

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ INFORMATION TECHNOLOGIES



Научная статья



УДК 004.93'1, 004.932, 004.942

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-54-65>

Прогноз состояния прибрежных систем с помощью математического моделирования на основе космических снимков

Н.Д. Панасенко

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация,

✉ natalija93_93@mail.ru

Аннотация

Введение. Прибрежные системы Юга России постоянно подвергаются воздействию биотических, абиотических и антропогенных факторов. В связи с этим возникает необходимость разработки нестационарных пространственно-неоднородных взаимосвязанных математических моделей, позволяющих «проигрывать» различные сценарии динамики биологических и геохимических процессов в прибрежных системах. Также существует проблема практического использования математического моделирования, а именно его оснащения реальными входными данными (граничными и начальными условиями, информацией о функциях-источниках). Оперативным источником натурной информации могут стать данные, получаемые от искусственных спутников Земли. Поэтому возникает задача идентификации и определения границ расположения фитопланктонных популяций (имеющих, как правило, пятнистую структуру) на снимках водоемов при малом контрасте изображений по отношению к фону.

Материалы и методы. Автором используются методы математического анализа, математической физики, функционального анализа, теории разностных схем, а также методов решения сеточных уравнений. Биогеохимические процессы описаны на основе уравнений конвекции-диффузии-реакции; линеаризация построенной модели производится на временной сетке с шагом τ . Строится метод распознавания границ пятнистых структур на основе данных дистанционного зондирования Земли. В качестве алгоритмов обработки изображений рассматривается комбинация методов локальных бинарных шаблонов (LBP) и двухслойной нейронной сети.

Результаты исследования. Разработан программно-алгоритмический инструментальный распознавания космических снимков, основанный на комбинации методов локальных бинарных шаблонов (LBP) и технологий нейронных сетей, ориентированный на последующий ввод полученных начальных условий для задачи динамики фитопланктона в математическую модель. Предложена и исследована непрерывная линеаризованная математическая модель, а на ее основе — линеаризованная дискретная модель биогеохимических циклов в прибрежных системах. Установлены практически допустимые значения шага по времени при численном (прогностическом) моделировании задач динамики планктонных популяций и биогеохимических циклов, в том числе при возникновении заморных явлений, что позволяет сократить время оперативного прогноза. При этом для построенной дискретной модели гарантированно выполняются практически значимые для дискретных моделей свойства: устойчивость, монотонность и сходимость разностной схемы, что важно для достоверных прогнозов неблагоприятных и опасных явлений. В процессе работы, обращаясь к космическим снимкам, которые позволяют получить состояние прибрежных систем с высокой точностью, вносятся начальные условия в математическую (компьютерную) модель. Модель анализирует данные спутниковых изображений и определяет уровни «загрязнения», образование зон заморозов и другие факторы, которые могут угрожать природе.

Обсуждение и заключение. С помощью разработанной модели можно предсказывать изменения в прибрежных экосистемах и разрабатывать стратегии по их защите. Полученные результаты позволяют существенно сократить время прогностических расчетов (на 20–30 %) и повысить вероятность заблаговременного обнаружения неблагоприятных и опасных явлений, таких как интенсивное «цветение» водной среды и образование зон заморозов в прибрежных системах.

Ключевые слова: математическая модель, биогеохимические циклы, данные дистанционного зондирования, нейросеть-LBP

Благодарности: автор благодарит своего научного руководителя Сухинова Александра Ивановича (члена-корреспондента РАН, д-ра физ.-мат. наук, профессора, заведующего кафедрой Донского государственного технического университета) за бесценную помощь и советы.

Финансирование. Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 21–71–20050).

Для цитирования. Панасенко Н.Д. Прогноз состояния прибрежных систем с помощью математического моделирования на основе космических снимков. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):54–65. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-54-65>

Original article

Forecasting the Coastal Systems State using Mathematical Modelling Based on Satellite Images

Natalya D. Panasenko

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

✉ natalija93_93@mail.ru

Abstract

Introduction. Coastal systems of Southern Russia are constantly exposed to biotic, abiotic and anthropogenic factors. In this regard, there is a need to develop non-stationary spatially inhomogeneous interconnected mathematical models that make it possible to reproduce various scenarios for the dynamics of biological and geochemical processes in coastal systems. There is also the problem of the practical use of mathematical modelling, namely its equipping with real input data (boundary, initial conditions, information about source functions). An operational source of field information can be data received from artificial Earth satellites. Therefore, the problem arises of identifying phytoplankton populations in images of reservoirs, which, as a rule, have a spotty structure, with low image contrast relative to the background, as well as determining the boundaries of their location.

Materials and Methods. This work is based on the correct application of modern mathematical analysis methods, mathematical physics and functional analysis, the theory of difference schemes, as well as methods for solving grid equations. Biogeochemical processes are described based on convection-diffusion-reaction equations. Linearization of the constructed model is carried out on a time grid with step τ . A method for recognizing the boundaries of spotted structures is being developed based on Earth remote sensing data. A combination of methods is considered as image processing algorithms: local binary patterns (LBP) and a two-layer neural network.

Results. The developed software-algorithmic tools for space image recognition are presented, based on a combination of methods — local binary patterns (LBP) and neural network technologies, focused on the subsequent input of the obtained initial conditions for the problem of phytoplankton dynamics into a mathematical model. Regarding the necessary mathematical model, a continuous linearized model has been proposed and studied, and on its basis a linearized discrete model of biogeochemical cycles in coastal systems, for which practically acceptable time step values have been established for numerical (predictive) modelling of problems of the dynamics of planktonic populations and biogeochemical cycles, including in the event of death phenomena, which makes it possible to reduce the time of operational forecasting. At the same time, for the constructed discrete model, properties that are practically significant for discrete models are guaranteed to be satisfied: stability, monotonicity and convergence of the difference scheme, which is important for reliable forecasts of adverse and dangerous phenomena.

In the process of work, referring to satellite images, which make it possible to obtain the state of coastal systems with high accuracy, initial conditions are entered into the mathematical (computer) model. The model analyzes satellite image data and determines levels of “pollution”, the formation of extinction zones and other factors that may threaten nature.

Discussion and Conclusion. Discussion and conclusions. Using this model, it is possible to predict possible changes in coastal ecosystems and develop strategies to protect them. The results obtained make it possible to significantly reduce the time of forecast calculations (by 20–30 %) and increase the likelihood of early detection of unfavorable and dangerous phenomena, such as intense “blooming” of the aquatic environment and the formation of extinction zones in coastal systems.

Keywords: mathematical model, biogeochemical cycles, remote sensing data, neural network-LBP

Acknowledgements. The author thanks his scientific supervisor Alexander Ivanovich Sukhinov (corresponding member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of the department of Don State Technical University) for his invaluable help and advice.

Funding information. The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation (project no. 21–71–20050).

