ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
INFORMATION TECHNOLOGY

УДК 519.6
https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-1-29-35

Научная статья

Параллельные алгоритмы численного решения пространственно-трехмерных задач диффузии-конвекции взвесей в прибрежных системах на основе схем расщепления

В.В. Сидорякина[1,2], **Д.А. Соломаха**[1]

[1]Донской государственный технический университет, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону
[2]Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), Российская Федерация, г. Таганрог
cvv9@mail.ru

Аннотация
Введение. Для предупреждения возникновения и уменьшения последствий опасных и катастрофических явлений, связанных с переносом взвеси в природных системах, необходимо строить оперативные и научно оправданные прогнозы, выявлять критические состояния, при которых возможно появление чрезвычайных ситуаций. Для этих целей следует создать точный и быстро работающий инструментарий, включающий алгоритмы численного решения модельной задачи, учитывающей специфику природных систем. В настоящей работе представлены параллельные алгоритмы численного решения пространственно-трехмерной задачи диффузии-конвекции взвеси, позволяющие ощутимо снизить время расчёта (более чем в 4 раза), при сравнении с расчетами, проводимыми с использованием последовательного алгоритма.
Материалы и методы. Для параллельного решения пространственно-трехмерной задачи диффузии-конвекции построена неявная схема расщепления, в которой исходная непрерывная задача заменяется на цепочку двумерных и одномерных задач. Предлагаемые в работе схемы расщепления являются физически обоснованными и учитывают специфику прибрежных морских систем, для которых влияние микротурбулентной диффузии и адвективного переноса субстанций сопоставимы, причем при аппроксимации реальных задач сеточное число Пекле не превосходит единицы. Для параллельной численной реализации использован метод декомпозиции сеточной области двумя семействами вертикальных плоскостей, параллельными координатным плоскостям Oxz и Oyz, в сочетании с методом Зейделя при решении двумерных сеточных задач в горизонтальных плоскостях и методом прогонки при решении одномерных трехточечных задач по вертикальному направлению. В рамках программной реализации параллельного счёта представлен параллельный алгоритм, реализующий задачу диффузии-конвекции на вычислительной системе с использованием технологии MPI.
Результаты исследования. Получен сравнительный анализ параллельного и последовательного алгоритмов на примере решения модельной задачи.
Обсуждение и заключения. Разработанное программное средство позволяет его практически использовать для решения конкретных гидрофизических задач, в том числе в качестве элемента программного комплекса.

Ключевые слова: задача диффузии-конвекции, разностная схема, двумерно-одномерная схема, параллельные вычисления, метод Зейделя, метод прогонки

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00509, https://rscf.ru/project/23-21-00509

Благодарности. Авторы выражают глубокую признательность и искреннюю благодарность член-корреспонденту РАН, доктору физико-математических наук, профессору Александру Ивановичу Сухинову за обсуждение алгоритмов и результатов исследования.

Для цитирования. Сидорякина В.В., Соломаха Д.А. Параллельные алгоритмы численного решения пространственно-трехмерных задач диффузии-конвекции взвесей в прибрежных системах на основе схем расщепления. *Computational Mathematics and Information Technologies.* 2024;8(1):29–35. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-1-29-35

Original article

Parallel Algorithms for Numerical Solution of Spatially Three-Dimensional Diffusion-Convection Equations in Coastal Systems Based on Splitting Schemes

Valentina V. Sidoryakina[1,2] ✉, Denis A. Solomakha[1]

[1]Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

[2]Taganrog Institute named after A.P. Chekhov (branch) of RSUE, Taganrog, Russian Federation

✉cvv9@mail.ru

Abstract

Introduction. To prevent the occurrence and mitigate the consequences of hazardous and catastrophic phenomena associated with sediment transport in natural systems, it is necessary to develop operational and scientifically justified forecasts, identify critical states at which the emergence of emergency situations is possible. For these purposes, it is necessary to create an accurate and efficient toolkit, including algorithms for numerical solution of a model problem that takes into account the specifics of natural systems. In this work, parallel algorithms for numerical solution of a spatially three-dimensional diffusion-convection problem of sediment are presented, which allow a significant reduction in computation time (by more than 4 times) compared to calculations conducted using a sequential algorithm.

