

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 519.6

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-9-21>

Научная статья



Двумерная гидродинамическая модель прибрежных систем, учитывающая испарение

А.И. Сухинов¹ ✉, О.В. Колгунова², М.З. Гирмай¹, О.С. Нахом¹¹Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация²Северо-Осетинский государственный университет, г. Владикавказ, Российская Федерация✉ sukhinov@gmail.com

Аннотация

Введение. Несмотря на развитие численных методов морской гидродинамики, ориентированных на использование пространственно-трехмерных моделей, применение двумерных гидродинамических моделей по-прежнему остается актуальным. Прежде всего это касается моделирования гидродинамических процессов в мелководных и прибрежных системах при решении практически важных задач прогнозирования переноса загрязняющих веществ во взвешенной и растворенной формах. Испарение для морских прибрежных систем, располагающихся на Юге России (Азовское море, Северный Каспий и др.), а тем более в прибрежных районах Красного моря, является существенным фактором, который влияет не только на баланс водных масс, но и вносит изменения в импульс системы и распределение вектора скорости водной среды. Этот эффект заметен для прибрежных течений и мелководных систем.

Материалы и методы. В данной работе при построении пространственно-двумерной (2D) модели гидродинамики морских прибрежных систем при интегрировании по вертикальной координате не применялась традиционная методика преобразования членов уравнений Навье-Стокса, содержащих дифференцирование по горизонтальным пространственным переменным, предполагающая перестановку операций дифференцирования по горизонтальным пространственным координатам и интегрирование по вертикальной координате. Это позволило избежать появления в пространственно-двумерной модели нефизических источников энергии и импульса, которые могут иметь существенное значение в традиционных 2D-моделях при значительных перепадах глубин, характерных для прибрежных систем. Дополнительно в работе исследовано выполнение аналога закона сохранения полной механической энергии системы для построенной 2D-модели.

Результаты исследования. С помощью корректного преобразования 3D-модели (интегрирования уравнений Навье-Стокса и неразрывности по вертикальной координате с учетом испарения со свободной поверхности) построены пространственно-двумерные модели гидродинамики, для которых выполняются основные законы сохранения, в том числе массы и полной механической энергии системы. Исследовано выполнение аналога закона сохранения полной механической энергии для различных типов граничных условий, в том числе на дне. Выполнен корректный учет испарения со свободной поверхности не только в уравнении неразрывности, но и в уравнениях движения с учетом ветра и волн.

Обсуждение и заключение. Построена и исследована двумерная модель гидродинамики, учитывающая испарение не только в уравнении баланса масс (неразрывности), но и в уравнениях движения (Навье-Стокса). Предложенная модель может быть использована для прогнозного моделирования гидрофизических процессов, в том числе распространения загрязняющих веществ в водной среде прибрежных систем и мелководных водоемов применительно к таким морским системам, как Азовское море, Северный Каспий, прибрежные районы Красного моря и др. Пространственно-двумерные модели морской гидродинамики, не заменяя трехмерных моделей, могут служить модельной основой для оперативного прогнозирования ситуаций в прибрежных системах и мелководных объектах с использованием вычислительных систем с относительно невысокой производительностью и умеренным объемом оперативной памяти (5–10 Тфлопс, 2–4 ТБ соответственно).

Ключевые слова: прибрежные морские системы, испарение, 2D-модели гидродинамики, законы сохранения массы и полной механической энергии

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке по гранту РФФ № 22-11-00295.

Для цитирования. Сухинов А.И., Колгунова О.В., Гирмай М.З., Нахом О.С. Двумерная гидродинамическая модель прибрежных систем, учитывающая испарение. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):9–21. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-9-21>

Original article

Two Dimensional Hydrodynamics Model with Evaporation for Coastal Systems

Alexander I. Sukhinov¹, Olesya V. Kolgunova², Mebrakhtu Z. Ghirmay¹, Ogbamikael S. Nahom¹

¹Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

²North-Osetian State University, Vladikavkaz, Russian Federation

✉ sukhinov@gmail.com

Abstract

Introduction. The use of two-dimensional (2D) hydrodynamic models is relevant, despite the development of numerical methods of marine hydrodynamics focused on the use of three-dimensional spatial models. This is due to the modelling of hydrodynamic processes in shallow and coastal systems in solving practically important problems of predicting the transport of pollutants in suspended and dissolved forms. Evaporation for the Southern of Russia marine coastal systems (the Azov Sea, the Northern Caspian, etc.), and even more so in the coastal areas of the Red Sea, is a significant factor that affects not only the balance of water masses, but also makes changes in the momentum of the system and the distribution of the velocity vector of the aquatic environment. This effect is significant for coastal currents and shallow-water systems.

Materials and Methods. The traditional method of converting the terms of the Navier-Stokes equations containing differentiation by horizontal spatial variables was used, involving the rearrangement of differentiation operations by horizontal spatial coordinates and integration by vertical coordinate when constructing a spatially two-dimensional model of hydrodynamics of marine coastal systems when integrated by vertical coordinate. This made it possible to avoid the appearance of non-physical sources of energy and momentum in the spatially two-dimensional model, which can be essential in traditional 2D models with significant depth differences characteristic of coastal systems. The implementation of the analogue of the law of conservation of the total mechanical energy of the system for the constructed 2D model is investigated.

Results. Using the correct transformation of the 3D model (integration of the Navier-Stokes equations and continuity along a vertical coordinate, taking into account evaporation from a free surface), spatially two-dimensional models of hydrodynamics are constructed, for which the basic conservation laws, including mass and total mechanical energy of the system, are fulfilled. The implementation of an analogue of the law of conservation of total mechanical energy for various types of boundary conditions, including at the bottom, is investigated. The evaporation from the free surface is correctly accounted for not only in the continuity equation, but also in the equations of motion taking into account wind and waves.

Discussion and Conclusion. 2D model of hydrodynamics has been constructed and studied, taking into account evaporation not only in the mass balance equation (continuity), but also in the Navier-Stokes equations of motion. The proposed model can be used for predictive modelling of hydrophysical processes, including the spread of pollutants in the aquatic environment of coastal systems and shallow reservoirs in relation to marine systems such as the Sea of Azov, the Northern Caspian Sea, coastal areas of the Red Sea, etc. Spatially two-dimensional models of marine hydrodynamics, without replacing three-dimensional models, can serve as a model basis for operational forecasting of situations in coastal systems and shallow-water objects using computing systems with relatively low performance and a moderate amount of RAM (5–10 Tflops, 2–4 TB, respectively).

Keywords: Coastal Systems, Evaporation, 2D Hydrodynamics Models, Mass Conservation Law, Mechanical Energy Conservation Law

Financing. The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 22-11-00295.

For citation. Sukhinov A.I., Kolgunova O.V., Ghirmay M.Z., Nahom O.S. Two Dimensional Hydrodynamics Model with Evaporation for Coastal Systems. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):9–21. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-9-21>

Введение. Несмотря на развитие численных методов морской гидродинамики, ориентированных на использование пространственно-трехмерных моделей, применение двумерных гидродинамических моделей остается востребованным [1–4]. Прежде всего это касается гидродинамических процессов в мелководных и прибрежных системах при решении практически важных задач оперативного прогноза распространения загрязняющих веществ во взвешенной и растворенной формах, движения осадков и донных отложений. Испарение для морских прибрежных систем, располагающихся на Юге России (Азовское море, Северный Каспий и др.), а тем более для при-

брежных районов Красного моря является существенным фактором, который влияет не только на баланс водных масс, но и вносит изменения в импульс системы и распределение вектора скорости водной среды. Этот эффект очень заметен для прибрежных течений и мелководных систем [5–8]. Цель работы — построить консервативную пространственно-двумерную гидродинамическую модель, для которой выполняются законы сохранения баланса массы и полной механической энергии с учетом испарения воды со свободной поверхности водного объекта.