For citation. Panasenko N.D. Forecasting the coastal systems state using mathematical modelling based on satellite images. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):54–65. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-54-65>

Введение. Прибрежные системы играют важную роль в экосистеме нашей планеты, обеспечивая условия для жизни множества видов растений и животных. Однако из-за негативных и катастрофических явлений прибрежные системы могут находиться под угрозой. Приведем несколько выдержек из источников [1, 2]: «... замор рыбы в июле 2020 г. в юго-восточном секторе Азовского моря нанес значительный ущерб процессу воспроизводства промысловых рыб; обширные зоны гипоксии и сероводородного заражения произошли в восточной части Азовского моря в 2001 г.; катастрофический шторм в ноябре 2006 г., штормовые нагоны в 2007, 2014 гг.; обмеление Азовского моря у берегов Таганрога (Ростовская область) и реки Дон в 2019, 2021, 2022 гг.». Так как изменения в системах происходят в течение нескольких недель, то требуется оперативное прогнозирование неблагоприятных явлений. Поэтому математическое моделирование, в частности на основе космических снимков, может быть полезным инструментом для прогнозирования состояния прибрежных систем и оценки эффективности мер по их сохранению.

Материалы и методы. Проблема прогнозирования динамики фито- и зоопланктона является актуальной для морских и прибрежных систем. С одной стороны, они составляют более 95 % биомассы морских и прибрежных систем и являются «фундаментом» трофической пирамиды (основа питания для ее вышестоящих уровней). С другой стороны, избыток планктона приводит к цветению и заморным явлениям, а экстремально большой избыток биогенных веществ перестает быть кормовой базой для планктона, являясь токсикантом для живой среды.

Данные задачи, применительно к Азовскому морю и подобным ему морским и прибрежным системам, сводятся к системе из 10 уравнений диффузии-конвекции-реакции, с функциями правых частей, нелинейно зависящими от искомых решений. Непосредственная декомпозиция данных задач невозможна и для последующего численного решения требуется корректная линеаризация соответствующей начально-краевой задачи по правым частям. Несмотря на большое число работ, посвященных данной проблематике, некоторые важные этапы их исследования и численной реализации не имеют в данное время удовлетворительного решения. В числе недостаточно исследованных задач построения математических моделей динамики фитопланктона и их применения для оперативного прогноза следует отметить разработку и исследование линейной непрерывной математической модели биогеохимических процессов, аппроксимирующей исходную нелинейную задачу, построение для нее дискретного аналога, обладающего свойствами монотонности, аппроксимации, устойчивости и сходимости, а также создание программы распознавания границ структур планктонных популяций (граничных контуров) на космических снимках, обладающих улучшенными характеристиками их идентификации в условиях малой контрастности объектов.

Данная задача является трудоемкой в вычислительном отношении, так как полученные в результате аппроксимации сеточные уравнения имеют размерность от нескольких миллионов до сотен миллионов. Решая реальные задачи прогноза биогеохимических процессов за приемлемое время (десятки минут — десятки часов) необходимо оперативно и надежно распознавать данные дистанционного зондирования — расположение и границы планктонных популяций и других субстанций.

Схематически процесс исследования динамики морских и прибрежных систем представлен на рис. 1. Для заблаговременного принятия решений необходимы валидные модели и данные, позволяющие этим моделям надежно работать.

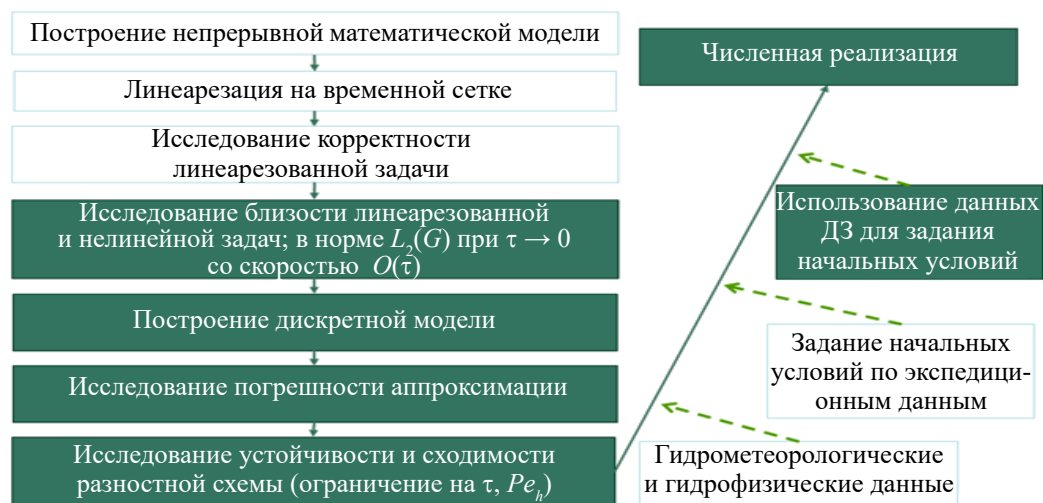


Рис. 1. Схема исследования непрерывной и дискретной математических моделей

Результаты исследования

Программа распознавания объектов «нейросеть-LBP». Использование математических моделей требует наличия реальных входных данных (граничных и начальных условий, информации о функциях-источниках), которые позволяют корректно ставить начально-краевые задачи для систем нелинейных уравнений с частными производными, а также определять различные функциональные зависимости, входящие в построенные моде-

ли. В процессе принятия решений, связанных с опасными природными явлениями и катастрофами, до 50 % от общего компьютерного времени прогнозирования может занимать распознавание ситуации, а именно определение места и размеров пятна планктонного цветения и других исходных данных.

Доступным источником натурной информации для математического моделирования могут быть данные дистанционного зондирования Земли. Их распознавание и ввод в качестве начальных и граничных условий является весьма трудоемкой процедурой и требует разработки соответствующих алгоритмов.

В процессе исследования разработан алгоритм идентификации планктонных популяций, имеющих сложную структуру и малую контрастность (отличия оттенков зеленого цвета) фона и области — «нейросеть-LBP». Подробное описание данного алгоритма можно найти в работах [3–5].

Программный модуль (на основе алгоритма «нейросеть-LBP») включен в исследовательский прогнозный комплекс (ИПК) «Azov3d», разработанный в научной школе А.И. Сухинова. Он позволяет получить начальные данные для прогностического моделирования. Результаты численных экспериментов с программным модулем, на примере Таганрогского залива, представлены на рис. 2.

