

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ MATHEMATICAL MODELLING



УДК 519.6

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-30-38>

Научная статья



Математическое моделирование стационарных и нестационарных периодических течений с использованием различных моделей вихревой вязкости

Е.А. Проценко ✉, С.В. Проценко

Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), г. Таганрог, Российская Федерация

✉ capros@rambler.ru

Аннотация

Введение. Математическое моделирование течений является актуальной исследовательской темой в области гидродинамики и океанографии. Несмотря на непрекращающиеся исследования в области разработки точных и эффективных численных методов для решения уравнений Навье-Стокса, учитывающих вихревую вязкость, задачи точного предсказания и контроля турбулентности остаются нерешенными. Также актуальными остаются вопросы влияния нелинейных эффектов в моделях вихревой вязкости на точность прогнозов и их применимость к различным условиям течения. Целью исследования является изучение влияния линеаризованного и квадратичного донного трения и двух моделей турбулентности на численное решение стационарных и нестационарных периодических течений. Особый акцент сделан на сравнении численных результатов с аналитическими решениями в рамках использования различных моделей донного трения.

Материалы и методы. Вычислительные модели, применяемые в этом исследовании, основаны на упрощенной двумерной волновой модели и полных трехмерных уравнениях Навье-Стокса. Классическая модель движения мелкой воды и 2D-модель без учета динамического изменения геометрии поверхности водоема получены из системы уравнений для пространственно-неоднородной трехмерной математической модели волновой гидродинамики мелководного водоема. Аналитические решения были найдены путем линеаризации уравнений, что, очевидно, имеет свои ограничения. Проводится различие между нелинейностями, вызванными членами более высокого порядка в уравнениях движения (т. е. членами адвективного ускорения и трения), и геометрическими нелинейностями, связанными, например, с различной глубиной воды и шириной водоема, что будет важно при моделировании реального моря.

Результаты исследования. Представлены результаты моделирования стационарных и нестационарных периодических течений в схематизированном прямоугольном бассейне с использованием линеаризованного донного трения. Исследовано влияние линеаризации на численное решение в сравнении с аналитическими профилями, использующими модели, рассчитывающие донное трение в квадратичной формулировке. В сочетании с квадратичным трением о дно изучаются две модели турбулентности: постоянная вихревая вязкость и модель длины перемешивания Прандтля. Результаты, полученные в результате трехмерного моделирования, сравниваются с результатами двумерного моделирования и аналитическими решениями, усредненными по глубине.

Обсуждение и заключение. Предложены новые подходы к моделированию и исследованию течений с переменной вихревой вязкостью, включая анализ влияния линеаризации и использование различных моделей турбулентности. Для линеаризованной и квадратичной формулировок донного трения доказано, что численные результаты для случая стационарного течения демонстрируют большое сходство с аналитическими решениями, поскольку высота поверхности намного меньше глубины воды и адвекцией можно пренебречь. Численные результаты для нестационарного течения также показывают хорошее соответствие теории. В отличие от аналитических решений численное моделирование имеет незначительные отклонения в долгосрочной перспективе. Исследование течений, в рамках использования различных моделей турбулентности, позволит осуществить учет влияния нелинейных эффектов в моделях вихревой вязкости на точность прогнозов и их применимость к различным усло-

виям течения. Полученные результаты позволяют лучше понять и описать физические процессы, происходящие в мелководных водоемах. Это открывает новые возможности применения математического моделирования для прогнозирования и анализа воздействия человеческой деятельности на морскую среду и для решения других задач в области океанологии и геофизики.

Ключевые слова: гидродинамика, мелководный водоем, волновое движение, численное моделирование

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00210. <https://rscf.ru/project/23-21-00210/>

Для цитирования. Проценко Е.А., Проценко С.В. Математическое моделирование стационарных и нестационарных периодических течений с использованием различных моделей вихревой вязкости. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):30–38. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-30-38>

Original article

Stationary and Non-Stationary Periodic Flows Mathematical Modelling using Various Vortex Viscosity Models

Elena A. Protsenko ✉, Sofia V. Protsenko

Taganrog Institute named after A.P. Chekhov (branch) of RSUE, Taganrog, Russian Federation

✉ capros@rambler.ru

Abstract

Introduction. Mathematical modelling of currents is an urgent research topic in the field of hydrodynamics and oceanography. Despite ongoing research in the field of developing accurate and efficient numerical methods for solving Navier-Stokes equations that take into account vortex viscosity, the problems of accurate prediction and control of turbulence remain unresolved. The influence of nonlinear effects in vortex viscosity models on the accuracy of forecasts and their applicability to various flow conditions also remains relevant. The aim of the study is to study the influence of linearized and quadratic bottom friction and two turbulence models on the numerical solution of stationary and non-stationary periodic flows. Special emphasis is placed on comparing numerical results with analytical solutions within the framework of using various models of bottom friction.