Прибрежные морские системы характеризуются высокой интенсивностью движения водной среды, большими перепадами глубин, сложной формой береговой линии, а в ряде случаев — наличием различных гидротехнических сооружений. Наибольший вред водным ресурсам наносит промышленное загрязнение [9–10]. В результате деятельности береговых предприятий и морского флота в воду попадают полихлорированные бифенилы, тяжелые металлы, поверхностно-активные вещества, легкоокисляемая органика, полиароматические углеводороды и др. Особую опасность представляют отходы нефтехимической и нефтеперерабатывающей промышленности. Нефтяное загрязнение является одной из наиболее вредных и трудноразрешимых чрезвычайных ситуаций [11–12].

Испарение — важный процесс при большинстве разливов нефти. Легкая нефть очень резко изменяется с жидкой на вязкую. В условиях, когда пограничный слой воздуха неподвижен (нет ветра) или имеет низкую турбулентность, воздух непосредственно над водой быстро насыщается и испарение замедляется [13]. Когда скорость ветра увеличивается, скорость испарения существенно возрастает и является нелинейно зависящей функцией от высоты волн. В настоящей работе используется относительно простая модель испарения, которая позволяет учесть эти эффекты.

Другая особенность полученных пространственно-двумерных моделей гидродинамики — учет того факта, что операции дифференцирования по пространственным переменным в горизонтальных направлениях не являются, как показано А.И. Сухиновым, коммутативными по отношению к операции интегрирования по вертикальной пространственной координате. В случае прибрежных систем, где наблюдается существенный перепад глубин, произвольное изменение порядка следования данных операций, выполненное для «удобства и простоты» получения пространственно-двумерных уравнений движения водной среды, может привести к появлению фиктивных, физически необоснованных источников импульса в уравнениях Навье-Стокса. Предложенный авторами способ построения двумерных уравнений движения позволяет исключить данный негативный эффект.

Материалы и методы. Для моделирования гидродинамического процесса с испарением на открытой акватории используются уравнения сохранения массы, импульса и энергии, описывающие перенос как жидкой, так и газовой фазы. Вводится прямоугольная декартова система координат. Ось Oz направим противоположно направлению g из некоторой точки на невозмущенной поверхности жидкости, ось Ox — на восток, ось Oy — на север. Поскольку вклад центробежной силы составляет $\approx 0,2\%$ от вклада гравитационной силы притяжения к Земле, угол ϑ между вектором угловой скоростью вращения Земли и вертикалью Oz можно считать дополняющим до $\pi/2$ широтой места.

Результаты исследования. При выводе 2D-модели гидродинамики выполним интегрирование 3D-уравнения неразрывности

$$u'_x + v'_y + w'_z = 0$$

и 3D-уравнений Навье-Стокса

$$\begin{aligned} u'_t + (u^2)'_x + (uv)'_y + (uw)'_z &= -\rho^{-1} p'_x - \phi'_x + \eta \rho^{-1} (u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}) + 2\Omega (v \sin \vartheta - w \cos \vartheta), \\ v'_t + (uv)'_x + (v^2)'_y + (vw)'_z &= -\rho^{-1} p'_y - \phi'_y + \eta \rho^{-1} (v''_{xx} + v''_{yy} + v''_{zz}) - 2\Omega u \sin \vartheta, \\ w'_t + (uw)'_x + (vw)'_y + (w^2)'_z &= -\rho^{-1} p'_z - \phi'_z + \eta \rho^{-1} (w''_{xx} + w''_{yy} + w''_{zz}) + 2\Omega u \cos \vartheta \end{aligned}$$

для вязкой (в линейном приближении) несжимаемой (плотность $\rho = \text{const}$) жидкости, вращающейся с угловой скоростью

$$\Omega = \Omega (\mathbf{j} \cos \vartheta + \mathbf{k} \sin \vartheta),$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — единичные орты; $u = u(x, y, z, t)$, $v = v(x, y, z, t)$, $w = w(x, y, z, t)$ — компоненты вектора скорости жидкости в точке (x, y, z) в момент времени t ; p — полное гидростатическое давление; ϕ — гравитационный потенциал; η — первый коэффициент вязкости в однородном поле тяжести $\nabla \phi = -\mathbf{g} = -g\mathbf{k} = \text{const}$; $p_a = p_a(x, y, t)$ — атмосферное давление, $p = p_a + \rho g(\xi - z)$, $\nabla p = g(\zeta'_x \mathbf{i} + \zeta'_y \mathbf{j} - \mathbf{k})$, $-h \leq z \leq \xi$, где $\xi = \xi(x, y, z)$ — поднятие уровня свободной поверхности жидкости по отношению к невозмущенному состоянию; $h = h(x, y, z)$ — высота столба жидкости под невозмущенной поверхностью.

Подставляя в 3D уравнения Навье-Стокса выражения для гравитационного потенциала и давления получим:

$$\begin{aligned} u'_x + v'_y + w'_z &= 0, \\ u'_t + (u^2)'_x + (uv)'_y + (uw)'_z &= -g\zeta'_x - \rho^{-1} (p_a)'_x + \eta \rho^{-1} (u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}) + 2\Omega (v \sin \vartheta - w \cos \vartheta), \\ v'_t + (uv)'_x + (v^2)'_y + (vw)'_z &= -g\zeta'_y - \rho^{-1} (p_a)'_y + \eta \rho^{-1} (v''_{xx} + v''_{yy} + v''_{zz}) - 2\Omega u \sin \vartheta, \end{aligned}$$

$$w'_t + (uw)'_x + (vw)'_y + (w^2)'_z = \eta \rho^{-1} (w''_{xx} + w''_{yy} + w''_{zz}) + 2\Omega u \cos \vartheta.$$

Интегрируем полученные уравнения по вертикальной координате z от $-h$ до ξ с учетом соотношений для дифференцируемых функций $f = f(x, y, z, t)$, $\xi = \xi(x, y, t)$, $h = h(x, y, t)$:

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\xi} f'_t dz &= \left(\int_{-h}^{\xi} f dz \right)'_t - f_s \xi'_t + f_b (-h'_t), \\ \int_{-h}^{\xi} f'_x dz &= \left(\int_{-h}^{\xi} f dz \right)'_x - f_s \xi'_x + f_b (-h'_x), \\ \int_{-h}^{\xi} f'_y dz &= \left(\int_{-h}^{\xi} f dz \right)'_y - f_s \xi'_y + f_b (-h'_y), \\ \int_{-h}^{\xi} f'_z dz &= f_s - f_b, \end{aligned}$$

где $f_s = f(x, y, \xi, t)$, $f_b = f(x, y, -h, t)$ — значения функции f на поверхности и дне соответственно.

Получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} (U'_t - u_s \xi'_t - u_b h'_t) + (V'_t - v_s \xi'_t - v_b h'_t) + (w_s - w_b) &= 0, \\ (U'_t - u_s \xi'_t - u_b h'_t) + \left(\int_{-h}^{\xi} u^2 dz \right)'_x - u_s^2 \xi'_x - u_b^2 h'_x + \left(\int_{-h}^{\xi} uv dz \right)'_y - u_s v_s \xi'_y - u_b v_b h'_y + (u_s w_s - u_b w_b) &= \\ = -gH \xi'_x - \frac{H}{\rho} (p_a)'_x + \frac{\eta}{\rho} \left(\left(\int_{-h}^{\xi} u'_x dz \right)'_x - (u'_x)_s \xi'_x - (u'_x)_b h'_x \right) + \left(\int_{-h}^{\xi} u'_y dz \right)'_y - (u'_y)_s \xi'_y - (u'_y)_b h'_y + \\ + ((u'_z)_s - (u'_z)_b) + 2\Omega (V \sin \vartheta - W \cos \vartheta), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (V'_t - v_s \xi'_t - v_b h'_t) + \left(\int_{-h}^{\xi} uv dz \right)'_x - u_s v_s \xi'_x - u_b v_b h'_x + \left(\int_{-h}^{\xi} v^2 dz \right)'_y - v_s^2 \xi'_y - v_b^2 h'_y + (v_s w_s - v_b w_b) &= \\ = -gH \xi'_y - \frac{H}{\rho} (p_a)'_y + \frac{\eta}{\rho} \left(\left(\int_{-h}^{\xi} v'_x dz \right)'_x - (v'_x)_s \xi'_x - (v'_x)_b h'_x \right) + \left(\int_{-h}^{\xi} v'_y dz \right)'_y - (v'_y)_s \xi'_y - (v'_y)_b h'_y + \\ + ((v'_z)_s - (v'_z)_b) - 2\Omega U \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (W'_t - w_s \xi'_t - w_b h'_t) + \left(\int_{-h}^{\xi} uw dz \right)'_x - u_s w_s \xi'_x - u_b w_b h'_x + \left(\int_{-h}^{\xi} vw dz \right)'_y - v_s w_s \xi'_y - v_b w_b h'_y + \\ + (w_s^2 - w_b^2) = \frac{\eta}{\rho} \left(\left(\int_{-h}^{\xi} w'_x dz \right)'_x - (w'_x)_s \xi'_x - (w'_x)_b h'_x \right) + \left(\int_{-h}^{\xi} w'_y dz \right)'_y - (w'_y)_s \xi'_y - (w'_y)_b h'_y + \\ + ((w'_z)_s - (w'_z)_b) + 2\Omega U \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (3)$$

где $U = \int_{-h}^{\xi} u dz$, $V = \int_{-h}^{\xi} v dz$, $W = \int_{-h}^{\xi} w dz$; — полная глубина.

Перегруппировав слагаемые, получим:

$$\begin{aligned} U'_x + V'_y + (-u_s \xi'_x - v_s \xi'_y + w_s) - (u_b h'_x + v_b h'_y + w_b) &= 0, \\ U'_t + \left(\int_{-h}^{\xi} u^2 dz \right)'_x + \left(\int_{-h}^{\xi} uv dz \right)'_y - u_s (\xi'_t + u_s \xi'_x + v_s \xi'_y - w_s) - u_b (h'_t + u_b h'_x + v_b h'_y + w_b) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -gH\zeta'_x + \frac{\eta}{\rho} \left((U'_x - u'_s \zeta'_x - u'_b h'_x)'_x + (U'_y - u'_s \zeta'_y - u'_b h'_y)'_y \right) + (F_s)_x + (F_b)_x + 2\Omega (V \sin \vartheta - W \cos \vartheta), \\
 &V'_t + \left(\int_{-h}^{\zeta} u v dz \right)'_x + \left(\int_{-h}^{\zeta} v^2 dz \right)'_y - v_s (\zeta'_t + u'_s \zeta'_x + v'_s \zeta'_y - w'_s) - v_b (h'_t + u'_b h'_x + v'_b h'_y + w'_b) = \\
 &= -gH\zeta'_y + \frac{\eta}{\rho} \left((V'_x - v'_s \zeta'_x - v'_b h'_x)'_x + (V'_y - v'_s \zeta'_y - v'_b h'_y)'_y \right) + (F_s)_y + (F_b)_y - 2\Omega U \sin \vartheta, \\
 &W'_t + \left(\int_{-h}^{\zeta} u w dz \right)'_x + \left(\int_{-h}^{\zeta} v w dz \right)'_y - w_s (\zeta'_t + u'_s \zeta'_x + v'_s \zeta'_y - w'_s) - w_b (h'_t + u'_b h'_x + v'_b h'_y + w'_b) = \\
 &= \frac{\eta}{\rho} \left((W'_x - w'_s \zeta'_x - w'_b h'_x)'_x + (W'_y - w'_s \zeta'_y - w'_b h'_y)'_y \right) + (F_s)_z + (F_b)_z + 2\Omega U \cos \vartheta,
 \end{aligned}$$

где граничные вязкие напряжения на поверхности жидкости отнесены на счет силы трения ветра о поверхность

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_s = & (F_s)_x \mathbf{i} + (F_s)_y \mathbf{j} + (F_s)_z \mathbf{k} = \left(-H\rho^{-1}(p_a)'_x + \eta\rho^{-1} \left(-(u'_x)_s \zeta'_x - (u'_y)_s \zeta'_y + (u'_z)_s \right) \right) \mathbf{i} + \\
 & + \left(-H\rho^{-1}(p_a)'_y + \eta\rho^{-1} \left(-(v'_x)_s \zeta'_x - (v'_y)_s \zeta'_y + (v'_z)_s \right) \right) \mathbf{j} + \left(\eta\rho^{-1} \left(-(w'_x)_s \zeta'_x - (w'_y)_s \zeta'_y + (w'_z)_s \right) \right) \mathbf{k},
 \end{aligned}$$

а вязкие напряжения на дне отнесены на счет силы трения о дно

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_b = & (F_b)_x \mathbf{i} + (F_b)_y \mathbf{j} + (F_b)_z \mathbf{k} = \eta\rho^{-1} \left(\left(-(u'_x)_b h'_x - (u'_y)_b h'_y - (u'_z)_b \right) \mathbf{i} + \right. \\
 & \left. + \left(-(v'_x)_s \zeta'_x - (v'_y)_s \zeta'_y + (v'_z)_s \right) \mathbf{j} + \left(-(w'_x)_s \zeta'_x - (w'_y)_s \zeta'_y + (w'_z)_s \right) \mathbf{k} \right).
 \end{aligned}$$

С учетом кинематических условий на поверхности и дне

$$-u'_s \zeta'_x - v'_s \zeta'_y + w'_s = \zeta'_t + \omega\rho^{-1}, \quad u'_b h'_x + v'_b h'_y + w'_b = -h'_t,$$

где $\omega\rho^{-1}$ — испаряющийся в единицу времени слой жидкости, получим

$$H'_t + U'_x + V'_y + \frac{\omega}{\rho} = 0.$$

Для определения скорости испарения с единичной площади использовалась следующая эмпирическая формула:

$$\omega \left(\frac{g}{h} \right) = e (P_{us} - P_{set}),$$

где P_{us} — давление паров насыщенного воздуха, мбар; P_{set} — парциальное давление водяного пара при заданной температуре и влажности воздуха, мбар; e — эмпирический коэффициент, г/м²/ч/мбар, который зависит от интенсивности образования брызг в бассейне.

Рассмотрим двумерную задачу определения скорости испарения с поверхности воды при движении воздуха с постоянной скоростью при скорости ветра V , влажности воздуха f , температуре воздуха T_a , температуре воды T_w . Скорость испарения с поверхности бассейна W определяют в г/сек/м² (рис. 1).

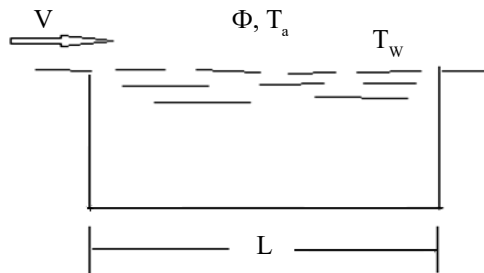


Рис. 1. Граница раздела воды и воздуха

На основании экспериментальных данных определим эмпирические зависимости для расчета скорости испарения по формуле из расчета на единицу площади:

$$\omega = \frac{(A + B \cdot V)(P_w - \phi \cdot P_a)}{r_w},$$

где P_w — давление насыщенного пара при температуре воды; P_a — давление насыщенного пара при температуре воздуха; r_w — теплота парообразования ($r_w = 2,2582$ Дж/кг при нормальном атмосферном давлении); A и B — эмпирические константы. Разброс скоростей испарения по разным источникам составляет +100 %–80 %.