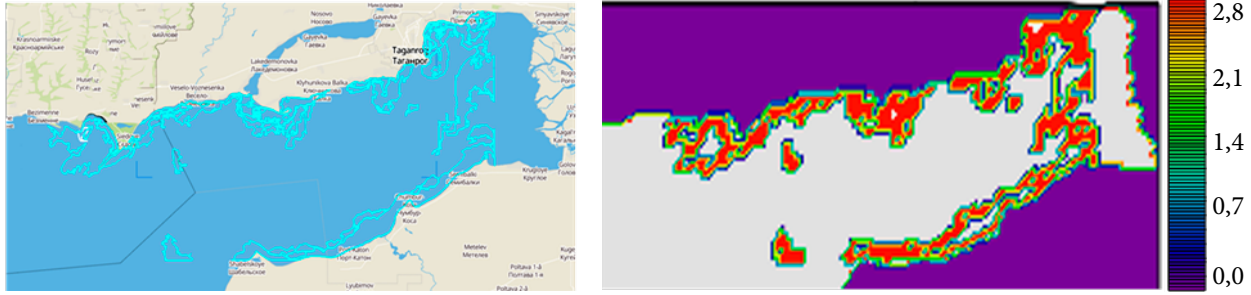


Рис. 2. Задание начального моделирования динамики концентраций фитопланктона ИПК «Azov3d»

Данные, полученные с помощью программных модулей «нейросеть-LBP», и биогеохимические циклы, входящие в ИПК «Azov3d», позволяют прогнозировать динамику изменения концентраций трех, наиболее распространенных в летний период, видов фитопланктона и семи биогенных веществ.

Математическая модель. Динамика планктонных популяций должна рассматриваться в связи с динамикой основных биогенных веществ: фосфатов, органического фосфора во взвешенном состоянии, растворенного фосфора, растворенного кислорода, нитратов, нитритов, аммония (аммонийного азота), общего органического азота, растворенного неорганического кремния (включая кремнезем и силикаты), сероводорода (включая и элементарную серу).

Рассмотрим построенную математическую модель динамики биогеохимических циклов, включающую уравнения динамики фитопланктонных популяций и основных биогенных веществ [5–8]:

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + u \frac{\partial q_i}{\partial x} + v \frac{\partial q_i}{\partial y} + w \frac{\partial q_i}{\partial z} = \operatorname{div}(\vec{k} \cdot \operatorname{grad} q_i) + R_{q_i}, \quad (x, y, z) \in G, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

где q_i является концентрацией соответствующего компонента под номером i , $i \in M$, $M = \{F_1, F_2, F_3, PO_4, POP, DOP, O_2, NO_3, NO_2, NH_4, N, Si, H_2S\}$; F_1 означает, что рассматривается концентрация зеленой водоросли, F_2 — синезеленой водоросли и F_3 — диатомовой водоросли.

Далее указаны биогенные компоненты: PO_4 — означает принадлежность компонента к фосфатам, POP — к органическому фосфору во взвешенном состоянии, DOP — к растворенному фосфору, O_2 — к растворенному кислороду, NO_3 — к нитратам, NO_2 — к нитритам, NH_4 — к аммонии (аммонийному азоту), N — к общему органическому азоту, Si — к растворенному неорганическому кремнию (включая кремнезем и силикаты), H_2S — к сероводороду (включая и элементарную серу).

$\vec{V} \equiv (u, v, w)^T$ — трехмерный вектор скорости водной среды, u, v, w — компоненты вектора \vec{V} , направленные вдоль координатных осей Ox , Oy и Oz соответственно. Предполагается, что ось Ox направлена на север, Oy — на восток, Oz — вертикально вниз, так что заданная система координат образует правую тройку векторов. Начало системы координат располагается на невозмущенной поверхности воды, $\vec{k} = (K_h, K_h, K_v)^T$ — коэффициент турбулентного обмена (турбулентной диффузии), где K_h — коэффициент турбулентной диффузии по каждому из координатных направлений Ox и Oy , который для простоты будем считать постоянным, K_v — коэффициент турбулентного обмена по вертикальному направлению Oz .

Сформулируем математическую модель применительно к Таганрогскому заливу и Азовскому морю. Заметим, что она описывается 10 уравнениями вида (1), т. е. уравнениями диффузии-конвекции функций правых частей $R_{q_i} = R_{q_i}(x, y, z, t)$, зависящими от искоемых решений, от температуры водной среды (T_{temp}) и её солености (S) в соответствии с уравнениями (2)–(14) [8]:

$$R_{F_i} = C_{F_i}(1 - K_{F_iR})q_{F_i} - K_{F_iD}q_{F_i} - K_{F_iE}q_{F_i}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (2)$$

$$R_{POP} = \sum_{i=1}^3 s_P K_{FiD} q_{Fi} - K_{PD} q_{POP} - K_{PN} q_{POP}, \quad (3)$$

$$R_{DOP} = \sum_{i=1}^3 s_P K_{FiE} q_{Fi} + K_{PD} q_{POP} - K_{DN} q_{DOP}, \quad (4)$$

$$R_{PO_4} = \sum_{i=1}^3 s_P C_{Fi} (K_{FiR} - 1) q_{Fi} + K_{PN} q_{POP} + K_{DN} q_{DOP}, \quad (5)$$

$$R_{NH_4} = \sum_{i=1}^3 s_N C_{Fi} (K_{FiR} - 1) \frac{f_N^{(2)}(q_{NH_4})}{f_N(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4})} q_{Fi} + \sum_{i=1}^3 s_N (K_{FiD} + K_{FiE}) q_{Fi} - K_{42} q_{NH_4}, \quad (6)$$

$$R_{NO_2} = \sum_{i=1}^3 s_N C_{Fi} (K_{FiR} - 1) \frac{f_N^{(1)}(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4})}{f_N(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4})} \cdot \frac{q_{NO_2}}{q_{NO_2} + q_{NO_3}} q_{Fi} + K_{42} q_{NH_4} - K_{23} q_{NO_2}, \quad (7)$$

$$R_{NO_3} = \sum_{i=1}^3 s_N C_{Fi} (K_{FiR} - 1) \frac{f_N^{(1)}(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4})}{f_N(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4})} \cdot \frac{q_{NO_3}}{q_{NO_2} + q_{NO_3}} q_{Fi} + K_{23} q_{NO_2}, \quad (8)$$

$$R_{Si} = s_{Si} C_{Fi} (K_{FiR} - 1) q_{Fi} + s_{Si} K_{FiD} q_{Fi}, \quad (9)$$

где K_{FiR} — удельная скорость дыхания фитопланктона; K_{FiD} — удельная скорость отмирания фитопланктона; K_{FiE} — удельная скорость экскреции фитопланктона; K_{PD} — удельная скорость автолиза POP ; K_{PN} — коэффициент фосфатофикации POP ; K_{DN} — коэффициент фосфатофикации DOP ; K_{42} — удельная скорость окисления аммония до нитритов в процессе нитрификации; K_{23} — удельная скорость окисления нитритов до нитратов в процессе нитрификации; s_P, s_N, s_{Si} — нормировочные коэффициенты между содержанием N, P, Si в органическом веществе [6].

Скорость роста фитопланктона определяется выражениями:

$$C_{Fi,2} = K_{NF_{1,2}} f_{T_{\text{temp}}}(T_{\text{temp}}) f_S(S) \min\{f_P(q_{PO_4}), f_N(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4})\}, \quad (10)$$

$$C_{Fi,3} = K_{NF_3} f_{T_{\text{temp}}}(T_{\text{temp}}) f_S(S) \min\{f_P(q_{PO_4}), f_N(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4}), f_{Si}(q_{Si})\}, \quad (11)$$

где K_{NF} означает максимальную удельную скорость роста фитопланктона.