Materials and Methods. For the parallel solution of the spatially three-dimensional diffusion-convection problem, an implicit splitting scheme is constructed, in which the original continuous problem is replaced by a chain of two-dimensional and one-dimensional problems. The splitting schemes proposed in the work are physically justified and take into account the specifics of coastal marine systems, for which the influence of micro-turbulent diffusion and advective transport of substances are comparable, and the Peclet number does not exceed unity when approximating real problems. For the parallel numerical implementation, a method of decomposing the grid domain into two families of vertical planes parallel to the coordinate planes *Oxz* and *Oyz*, combined with the Seidel method for solving two-dimensional grid problems in horizontal planes and the tridiagonal matrix algorithm when solving one-dimensional three-point problems in the vertical direction, is used. Within the framework of the parallel computing software implementation, a parallel algorithm is presented that implements the diffusion-convection problem on a computing system using MPI technology.

Results. A comparative analysis of parallel and sequential algorithms is obtained using a model problem.

Discussion and Conclusions. The developed software allows its practical use for solving specific hydrophysical problems, including as part of a software complex.

Keywords: diffusion-convection problem, difference scheme, two-dimensional-one-dimensional scheme, parallel computing, Seidel method, tridiagonal matrix algorithm

Funding information. This research was supported by the Russian Science Foundation grant no. 23-21-00509, https://rscf.ru/project/23-21-00509

Acknowledgments. The authors express their deep gratitude and sincere gratitude to Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor Alexander Ivanovich Sukhinov for discussing algorithms and research results.

For citation. Sidoryakina V.V., Solomakha D.A. Parallel algorithms for numerical solution of spatial-three-dimensional problems of diffusion-convection of suspended matter in coastal systems based on splitting schemes. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(1):29–35. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-1-29-35

Введение. При численном моделировании прикладных задач транспорта вещества уравнения конвекции-диффузии [1–4] являются базовыми. Основными особенностями таких задач являются, в частности, несамосопряженность оператора задачи, а также существенные различия в пространственно-временных масштабах разностных операторов конвективного и диффузионного переносов [5–8]. Эти особенности задачи должны быть учтены на дискретном уровне при построении аппроксимации непрерывной задачи.

При численном решении указанного класса задач с перспективой эффективного распараллеливания хорошо зарекомендовал себя метод расщепления по геометрическим направлениям [9–12]. Рассматриваемая неявная схема основана на расщеплении трехмерного оператора диффузии-конвекции на двумерный и одномерный операторы и формировании двумерно-одномерной аддитивной схемы расщепления. Решение разностной трехмерной задачи сводится к решению последовательности связанных по начальным и конечным данным двумерных и одномерных разностных задач, что дает возможность существенно уменьшить временные затраты на выполнение операций обмена в параллельной вычислительной системе. Для численного решения двумерной разностной задачи диффузии-конвекции используется параллельный вариант метода Зейделя, основанный на декомпозиции трехмерной сеточной задачи вертикальными плоскостями, параллельными соответствующим координатным плоскостям по числу параллельных вычислителей. Совокупность одномерных разностных задач диффузии-конвекции по вертикальному направлению решается в каждом процессоре независимо от других с использованием последовательного алгоритма прогонки. При использовании такого алгоритма существенно уменьшаются затраты на межпроцессорные обмены по сравнению с одномерными схемами расщепления, которые выполняются в соответствии с пятиточечным шаблоном для приграничных узлов, входящих в отдельные блоки сеточной информации, назначенные для обработки в отдельно взятых процессорах. Аппроксимация использует кососимметричную форму представления конвективных членов, а также особенности течений в прибрежных морских системах, для которых, в подавляющем большинстве случаев, сеточное число Пекле не превышает единицы. Это, в свою очередь, позволяет для реальных задач при выборе шага по времени (секунды или немногие десятки секунд) обеспечить строгое диагональное преобладание в матрице, соответствующей оператору задачи, и сходимость метода Зейделя со скоростью геометрической прогрессии. На примере решения модельной задачи проводится сравнительный анализ параллельного и последовательного алгоритмов.