Materials and Methods. The computational models used in this study are based on a simplified two-dimensional wave model and full three-dimensional Navier-Stokes equations. The classical model of shallow water motion and the 2D model without taking into account dynamic changes in the geometry of the reservoir surface are derived from a system of equations for a spatially inhomogeneous three-dimensional mathematical model of wave hydrodynamics of a shallow reservoir. Analytical solutions were found by linearization of the equations, which obviously has its limitations. A distinction is made between two types of nonlinear effects – nonlinearities caused by higher-order terms in the equations of motion, i. e. terms of advective acceleration and friction, and nonlinear effects caused by geometric nonlinearities, this is due, for example, to different water depths and reservoir widths, which will be important when modelling a real sea.

Results. The results of modeling stationary and non-stationary periodic flows in a schematized rectangular basin using linearized bottom friction are presented. The influence of linearization on the numerical solution is investigated in comparison with analytical profiles using models calculating bottom friction in a quadratic formulation. In combination with quadratic bottom friction, two turbulence models are studied: the constant vortex viscosity and the Prandtl mixing length model. The results obtained as a result of three-dimensional modelling are compared with the results of two-dimensional modeling and analytical solutions averaged in depth.

Discussion and Conclusion. New approaches to modelling and studying flows with variable vortex viscosity are proposed, including analysis of the influence of linearization and the use of various turbulence models. For the linearized and quadratic formulations of bottom friction, it is proved that the numerical results for the case of stationary flow show great similarity with analytical solutions, since the surface height is much less than the water depth and advection can be neglected. The numerical results for the unsteady flow also show a good agreement with the theory. Unlike analytical solutions, numerical modelling has minor deviations in the long run. The study of flows, within the framework of using various turbulence models, will make it possible to take into account the influence of nonlinear effects in vortex viscosity models on the accuracy of forecasts and their applicability to various flow conditions. The results obtained make it possible to better understand and describe the physical processes occurring in shallow waters. This opens up new possibilities for applying mathematical modelling to predict and analyze the impact of human activities on the marine environment and to solve other problems in the field of oceanology and geophysics.

Keywords: hydrodynamics, shallow water reservoir, wave motion, numerical modelling

Funding information. The study was supported by the Russian Science Foundation grant no. 23-21-00210. <https://rscf.ru/project/23-21-00210/>

For citation. Protsenko E.A., Protsenko S.V. Stationary and non-stationary periodic flows mathematical modelling using various vortex viscosity models. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):30–38. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-30-38>

Введение. Математическое моделирование течений является важным и актуальным инструментом научных и инженерных исследований, позволяющим выявлять возможные риски, оптимизировать процессы и исследовать сложные физические явления, которые трудно или невозможно изучить экспериментально. Применение метода математического моделирования позволяет исследовать основные характеристики течений: скорость, давление, концентрацию, температуру, которые невозможно измерить непосредственно. Например, моделирование может помочь предсказать распространение загрязнений в водных системах или определить оптимальную стратегию борьбы с наводнениями.

Множество ученых занимаются исследованиями течений с использованием различных моделей вихревой вязкости. Анализ исследований [1–10], связанных с разработкой численных методов, направленных на решение уравнений Навье–Стокса для сложных периодических течений в области турбулентности и динамики жидкости, позволяет говорить о том, что моделирование стационарных и нестационарных периодических течений остается важной научной и прикладной проблемой.

Несмотря на успехи в этом направлении — разработку более точных и эффективных численных методов для решения уравнений Навье–Стокса, учитывающих вихревую вязкость (эти методы позволяют более точно моделировать сложные течения, такие как обтекание тел с высокой степенью вихревой активности), есть и нерешенные задачи. Это, например, точное предсказание и контроль турбулентности. Также актуальными остаются вопросы влияния нелинейных эффектов в моделях вихревой вязкости на точность прогнозов и их применимость к различным условиям течения. Такие модели позволяют получить более точное и реалистичное описание поведения течения жидкости. Это особенно важно при изучении турбулентных потоков, где вихревая вязкость является одним из ключевых факторов, влияющих на характер движения жидкости. Моделирование таких течений позволяет уточнить параметры вихрей, определить их влияние на другие физические процессы и разработать методы контроля или управления течением.

Использование различных моделей вихревой вязкости позволяет учесть особенности течения, такие как геометрия потока, присутствие препятствий, изменение плотности или вязкости. Каждая модель вихревой вязкости имеет свои ограничения и ее выбор зависит от конкретных факторов и целей моделирования. Сравнение результатов, полученных с использованием различных моделей, позволяет их уточнить и проверить, а также сделать более точные выводы о поведении течения.

