку константы линеаризации κ :

$$\kappa_1 = \frac{8}{3\pi} c_{f1} \frac{\hat{U}}{d} \approx c_{f1} \frac{|U|}{d},$$

где нижний индекс «1» указывает на одномерный случай. Это выражение содержит исходную скорость $\hat{U}$, которая неизвестна. Хотя были предложены итеративные подходы к ее определению, эта константа линеаризации часто принимается в качестве калибровочного параметра.

Напряжение сдвига линеаризованного слоя становится: $\tau_b = c_{f1} |U| U \approx \kappa_1 d U$.

Подставляя это в уравнение (9), получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \kappa_1 U = F. \quad (11)$$

Для динамического течения в одномерной ситуации используется данное линеаризованное уравнение, при этом вводится комплексное представление скорости потока:

$$U(t) = \hat{U} e^{i\omega t}, \quad (12)$$

где $\hat{U}$ — комплексная амплитуда; $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$, где i — мнимая единица, удовлетворяющая уравнению $i = \sqrt{-1}$. Фактор $e^{i\omega t}$ вызывает вращение во времени с ω в качестве угловой частоты, которая равна $2\pi/T$.

Обратите внимание, что скорость, определенная в (10), равна действительной части выражения:

$$U(t) = \text{Re}[\hat{U} e^{i\omega t}] = \hat{U} \cos(\omega t).$$

Подставляя комплексное периодическое решение (12) в уравнение (11), исключение изменения времени $e^{i\omega t}$ в каждом члене дает:

$$i\omega \hat{U} + \kappa_1 \hat{U} = \hat{F}, \quad (i\omega + \kappa_1) \hat{U} = \hat{F}, \quad \hat{U} = \frac{\hat{F}}{i\omega + \kappa_1}, \quad \hat{U} = \frac{\hat{F}}{i\omega} \cdot \frac{1}{1 + \kappa_1/i\omega}, \quad \hat{U} = \hat{A} \cdot \frac{1}{1 - i\sigma_1},$$

$$\text{где } \hat{A} = \frac{\hat{F}}{i\omega} = -\frac{g}{i\omega} \frac{\partial \zeta}{\partial x}; \quad \sigma_1 = \frac{\kappa_1}{\omega} = \frac{8}{3\pi} c_{f1} \frac{\hat{U}}{\omega d}.$$

Итак, выражение для усредненной по глубине скорости в направлении x равно:

$$U = \hat{A} \cdot \left(\frac{1}{1 - i\sigma_1} \right) e^{i\omega t}.$$

Таким образом, выражение для усредненной по глубине скорости U получено путем решения усредненного по глубине уравнения импульса. Далее сравним это выражение с аналогичным решением для усредненной по глубине скорости, вычисленной с помощью модели с вертикальной информацией.

Уравнение импульса $\frac{\partial u}{\partial t} - \nu_t \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = F$ с периодическим решением $u(z, t) = \tilde{u}(z)e^{i\omega t}$ (теперь $\tilde{u}$ — комплексная амплитуда как функция вертикальной координаты) и устранением $e^{i\omega t}$ принимает вид:

$$i\omega \tilde{u}(z) - \nu_t \frac{\partial^2 \tilde{u}(z)}{\partial z^2} = \hat{F}$$

и представляет собой дифференциальное уравнение с однородным и частным решением:

$$\tilde{u}(z) = C_1 e^{bz} + C_2 e^{-bz} + \hat{A}, \quad b = \sqrt{\frac{i\omega}{\nu_t}}, \quad \hat{A} = \frac{\hat{F}}{i\omega}.$$

На поверхности моря ($z = 0$) напряжение сдвига $\tau = 0$ поскольку свободная поверхность не создает трения (при отсутствии ветра):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \Big|_{(z=0)} &= 0 \Rightarrow C_1 = C_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{u}(z) &= C \cosh(bz) + \hat{A}. \end{aligned} \quad (13)$$

Существует несколько вариантов граничного условия в слое, чтобы найти выражение для константы интегрирования C . Условие частичного скольжения предполагает скорость в слое $u \neq 0$. Предполагается, что напряжение сдвига в слое ($z = -d$) описывается линеаризованным квадратичным законом трения:

$$\nu_t \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \Big|_{(z=-d)} = \tau_b \approx \kappa_2 d \tilde{u}, \quad (14)$$

где $\kappa_2 = \frac{8}{3\pi} c_{f_2} \frac{\tilde{u}_b}{d}$.