Существует ряд стандартов, дающих аналогичные результаты в середине этого диапазона: ВМО (1966) СССР, Сартори (1989), Мак-Миллана (1971) и др. Согласно стандарту ВМО (1966) СССР, коэффициенты $A = 0,0369$, $B = 0,0266$. Следует отметить, что скорость испарения, рассчитанная по указанному стандарту для $V = 0$ м/с, согласуется со скоростью испарения, определенной по стандарту VDI 2089 для фиксированной (невозмущенной) поверхности, с точностью до 10–15 %.

Расчеты могут проводиться как в ламинарной, так и в турбулентной постановках с калибровкой числа Шмидта S_c и турбулентного числа Шмидта Sc_t . Данное число калибруется в зависимости от разницы скоростей воды и ветра в районе границы раздела сред. На основе имеющихся инструментов пакета гидродинамики STAR-CCM скорость в области границы раздела сред может определяться как

$$V_b = \nabla V \cdot G^{(1/3)},$$

где ∇V — градиент скорости, определяемый по текущему полю скоростей; $G^{1/3}$ — характерный размер ячейки, рассчитываемый по ее объему. Зависимость турбулентного числа Шмидта от скорости в области границы раздела сред для прогнозирования скорости испарения на волнах. При высоте волны 1,5 м, длине 10 м, скорости 3 м/с:

$$Sc_t(V_b) = (-0,333 V_b^2 + 6,667 V_b + 3) \cdot 3,5.$$

Приведенная выше формула используется для прогнозирования скорости испарения при наличии волн. Дальнейшее уточнение процесса испарения мы не рассматриваем и продолжим получение 2D модели:

$$\begin{aligned} U'_t + \left(\int_{-h}^{\zeta} u^2 dz \right)'_x + \left(\int_{-h}^{\zeta} uv dz \right)'_y + \frac{\omega}{\rho} u_s = -gH\zeta'_x + \frac{\eta}{\rho} \left((U''_{xx} - u_s \zeta''_{xx} - u_b h''_{xx}) + (U''_{yy} - u_s \zeta''_{yy} - u_b h''_{yy}) \right) + \\ + \left((F_s)_x - \frac{\eta}{\rho} \left((u_s)'_x \zeta'_x + (u_s)'_y \zeta'_y \right) \right) + \left((F_b)_x - \frac{\eta}{\rho} \left((u_b)'_x h'_x + (u_b)'_y h'_y \right) \right) + 2\Omega(V \sin \vartheta - W \cos \vartheta), \\ V'_t + \left(\int_{-h}^{\zeta} uv dz \right)'_x + \left(\int_{-h}^{\zeta} v^2 dz \right)'_y + \frac{\omega}{\rho} v_s = -gH\zeta'_y + \frac{\eta}{\rho} \left((V''_{xx} - v_s \zeta''_{xx} - v_b h''_{xx}) + (V''_{yy} - v_s \zeta''_{yy} - v_b h''_{yy}) \right) + \\ + \left((F_s)_y - \frac{\eta}{\rho} \left((v_s)'_x \zeta'_x + (v_s)'_y \zeta'_y \right) \right) + \left((F_b)_y - \frac{\eta}{\rho} \left((v_b)'_x h'_x + (v_b)'_y h'_y \right) \right) - 2\Omega U \sin \vartheta, \\ W'_t + \left(\int_{-h}^{\zeta} uw dz \right)'_x + \left(\int_{-h}^{\zeta} vw dz \right)'_y + \frac{\omega}{\rho} w_s = \frac{\eta}{\rho} \left((W''_{xx} - w_s \zeta''_{xx} - w_b h''_{xx}) + (W''_{yy} - w_s \zeta''_{yy} - w_b h''_{yy}) \right) + \\ + \left((F_s)_z - \frac{\eta}{\rho} \left((w_s)'_x \zeta'_x + (w_s)'_y \zeta'_y \right) \right) + \left((F_b)_z - \frac{\eta}{\rho} \left((w_b)'_x h'_x + (w_b)'_y h'_y \right) \right) + 2\Omega U \cos \zeta. \end{aligned}$$

Выделяя в производных

$$\begin{aligned} (f_s)'_x &= (f'_x)_s + (f'_z)_s \zeta'_x, \quad (f_b)'_x = (f'_x)_b - (f'_z)_b h'_x, \\ (f_s)'_y &= (f'_y)_s + (f'_z)_s \zeta'_y, \quad (f_b)'_y = (f'_y)_b - (f'_z)_b h'_y, \end{aligned}$$

сложных функций $f_s = f(x, y, \zeta, t)$, $f_b = f(x, y, -h(x, y, t), t)$ слагаемые, имеющие вид и размерность вязких напряжений, следовательно, изменяющихся непрерывно при переходе границ раздела «атмосфера — жидкость» и «жидкость — дно», и относим их на счет обобщенных сил трения ветра о поверхность $\mathbf{F}_s^*$ и жидкости о дно $\mathbf{F}_b^*$, получим:

$$H'_t + U'_x + V'_y + \frac{\omega}{\rho} = 0,$$

$$\begin{aligned} U'_t + \left(\int_{-h}^{\zeta} u^2 dz \right)'_x + \left(\int_{-h}^{\zeta} uv dz \right)'_y + \frac{\omega}{\rho} u_s = -gH\zeta'_x + \frac{\eta}{\rho} \left((U''_{xx} + U''_{yy}) - u_s (\zeta''_{xx} + \zeta''_{yy}) - u_b (h''_{xx} + h''_{yy}) \right) + \\ + (F_s^*)_x + (F_b^*)_x + 2\Omega(V \sin \vartheta - W \cos \vartheta), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} V'_t + \left(\int_{-h}^{\zeta} uv dz \right)'_x + \left(\int_{-h}^{\zeta} v^2 dz \right)'_y + \frac{\omega}{\rho} v_s = -gH\zeta'_y + \frac{\eta}{\rho} \left((V''_{xx} + V''_{yy}) - v_s (\zeta''_{xx} + \zeta''_{yy}) - v_b (h''_{xx} + h''_{yy}) \right) + \\ + (F_s^*)_y + (F_b^*)_y - 2\Omega U \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (5)$$

$$W'_t + \left(\int_{-h}^{\zeta} u w dz \right)'_x + \left(\int_{-h}^{\zeta} v w dz \right)'_y + \frac{\omega}{\rho} w_s = \frac{\eta}{\rho} \left((W''_{xx} + W''_{yy}) - w_s (\zeta''_{xx} + \zeta''_{yy}) - w_b (h''_{xx} + h''_{yy}) \right) + (F_s^*)_z + (F_b^*)_z + 2\Omega U \cos \vartheta, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_s^* &= \left((F_s)_x - \eta \rho^{-1} \left((u'_x)_s \zeta'_x + (u'_y)_s \zeta'_y + (u'_z)_s \left((\zeta'_x)^2 + (\zeta'_y)^2 \right) \right) \right) \mathbf{i} + \\ &+ \left((F_s)_y - \eta \rho^{-1} \left((v'_x)_s \zeta'_x + (v'_y)_s \zeta'_y + (v'_z)_s \left((\zeta'_x)^2 + (\zeta'_y)^2 \right) \right) \right) \mathbf{j} + \\ &+ \left((F_s)_z - \eta \rho^{-1} \left((w'_x)_s \zeta'_x + (w'_y)_s \zeta'_y + (w'_z)_s \left((\zeta'_x)^2 + (\zeta'_y)^2 \right) \right) \right) \mathbf{k}, \\ \mathbf{F}_b^* &= \left((F_b)_x - \eta \rho^{-1} \left((u'_x)_b h'_x + (u'_y)_b h'_y + (u'_z)_b \left((h'_x)^2 + (h'_y)^2 \right) \right) \right) \mathbf{i} + \\ &+ \left((F_b)_y - \eta \rho^{-1} \left((v'_x)_b h'_x + (v'_y)_b h'_y + (v'_z)_b \left((h'_x)^2 + (h'_y)^2 \right) \right) \right) \mathbf{j} + \\ &+ \left((F_b)_z - \eta \rho^{-1} \left((w'_x)_b h'_x + (w'_y)_b h'_y + (w'_z)_b \left((h'_x)^2 + (h'_y)^2 \right) \right) \right) \mathbf{k}, \end{aligned}$$

равны по величине и направлены противоположно силам, действующим со стороны столба жидкости на столб атмосферного воздуха над ним и участком дна под ним. Слагаемые, изменяющиеся при переходе границ раздела «атмосфера — жидкость» и «жидкость — дно» скачкообразно, оставлены на счету сил внутреннего вязкого трения.