Материалы и методы. Вычислительные модели, применяемые в данном исследовании, основаны на упрощенной двумерной волновой модели и полных трехмерных уравнениях Навье–Стокса.

Пространственно-неоднородная трехмерная математическая модель волновой гидродинамики мелководного водоема включает [1]:

– уравнения движения (Навье–Стокса):

$$\begin{aligned} u'_t + uu'_x + vu'_y + wu'_z &= -\frac{1}{\rho} P'_x + (\mu u'_x)'_x + (\mu u'_y)'_y + (\mu u'_z)'_z, \\ v'_t + uv'_x + vv'_y + wv'_z &= -\frac{1}{\rho} P'_y + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (\mu v'_z)'_z, \\ w'_t + uw'_x + vw'_y + ww'_z &= -\frac{1}{\rho} P'_z + (\mu w'_x)'_x + (\mu w'_y)'_y + (\mu w'_z)'_z + g; \end{aligned} \quad (1)$$

– уравнение неразрывности:

$$\rho'_t + (\rho u)'_x + (\rho v)'_y + (\rho w)'_z = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{V} = \{u, v, w\}$ — вектор скорости водного потока мелководного водоема; ρ — плотность водной среды; P — гидродинамическое давление; g — ускорение свободного падения; μ , ν — коэффициенты турбулентного обмена в горизонтальном и вертикальном направлениях; \mathbf{n} — вектор нормали к поверхности, описывающей границу расчетной области.

Для построения двумерной математической модели движения водной среды использовалась трехмерная гидростатическая модель, включающая:

– уравнения Навье–Стокса:

$$\begin{aligned} u'_t + uu'_x + vu'_y + wu'_z &= -\frac{1}{\rho} P'_x + (\mu u'_x)'_x + (\mu u'_y)'_y + (\eta u'_z)'_z, \\ v'_t + uv'_x + vv'_y + wv'_z &= -\frac{1}{\rho} P'_y + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (\eta v'_z)'_z; \end{aligned}$$

- уравнение неразрывности (для несжимаемой жидкости): $u'_x + v'_y + w'_z = 0$;
- уравнение гидростатики: $P = \rho g (z + \xi)$.

В гидростатическом случае уравнение неразрывности имеет вид [11, 12]:

$$\theta'_t + (Hu)'_x + (Hv)'_y = 0,$$

где $\theta = \min(\chi, \xi)$; $H = h + \theta$, h — глубина водоема.

Из разработанной системы уравнений можно получить классическую модель движения мелкой воды и 2D-модель без учета динамического изменения геометрии поверхности водоема.

Аналитическими решениями для модели, усредненной по глубине, и модели, которая содержит информацию по вертикали, являются:

$$U = \tilde{A} \cdot \left(\frac{1}{1 - i\sigma_1} \right) e^{i\omega t},$$

$$\bar{u} = \tilde{A} \cdot \left(1 - \frac{\tilde{\gamma}}{bd} \tanh(bd) \right) e^{i\omega t},$$

где $\tilde{\gamma}$ — функция только от σ_2 и bd .

Таким образом, усредненные по глубине скорости в обеих моделях выглядят очень похоже и могут быть описаны функцией безразмерного σ_1 -параметра или безразмерного σ_2 -параметра и безразмерного bd -параметра соответственно, где:

$$\sigma_1 = \frac{8}{3\pi} c_{f1} \frac{\hat{U}}{\omega d}, \quad \sigma_2 = \frac{8}{3\pi} c_{f2} \frac{\tilde{u}_b}{\omega d}, \quad bd = \sqrt{\frac{i\omega d^2}{\nu_t}}.$$

Аналитические решения были найдены путем линеаризации уравнений, что имеет свои ограничения. Проводится различие между двумя видами нелинейных эффектов:

1. Нелинейности, вызванные членами более высокого порядка в уравнениях движения, т. е. членами адвективного ускорения и трения. Линеаризация трения kU основана на оптимальном воспроизведении преобладающей сингулярной прогрессивной волны. Хотя такая линеаризация эффективна для целей данного исследования, она искажает распространение и генерацию других составляющих движения водной среды.

2. Нелинейные эффекты, вызванные геометрическими нелинейностями, которые являются результатом зависимости поперечного сечения от высоты поверхности ζ . Это связано, например, с различной глубиной воды и шириной водоема, что будет важно при моделировании реального моря.