Нижний индекс «2» указывает на двумерный случай. Подставляя выражение для скорости потока (13) в уравнение (14), получаем:

$$\begin{aligned} \nu_t \cdot (Cb \sinh(-bd)) &= \kappa_2 d \cdot (C \cosh(-bd) + \hat{A}), \\ C \cdot (-\nu_t b \sinh(-bd) - \kappa_2 d \cdot \cosh(bd)) &= \kappa_2 d \hat{A} \Rightarrow \\ \Rightarrow C &= -\hat{A} \cdot \left(\frac{\nu_t b}{\kappa_2 d} \sinh(bd) + \cosh(bd) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Решение для профиля скорости по вертикали теперь становится:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(z) &= \hat{A} \cdot \left(1 - \frac{\cosh(bz)}{\frac{\nu_t b}{\kappa_2 d} \sinh(bd) + \cosh(bd)} \right), \\ \tilde{u}(z) &= \hat{A} \cdot \left(1 - \tilde{\gamma} \frac{\cosh(bz)}{\cosh(bd)} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\tilde{\gamma} = \left(1 + \frac{\nu_t b}{\kappa_2 d} \tanh(bd) \right)^{-1} = \left(1 + \frac{i}{\sigma_2 bd} \tanh(bd) \right)^{-1}$.

Итак, профиль скорости, описываемый уравнением (15), является функцией безразмерного параметра:

$$bd = \sqrt{i\omega d^2 / \nu_t}, \quad (16)$$

и безразмерного параметра σ_2 , который определен, как:

$$\sigma_2 = \frac{\kappa_2}{\omega} = \frac{8}{3\pi} c_{f_2} \frac{\hat{u}_b}{\omega d}.$$

Параметр, аналогичный параметру в уравнении (16), уже обсуждался в контексте напряжения сдвига слоя $\omega d^2 / \nu$.

Для усредненной по глубине скорости получено следующее:

$$\bar{u} = \frac{1}{d} \int_{-d}^0 \tilde{u}(z) dz = \frac{1}{d} \int_{-d}^0 \hat{A} \left(1 - \tilde{\gamma} \frac{\cosh(bz)}{\cosh(bd)} \right) dz = \frac{\hat{A}}{d} \left[z - \frac{\tilde{\gamma}}{b} \frac{\cosh(bz)}{\cosh(bd)} \right]_{-d}^0;$$

$$\bar{u} = \hat{A} \cdot \left(1 - \frac{\hat{\gamma}}{bd} \tanh(bd) \right) e^{i\omega t}.$$

Уравнение для одномерной модели установившегося течения с линеаризованным донным трением (11) сводится к:

$$\kappa_1 U = F, \quad (17)$$

где $\kappa_1 \approx cf_1|U|/d$ — линеаризованный коэффициент трения для усредненного по глубине потока (для установившегося потока коэффициент $8/3\pi$ не учитывается); U — усредненная по глубине горизонтальная скорость и $F = -g\partial\zeta/\partial x$ — сокращенное обозначение градиента уровня воды. Выражение для усредненной по глубине скорости U следует из уравнения (17):

$$U = \frac{F}{\kappa_1}. \quad (18)$$

В двумерной модели установившегося течения с линеаризованным донным трением уравнение (18) сводится к:

$$-v_t \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = F.$$

Поскольку предполагается, что F не зависит от z , интегрирование дает:

$$v_t \frac{\partial u}{\partial z} = -Fz + C_1.$$

На поверхности моря ($z = 0$) напряжение сдвига $\tau_0 = v_t \partial u / \partial z = 0$ означает, что постоянная интегрирования $C_1 = 0$ и, следовательно:

$$v_t \frac{\partial u}{\partial z} = -Fz. \quad (19)$$

Таким образом, напряжение сдвига линейно распределено по вертикали с максимальным напряжением сдвига τ_b в слое ($z = -d$):

$$\tau_b = Fd. \quad (20)$$

При предположении постоянной вертикальной вихревой вязкости профиль скорости определяется интегрированием уравнения (19):

$$u(z) = C_2 - \frac{Fz^2}{2v_t}. \quad (21)$$

Это параболический профиль скорости, где интегрирующая константа C_2 равна максимальной скорости на поверхности моря ($z = 0$). Чтобы найти константу C_2 , необходимо наложить граничное условие на слой. Для реализации нижнего граничного условия возможны различные подходы.

Комбинация линеаризованного граничного условия $\tau_b = \kappa_2 du_b$, $\kappa_2 \approx c_{f_2}|u_b|/d$ и уравнения (20) приведет к выражению для скорости в слое. Подставляя это в уравнение (21), получаем выражение для C_2 . Тогда профиль скорости становится:

$$u(z) = \frac{F}{2v_t}(d^2 - z^2) + \frac{F}{\kappa_2}.$$

Интегрирование по глубине дает:

$$\bar{u} = \frac{1}{d} \int_{-d}^0 u(z) dz = \frac{1}{d} \int_{-d}^0 \left(\frac{F}{2v_t}(d^2 - z^2) + \frac{F}{\kappa_2} \right) dz = \frac{Fd^2}{3v_t} + \frac{Fd^2}{\kappa_2}. \quad (22)$$