При

$$W \cos \vartheta \ll V \sin \vartheta$$

решения уравнений (4) и (5) не зависят от решения уравнения (6), которое исключаем

$$H'_t + U'_x + V'_y + \frac{\omega}{\rho} = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} U'_t + \left(\int_{-h}^{\zeta} u^2 dz \right)'_x + \left(\int_{-h}^{\zeta} u v dz \right)'_y + \frac{\omega}{\rho} u_s = -g H \zeta'_x + \frac{\eta}{\rho} (\Delta U - u_s \Delta \zeta - u_b \Delta h) + \\ + (F_s^*)_x + (F_b^*)_x + 2\Omega V \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} V'_t + \left(\int_{-h}^{\zeta} u v dz \right)'_x + \left(\int_{-h}^{\zeta} v^2 dz \right)'_y + \frac{\omega}{\rho} v_s = -g H \zeta'_y + \frac{\eta}{\rho} (\Delta V - v_s \Delta \zeta - v_b \Delta h) + \\ + (F_s^*)_y + (F_b^*)_y - 2\Omega U \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ — двумерный оператор Лапласа.

Вводя коэффициенты C_{uu} , C_{uv} , C_{vv} , C_u , C_v :

$$\int_{-h}^{\zeta} u^2 dz = C_{uu} H^{-1} U^2, \quad \int_{-h}^{\zeta} u v dz = C_{uv} H^{-1} UV, \quad \int_{-h}^{\zeta} v^2 dz = C_{vv} H^{-1} V^2, \quad u_s = C_u H^{-1} U, \quad v_s = C_v H^{-1} V,$$

уравнения (7)–(9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} H'_t + U'_x + V'_y + (\omega/\rho) &= 0, \\ U'_t + (C_{uu} U^2/H)'_x + (C_{uv} UV/H)'_y + (\omega/\rho) C_u (U/H) &= -g H \zeta'_x + (\eta/\rho) (\Delta U - C_u (U/H) \Delta \zeta - u_b \Delta h) + \\ &+ (F_s^*)_x + (F_b^*)_x + 2\Omega V \sin \vartheta, \\ V'_t + (C_{uv} UV/H)'_x + (C_{vv} V^2/H)'_y + (\omega/\rho) C_v (V/H) &= -g H \zeta'_y + (\eta/\rho) (\Delta V - C_v (V/H) \Delta \zeta - v_b \Delta h) + \\ &+ (F_s^*)_y + (F_b^*)_y - 2\Omega U \sin \vartheta. \end{aligned}$$

В силу неравенства Коши-Буняковского имеются следующие ограничения для коэффициентов C_{uu} и C_{vv} :

$$U^2 = \left(\int_{-h}^{\zeta} u dz \right)^2 \leq H \int_{-h}^{\zeta} u^2 dz \Rightarrow C_{uu} \geq 1, \quad V^2 = (v)^2 \leq H \int_{-h}^{\zeta} v^2 dz \Rightarrow C_{vv} \geq 1,$$

а в силу положительной полуопределенности квадратичной формы

$$H \int_{-h}^{\zeta} (u-v)^2 dz = H \left(\int_{-h}^{\zeta} u^2 dz - 2 \int_{-h}^{\zeta} uv dz + \int_{-h}^{\zeta} v^2 dz \right) = C_{uu} U^2 - 2C_{uv} UV + C_{vv} V^2 \geq 0,$$

— ограничение для C_{uv}

$$C_{uv}^2 \leq C_{uu} C_{vv}.$$

Следующим этапом исследования является получение и анализ уравнения баланса полной механической энергии при определенных упрощениях.

При $C_{uu} \equiv C_{uv} \equiv C_{vv} \equiv 1$ для упрощенной модели получаем:

$$\begin{aligned} H'_t + U'_x + V'_y + (\omega/\rho) &= 0, \\ U'_t + (U^2/H)'_x + (UV/H)'_y + (\omega/\rho)C_u(U/H) &= -gH\zeta'_x + (\eta/\rho)(\Delta U - C_u(U/H)\Delta\zeta - u_b\Delta h) + \\ &+ (F_s^*)_x + (F_b^*)_x + 2\Omega V \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} V'_t + (UV/H)'_x + (V^2/H)'_y + (\omega/\rho)C_v(V/H) &= -gH\zeta'_y + (\eta/\rho)(\Delta V - C_v(V/H)\Delta\zeta - v_b\Delta h) + \\ &+ (F_s^*)_y + (F_b^*)_y - 2\Omega U \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (11)$$

Выполняется закон сохранения полной механической энергии — суммы потенциальной энергии в результирующем поле тяжести и положительно определенной квадратичной формы интегралов U и V , приемлемой в качестве оценки кинетической энергии столба жидкости.

Умножая (10) на U/H :

$$\begin{aligned} (U/H)U'_t + (U/H)(U^2/H)'_x + (U/H)(UV/H)'_y + (\omega/\rho)C_u(U^2/H^2) + gU\zeta'_x &= \\ = (\eta/\rho)(U/H)(\Delta U - C_u(U/H)\Delta\zeta - u_b\Delta h) + (U/H)((F_s^*)_x + (F_b^*)_x) + 2\Omega \sin \vartheta (UV/H), \end{aligned}$$

а (11) — на V/H :

$$\begin{aligned} (V/H)V'_t + (V/H)(UV/H)'_x + (V/H)(V^2/H)'_y + (\omega/\rho)C_v(V^2/H^2) + gV\zeta'_y &= \\ = (\eta/\rho)(V/H)(\Delta V - C_v(V/H)\Delta\zeta - v_b\Delta h) + (V/H)((F_s^*)_y + (F_b^*)_y) - 2\Omega \sin \vartheta (UV/H) \end{aligned}$$

и учитывая соотношения

$$\begin{aligned} (U/H)U'_t &= (U^2/(2H))'_t + (U^2/(2H^2))H'_t, \\ (V/H)V'_t &= (V^2/(2H))'_t + (V^2/(2H^2))H'_t, \\ (U/H)(U^2/H)'_x &= (U^2/(2H^2))U'_x + ((U/H)(U^2/(2H)))'_x, \\ (U/H)(UV/H)'_y &= (U^2/(2H^2))V'_y + ((V/H)(U^2/(2H)))'_y, \\ (V/H)(UV/H)'_x &= (V^2/(2H^2))U'_x + ((U/H)(V^2/(2H)))'_x, \\ (V/H)(V^2/H)'_y &= (V^2/(2H^2))V'_y + ((V/H)(V^2/(2H)))'_y, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} (U^2/(2H))'_t + ((U/H)(U^2/(2H)))'_x + ((V/H)(U^2/(2H)))'_y + (U^2/(2H^2))(H'_t + U'_x + V'_y + (\omega/\rho)) + \\ + (\omega/\rho)(C_u - 1/2)(U/H)^2 + g((U\zeta)'_x - \zeta U'_x) = \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &= (\eta/\rho)(U/H)(\Delta U - C_u(U/H)\Delta\zeta - u_b\Delta h) + (U/H)((F_s^*)_x + (F_b^*)_x) + 2\Omega \sin \vartheta (UV/H), \\ (V^2/(2H))'_t + ((U/H)(V^2/(2H)))'_x + ((V/H)(V^2/(2H)))'_y + (V^2/(2H^2))(H'_t + U'_x + V'_y + (\omega/\rho)) + \\ &+ (\omega/\rho)(C_v - 1/2)(V/H)^2 + g((V\zeta)'_y - \zeta V'_y) = \end{aligned} \quad (13)$$