Моделирование турбулентности. Турбулентная вязкость выражает перенос импульса в турбулентном потоке. Доступно несколько моделей турбулентной вязкости:

- модель постоянной вихревой вязкости;
- модель смешивания по длине Прандтля;
- модель $k-\epsilon$;
- метод моделирования крупных вихрей (LES) [4, 7–8].

Модель постоянной вихревой вязкости — это простая модель, описывающая вихревую вязкость как произведение скорости и масштаба длины:

$$\nu_e = \frac{1}{6} \kappa du_*.$$

Модель длины перемешивания Прандтля использует гипотезу длины перемешивания, в которой скорость, характеризующая турбулентные флуктуации, пропорциональна разнице скоростей в среднем потоке на расстоянии l_m , на котором происходит перемешивание или перенос импульса, и определяется как $l_m \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$. При повторном использовании l_m в качестве управляющей шкалы длины вихревую вязкость можно записать как произведение этой шкалы в квадрате на локальный градиент скорости [13–15].

Модель $k-\epsilon$ связывает вязкость турбулентности с кинетической энергией турбулентности k и скоростью рассеивания турбулентности ϵ . Эволюция k и ϵ во времени описывается уравнениями переноса.

При работе с большими когерентными турбулентными структурами следует использовать метод моделирования крупных вихрей (LES). В моделях LES большие масштабы турбулентности непосредственно разрешаются на вычислительной сетке, в то время как меньшие масштабы учитываются с помощью формулировки замыкания.

Моделирование выполняется с использованием следующих граничных условий:

- замкнутые границы на дне, насыпи или стене (с трением о стену или без него);
- граница свободной поверхности;
- постоянный уровень воды на открытых границах;
- гармонично изменяющийся уровень воды.

Коэффициент трения в модели, усредненной по глубине (c_n), отличался от коэффициента трения в модели с вертикальной информацией (c_n), в то время как использовалась постоянная вертикальная вихревая вязкость.

При численном моделировании на практике обычно используется вязкость, изменяющаяся по вертикали в соответствии с моделью турбулентного перемешивания по длине. Использование этого определения вихревой вязкости и интегрирование по глубине воды обеспечивают логарифмический профиль скорости:

$$u(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \left(\frac{z+d}{z_0} \right), \quad (3)$$

где u_* — скорость напряжения сдвига; κ — постоянная фон Кармана (не путать с коэффициентами трения дна κ_1 и κ_2). Параметр z_0 может быть связан с фактической шероховатостью:

$$z_0 = \frac{\kappa_N}{30},$$

где κ_N известна как эмпирически определяемая высота шероховатости.

Для модели, усредненной по глубине, напряжение сдвига пласта может быть связано со скоростью, усредненной по глубине, через $\tau_b = c_{f1} |U| U = u_*^2$. В сочетании с логарифмическим профилем уравнения (3) найдено выражение для коэффициента трения c_{f1} :

$$\frac{1}{\sqrt{c_{f1}}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(e^{-1} \frac{d}{z_0} \right). \quad (4)$$

Для 3D модели с вертикальным размером напряжение сдвига слоя может быть связано с коэффициентом трения (c_{f2}) через $\tau_b = c_{f2} |u_b| u_b$. Донное напряжение определим как:

$$\tau_b = |u_*| u_* \Rightarrow u_b = \frac{u_*}{\sqrt{c_{f2}}}.$$

В результате будет получено выражение для коэффициента трения:

$$\frac{1}{\sqrt{c_{f2}}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(e^{-2} \frac{\Delta z_b}{z_0} \right). \quad (5)$$

Соотношение между c_{f1} и c_{f2} найдено путем приравнивания (4) и (5):

$$\frac{1}{\sqrt{c_{f1}}} = \frac{1}{\sqrt{c_{f2}}} - \frac{1}{\kappa} \ln \left(e^{-1} \frac{\Delta z_b}{d} \right).$$

Результаты исследования. Расчеты выполнены для стационарного и нестационарного (периодический поток) течения. В стационарном случае градиент уровня воды постоянен во времени. В нестационарном случае исследуется периодически изменяющийся поток. В обоих случаях проводится численное моделирование с использованием линеаризованного донного трения, соответствующего аналитическому подходу. Численный отклик горизонтальных (усредненных по глубине) скоростей должен соответствовать аналитическим профилям скорости, усредненным по глубине. Наблюдаемая разница может быть вызвана только численными приближениями, то есть интегрированием по времени и (горизонтальной) дискретизацией.

Для обоих случаев течения геометрия расчетной области представлена в виде прямоугольного бассейна с двумя открытыми границами на коротких сторонах и глубиной воды 12 м. Ширина бассейнов невелика (40 м) по сравнению с длиной. Для случая устойчивого течения бассейн вытянут в длину на 20 000 м. Бассейн такой длины необходим для полного развития градиента уровня воды.