Функции зависимости скорости роста гидробионтов от температуры и солености:

$$f_{T_{\text{temp}}}(T_{\text{temp}}) = \exp(-a_l \{(T_{\text{temp}} - T_{\text{opt}})/T_{\text{opt}}\}^2), \quad l = \overline{1,3}, \quad (12)$$

$$f_S(S) = \exp(-b_l \{(S - S_{\text{opt}})/S_{\text{opt}}\}^2), \quad l = \overline{2,3}, \quad (13)$$

$$f_S(S) = \begin{cases} k_s, & \text{для } S \leq S_{\text{opt}}, \\ \exp(-b_1 \{(S - S_{\text{opt}})/S_{\text{opt}}\}^2), & \text{для } S > S_{\text{opt}}, \end{cases} \quad (14)$$

где $k_s = 1$; $T_{\text{opt}}, S_{\text{opt}}$ означают оптимальные температуру и соленость для данного вида фитопланктона; $a_l > 0, b_l > 0$ определяются как коэффициенты ширины диапазона толерантности фитопланктона к температуре и солености соответственно.

Граничные и начальные условия для системы уравнений формулируются уравнениями (15)–(17):

$$q_i = 0, \text{ на } \sigma \text{ если } u_n < 0; \quad \frac{\partial q_i}{\partial n} = 0, \text{ на } \sigma, \text{ если } u_n \geq 0; \quad (15)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial z} = 0, \text{ на } \Sigma_o; \quad \frac{\partial q_i}{\partial z} = -\varepsilon_i q_i \text{ на дне } \Sigma_H, \quad (16)$$

$$q_i(x, y, z, 0) = q_{0i}(x, y, z), \quad \vec{V}(x, y, z, 0) = \vec{V}_0(x, y, z), \quad t = 0, i \in M, \quad (17)$$

$$T_{\text{temp}}(x, y, z, 0) = T_{\text{temp}0}(x, y, z), \quad S(x, y, z, 0) = S_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \bar{G},$$

где ε_i — неотрицательные постоянные; $i \in M$; ε_i учитывает опускание водорослей на дно и их затопление для $i \in \{F_1, F_2, F_3\}$ и учитывает поглощение питательных веществ донными отложениями для $i \in \{PO_4, POP, DOP, O_2, NO_3, NO_2, NH_4, N, Si, H_2S\}$; u_n — нормальная по отношению к граничной поверхности составляющая вектора скорости водного потока, \vec{n} — вектор внешней нормали к граничной поверхности, T_{temp} — температуры водной среды, S — соленость.

Графически процесс представлен на рис. 3. Отметим, что предполагается использование в функциях правых частей положительных констант.

Для наглядности представим модель и структуру связей рассматриваемой математической модели биологической кинетики и геохимических циклов в виде структурной схемы (рис. 4).

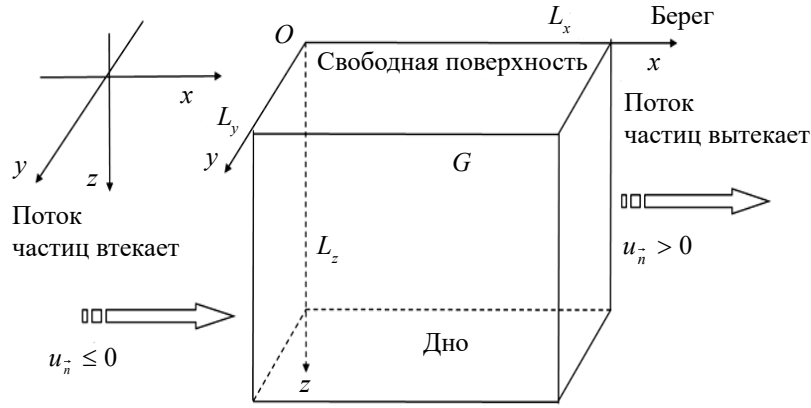


Рис. 3. Схематичное представление рассматриваемой области

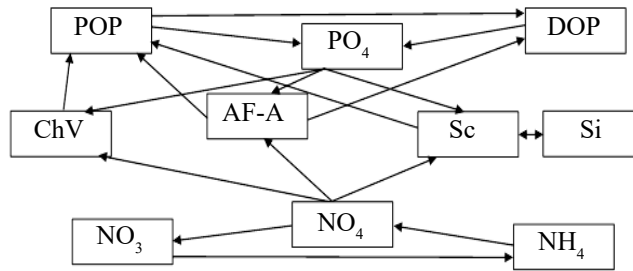


Рис. 4. Структура модели биогеохимической трансформации форм фосфора, азота и кремния

Данная структура была разработана в Институте океанологии им. П.П. Ширшова Российской академии наук Е.В. Якушевым [9–11], а также усовершенствована в работах А.И. Сухинова, А.В. Никитиной, Ю.В. Беловой [2, 3, 5–8]. Сравнение с многочисленными натурными данными подтвердили валидность структуры взаимосвязей между отдельными элементами модели.

Далее осуществлялось исследование существования и единственности решения линеаризованной по правой частям начально-краевой задачи динамики биогеохимических циклов при естественных ограничениях на гладкость входных данных [6–8].

Идея линеаризации состоит в том, что нелинейные правые части берутся с запаздыванием по отношению к моделируемому временному шагу. Предлагается осуществление линеаризации правых частей с использованием равномерной временной сетки ω_τ с шагом по времени τ :

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N; N\tau = T\}.$$

На каждом шаге времени $t_{n-1} < t < t_n$ будем рассматривать линеаризованные по функциям правых частей R_{q_i} ($i \in M$) уравнения (1), решениями которых являются функции \tilde{q}_i^n ($n = 1, 2, \dots, N$) вида:

$$\frac{\partial \tilde{q}_i^n}{\partial t} + \text{div}(\vec{V} \cdot \tilde{q}_i^n) = \text{div} \left(k_h \frac{\partial \tilde{q}_i^n}{\partial x} + k_h \frac{\partial \tilde{q}_i^n}{\partial y} + k_v \frac{\partial \tilde{q}_i^n}{\partial z} \right) + \tilde{R}_{q_i}^n. \quad (18)$$

После этого можно переходить к исследованию близости решений линеаризованной и исходной начально-краевых задач [8].

Исследование близости решений линеаризованной и исходной начально-краевых задач. Возьмем уравнения (1) и (18) с соответствующими граничными и начальными условиями. Вычитая почленно из уравнений (18) соответствующие уравнения (1) и вводя функцию погрешности линеаризации, получаем задачу, которая имеет вид, характерный для линеаризованной задачи, где вместо функций правой части стоит погрешность аппроксимации правых частей исходной непрерывной задачи:

$$\frac{\partial z_i^n}{\partial t} + u \frac{\partial z_i^n}{\partial x} + v \frac{\partial z_i^n}{\partial y} + w \frac{\partial z_i^n}{\partial z} - \text{div}(\vec{k} \cdot \text{grad } z_i^n) = \tilde{R}_{q_i}^n - R_{q_i}^n, \quad (19)$$

$$i = 1, \dots, 10, n = 1, \dots, N, (x, y, z) \in G, t_{n-1} < t < t_n.$$

К системе добавляем соответствующие начальные и граничные условия.