Таким образом, в стационарном случае также существуют два решения, (18) и (22), с двумя различными коэффициентами трения дна, где $\kappa_1 \neq \kappa_2$, поскольку напряжение сдвига слоя определяется по-разному в обоих случаях. Предположим, что усредненные по глубине скорости для обеих моделей равны $\bar{u} = U$ (метод, выбранный в данном исследовании). Это приводит к следующему соотношению между κ_1 и κ_2 :

$$\frac{1}{\kappa_1} = \frac{1}{\kappa_2} + \frac{d^2}{3v_t}.$$

Применяя $\sigma = \kappa / \omega$, получим:

$$\frac{1}{\sigma_1} = \frac{1}{\sigma_2} + \frac{\omega d^2}{3v_t}. \quad (23)$$

В соотношении между σ_1 и σ_2 фигурирует безразмерный параметр $\omega d^2/\nu$. Теперь выбор определенного диапазона для σ_1 приведет к получению σ_2 как функции безразмерного параметра для каждого значе-

ния σ_1 . σ -соотношение (23) позволяет сравнивать амплитуды и фазы усредненных по глубине скоростей, вычисленных с помощью одномерной и двумерной модели соответственно.

На рисунках 4 и 5 это сделано с помощью соотношения амплитуды скорости и фазы для нескольких значений σ_1 . На рисунках отношения амплитуд и фаз для соответствующих физических явлений обозначены точками. Таким образом, применение σ -соотношения ограничено ситуациями $\omega d^2/\nu_i > \sigma_1$.

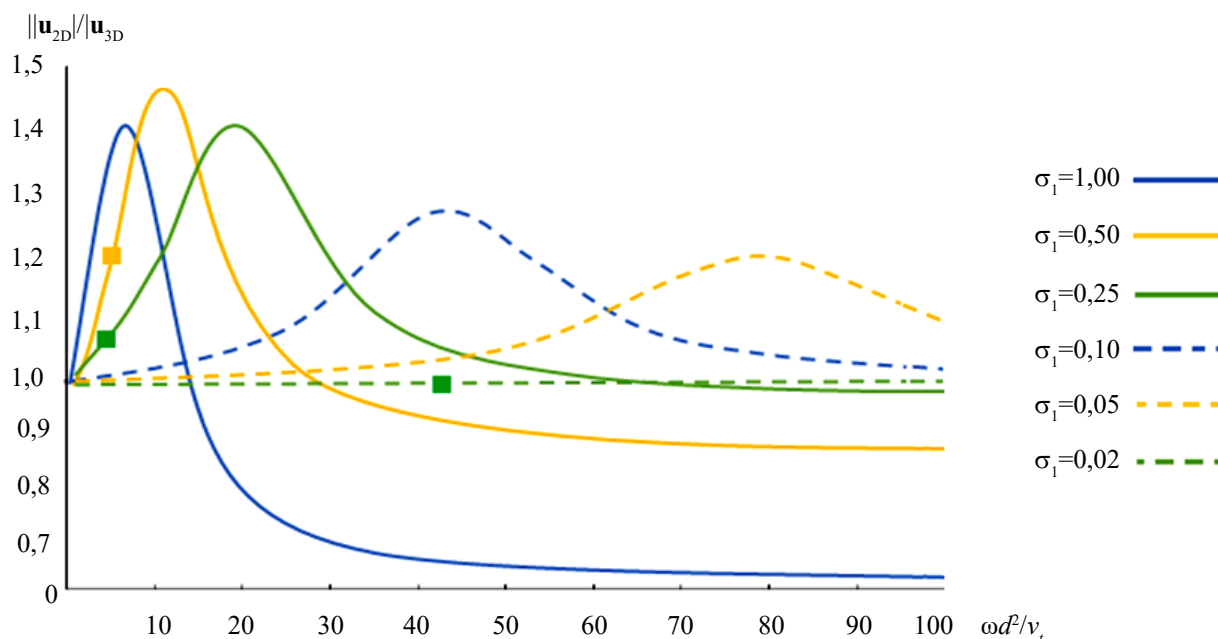


Рис. 4. Соотношение амплитуд между U и $\bar{u}$ как функция $\omega d^2/\nu_i$ и σ_1