Граничные условия для стационарного случая определяют уровень воды 20 см на границе притока (слева), уровень воды 0 м — на границе оттока (справа) и нулевую нормальную скорость на боковых стенках и поверхности (верхняя граница). Таким образом, уровень воды фиксируется с уклоном $i_w = 10^{-5}$ (рис. 1).

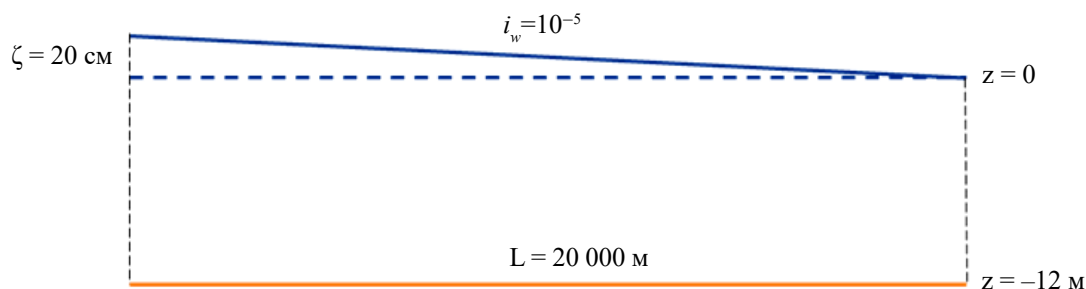


Рис. 1. Устойчивый поток в длинном канале

Когда 3D-результаты усредняются по глубине (3D-DA), их можно непосредственно сравнить с соответствующими результатами 2D-модели. Выбраны одинаковые значения для коэффициента шероховатости κ_N в обеих моделях, c_L был выбран равным 0,002, κ_N должно составлять 0,086 м, следовательно, c_D будет равно 0,0042. Это входные данные для модели с линеаризованным нижним трением.

Таким образом, моделирование с квадратичным трением дна фактически было выполнено до линеаризованного случая. Это позволяет проводить сравнение между всеми моделями (2D и 3D, линейными и квадратичными).

В сочетании с квадратичным трением о дно изучаются две модели турбулентности: постоянная вихревая вязкость и модель длины перемешивания Прандтля. В конечном итоге оба вычисления приведут к одинаковой скорости, усредненной по глубине, при условии, что для вязкости вертикального вихря выбрано определенное значение, соответствующее выбранным конкретным коэффициентам донного трения, в результате чего $v_t = 0,22 \text{ м}^2/\text{с}$ (таблица 1).

Таблица 1

Входные параметры для случая установившегося потока

Параметр	Расчетное значение параметра
c_L	0,002
c_D	0,004
κ_1	$2,9 \cdot 10^{-5}$
κ_2	$8,3 \cdot 10^{-5}$
v_t	0,22 м ² /с

Моделирование выполнено для длинного канала с линеаризованным донным трением. Значения входных параметров, использованных для этого моделирования, обобщены в таблице 2. Теоретические профили скорости для установившегося течения с линеаризованным донным трением используются для сравнения численных результатов с аналитическими. В отличие от аналитических решений, численное моделирование имеет незначительные отклонения в долгосрочной перспективе.

Таблица 2

Входные параметры для стационарного течения с линеаризованным нижним трением

Фундаментальные параметры	Производные параметры
$i_\omega = 10^{-5}$	$\Delta z_b = d/nz = 2 \text{ м}$
$d = 12 \text{ м}$	0,004
$\kappa_N = 0,086 \text{ м}$	$\kappa_1 = 5,7 \cdot 10^{-5}$
$nz = 6$	$\kappa_2 = 8,3 \cdot 10^{-5}$
v_t	$v_t = 0,22 \text{ м}^2/\text{с}$

Как в 2D, так и в 3D численные результаты согласуются с аналитическими решениями. При построении профиля скорости $u(z)$ в AZOV3D продемонстрировано идеальное соответствие теоретическому параболическому профилю (рис. 2, зеленым показан результат AZOV3D, черным — аналитическое решение).

Далее приведен пример, в котором исследуется влияние линеаризации на численное решение в сравнении с аналитическими профилями для того же длинного канала. Для этого примера используются модели AZOV3D, рассчитывающие донное трение в квадратичной формулировке.