Будем предполагать, что каждая из функций q_i интегрируема «с квадратом» в области G . Введем скалярное произведение функций, таких, что для любого выбранного интервала от 0 до T существуют и ограничены интегралы, каждый из которых есть непрерывно дифференцируемая функция переменной t .

Вводим норму:

$$\|\xi\|_{L_2(x,y,z)} \equiv (\xi, \xi)^{\frac{1}{2}} \equiv \left(\iiint_G \xi^2(x, y, z) dx dy dz \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, каждая такая норма является неотрицательной функцией переменных, непрерывно дифференцируемой по этой переменной. Умножая обе части уравнения (19) на функцию погрешности линеаризации, а затем интегрируя сначала по области G , а затем по временной переменной t получаем интегральное равенство, которое является квадратичным функционалом:

$$\begin{aligned} & \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iiint_G z_i^n \cdot \frac{\partial z_i^n}{\partial t} dG \right) dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iiint_G z_i^n \cdot \operatorname{div}(\vec{V} \cdot z_i^n) dG \right) dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iiint_G z_i^n \cdot \operatorname{div}(\vec{k} \cdot \operatorname{grad} z_i^n) dG \right) dt = \\ & = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iiint_G (\tilde{R}_{q_i}^n - R_{q_i}^n) z_i^n dG \right) dt. \end{aligned}$$

Используя теорему Остроградского-Гаусса, формулу Грина и неравенства Пуанкаре, приходим к оценке (20):

$$\begin{aligned} & \|z_1^n(x, y, z, t_n)\|_{L_2(G)}^2 \leq \|z_1^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})\|_{L_2(G)}^2 + \\ & + 2[K_{NF_1}(1-K_{F_1R})-K_{F_1D}-K_{F_1E}-4\left[k_h\left(\frac{1}{H_x^2}+\frac{1}{H_y^2}\right)+k_{v_{\min}}\frac{1}{H_z^2}\right]] \cdot \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iiint_G (z_1^n(x, y, z, t))^2 dG \right) dt, \end{aligned} \quad (20)$$

гарантирующей близость (сходимость при $\tau \rightarrow 0$) решений линеаризованной и нелинейной задачи. Для субстанции F_1 (исходная функция $q_{F_1} \equiv q_1$) в $L_2(G)$ на последовательности сеток, при неотрицательности выражения в квадратных скобках, получаем:

$$\omega_\tau(\tau \rightarrow 0): \quad \|z_1^n(x, y, z, t_n)\|_{L_2(G)} \leq C_1 \tau \quad \begin{matrix} n=1, 2, \dots, N \\ C_1 = \text{const} > 0 \end{matrix}.$$

Аналогичным методом оценки можно доказать близость линеаризованных и исходных уравнений для остальных субстанций (биогенных компонентов). После проведенного исследования появляется основа для построения корректной разностной схемы.

Исследование разностной схемы для задачи динамики биогеохимических циклов. При построении дискретной модели будем ориентироваться на линеаризованную цепочку начально-краевых задач, построенную ранее с помощью уравнения (18). Построение выполняется стандартным способом, однако особенностью является кососимметричная запись оператора конвективного переноса, которая гарантирует монотонность при ограничении на шаг по времени и шаги пространства сетки.

При исследовании разностных схем учтены специфические особенности в задании правых частей. При последующем анализе появятся ограничения на величину допустимого шага по времени τ , тем более жесткие, чем больше положительное значение правой части, которая ответственна за рост численности (концентрации) субстанции для фитопланктонных популяций. Остальные функции правых частей ($i = 4, \dots, 10$) при условии непоступления биогенов в рассматриваемую область являются неположительными и поэтому рост концентраций в реальных задачах не наблюдается.

Также для простоты изложения в качестве выбранной области будем рассматривать параллелепипед:

$$G = \{0 < x < L_x, 0 < y < L_y, 0 < z < L_z\}.$$

Для задания сеточных функций концентраций планктонных популяций и биогенных веществ построим равномерную пространственно-временную сетку и будем использовать шаблон разностной схемы (контрольный объём), представленный на рис. 5.

Все неизвестные функции задаются и рассчитываются в узлах шаблона, а функции скоростей, так как они являются входными данными, которые вычисляются на этапе гидродинамического моделирования, рассчитываются в серединах ребер шаблона разностной схемы. Для корректного задания граничных условий второго и третьего родов в разностной схеме будем использовать расширенную пространственную разностную сетку, с отступлением от всех узлов в направлении нормали (перпендикуляра) наружу на расстояние одного шага сетки по соответствующему направлению. Для краткости этот этап опускаем.

Исходя из симметричной формы представления оператора конвективного переноса, приходим к данному оператору в кососимметричном виде: $(x, y, z) \in \omega, i = 1, \dots, 10$:

$$\begin{aligned} C_0 \bar{q}_i^n \equiv & \left((u_{r+0,5}^n \bar{q}_{i,r+1}^n - u_{r-0,5}^n \bar{q}_{i,r-1}^n) / 2h_x \right) + \left((v_{r+0,5}^n \bar{q}_{i,r+1}^n - v_{r-0,5}^n \bar{q}_{i,r-1}^n) / 2h_y \right) \\ & + \left((w_{r+0,5}^n \bar{q}_{i,r+1}^n - w_{r-0,5}^n \bar{q}_{i,r-1}^n) / 2h_z \right). \end{aligned} \quad (21)$$

И к виду оператора диффузионного переноса: $(x, y, z) \in \omega, i \in \{F_1, F_2, F_3\}$:

$$Dq_i^n = \left((k_{h,r+0,5} ((q_{i,r+1}^n - q_i^n)/h_x) - k_{h,r-0,5} ((q_i^n - q_{i,r-1}^n)/h_x)) / h_x \right) + \\ + \left((k_{h,r+0,5} ((q_{i,r+1}^n - q_i^n)/h_y) - k_{h,r-0,5} ((q_i^n - q_{i,r-1}^n)/h_y)) / h_y \right) + \\ + \left((k_{v,r+0,5} ((q_{i,r+1}^n - q_i^n)/h_z) - k_{v,r-0,5} ((q_i^n - q_{i,r-1}^n)/h_z)) / h_z \right). \quad (22)$$