Материалы и методы

Разностная схема для трехмерного уравнения диффузии-конвекции. В прямоугольной декартовой системе координат рассмотрим трехмерное уравнение диффузии-конвекции с использованием кососимметрической формы представления оператора конвективного переноса:

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[u\frac{\partial c}{\partial x}+v\frac{\partial c}{\partial y}+w\frac{\partial c}{\partial z}+\frac{\partial(uc)}{\partial x}+\frac{\partial(vc)}{\partial y}+\frac{\partial(wc)}{\partial z}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_h\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_h\frac{\partial c}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_v\frac{\partial c}{\partial z}\right)+f, \qquad (1)$$

где c, $c = c(x,y,z,t)$ — концентрация частиц в момент времени t, $t \in [0;T]$; u,v,w — компоненты вектора $\vec{U}$ скорости водной среды; $\mu_h \mu_v$ — коэффициенты горизонтальной и вертикальной диффузии частиц, f — функция источника, $f = f(x,y,z,t)$.

Уравнение (1) дополняется начальными условиями и граничными условиями Дирихле:

$$c(x,y,z,0)=c_0(x,y,z),\ (x,y,z)\in\overline{G}, \qquad (2)$$

$$\overline{G}=\left\{(x,y,z)\middle|0\le x\le l_x,\ 0\le y\le l_y,\ 0\le z\le l_z\right\},\ \partial G=\overline{G}\setminus G;$$

$$c(x,y,z,t)=\nu(x,y,z,t),\ 0\le t\le T,\ (x,y,z)\in\partial G. \qquad (3)$$

Введем равномерную прямоугольную пространственно-временную сетку $\omega = \omega_h \omega_\tau$, где

$$\omega_h=\left\{x_i=ih_x, y_j=jh_y, z_k=kh_z,\ i=\overline{1,N_x},\ j=\overline{1,N_y},\ k=\overline{1,N_z},\ N_x h_x=l_x, N_y h_y=l_y, N_z h_z=l_z\right\},$$

$$\omega_\tau=\left\{t_n=(n+\alpha/2)\tau,\ \alpha\in\{0,1\};\ n=0,1,...,N_t;\ N_t\tau\equiv\tau\right\}.$$

На временной сетке ω_τ заменим задачу (1)–(3) цепочкой «двумерная — одномерная задача» вида:

$$\frac{\partial c^{(1)}}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[u\frac{\partial c^{(1)}}{\partial x}+v\frac{\partial c^{(1)}}{\partial y}+\frac{\partial\left(uc^{(1)}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(vc^{(1)}\right)}{\partial y}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_h\frac{\partial c^{(1)}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_h\frac{\partial c^{(1)}}{\partial y}\right)+f^{(1)},\ (x,y,z)\in G, \qquad (4)$$

$$t_n<t\le t_n+0{,}5\tau,\ \ n=0,1,...,N_t-1,$$

$$c^{(1)}(x,y,z,0)=c_0(x,y,z),\ (x,y,z)\in G, \qquad (5)$$

$$c^{(1)}(x,y,z,t_n)=c^{(2)}(x,y,z,t_n),\ (x,y,z)\in\overline{G},\quad n=1,2,...,N_t-1, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial c^{(2)}}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[w\frac{\partial c^{(2)}}{\partial z}+\frac{\partial\left(wc^{(2)}\right)}{\partial z}\right]=\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_v\frac{\partial c^{(2)}}{\partial z}\right)+f^{(2)},\ (x,y,z)\in G, \qquad (7)$$

$$t_n+0{,}5\tau<t\le t_{n+1},\quad n=0,1,...,N_t-1,$$

$$c^{(2)}(x,y,z,t^n+0{,}5\tau)=c^{(1)}(x,y,z,t^n+0{,}5\tau),\ (x,y,z)\in\overline{G},\ n=0,1,2,...,N_t-1, \qquad (8)$$

дополненную граничными условиями первого рода вида (3), $f = f^{(1)} + f^{(2)}$. В отношении двумерной задачи для функции концентрации вещества c здесь использовался верхний индекс (1), а в отношении одномерной — (2). Функция источника f представима в виде $f = f^{(1)} + f^{(2)}$. В дальнейших рассуждениях используем черту вверху над функциями c, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ для обозначения их сеточных аналогов.