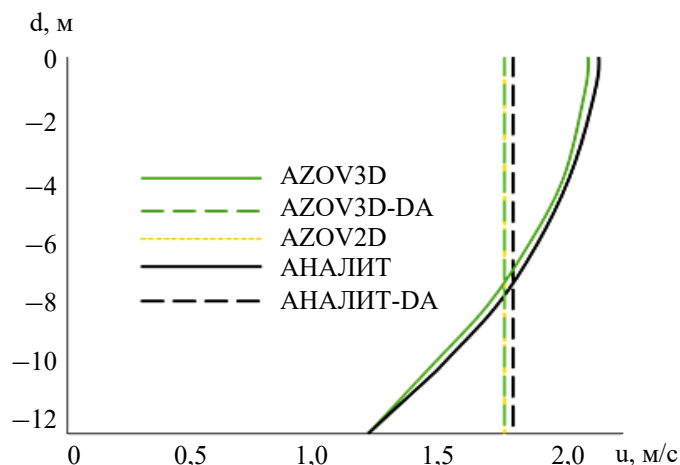


Рис. 2. Параболические профили скорости для установившегося течения с линеаризованным донным трением и постоянной вертикальной вихревой вязкостью

Сначала проводится моделирование с постоянной вихревой вязкостью, а затем тестируется другая модель турбулентности — модель длины перемешивания. Значения входных параметров, использованных для этого моделирования, приведены в таблице 3.

Таблица 3

Входные параметры для стационарного случая с квадратичным нижним трением

Фундаментальные параметры	Производные параметры
$i_{\omega} = 10^{-5}$	$\Delta z_b = d/nz = 2 \text{ м}$
$d = 12 \text{ м}$	$c_{f1} = 0,002$
$\kappa_N = 0,086 \text{ м}$	$c_{f2} = 0,0042$
$nz = 6$	$\nu_t = 0,22 \text{ м}^2/\text{с}$
$\kappa = 0,4$	$u_* = 0,077 \text{ м/с}$

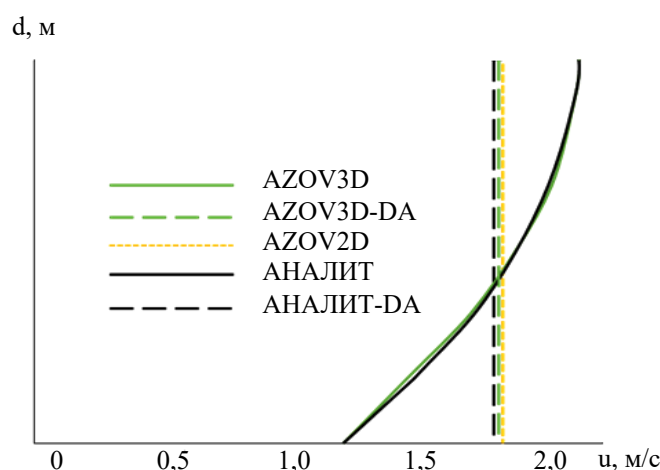


Рис. 3. Параболические профили скорости для установившегося течения с квадратичным придонным трением и постоянной вертикальной вихревой вязкостью

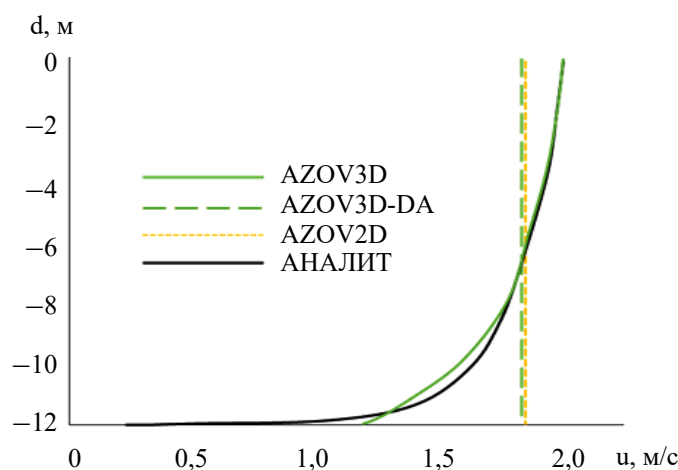


Рис. 4. Логарифмические профили скорости для установившегося течения с квадратичным придонным трением и вязкостью, определяемыми моделью длины перемешивания

Численные результаты сравниваются с теоретическим профилем скорости аналогично линейаризованному случаю и полностью согласуются с аналитическим решением, как показано на рис. 3 для случая с постоянной вихревой вязкостью и на рис. 4 — для случая с моделью длины перемешивания. Профили скоростей воспроизводятся правильно: в случае постоянной вихревой вязкости — параболический профиль скорости, а в случае модели длины перемешивания — логарифмический профиль. Как 2D, так и 3D-моделирование соответствуют теории.