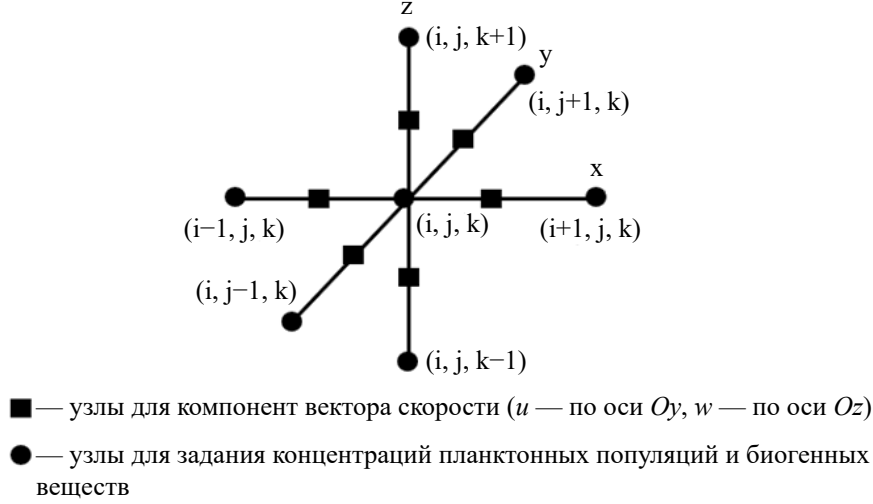


Рис. 5. Схематическое обозначение контрольного объема и шаблона схемы

В направлении Ox и Oy аппроксимации имеют место граничные условия Неймана (второго рода). На дне водоема (Oz) приведем результаты аппроксимации граничных условий третьего рода. Здесь и далее для краткости их опустим. Данные аппроксимации справедливы для узлов сетки и имеют погрешность аппроксимации для соответствующих непрерывных (дифференциальных) операторов $O(h^2)$.

Построенные соотношения гарантируют, что погрешность аппроксимации разностной схемы на сетке в норме S ограничена и оценивается неравенством:

$$\max_{1 \leq n \leq N_T} \left\{ \max_{(x,y,z) \in \omega_h} |\Psi(x,y,z,t_n)| \right\} \leq M \cdot (h^2 + \tau), \quad h^2 \equiv h_x^2 + h_y^2 + h_z^2, \quad M \equiv \text{const} > 0. \quad (23)$$

Предполагается, что на расширенной сетке, о которой говорилось выше, по горизонтальным направлениям существует водная среда и эти величины могут быть определены в гидродинамическом блоке объединенной модели «гидродинамика, фитопланктонные популяции и биогены».

Достаточные условия монотонности и сходимости к решению линеаризованной задачи. При доказательстве монотонности разностной схемы и её сходимости при $|h| \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow 0$ применим сеточный принцип максимума и следствие из него — оценку решения неоднородного сеточного уравнения в норме C . Для удобства последующих выкладок приведем шаблон разностной схемы (рис. 6) с обозначением узлов, которые будут использоваться в канонической форме записи сеточных уравнений общего вида.

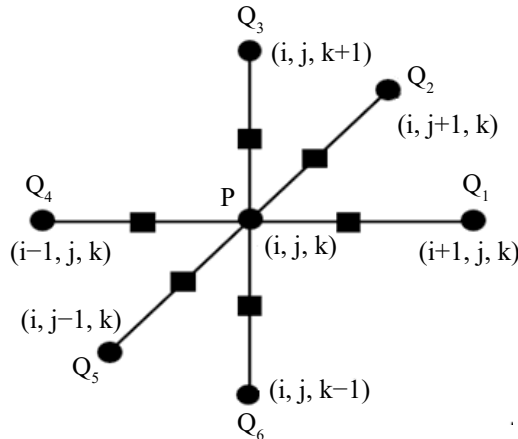


Рис. 6. Шаблон разностной схемы с обозначением узлов

На построенной ранее пространственной сетке будем рассматривать (на верхнем временном слое) сеточное уравнение в канонической форме:

$$A(P) \cdot Y(P) = \sum_{\substack{Q_m \in \Pi'(P) \\ m=1,2,\dots,6}} B(P, Q_m) \cdot Y(Q_m) + F(P), \quad (24)$$

$$P \in \omega, P \equiv (x_i, y_j, z_k), Y(P) \equiv \bar{q}^n(x_i, y_j, z_k).$$

Значения коэффициентов, а также правых частей будут сформированы для внутренних и граничных узлов отдельно. Следует отметить, что значения компонента вектора скорости, определяемые в полуцелых узлах сетки в гидродинамическом блоке модели, участвуют в формировании всех коэффициентов сеточного уравнения.

При выполнении условия (неравенства) Куранта и ограничения на сеточное число Пекле, определяем допустимые значения шагов по времени τ порядка 20 секунд для прибрежных систем:

$$10^{-4} \leq \frac{|u^n(x_i \pm 0,5h_x, y_j, z_k)| h_x}{k_h(x_i \pm 0,5h_x, y_j, z_k)} \leq 1, \quad \tau \leq \frac{10^2}{6 \cdot 1 \text{ М/с}} \cong 16,6 [\text{с}], \quad (25)$$

$$10^{-4} \leq \frac{|v^n(x_i, y_j \pm 0,5h_y, z_k)| h_y}{k_h(x_i, y_j \pm 0,5h_y, z_k)} \leq 1, \quad \tau \sim 16,6 [\text{с}], \quad (26)$$

$$10^{-4} \leq \frac{|w^n(x_i, y_j, z_k \pm 0,5h_z)| h_z}{k_v(x_i, y_j, z_k \pm 0,5h_z)} \leq 1, \quad \tau \leq \frac{10^{-1}}{6 \cdot 10^{-3} \text{ М/с}} \cong 16,6 [\text{с}]. \quad (27)$$

Для дальнейших исследований устойчивости разностной схемы и сходимости потребуется оценка коэффициентов. Сформулируем теорему применительно к рассматриваемой задаче, используя теорему оценки решения неоднородного сеточного уравнения:

$$z^n(x_i, y_j, z_k) \equiv z^n(P) = 0, P \in \bar{\omega}^* \setminus \bar{\omega}.$$

Для удобства применения используем расширенную сетку, на которой выполняются условия теоремы.

Теорема. Если:

$$D(P) \equiv A(P) - \sum_{\substack{Q_m \in \Pi'(P) \\ m=1,2,\dots,6}} B(P, Q_m) > 0, B(P, Q_m) \geq 0, m = 1, 2, \dots, 6,$$

во всех узлах связанной сетки $\bar{\omega}$, то для решения задачи:

$$A(P)z^n(P) - \sum_{\substack{Q_m \in \Pi'(P) \\ m=1,2,\dots,6}} B(P, Q_m)z^n(Q_m) = F(P), -P \in \bar{\omega}, z^n(P) = 0, P \in \Upsilon_n^* \equiv \bar{\omega}^* \setminus \bar{\omega},$$

справедлива оценка:

$$\|z^n\|_{C(\bar{\omega})} \leq \left\| \frac{\Psi(x, y, z, t_n)}{D(x, y, z, t_n)} \right\|_{C(\bar{\omega})}.$$

Ориентируясь на каноническую форму сеточного уравнения для построенной разностной схемы во внутренних и граничных узлах основной сетки, при выполнении условия (неравенства) Куранта и ограничения на сеточное число Пекле, при оценке для $D(P)$ снизу:

$$D(P) \equiv A(P) - \sum_{m=1}^6 B(P, Q_m) \geq \frac{1}{\tau} - \frac{1}{4\tau} - \frac{1}{2\tau} = \frac{1}{4\tau},$$

гарантируем монотонность и устойчивость.