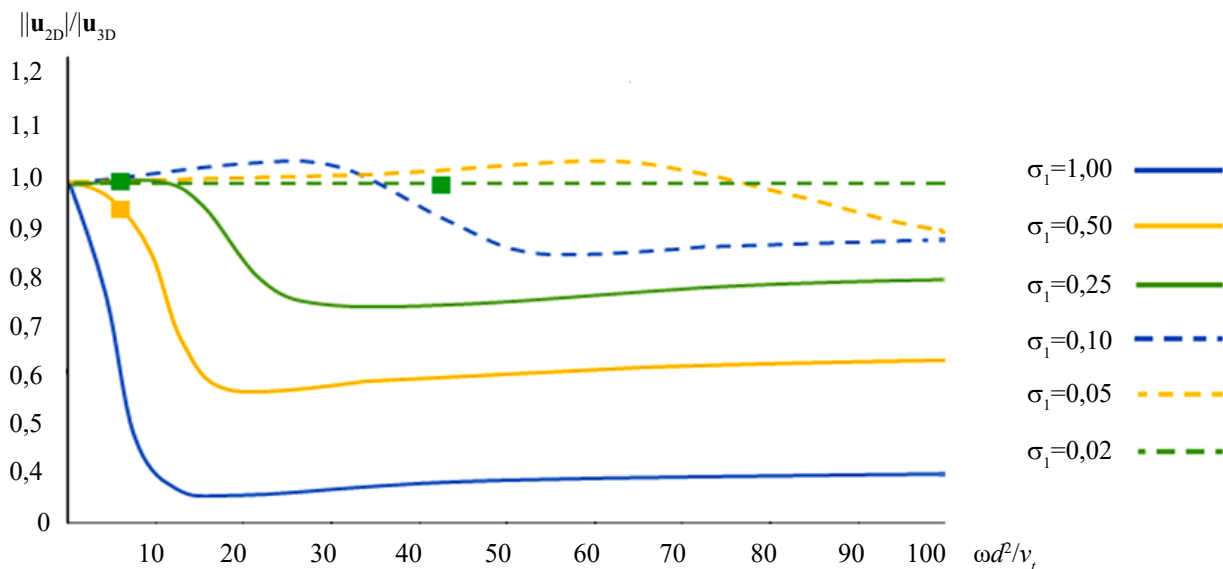


Рис. 5. Соотношение амплитуд между U и $\bar{u}$ как функция $\omega d^2/\nu_i$ и σ_1

Отношение амплитуд скорости больше 1 при условии, что $\omega d^2/\nu_i < 65$. Это означает, что скорость, вычисленная с помощью модели, усредненной по глубине, будет больше амплитуды скорости, которая содержит информацию о вертикали, чем наоборот. Кроме того, следует отметить, что для морей, подобных Азовскому (зеленая точка на линии $\sigma_1 = 0,25$) на рисунках показано отношение амплитуды скорости к 1,06 и отношение фазы к 1,01. Ожидается отклонение амплитуд на 6 % для значений параметров, которые с большой вероятностью произойдут на практике. При том же значении $\omega d^2/\nu_i$ но более высоком значении различия увеличиваются (желтая точка на линии $\sigma_1 = 0,50$). Единственной причиной увеличения σ_1 , когда ω , d и ν_i остаются постоянными, было бы увеличение скорости $\bar{U}$. Итак, начальная исходная скорость была оценена как $\bar{U} = 0,5$ м/с, но для $\bar{U} = 1,0$ м/с желтая точка указывает на отношение амплитуд скорости 1,23 и отношение фаз 0,94.

При меньших значениях σ_1 отношение амплитуд скорости практически всегда больше 1 независимо от значения $\omega d^2/\nu_i$. В случае доминирования инерции (например, для сейша) не следует ожидать какой-либо разницы между расчетами с вертикальной информацией и без нее. На это указывает зеленая точка на линии $\sigma_1 = 0,02$.

Результат соотношения амплитуды и фазы, по-видимому, значительно чувствителен к оценке амплитуд скорости $\hat{U}$, а также к коэффициенту донного трения c_f . Можно сделать вывод, что регионы, в которых следует ожидать значительных различий (более 20 %), трудно поддаются количественной оценке в общем смысле, кроме того, существуют определенные комбинации скорости потока и глубины воды, которые могут привести к значительному отличию результатов.

В одномерной модели установившегося течения с квадратичным придонным трением одномерное уравнение импульса сводится к:

$$\frac{c_{f1}|U|U}{d} = F,$$

где c_{f1} — коэффициент трения для потока, усредненного по глубине.

Поскольку U можно считать положительным при установившемся течении, выражение для усредненной по глубине скорости становится:

$$U = \sqrt{\frac{Fd}{c_{f1}}}.$$

Отправной точкой для установившегося течения с квадратичным придонным трением для двумерной модели является уравнение (21). Константа интегрирования C_2 снова находится путем наложения граничного условия на слой. Комбинация квадратичного граничного условия ($\tau_b = c_{f2}|u_b|u_b$) и уравнения (20) приведет к выражению для скорости в слое. Подставляя это в уравнение (21), получаем выражение для C_2 , таким образом, профиль скорости становится:

$$u(z) = \frac{F}{2\nu_t}(d^2 - z^2) + \sqrt{\frac{Fd}{c_{f2}}},$$

где c_{f2} — коэффициент трения для модели, содержащей информацию в вертикальном направлении. Интегрирование по глубине дает:

$$\bar{u} = \frac{1}{d} \int_{-d}^0 u(z) dz = \frac{1}{d} \int_{-d}^0 \left(\frac{F}{2\nu_t}(d^2 - z^2) + \sqrt{\frac{Fd}{c_{f2}}} \right) dz = \frac{Fd^2}{3\nu_t} + \sqrt{\frac{Fd}{c_{f2}}}.$$

Аналогично линеаризованному случаю, при предположении $\bar{u} = U$ следует соотношение между c_{f1} и c_{f2} :

$$\frac{1}{\sqrt{c_{f1}}} = \frac{1}{\sqrt{c_{f2}}} + \frac{\sqrt{Fd^3}}{3\nu_t},$$

также $c_{f1} \neq c_{f2}$ и c_{f2} , поскольку напряжение сдвига слоя определяется по-разному. Функция возвышения уровня может быть включена в этот анализ с помощью уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0.$$

Усредненная по глубине версия уравнения неразрывности равна:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + d \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (24)$$

где ζ — высота над уровнем моря на свободной поверхности; d — глубина воды; U — усредненная по глубине скорость. Высоту поверхности можно найти, подставив выражение для усредненной по глубине скорости, вычисленной с помощью двух моделей.