Складывая (12) и (13), приходим к

$$\begin{aligned} ((U^2 + V^2)/(2H))'_t + ((U/H)(U^2 + V^2)/(2H) + gH\zeta)'_x + ((V/H)(U^2 + V^2)/(2H) + gH\zeta)'_y + \\ + (\omega/(\rho H))((2C_u - 1)U^2 + (2C_v - 1)V^2)/(2H) - g\zeta(U'_x + V'_y) = \end{aligned}$$

$$= (\eta/\rho) \left((U/H) \Delta U + (V/H) \Delta V - (C_u (U/H)^2 + C_v (V/H)^2) \Delta \zeta - ((U/H) u_b + (V/H) v_b) \Delta h \right) + \\ + \left(U \left((F_s^*)_x + (F_b^*)_x \right) + V \left((F_s^*)_y + (F_b^*)_y \right) \right) / H.$$

Над неподвижным ($h'_0 \equiv 0$) дном выполняется

$$-g\zeta(U'_x + V'_y) = g\zeta(\zeta'_t + (\omega/\rho)) = (g(\zeta^2 - h^2)/2)'_t + (\omega/(\rho H)) gH\zeta = \\ = (gH(\zeta - h)/2)'_t + (\omega/(\rho H)) (gH(\zeta - h)/2 + gH^2/2).$$

В итоге приходим к уравнению, которое является аналогом уравнения баланса полной механической энергии в дифференциальной форме

$$(K + \Pi)'_t + ((U/H)(K + \Pi + P))'_x + ((V/H)(K + \Pi + P))'_y + (\omega/(\rho H))(\Pi + P) + \\ + (\omega/(\rho H))((2C_u - 1)U^2 + (2C_v - 1)V^2)/(2H) = \\ = (\eta/\rho) \left((U/H) \Delta U + (V/H) \Delta V - (C_u (U/H)^2 + C_v (V/H)^2) \Delta \zeta - ((U/H) u_b + (V/H) v_b) \Delta h \right) + \\ + \left(U \left((F_s^*)_x + (F_b^*)_x \right) + V \left((F_s^*)_y + (F_b^*)_y \right) \right) / H, \quad (14)$$

где $K = (U^2 + V^2)/(2H)$, $\Pi = gH(\zeta - h)/2$, $P = gH^2/2$, $\Pi + P = gH\zeta$.

Для положительной функции $E = E(x, y, t) > 0$, удовлетворяющей уравнению переноса

$$E'_t + (U/H)E'_x + (V/H)E'_y = 0,$$

уравнение (4) справедливо и для обобщения оценки кинетической энергии

$$K = E \cdot (U^2 + V^2) / (2H).$$

Если считать неподвижной и границу ∂G области G , то

$$\iint_G (K + \Pi)'_t dx dy = \left(\iint_G (K + \Pi) dx dy \right)'_t,$$

а используя формулы Грина

$$\iint_G \left(((U/H)(K + \Pi + P))'_x + ((V/H)(K + \Pi + P))'_y \right) dx dy = \oint_{\partial G} (K + \Pi + P)(U dx - V dy) / H = \\ = \oint_{\partial G} (K + \Pi + P)(U \mathbf{i} + V \mathbf{j}, \mathbf{n}) dl / H, \\ \iint_G ((U/H) \Delta U + (V/H) \Delta V) dx dy = \\ = \oint_{\partial G} (\nabla K, \mathbf{n}) dl - \iint_G H \left(|\nabla(U/H)|^2 + |\nabla(V/H)|^2 \right) dx dy + \iint_G (K/H) \Delta h dx dy,$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к границе ∂G области G и полагая $C_u \equiv C_v \equiv C$, получим уравнение баланса аналога полной механической энергии жидкости в интегральной форме:

$$\left(\iint_G (K + \Pi) dx dy \right)'_t + \oint_{\partial G} (K + \Pi + P)(U \mathbf{i} + V \mathbf{j}, \mathbf{n}) dl / H + \iint_G (\omega/(\rho H))((2C - 1)K + \Pi + P) dx dy = \\ = (\eta/\rho) \left(\oint_{\partial G} (\nabla K, \mathbf{n}) dl - \iint_G H \left(|\nabla(U/H)|^2 + |\nabla(V/H)|^2 \right) dx dy - (2C - 1) \iint_G (K/H) \Delta \zeta dx dy + \right. \\ \left. + \iint_G ((K/H) - ((U/H) u_b + (V/H) v_b)) \Delta h dx dy \right) + \\ + \iint_G \left(U \left((F_s^*)_x + (F_b^*)_x \right) + V \left((F_s^*)_y + (F_b^*)_y \right) \right) dx dy / H. \quad (15)$$

Если на поверхности дна выполняются условия «прилипания»

$$u_b \equiv v_b \equiv w_b \equiv 0,$$

то слагаемое

$$\iint_G ((U/H) u_b + (V/H) v_b) \Delta h dx dy = 0$$

в уравнении баланса (15) отсутствует, а над поверхностью дна, являющейся гармонической функцией

$$\Delta h \equiv 0 \quad (16)$$

отсутствует и слагаемое

$$\iint_G (K/H) \Delta h dx dy = 0$$

и модель

$$\zeta'_t + U'_x + V'_y + (\omega/\rho) = 0 \quad \text{или} \quad H'_t + U'_x + V'_y + (\omega/\rho) = 0, \quad (17)$$

$$U'_t + (U^2/H)'_x + (UV/H)'_y + (\omega/\rho)C(U/H) = -gH\zeta'_x + (\eta/\rho)(\Delta U - C(U/H)\Delta\zeta) + (F_s^*)_x + (F_b^*)_x + 2\Omega V \sin \vartheta, \quad (18)$$

$$V'_t + (UV/H)'_x + (V^2/H)'_y + (\omega/\rho)C(V/H) = -gH\zeta'_y + (\eta/\rho)(\Delta V - C(V/H)\Delta\zeta) + (F_s^*)_y + (F_b^*)_y - 2\Omega U \sin \vartheta \quad (19)$$

оказывается строго диссипативной за счет действия сил внутреннего вязкого трения.

Соответствующая (17)–(19) система уравнений в усредненных значениях скоростей $\bar{u} = U/H$ и $\bar{v} = V/H$ будет иметь вид:

$$\zeta'_t + (H\bar{u})'_x + (H\bar{v})'_y + (\omega/\rho) = 0 \quad \text{или} \quad H'_t + (H\bar{u})'_x + (H\bar{v})'_y + (\omega/\rho) = 0, \quad (20)$$

$$(H\bar{u})'_t + (H\bar{u}^2)'_x + (H\bar{u}\bar{v})'_y + (\omega/\rho)C\bar{u} = -gH\zeta'_x + (\eta/\rho)(\Delta(H\bar{u}) - C\bar{u}\Delta\zeta) + (F_s^*)_x + (F_b^*)_x + 2\Omega H\bar{v} \sin \vartheta, \quad (21)$$

$$(H\bar{v})'_t + (H\bar{u}\bar{v})'_x + (H\bar{v}^2)'_y + (\omega/\rho)C\bar{v} = -gH\zeta'_y + (\eta/\rho)(\Delta(H\bar{v}) - C\bar{v}\Delta\zeta) + (F_s^*)_y + (F_b^*)_y - 2\Omega H\bar{u} \sin \vartheta \quad (22)$$

или, в силу уравнения неразрывности:

$$\zeta'_t + (H\bar{u})'_x + (H\bar{v})'_y + (\omega/\rho) = 0 \quad \text{или} \quad H'_t + (H\bar{u})'_x + (H\bar{v})'_y + (\omega/\rho) = 0, \quad (23)$$

$$\bar{u}'_t + \bar{u}\bar{u}'_x + \bar{v}\bar{u}'_y + (\omega/\rho)(C-1)(\bar{u}/H) = -g\zeta'_x + (\eta/(\rho H))(\Delta(H\bar{u}) - C\bar{u}\Delta\zeta) + ((F_s^*)_x + (F_b^*)_x)/H + 2\Omega\bar{v} \sin \vartheta, \quad (24)$$

$$\bar{v}'_t + \bar{u}\bar{v}'_x + \bar{v}\bar{v}'_y + (\omega/\rho)(C-1)(\bar{v}/H) = -g\zeta'_y + (\eta/(\rho H))(\Delta(H\bar{v}) - C\bar{v}\Delta\zeta) + ((F_s^*)_y + (F_b^*)_y)/H - 2\Omega\bar{u} \sin \vartheta. \quad (25)$$

Можно также получить другие пространственно-двумерные гидродинамические модели прибрежных систем и мелководных водоемов.