Таким образом, можно вернуться к оценке погрешности на основе построенной дискретной модели. При переходе с временного слоя номера « $n-1$ » на временной слой « n » в соответствии с **Теоремой** имеем:

$$\|z^n\|_{C(\bar{\omega})} \leq \left\| \frac{\Psi(x, y, z, t_n)}{D(x, y, z, t_n)} \right\| \leq 4M(h^2 + \tau)\tau,$$

$$\|z^n\|^T \leq \|z^{N_T}\| \leq 4 \sum_{n=1}^{N_T} M(h^2 + \tau)\tau = 4MN_T\tau(h^2 + \tau) \leq 4MT(h^2 + \tau) \equiv K(h^2 + \tau),$$

где $K \equiv 4MT$ — константа.

С учетом полученной оценки погрешности аппроксимации получаем сходимость разностной схемы со скоростью $O(|h|^2 + \tau)$. Полученная система сеточных уравнений для всех субстанций (концентраций фитопланктона, а также биогенных веществ) имеет в реальных задачах высокую размерность.

О численной реализации построенной разностной схемы. Систему решаемых сеточных уравнений в операторном виде можно представить в виде:

$$\frac{\bar{q}_i^{n+1} - \bar{q}_i^n}{\tau} + C_0 q_i^{n+1} - D q_i^{n+1} - Q_i q_i^{n+1} = R_i^n, n = 0, 1, \dots, N \mp 1, i \in \{F_1, F_2, F_3, 4, \dots, 10\}.$$

С учётом особенной построенной разностной схемы за счёт выбора достаточно малого шага по времени τ и можно использовать метод Зейделя ($D_i \neq D$).

Пусть

$$A_i \equiv A_i^- + D_i + A_i^+, \\ (A_i^- + D_i) \bar{q}_i^{n+1, S+1} = A_i^+ \bar{q}_i^{n+1, S} + R_i^n,$$

где начальные приближения на каждом временном слое $n = 1, 2, \dots, N_T$ задаются исходя из полученных «финальных» значений итерационного процесса для искомой сеточной функции на предыдущем временном слое, а $n = 0, n + 1 = 1, \bar{q}_i^{1,0}$ для определяется исходя из начальных условий для исходной краевой задачи.

Анализ показывает, что знаменатель ρ геометрической прогрессии входит в оценку:

$$\|z_i^{n+1, S+1}\|_{C(\bar{\omega})} \leq \rho \|z_i^{n+1, S}\|_{C(\bar{\omega})}.$$

Число временных шагов, для которых необходимо решать данные системы, составит от 10^3 до 10^5 итераций. Указанные особенности сеточных задач, особенно при оперативном прогнозе водной экосистемы, могут потребовать применения высокопроизводительных вычислительных систем со многими тысячами процессоров, однако эта тематика выходит за границы данного исследования, в котором параллельные алгоритмы не рассматриваются.

Поскольку схема является системой сеточных уравнений с гарантированным диагональным преобладанием, возникает возможность использовать простой, но достаточно эффективный метод Зейделя, который будет сходиться при решении сеточных уравнений высокой размерности со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем 0,75–0,8.

Обсуждение и заключение. Для проверки соответствия составленных математических моделей гидродинамики и биологической кинетики автор использовал экспедиционные данные. Программный модуль «Azov3d», основываясь на полученных начальных данных, введенных в систему автоматически, моделирует динамику изменения концентраций трех видов фитопланктона и биогенных веществ в Таганрогском заливе для временного интервала 30 суток (06.08.2020 – 10.09.2020 г.), рис. 7.

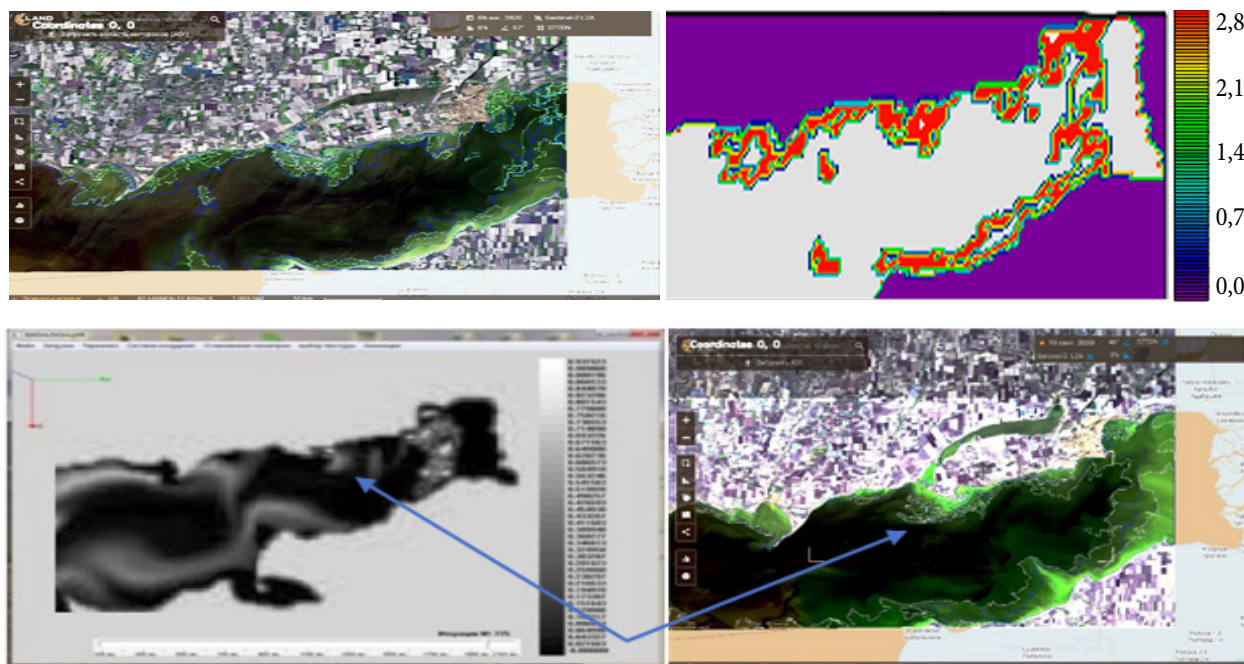


Рис. 7. Моделирование динамики концентраций фитопланктона ИПК «Azov3d»

Результаты работы программного модуля, входящего в состав ИПК «Azov3d», наглядно иллюстрируют возможности определения контуров на поверхности воды и позволяют проследить их изменение с течением времени в поверхностном слое водоема. С помощью этой модели можно предсказывать возможные изменения в прибрежных экосистемах и разрабатывать стратегии по их защите. Полученные результаты позволяют существенно сократить время прогностических расчетов (на 20–30 %) и повысить вероятность заблаговременного обнаружения неблагоприятных и опасных явлений, таких как интенсивное «цветение» водной среды и образование зон заморов в прибрежных системах.