Разностные аналоги уравнений (4)–(6) примут вид:

$$\frac{\overline{c}^{n+1/2}-\overline{c}^{n}}{\tau}+\frac{1}{2}\left(u(x,y,z)\frac{\overline{c}^{n+1/2}(x+h_x,y,z)-\overline{c}^{n+1/2}(x-h_x,y,z)}{2h_x}+\right.$$

$$\left.+\frac{u(x+h_x,y,z)\overline{c}^{n+1/2}(x+h_x,y,z)-u(x-h_x,y,z)\overline{c}^{n+1/2}(x-h_x,y,z)}{2h_x}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(v(x,y,z)\frac{\overline{c}^{n+1/2}(x,y+h_y,z)-\overline{c}^{n+1/2}(x,y-h_y,z)}{2h_y}+\right.$$

$$\left.+\frac{v(x,y+h_y,z)\overline{c}^{n+1/2}(x,y+h_y,z)-v(x,y-h_y,z)\overline{c}^{n+1/2}(x,y-h_y,z)}{2h_y}\right)= \qquad (9)$$

$$=\frac{1}{h_x}\left(\mu_h(x+h_x,y,z)\frac{\bar{c}^{n+1/2}(x+h_x,y,z)-\bar{c}^{n+1/2}(x,y,z)}{h_x}-\mu_h(x,y,z)\frac{\bar{c}^{n+1/2}(x,y,z)-\bar{c}^{n+1/2}(x-h_x,y,z)}{h_x}\right)+$$

$$+\frac{1}{h_y}\left(\mu_h(x,y+h_y,z)\frac{\bar{c}^{n+1/2}(x,y+h_y,z)-\bar{c}^{n+1/2}(x,y,z)}{h_y}-\mu_h(x,y,z)\frac{\bar{c}^{n+1/2}(x,y,z)-\bar{c}^{n+1/2}(x,y-h_y,z)}{h_y}\right)+$$

$$+\bar{f}_1^{\,n},\ (x,y,z)\in\omega_h,\ n=0,1,\ldots,N_t-1,$$

$$t^n<t\le t^{n+1/2},\quad n=0,1,\ldots,N_t-1, \tag{10}$$

$$\bar{c}^1(x,y,z,0)=c_0(x,y,z),\ (x,y,z)\in\omega_h, \tag{11}$$

$$\bar{c}^n(x,y,z,t_n)=\bar{c}^{n+1/2}(x,y,z,t_n),\ (x,y,z)\in\bar{\omega}_h,\quad n=1,2,\ldots,N_t-1. \tag{12}$$

Разностные аналоги уравнений (7), (8) примут вид:

$$\frac{\bar{c}^{n+1}-\bar{c}^{n+1/2}}{\tau}+\frac{1}{2}\left(w(x,y,z)\frac{\bar{c}^{n+1}(x,y,z+h_z)-\bar{c}^{n+1}(x,y,z-h_z)}{2h_z}+\right. \tag{13}$$

$$\left.+\frac{w(x,y,z+h_z)\bar{c}^{n+1}(x,y,z+h_z)-w(x,y,z-h_z)\bar{c}^{n+1}(x,y,z-h_z)}{2h_z}\right)=$$

$$=\frac{1}{h_z}\left(\mu_v(x,y,z+h_z)\frac{\bar{c}^{n+1}(x,y,z+h_z)-\bar{c}^{n+1}(x,y,z)}{h_z}-\mu_v(x,y,z)\frac{\bar{c}^{n+1}(x,y,z)-\bar{c}^{n+1}(x,y,z-h_z)}{h_z}\right)+$$