Ранее полученная одномерная усредненная по глубине скорость U равна:

$$U = A \left(\frac{1}{1 - i\sigma_1} \right) e^{i\omega t},$$

где $A = F / i\omega$ и $F = -g\partial\zeta / \partial x$.

Подставляя это в усредненное по глубине уравнение непрерывности (24), получаем:

$$i\omega\tilde{\zeta} - \frac{dg}{i\omega} \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial x^2} \left(\frac{1}{1 - i\sigma_1} \right) e^{i\omega t} = 0.$$

Подставляя $\zeta(x, t) = \tilde{\zeta}(x, t) e^{i\omega t}$, получаем: $i\omega\tilde{\zeta} - \frac{dg}{i\omega} \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial x^2} \left(\frac{1}{1 - i\sigma_1} \right) e^{i\omega t} = 0.$

Это дифференциальное уравнение имеет следующее однородное решение:

$$\tilde{\zeta}(x) = C_+ e^{-p_+ x} + C_- e^{p_- x}, \quad (25)$$

где $\pm p_1 = \pm i k_0 \sqrt{1 - i \sigma_1}$, $k_0 = \omega / c_0$ — волновое число без трения; $c_0 = \sqrt{gd}$ — скорость волны без трения.

Общее периодическое решение, заданное уравнением (25), содержит две экспоненциально затухающие волны, распространяющиеся в противоположном направлении. Здесь $\pm i k_0$ представляет распространение при отсутствии трения, $\sqrt{1 - i \sigma_1}$ представляет собой влияние трения. Перепишем p как $p_1 = \mu + i k$:

$$\text{Im}(p) = k_1 = \frac{k_0}{\sqrt{1 - \tan^2 \delta}}, \quad \text{Re}(p) = \mu_1 = k_1 \tan \delta,$$

где $\tan^2 \delta \equiv \sigma_1 = \frac{k_1}{\omega}$ или $\tan 2\delta \equiv \sigma_1 = \frac{k_1}{\omega}$.

Здесь вместо того, чтобы работать с σ (отношением трения к инерции), определяется так называемый «угол трения» δ , поскольку это представляется более удобным. Общее периодическое решение уравнения (25) может быть записано в виде:

$$\tilde{\zeta}(x) = C_+ e^{-p_1 x} + C_- e^{p_1 x}, \quad \tilde{\zeta}(x) = C_+ e^{-\mu_1 x} e^{-i k_1 x} + C_- 2 e^{\mu_1 x} e^{-i k_1 x}, \quad \tilde{\zeta}(x) = \tilde{\zeta}_+ + \tilde{\zeta}_-. \quad (26)$$

Это сокращенное обозначение для двух волн, распространяющихся в противоположном направлении.

Аналогично u подставляется в уравнение непрерывности, что приводит к следующему комплексному корню:

$$\pm p_2 = \pm i k_0 \left(1 - \frac{\tilde{\gamma}}{bd} \tanh(bd) \right)^{-1/2},$$

где $\tilde{\gamma} = \left(1 + \frac{i}{\sigma_2 bd} \tanh(bd) \right)^{-1}$, $\sigma_2 = \frac{\kappa_2}{\omega}$, $bd = \sqrt{\frac{i\omega}{\nu_t}} d$.

Следующий раздел иллюстрирует некоторые из предыдущих разработок для сингулярной поступательной волны и волн в бассейне, закрытом с одного конца, как для двумерного, так и для трехмерного случая.

Результаты исследования. Для интерпретации решения для сингулярной прогрессивной волны будем использовать:

$$\zeta(x, t) = \text{Re} \{ \tilde{\zeta} e^{i \omega t} \}.$$

Рассматривается сингулярная бегущая волна, поэтому будем использовать ζ_+ из уравнения (26):

$$\zeta_+(x, t) = \text{Re} \{ \tilde{\zeta}_+(x) e^{i \omega t} \} = \text{Re} \{ C_+ e^{-p_+ x} e^{i \omega t} \}.$$

Подставляя $p_2 = \mu + i k$ и записывая C_1 по модулю и аргументу, получаем:

$$\zeta_+(x, t) = \text{Re} \{ |C_+| e^{-\mu x} e^{i(\omega t - kx + \arg C_+)} \} \quad \text{или} \quad \zeta_+(x, t) = \tilde{\zeta}_+(x) e^{i(\omega t - kx + \arg C_+)},$$

где $\tilde{\zeta}_+(x) = |C_+| e^{-\mu x}$.