И для линейаризованной формулировки донного трения, и для квадратичной доказано, что численные результаты для стационарного течения, как и ожидалось, демонстрируют большое сходство с аналитическими решениями. Поскольку высота поверхности намного меньше глубины воды, адвекцией можно пренебречь, так что численная характеристика воспроизводится в полном соответствии с теорией, обеспечивая хорошую отправную точку для нестационарного течения.

Численные результаты для нестационарного течения показывают хорошее соответствие теории. Кроме того, аналитический подход показал, что скорость, вычисленная с помощью 2D-модели, с большей вероятностью будет больше 3D-скорости, чем наоборот. Такое поведение, безусловно, отражено в приведенных выше числовых примерах, поскольку все рассчитанные соотношения больше единицы.

Обсуждение и заключение. Выполнены расчеты для стационарного и нестационарного (периодический поток) течений с использованием линеаризованного донного трения. Как в 2D, так и в 3D численные результаты согласуются с аналитическими решениями. При построении профиля скорости в AZOV3D показано идеальное соответствие теоретическому параболическому профилю.

Исследовано влияние линеаризации на численное решение в сравнении с аналитическими профилями с использованием моделей, рассчитывающих донное трение в квадратичной формулировке. В сочетании с квадратичным трением о дно изучаются две модели турбулентности: постоянная вихревая вязкость и модель длины перемешивания Прандтля. Численные результаты сравниваются с теоретическим профилем скорости аналогично линеаризованному случаю и согласуются с аналитическим решением, но в отличие от аналитических решений, численное моделирование имеет незначительные отклонения в долгосрочной перспективе. Получен параболический профиль скорости в случае постоянной вихревой вязкости, логарифмический — в случае модели длины перемешивания.

Для линеаризованной и квадратичной формулировок донного трения доказано, что численные результаты для случая стационарного течения демонстрируют большое сходство с аналитическими решениями, поскольку высота поверхности намного меньше глубины воды и адвекцией можно пренебречь. Численные результаты для нестационарного течения также показывают хорошее соответствие теории. Аналитический подход показал, что скорость, вычисленная с помощью 2D-модели, с высокой вероятностью будет больше 3D-скорости, что подтверждено числовыми данными. Исследование течений в различных моделях турбулентности позволяет определить влияние нелинейных эффектов на точность прогнозов в моделях вихревой вязкости и их применимость к различным условиям течения.

Список литературы

1. Alekseenko E., Roux B., Sukhinov A., et al. Nonlinear hydrodynamics in a mediterranean lagoon. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2017;57(6):978–994. <https://doi.org/10.5194/npg-20-189-2013>
2. Battjes J., Labeur R. *Unsteady Flow in Open Channels*. Cambridge University Press. 2017. 312 p.
3. Bijlsma A.C., Uittenbogaard R.E., Blokland T. Horizontal large eddy simulation applied to stratified tidal flows. *Proceedings of the International Symposium on Shallow Flows*. Delft, Netherlands. 2003:559–566.
4. Breugem W.P. The influence of wall permeability on laminar and turbulent flows. *PhD thesis, Delft University of Technology*. 2004.
5. Chamecki M., Chor T., Yang D., et al. Material transport in the ocean mixed layer: recent developments enabled by large eddy simulations. *Rev. Geophys.* 2019;57:1338–1371. <https://doi.org/10.1029/2019RG000655>
6. Fischer H. *Mixing in Inland and Coastal Waters*. Academic Press. 1979. 483 p.
7. Gushchin V.A., Mitkin V.V., Rozhdestvenskaya T.I., et al. Numerical and experimental study of the fine structure of a stratified fluid flow over a circular cylinder. *Applied Mechanics and Technical Physics*. 2007;48:34–43.
8. Jirka G.H. Large scale flow structures and mixing processes in shallow flows. *Journal of Hydraulic Research*. 2001;39(6):567–573.
9. Lorentz H.A. Sketches of his work on slow viscous flow and some other areas in fluid mechanics and the background against which it arose. *Journal of Engineering Mathematics*. 1996;30. <https://doi.org/10.1007/BF00118820>
10. Smit, P. B., Janssen, T. T., and Herbers, T. H. Nonlinear wave kinematics near the ocean surface. *J. Phys. Oceanogr.* 2017;47:1657–1673. <https://doi.org/10.1175/JPO-D-16-0281.1>
11. Protsenko S.V., Protsenko E.A., Kharchenko A.V. Comparison of hydrodynamic processes modeling results in shallow water bodies based on 3D model and 2D model averaged by depth. *Computational Mathematics and Information Technologies (Russia)*. 2023; 6(2):49–63.
12. Vasil'ev V.S., Suhinov A.I. Precision Two-Dimensional Models of Shallow Water Bodies. *Matematicheskoe modelirovanie*. 2003;15(10):17–34.
13. Vreugdenhil C.B. *Numerical Methods for Shallow-Water Flow*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York. 1994. 262 p.
14. Белоцерковский О.М. *Турбулентность: новые подходы*. Москва: Наука; 2003. 285 с.
15. Монин А.С. Турбулентность и микроструктура в океане. *Успехи физических наук*. 1973;109(2):333–354.