Вводя упрощения

$$\int_{-h}^{\zeta} u'_x dz \rightarrow H(U/H)'_x, \quad \int_{-h}^{\zeta} u'_y dz \rightarrow H(U/H)'_y, \quad \int_{-h}^{\zeta} v'_x dz \rightarrow H(V/H)'_x, \quad \int_{-h}^{\zeta} v'_y dz \rightarrow H(V/H)'_y$$

на этапе (1)–(3) и рассуждая аналогично вышеизложенному, придем к следующей модели

$$\zeta'_t + U'_x + V'_y + (\omega/\rho) = 0, \quad (26)$$

$$U'_t + (U^2/H)'_x + (UV/H)'_y + (\omega/\rho)C(U/H) = -gH\zeta'_x + (\eta/\rho) \left(\left(H(U/H)'_x \right)'_x + \left(H(U/H)'_y \right)'_y \right) + (F_s^*)_x + (F_b^*)_x + 2\Omega V \sin \vartheta, \quad (27)$$

$$V'_t + (UV/H)'_x + (V^2/H)'_y + (\omega/\rho)C(V/H) = -gH\zeta'_y + (\eta/\rho) \left(\left(H(V/H)'_x \right)'_x + \left(H(V/H)'_y \right)'_y \right) + (F_s^*)_y + (F_b^*)_y - 2\Omega U \sin \vartheta \quad (28)$$

или, в усредненных значениях скоростей

$$H'_t + (H\bar{u})'_x + (H\bar{v})'_y + (\omega/\rho) = 0, \quad (29)$$

$$\bar{u}'_t + \bar{u}\bar{u}'_x + \bar{v}\bar{u}'_y + (\omega/\rho)(C-1)(\bar{u}/H) = -g\zeta'_x + (\eta/(\rho H)) \left((H\bar{u}'_x)'_x + (H\bar{u}'_y)'_y \right) +$$

$$+ \left((F_s^*)_x + (F_b^*)_x \right) / H + 2\Omega \bar{v} \sin \vartheta, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_t' + \bar{u}\bar{v}_x' + \bar{v}\bar{v}_y' + (\omega/\rho)(C-1)(\bar{v}/H) = -g\zeta_y' + (\eta/(\rho H)) \left((H\bar{v}_x')_x + (H\bar{v}_y')_y \right) + \\ + \left((F_s^*)_y + (F_b^*)_y \right) / H - 2\Omega \bar{u} \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (31)$$

с учетом равенств и в предположении выполнения аналога уравнения баланса полной механической энергии

$$\begin{aligned} \iint_G \left((U/H) \left((H(U/H)_x')_x + (H(U/H)_y')_y \right) + (V/H) \left((H(V/H)_x')_x + (H(V/H)_y')_y \right) \right) dx dy = \\ = \oint_{\partial G} H(\nabla(K/H), \mathbf{n}) dl - \iint_G H \left(|\nabla(U/H)|^2 + |\nabla(V/H)|^2 \right) dx dy, \end{aligned}$$

в виде

$$\begin{aligned} \left(\iint_G (K + \Pi) dx dy \right)' + \oint_{\partial G} (K + \Pi + P)(U\mathbf{i} + V\mathbf{j}, \mathbf{n}) dl / H + \iint_G (\omega/(\rho H))((2C-1)K + \Pi + P) dx dy = \\ = (\eta/\rho) \left(\oint_{\partial G} H(\nabla(K/H), \mathbf{n}) dl - \iint_G H \left(|\nabla(U/H)|^2 + |\nabla(V/H)|^2 \right) dx dy - (2C-1) \iint_G (K/H) \Delta \zeta dx dy \right) + \\ + \iint_G \left(U \left((F_s^*)_x + (F_b^*)_x \right) + V \left((F_s^*)_y + (F_b^*)_y \right) \right) dx dy / H. \end{aligned}$$

Другое семейство моделей можно получить, оставляя на счету сил внутреннего вязкого трения только слагаемые, не препятствующие получению уравнения баланса со строгой диссипацией аналога полной механической энергии системы за счет действия сил внутреннего вязкого трения и перенося остальные слагаемые на счет интенсивности испарения, где добавляется слагаемое типа избыточного (под поверхностью жидкости выпуклой вверх) или недостаточного (под поверхностью жидкости выпуклой вниз) лапласова давления:

$$\begin{aligned} U_t' + (U^2/H)_x + (UV/H)_y + (\omega/\rho)^* C(U/H) = -gH\zeta_x' + (\eta/\rho)(\Delta U - (1/2)(U/H)\Delta H) + \\ + (F_s^*)_x + (F_b^*)_x + 2\Omega V \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} V_t' + (UV/H)_x + (V^2/H)_y + (\omega/\rho)^* C(V/H) = -gH\zeta_y' + (\eta/\rho)(\Delta V - (1/2)(V/H)\Delta H) + \\ + (F_s^*)_y + (F_b^*)_y - 2\Omega U \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (33)$$

$$H_t' + U_x' + V_y' + (\omega/\rho)^* - (\eta/\rho)((1-(2C)^{-1})\Delta H - \Delta h) = 0$$

или

$$\zeta_t' + U_x' + V_y' + (\omega/\rho)^* - (\eta/\rho)((1-(2C)^{-1})\Delta \zeta - (2C)^{-1}\Delta h) = 0. \quad (34)$$

Уравнение аналога баланса полной механической энергии для модели (32)–(34) отличается от (15) заменой (ω/ρ) на

$$(\omega/\rho)^* - (\eta/\rho)((1-(2C)^{-1})\Delta H - \Delta h) = (\omega/\rho)^* - (\eta/\rho)((1-(2C)^{-1})\Delta \zeta - (2C)^{-1}\Delta h).$$

В ходе работы построена и исследована двумерная модель гидродинамического процесса, учитывающая существенные особенности прибрежных систем, исходя из баланса массы, энергии и импульса. Предложенная модель может быть использована для прогнозного моделирования гидрофизических процессов, в том числе распространения загрязняющих веществ в водной среде морских и прибрежных систем.

Заключение и обсуждение. Особенность полученных пространственно-двумерных моделей гидродинамики учитывает тот факт, что операции дифференцирования по пространственным переменным в горизонтальных направлениях не являются коммутативными по отношению к операции интегрирования по вертикальной пространственной координате. В прибрежных системах, где наблюдается существенный перепад глубин, произвольное изменение порядка следования данных операций, выполненное для получения пространственно-двумерных уравнений движения водной среды, может привести к появлению фиктивных, физически необоснованных источников импульса в уравнениях Навье-Стокса. Разработанный авторами способ построения двумерных уравнений движения позволяет исключить данный негативный эффект, а сохранение порядка операций гарантирует выполнение корректного учета испарения со свободной поверхности не только в уравнении неразрывности, но и в уравнениях движения с учетом ветра и волн.