Это решение показывает высоту поверхности сингулярной поступательной волны с k (мнимая часть p) в качестве волнового числа (изменение фазы на единицу длины). Поскольку фаза изменяется в зависимости от x и t через $\omega t - kx$, это относится к прогрессивной волне в положительном направлении x , с фазовой скоростью $c = \omega/k$, а аргумент C_+ является начальной фазой (фазой, когда $\omega t = 0$) ζ_+ при $x = 0$. Амплитуда $\zeta_+(x, t)$ при $x = 0$ задается через $|C_+|$, и она экспоненциально уменьшается в положительном направлении по оси x со скоростью затухания μ .

Результаты численных экспериментов представлены в таблице 1. Случай 1 иллюстрирует ситуацию, в которой донное трение не вносит существенный вклад в решение ($\sigma_1 = 0,05$; $d = 60$ м); для случая 2 трение имеет существенное значение ($\sigma_1 = 0,50$; $d = 20$ м).

Амплитуда подъема поверхности уменьшается с коэффициентом $e^{-\mu \Delta x} \cdot \exp(-\mu \Delta x)$. На расстоянии $\Delta x = 10$ км одномерный коэффициент уменьшения для случая 1 равен $e^{(-0,015)} \approx 0,99$, двумерный также равен $e^{(-0,015)} \approx 0,99$. Для случая 2 одномерный коэффициент уменьшения равен $\exp(-0,24) \approx 0,78$, двумерный — $\exp(-0,16) \approx 0,86$. Можно сделать вывод, что различия между одномерными и двумерными результатами не существенны, когда донное трение не вносит существенный вклад в решение.

Таблица 1

Расчетные параметры волны с постоянной вязкостью $\nu_t = 0,05 \text{ м}^2/\text{с}$

Параметр	Формула	Случай 1	Случай 2
σ_1		0,05	0,50
σ_2		0,06	0,62
d		60 [м]	20 [м]
c_0	$\sqrt{gd}$	24,3 [м/с]	14,0 [м/с]
k_0	ω / c	$5,80 \cdot 10^{-6}$	$1,00 \cdot 10^{-5}$
k_1	$\text{Im}(p_1)$	$5,80 \cdot 10^{-6}$	$1,03 \cdot 10^{-5}$
k_2	$\text{Im}(p_2)$	$5,81 \cdot 10^{-6}$	$8,79 \cdot 10^{-6}$
μ_1	$\text{Re}(p_1)$	$1,45 \cdot 10^{-7}$	$2,44 \cdot 10^{-6}$
μ_2	$\text{Re}(p_2)$	$1,50 \cdot 10^{-7}$	$1,56 \cdot 10^{-6}$

Аналитическими решениями для модели, усредненной по глубине, и модели, которая содержит информацию по вертикали, являются:

$$U = \tilde{A} \cdot \left(\frac{1}{1 - i\sigma_1} \right) e^{i\omega t}, \quad \bar{u} = \tilde{A} \cdot \left(1 - \frac{\tilde{\gamma}}{bd} \tanh(bd) \right) e^{i\omega t},$$

где $\tilde{\gamma}$ — функция только от σ_2 и bd . Таким образом, усредненные по глубине скорости в обеих моделях выглядят очень похоже и могут быть описаны функцией безразмерного σ_1 -параметра (или безразмерного σ_2 -параметра) и безразмерного bd -параметра, соответственно, где:

$$\sigma_1 = \frac{8}{3\pi} c_{f1} \frac{\bar{U}}{\omega d}, \quad \sigma_2 = \frac{8}{3\pi} c_{f2} \frac{\bar{u}_b}{\omega d}, \quad bd = \sqrt{\frac{i\omega d^2}{\nu_t}}.$$

Чтобы связать вышеприведенные решения, будем считать, что усредненные по глубине скорости в обоих случаях равны для установившегося течения.

Концентрируясь на распространении одной преобладающей сингулярной прогрессивной волны, аналитический подход, показывает, что определенные условия могут вызывать значительные различия между усредненными по глубине скоростями, рассчитанными с помощью двумерной и трехмерной моделей. Однако тщательное исследование привело к выводу, что найти такие условия на практике довольно сложно. Таким образом, в сочетании с неопределенностями, связанными с соотношением между двумя моделями, наибольшие различия следует ожидать в местах с большей глубиной воды ($d > 60 \text{ м}$) и высокими скоростями ($u \approx 1 \text{ м/с}$). Также следует отметить, что отношение амплитуд практически всегда больше 1, а отношение фаз < 1 для морей.

Аналитические решения были найдены путем линеаризации уравнений, что, очевидно, имеет свои ограничения. Приводится различие между двумя видами нелинейных эффектов:

1. Нелинейности, вызванные членами более высокого порядка в уравнениях движения, т. е. членами адвективного ускорения и трения. Линеаризация термина трения kU основана на оптимальном воспроизведении преобладающей сингулярной прогрессивной волны. Хотя такая линеаризация эффективна для целей данного исследования, она искажает распространение и генерацию других составляющих движения водной среды.