References

1. Alekseenko E., Roux B., Sukhinov A., et al. Nonlinear hydrodynamics in a mediterranean lagoon. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2017;57(6):978–994. <https://doi.org/10.5194/npg-20-189-2013>
2. Battjes J., Labeur R. *Unsteady Flow in Open Channels*. Cambridge University Press. 2017. 312 p.
3. Bijlsma A.C., Uittenbogaard R.E., Blokland T. Horizontal large eddy simulation applied to stratified tidal flows. *Proceedings of the International Symposium on Shallow Flows*. Delft, Netherlands. 2003. p. 559–566.

4. Breugem W.P. The influence of wall permeability on laminar and turbulent flows. *PhD thesis, Delft University of Technology*. 2004.
5. Chamecki M., Chor T., Yang D., et al. Material transport in the ocean mixed layer: recent developments enabled by large eddy simulations. *Rev. Geophys.* 2019;57:1338–1371. <https://doi.org/10.1029/2019RG000655>
6. Fischer H. *Mixing in Inland and Coastal Waters*. Academic Press. 1979. 483 p.
7. Gushchin V.A., Mitkin V.V., Rozhdestvenskaya T.I., et al. Numerical and experimental study of the fine structure of a stratified fluid flow over a circular cylinder. *Applied Mechanics and Technical Physics*. 2007;48:34–43.
8. Jirka G.H. Large scale flow structures and mixing processes in shallow flows. *Journal of Hydraulic Research*. 2001;39(6):567–573.
9. Lorentz H.A. Sketches of his work on slow viscous flow and some other areas in fluid mechanics and the background against which it arose. *Journal of Engineering Mathematics*. 1996;30. <https://doi.org/10.1007/BF00118820>
10. Smit P.B., Janssen T.T., Herbers T.H. Nonlinear wave kinematics near the ocean surface. *J. Phys. Oceanogr.* 2017;47:1657–1673. <https://doi.org/10.1175/JPO-D-16-0281.1>
11. Protsenko S.V., Protsenko E.A., Kharchenko A.V. Comparison of hydrodynamic processes modeling results in shallow water bodies based on 3D model and 2D model averaged by depth. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023; 6(2):49–63.
12. Vasil'ev V.S., Suhinov A.I. Precision Two-Dimensional Models of Shallow Water Bodies. *Matematicheskoe modelirovanie Matematicheskoe modelirovanie*. 2003;15(10):17–34. (In Russ.).
13. Vreugdenhil C.B. *Numerical Methods for Shallow-Water Flow*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York. 1994. 262 p.
14. Belotserkovsky O.M. Turbulence: new approaches. Moscow: Nauka, 2003. (In Russ.).
15. Monin A.S. Turbulence and microstructure in the ocean. *The successes of the physical sciences*. 1973;109(2):333–354. (In Russ.).

Поступила в редакцию 14.10.2023

Поступила после рецензирования 24.11.2023

Принята к публикации 28.11.2023

Об авторах:

Проценко Елена Анатольевна, доцент кафедры математики, ведущий научный сотрудник, Таганрогский институт им. А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (347936, РФ, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), кандидат физико-математических наук, [ORCID](#), eapros@rambler.ru

Проценко Софья Владимировна, доцент кафедры математики, научный сотрудник, Таганрогский институт им. А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (347936, РФ, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), кандидат физико-математических наук, [ORCID](#), rab5555@rambler.ru

Заявленный вклад соавторов:

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Received 14.10.2023

Revised 24.11.2023

Accepted 28.11.2023

About the Authors:

Elena A. Protsenko, Associate Professor of the Department of Mathematics, Leading Researcher, A.P. Chekhov Taganrog Institute (branch) Rostov State University of Economics (48, Initiative St., Taganrog, 347936, RF), Candidate of Physical and Mathematical Sciences, [ORCID](#), eapros@rambler.ru

Sofia V. Protsenko, Associate Professor of the Department of Mathematics, Researcher, A.P. Chekhov Taganrog Institute (branch) Rostov State University of Economics (48, Initiative St., Taganrog, 347936, RF), Candidate of Physical and Mathematical Sciences, [ORCID](#), rab5555@rambler.ru

Claimed contributor-ship:

All authors have made an equivalent contribution to the preparation of the publication.

Conflict of interest statement

The authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.