Список литературы

1. Сухинов А.И., Проценко Е.А., Сидорякина В.В. и др. Численные эксперименты моделирования транспорта наносов и динамики изменения рельефа дна мелководных водоемов. В: *Сборник трудов по материалам VI Международной конференции и молодежной школы «Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2020)»*. 2020:255–261.
2. Сухинов А.И., Белова Ю.В., Чистяков А.Е. Моделирование биогеохимических циклов в прибрежных системах Юга России. *Математическое моделирование*. 2021;33(3):20–38. <https://doi.org/10.20948/mm-2021-03-02>
3. Атаян А.М., Никитина А.В., Сухинов А.И. и др. Математическое моделирование опасных явлений природного характера в мелководном водоеме. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2022;62(2):270–288. <https://doi.org/10.31857/S0044466921120048>
4. Дымников В.П., Залесный В.Б. *Основы вычислительной геофизической гидродинамики*. Москва: ГЕОС; 2019. 448 с.
5. Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б., Лыкосов В.Н., Галин В.Я. *Математическое моделирование общей циркуляции атмосферы и океана*. Ленинград: Гидрометеиздат; 1984. 320 с.
6. Самарский А.А., Михайлов А.П. *Математическое моделирование*. Москва: Физико-математическая литература; 2002. 320 с.
7. Воронина Е.Б., Калясов П.С., Кудрявцев А.Ю. и др. Определение скорости испарения с поверхности бассейна при активном волнообразовании. *Математическое моделирование*. 2023;35(5):117–126. <https://doi.org/10.20948/mm-2023-05-08>
8. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Никитина А.В. и др. Математическое моделирование гидродинамики и процессов переноса солей и тепла в мелководных водоемах. В: *Сборник трудов всероссийской научной конференции с международным участием «Земля и космос» к столетию академика РАН К.Я. Кондратьева*. 2020:51–76.
9. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Filina A.A., et al. Super Computer Simulation of Oil Spills in the Azov Sea. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS)*. 2019;12(3):115–129. <https://doi.org/10.14529/mmp190310>
10. Sukhinov A.I., Filina A.A., Nikitina A.V., et al. Modeling of Microbiological Destruction of Oil Pollution in Coastal Systems on Supercomputer. *Parallel computational technologies*. PCT'2019. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=37327253> (дата обращения: 05.11.2023).
11. Fingas M.F. *Evaporation of oil spills*. The eighteenth arctic marine oil spill program technical seminar. Environment Canada, Ottawa, Ontario. 1995:43–60.
12. Fingas M.F. Studies on the Evaporation Regulation Mechanisms of Crude Oil and Petroleum Products. *Advances in Chemical Engineering and Science*. 2012;2:246–256. <http://dx.doi.org/10.4236/aces.2012.22029>
13. Aldarabesh S.M. Evaporation rate from water surface. *Western Michigan University 4-2020*. URL: <https://scholarworks.wmich.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=4599&context=dissertations> (дата обращения: 05.11.2023).

References

1. Sukhinov A.I., Protsenko E.A., Sidoryakina V.V., et al. Numerical experiments for modeling sediment transport and dynamics of changes in the bottom relief of shallow reservoirs. In: *VI International Conference and Youth School Information Technologies and Nanotechnology (ITNT-2020)*. 2020:255–261. (In Russ.).
2. Sukhinov A.I., Belova Yu.V., Chistyakov A.E. Modeling of biogeochemical cycles in coastal systems of Southern Russia. *Mathematical modeling*. 2021;33(3):20–38. (In Russ.). <https://doi.org/10.20948/mm-2021-03-02>
3. Atayan A.M., Nikitina A.V., Sukhinov A.I., et al. Mathematical modeling of natural hazards in a shallow reservoir. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2022;62(2):270–288. (In Russ.). <https://doi.org/10.31857/S0044466921120048>
4. Dymnikov V.P., Zalesny V.B. *Fundamentals of computational geophysical hydrodynamics*. Moscow: GEOS; 2019. 448 p. (In Russ.).
5. Marchuk G.I., Dymnikov V.P., Zalesny V.B., et al. *Mathematical modeling of the general circulation of the atmosphere and ocean*. Leningrad: Hydrometeorological Publishing House; 1984. 320 p. (In Russ.).
6. Samarskiy A.A., Mikhailov A.P. *Mathematical modeling*. Moscow: Physico-mathematical literature; 2002. 320 p. (In Russ.).
7. Voronina E.B., Kalyasov P.S., Kudryavtsev A.Yu., et al. Determination of the evaporation rate from the surface of the pool during active wave formation. *Mathematical modeling*. 2023;35(5):117–126. (In Russ.). <https://doi.org/10.20948/mm-2023-05-08>
8. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Nikitina A.V., et al. Mathematical modeling of hydrodynamics and processes of salt and heat transfer in shallow waters. *Proceedings scientific conference Earth and Space*. 2020:51–76. (In Russ.).
9. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Filina A.A., et al. Super Computer Simulation of Oil Spills in the Azov Sea. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS)*. 2019;12(3):115–129. <https://doi.org/10.14529/mmp190310>

10. Sukhinov A.I., Filina A.A., Nikitina A.V., et al. Modeling of Microbiological Destruction of Oil Pollution in Coastal Systems on Supercomputer. *Parallel computational technologies*. PCT'2019. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=37327253> (accessed: 05.11.2023).
11. Fingas M.F. *Evaporation of oil spills*. The eighteenth arctic marine oil spil program technical seminar. Environment Canada, Ottawa, Ontario. 1995:43–60.
12. Fingas M.F. Studies on the Evaporation Regulation Mechanisms of Crude Oil and Petroleum Products. *Advances in Chemical Engineering and Science*. 2012;2:246–256. <http://dx.doi.org/10.4236/aces.2012.22029>
13. Aldarabesh S.M. Evaporation rate from water surface. *Western Michigan University* 4-2020. URL: <https://scholarworks.wmich.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=4599&context=dissertations> (accessed: 05.11.2023).

Поступила в редакцию 04.11.2023

Поступила после рецензирования 07.12.2023

Принята к публикации 11.12.2023

Об авторах:

Сухинов Александр Иванович, член-корреспондент РАН, профессор, директор НИИ Математического моделирования и прогнозирования сложных систем, Донской государственный технический университет (РФ, 344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), доктор физико-математических наук, [ORCID](#), [MathSciNet](#), [eLibrary.ru](#), [ResearcherID](#), [ScopusID](#), sukhinov@gmail.com

Колгунова Олеся Владимировна, старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики, Северо-Осетинский государственный университет (РФ, 362025, г. Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46), кандидат физико-математических наук, kolev2003@mail.ru

Зерее Мебрахту Гирмай, аспирант, Донской государственный технический университет (РФ, 344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), kokobrimna@gmail.com

Самуэль Огбамикаэль Нахом, аспирант, Донской государственный технический университет (РФ, 344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), nahom20samuel@gmail.com

Заявленный вклад соавторов:

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Received 04.11.2023

Revised 07.12.2023

Accepted 11.12.2023

About the Authors:

Alexander I. Sukhinov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Professor, Director of the Research Institute for Mathematical Modeling and Forecasting of Complex Systems, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), Doctor of Physical and Mathematical Sciences, [ORCID](#), [MathSciNet](#), [eLibrary.ru](#), [ResearcherID](#), [ScopusID](#), sukhinov@gmail.com

Olesya V. Kolgunova, Senior Lecturer at the Department of Applied Mathematics and Computer Science, North Ossetian State University (44–46, Vatutina Str., Vladikavkaz, 362025, RF), PhD (Physical and Mathematical Sciences), kolev2003@mail.ru

Mebrakhtu G. Zeree, PhD student, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), kokobrimna@gmail.com

Ogbamikael N. Samuel, PhD student, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), nahom20samuel@gmail.com

Claimed contributorship:

All authors have made an equivalent contribution to the preparation of the publication.

Conflict of interest statement

The authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.