2. Нелинейные эффекты, вызванные геометрическими нелинейностями, которые являются результатом зависимости поперечного сечения от высоты поверхности ζ . Это связано, например, с различной глубиной воды и шириной водоема, что будет важно при моделировании реального моря.

Список литературы

1. Bijlsma A.C., Uittenbogaard R.E., Blokland T. Horizontal large eddy simulation applied to stratified tidal flows. *Proceedings of the International Symposium on Shallow Flows*. Delft, Netherlands. 2003:559–566. <https://doi.org/10.1201/9780203027325.ch70>
2. Chamecki M., Chor T., Yang D., et al. Material transport in the ocean mixed layer: recent developments enabled by large eddy simulations. *Reviews of Geophys.* 2019;57:1338–1371. <https://doi.org/10.1029/2019RG000655>
3. Гуцин В.А., Миткин В.В., Рождественская Т.И. и др. Численное и экспериментальное исследование тонкой структуры течения стратифицированной жидкости вблизи кругового цилиндра. *Прикладная механика и техническая физика*. 2007;48(1(281)):43–54. <https://doi.org/10.1007/s10808-007-0006-y>
4. Jirka G.H. Large scale flow structures and mixing processes in shallow flows. *Journal of Hydraulic Research*. 2001;39(6):567–573. <https://doi.org/10.1080/00221686.2001.9628285>
5. Smit P. B., Janssen T.T., Herbers T.H. Nonlinear wave kinematics near the ocean surface. *Journal of Oceanography*. 2017;47:1657–1673. <https://doi.org/10.1175/JPO-D-16-0281.1>

6. Единая государственная система информации об обстановке в Мировом океане. URL: <http://portal.esimo.ru> (дата обращения: 10.06.2023).
7. Alekseenko E., Roux B., Sukhinov A., et al. Nonlinear hydrodynamics in a mediterranean lagoon. *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2013;20(2):189–198. <https://doi.org/10.5194/npg-20-189-2013>
8. Battjes J., Labeur R. *Unsteady Flow in Open Channels*. Cambridge University Press, 2017. 312 p. <https://doi.org/10.1017/9781316576878>
9. Белоцерковский О.М. *Турбулентность: новые подходы*. Москва : Наука, 2003. 285 с.
10. Монин А.С. Турбулентность и микроструктура в океане. *Успехи физических наук*. 1973;109(2):333–354. <https://doi.org/10.1070/PU1973v016n01ABEH005153>
11. Breugem W.P. The influence of wall permeability on laminar and turbulent flows. *PhD thesis*. Delft University of Technology, 2004. 206 p.
12. Vreugdenhil C.B. *Numerical Methods for Shallow-Water Flow*. Springer, Berlin; Heidelberg, New York, 1994. 262 p.
13. Fischer H. *Mixing in Inland and Coastal Waters*. Academic Press, 1979. 483 p
14. Lorentz H.A. Sketches of his work on slow viscous flow and some other areas in fluid mechanics and the background against which it arose. *Journal of Engineering Mathematics*. 1996;30(1–2):1–18. <https://doi.org/10.1007/BF00118820>
15. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Алексеенко Е.В. Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе. *Математическое моделирование*. 2011;3(5):562–574. <https://doi.org/10.1134/S2070048211050115>
16. Сухинов А.И., Чистяков А.Е. Параллельная реализация трехмерной модели гидродинамики мелководных водоемов на супервычислительной системе. *Вычислительные методы и программирование*. 2012;13(1):290–297.
17. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Фоменко Н.А. Методика построения разностных схем для задачи диффузии-конвекции-реакции, учитывающих степень заполненности контрольных ячеек. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2013;4(141): 87–98.
18. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежных водных системах на многопроцессорной вычислительной системе. *Вычислительные методы и программирование*. 2014;15:610–620.
19. Васильев В.С., Сухинов А.И. Прецизионные двумерные модели мелких водоемов. *Математическое моделирование*. 2003;15(10):17–34.
20. Самарский А.А. *Теория разностных схем*. Москва: Наука, 1989. 553 с.
21. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. *Численные методы решения задач конвекции-диффузии*. Москва: Наука, 2015.