Математическое моделирование на основе космических снимков может быть полезным инструментом для проведения исследований прибрежных систем и разработки стратегий сохранения её экосистемы. Однако для эффективного использования этого метода необходимо продолжать совершенствовать математические модели и улучшать доступ к данным, собранным с помощью космических аппаратов.

Список литературы

1. Панасенко Н.Д., Атаян А.М., Мотуз Н.С. Обработка и усвоение данных космического зондирования для осуществления мониторинга текущего состояния разнородных объектов на поверхности водоемов. *Инженерный вестник Дона*. 2020;12(72):121–134.
2. Сухинов А.И., Атаян А.М., Белова Ю.В. и др. Обработка данных натурных измерений экспедиционных исследований для математического моделирования гидродинамических процессов Азовского моря. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2020;13(2):161–174. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.2.13>
3. Sukhinov A., Panasenکو N., Simorin A. Algorithms and programs based on neural networks and local binary patterns approaches for monitoring plankton populations in sea systems. In: *E3S Web of Conferences*. 2022;363:02027. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202236302027>
4. Panasenکو N.D., Poluyan A.Y., Motuz N.S. Algorithm for monitoring the plankton population dynamics based on satellite sensing data. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021;2131(3):032052.
5. Sukhinov A.I., Protsenko S.V., Panasenکو N.D. Mathematical modeling and ecological design of the marine systems taking into account multi-scale turbulence using remote sensing data. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2022;6(3):104–113. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2022-1-3-104-113>
6. Sukhinov A., Belova Y., Nikitina, A., et al. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the dynamics of biogeochemical cycles in coastal systems problem. *Mathematics*. 2022;10(12):2092. <https://doi.org/10.3390/math10122092>
7. Сухинов А.И., Белова Ю.В., Чистяков А.Е. Моделирование биогеохимических циклов в прибрежных системах Юга России. *Математическое моделирование*. 2021;33(3):20–38. <https://doi.org/10.20948/mm-2021-03-02>
8. Sukhinov A., Belova Y., Panasenکو N., et al. Research of the solutions proximity of linearized and nonlinear problems of the biogeochemical process dynamics in coastal systems. *Mathematics*. 2023;11(3):575. <https://doi.org/10.3390/math11030575>
9. Yakushev E.V., Pollehne F., Jost G., et al. Analysis of the water column oxic/anoxic interface in the Black and Baltic seas with a numerical model. *Marine Chemistry*. 2007;107:388–410. <https://doi.org/10.1016/j.marchem.2007.06.003>
10. Yakushev E.V., Wallhead P., Renaud P.E., et al. Understanding the biogeochemical impacts of fish farms using a benthic-pelagic model. *Water (Switzerland)*. 2020;12(9):2384. <https://doi.org/10.3390/W12092384>
11. Yakushev E., Pogojeva M., Polukhin A., et al. Arctic inshore biogeochemical regime influenced by coastal runoff and glacial melting (case study for the Templefjord, Spitsbergen). *Geosciences (Switzerland)*. 2022;12(1):44. <https://doi.org/10.3390/geosciences12010044>

References

1. Panasenکو N.D., Atayan A.M., Motuz N.S. Processing and assimilation of space sensing data for monitoring the current state of heterogeneous objects on the surface of reservoirs. *Engineering Bulletin of the Don*. 2020;12(72):121–134. (In Russ.).
2. Sukhinov A.I., Atayan A.M., Belova Yu.V., et al. Processing data from field measurements of expeditionary research for mathematical modeling of hydrodynamic processes in the Sea of Azov. *Computational continuum mechanics*. 2020;13(2):161–174. (In Russ.). <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.2.13>
3. Sukhinov A., Panasenکو N., Simorin A. Algorithms and programs based on neural networks and local binary patterns approaches for monitoring plankton populations in sea systems. In: *E3S Web of Conferences*. 2022;363:02027. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202236302027>
4. Panasenکو N.D., Poluyan A.Y., Motuz N.S. Algorithm for monitoring the plankton population dynamics based on satellite sensing data. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021;2131(3):032052.
5. Sukhinov A.I., Protsenko S.V., Panasenکو N.D. Mathematical modeling and ecological design of the marine systems taking into account multi-scale turbulence using remote sensing data. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2022;6(3):104–113. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2022-1-3-104-113>
6. Sukhinov A., Belova Y., Nikitina A., et al. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the dynamics of biogeochemical cycles in coastal systems problem. *Mathematics*. 2022;10(12):2092. <https://doi.org/10.3390/math10122092>
7. Sukhinov A.I., Belova Yu.V., Chistyakov A.E. Modelling of biogeochemical cycles in coastal systems of the South of Russia. *Mathematical modelling*. 2021;33(3):20–38. (In Russ.). <https://doi.org/10.20948/mm-2021-03-02>
8. Sukhinov A., Belova Y., Panasenکو N., et al. Research of the solutions proximity of linearized and nonlinear problems of the biogeochemical process dynamics in coastal systems. *Mathematics*. 2023;11(3):575. <https://doi.org/10.3390/math11030575>

9. Yakushev E.V., Pollehne F., Jost G., et al. Analysis of the water column oxic/anoxic interface in the Black and Baltic seas with a numerical model. *Marine Chemistry*. 2007;107:388–410. <https://doi.org/10.1016/j.marchem.2007.06.003>
10. Yakushev E.V., Wallhead P., Renaud P.E., et al. Understanding the biogeochemical impacts of fish farms using a benthic-pelagic model. *Water* (Switzerland). 2020;12(9):2384. <https://doi.org/10.3390/W12092384>
11. Yakushev E., Pogojeva M., Polukhin A., et al. Arctic inshore biogeochemical regime influenced by coastal runoff and glacial melting (case study for the Templefjord, Spitsbergen). *Geosciences* (Switzerland). 2022;12(1):44. <https://doi.org/10.3390/geosciences12010044>

Поступила в редакцию 10.10.2023

Поступила после рецензирования 30.10.2023

Принята к публикации 07.11.2023

Об авторе:

Панасенко Наталья Дмитриевна, старший преподаватель кафедры вычислительных систем и информационной безопасности, Донской государственный технический университет (РФ, 344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [AutorID](#), natalija93_93@mail.ru

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Received 10.10.2023

Revised 30.10.2023

Accepted 07.11.2023

About the Author:

Natalya D. Panasenko, Senior Lecturer of the Department of Computer Systems and Information Security, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, RF, 344003), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [AutorID](#), natalija93_93@mail.ru

Conflict of interest statement

The author declares that there is no conflict of interest.

The author read and approved the final version of the manuscript.