References

1. Bijlsma AC, Uittenbogaard RE, Blokland T. Horizontal large eddy simulation applied to stratified tidal flows. *Proceedings of the International Symposium on Shallow Flows*. Delft, Netherlands. 2003:559–566. <https://doi.org/10.1201/9780203027325.ch70>
2. Chamecki M, Chor T, Yang D, et al. Material transport in the ocean mixed layer: recent developments enabled by large eddy simulations. *Reviews of Geophys*. 2019;57:1338–1371. <https://doi.org/10.1029/2019RG000655>
3. Gushchin VA, Mitkin VV, Rozhdestvenskaya TI, et al. Numerical and experimental study of the fine structure of a stratified fluid flow over a circular cylinder. *Applied Mechanics and Technical Physics*. 2007;48(1(281)):43–54. (In Russ.). <https://doi.org/10.1007/s10808-007-0006-y>
4. Jirka GH. Large scale flow structures and mixing processes in shallow flows. *Journal of Hydraulic Research*. 2001;39(6):567–573. <https://doi.org/10.1080/00221686.2001.9628285>
5. Smit PB, Janssen TT, Herbers TH. Nonlinear wave kinematics near the ocean surface. *Journal of Oceanography*. 2017;47:1657–1673. <https://doi.org/10.1175/JPO-D-16-0281.1>
6. Unified state information system on the situation in the World Ocean. URL: <http://portal.esimo.ru> (Accessed 10.06.2023).
7. Alekseenko E, Roux B, Sukhinov A, et al. Nonlinear hydrodynamics in a mediterranean lagoon. *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2013;20(2):189–198. <https://doi.org/10.5194/npg-20-189-2013>
8. Battjes J, Labeur R. *Unsteady Flow in Open Channels*. Cambridge University Press, 2017. 312 p. <https://doi.org/10.1017/9781316576878>
9. Belocerkovskij OM. *Turbulence: new approaches*. Moscow : Nauka, 2003. 285 с.
10. Monin AS. Turbulence and microstructure in the ocean. *Soviet Physics Uspekhi*. 1973;109(2):333–354. (In Russ.). <https://doi.org/10.1070/PU1973v016n01ABEH005153>
11. Breugem WP. The influence of wall permeability on laminar and turbulent flows. *PhD thesis*. Delft University of Technology, 2004. 206 p.
12. Vreugdenhil CB. *Numerical Methods for Shallow-Water Flow*. Springer, Berlin; Heidelberg, New York, 1994. 262 p.
13. Fischer H. *Mixing in Inland and Coastal Waters*. Academic Press, 1979. 483 p.

14. Lorentz HA. Sketches of his work on slow viscous flow and some other areas in fluid mechanics and the background against which it arose. *Journal of Engineering Mathematics*. 1996;30(1–2):1–18. <https://doi.org/10.1007/BF00118820>
15. Sukhinov AI, Chistyakov AE, Alekseenko EV. Numerical realization of the three-dimensional model of hydrodynamics for shallow water basins on a high-performance system. *Matematicheskoe modelirovanie*. 2011;3(5):562–574. (In Russ.). <https://doi.org/10.1134/S2070048211050115>
16. Suhinov AI, Chistyakov AE. Parallel implementation of a three-dimensional hydrodynamic model of shallow water basins on supercomputing systems. *Numerical methods and programming*. 2012;13(1):290–297. (In Russ.).
17. Suhinov AI, Chistyakov AE, Fomenko NA. A Method of Constructing Difference Scheme for Problems of Diffusion-Convection-Reaction, Takes Into the Degree of Filling of the Control Volume. Proceedings of the Southern Federal University. *Technical sciences*. 2013;4(141): 87–98. (In Russ.).
18. Sukhinov AI, Chistyakov AE, Prochenko EA. Sediment Transport mathematical modeling in a coastal zone using multiprocessorComputational. *Numerical methods and programming*. 2014;15:610–620. (In Russ.).
19. Vasil'ev VS, Suhinov AI. Precise Two-Dimensional Models for Shallow Water Basins. *Matematicheskoe modelirovanie*. 2003;15(10):17–34. (In Russ.).
20. Samarskiy AA. *The Theory of difference schemes*. Moscow: Nauka, 1989. 553 p. (In Russ.).
21. Samarskiy AA, Vabishevich PN. *Numerical methods for solving convection-diffusion problems*. Moscow: Nauka, 2015. (In Russ.).

Об авторах:

Проценко Софья Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, научный сотрудник, Таганрогский институт им. А. П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (347936, РФ, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9155-5555), rab5555@rambler.ru

Проценко Елена Анатольевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, ведущий научный сотрудник, Таганрогский институт им. А. П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (347936, РФ, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9155-5555), capros@rambler.ru

Харченко Антон Владимирович, магистрант, Таганрогский институт им. А. П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (347936, РФ, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), av.kharchenko91@mail.ru

Заявленный вклад соавторов:

все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Поступила в редакцию 19.07.2023

Поступила после рецензирования 10.08.2023

Принята к публикации 11.08.2023

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Sofia V Protsenko, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Researcher, A. P. Chekhov Taganrog Institute (branch) Rostov State University of Economics (48, Initiative St., Taganrog, 347936, RF), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9155-5555), rab5555@rambler.ru

Elena A Protsenko, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Leading Researcher, A. P. Chekhov Taganrog Institute (branch) Rostov State University of Economics (48, Initiative St., Taganrog, 347936, RF), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9155-5555), capros@rambler.ru

Anton V Kharchenko, Master's student, A. P. Chekhov Taganrog Institute (branch) Rostov State University of Economics (48, Initiative St., Taganrog, 347936, RF), av.kharchenko91@mail.ru

Claimed contributorship:

all authors have made an equivalent contribution to the preparation of the publication.

Received 19.07.2023

Revised 10.08.2023

Accepted 11.08.2023

Conflict of interest statement

the authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.