$$+\bar{f}_2^{\,n+1/2},\ (x,y,z)\in\omega_h,$$

$$t_n+0{,}5\tau<t\le t_{n+1},\quad n=0,1,\ldots,N_t-1,$$

$$c^{n+1}(x,y,z,t_{n+1/2})=c^{n+1/2}(x,y,z,t_{n+1/2}),\ (x,y,z)\in\bar{\omega}_h,\ n=0,1,2,\ldots,N_t-1. \tag{14}$$

Численное решение двумерной задачи (4)–(6) проводится методом Зейделя, а одномерной задачи (13)–(14) — методом прогонки. Можно показать, что для задач с сеточным числом Пекле, не превосходящим единицу, метод Зейделя сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем 0,7–0,9 для реальных задач гидрофизики прибрежных систем. Также в этих условиях метод прогонки будет устойчив. На обосновании этих свойств в данной статье для краткости изложения мы не останавливаемся.

Результаты исследования. Программная реализация параллельного счета. В рамках данной работы построен параллельный алгоритм, реализующий трехмерную задачу диффузии-конвекции для уравнений (10)–(14) с использованием технологии MPI. При параллельной реализации применялись методы декомпозиции сеточных областей для вычислительно трудоемких задач диффузии-конвекции, учитывающие архитектуру и параметры вычислительной системы [13, 14]. Декомпозиция расчетной двумерной области выполнена по двум пространственным переменным x и y, также использовалась декомпозиция по одному пространственному направлению (одной вертикальной координате). Параллельный алгоритм решения двумерной задачи (10) представлен на рис. 1.

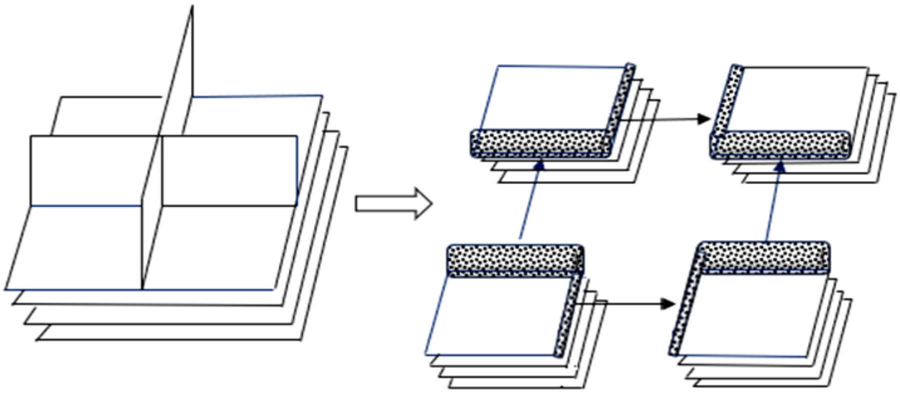

Рис. 1. Декомпозиция двумерной сеточной области и схема для расчета вектора решений

Решение модельной задачи. Продемонстрируем результаты работы параллельного алгоритма на примере модельной задачи для уравнения (1) с граничными условиями Дирихле. Входные данные задачи:

$$\vec{U}=(u,v,w)=(x,2y,3-3z),$$

$$c=k_1x(l_x-x)+k_2y(l_y-y)+k_3\left(1-\exp\frac{z}{l_z}\right)+k_4(t+0{,}1),$$

$$\mu_h \equiv \text{const}, \quad \mu_v \equiv k_5\left(1{,}1+\sin\frac{2\pi z}{l_z}\right),$$

$$k_1 = k_2 = 2x + l_x + 2y + l_y, \; k_3 = \text{const}, \; k_4 = \text{const}, \; k_5 = \text{const},$$

$$0 \le t \le 10, \; l_x = l_y = l_z = 10 \text{ м}.$$

Учитывая специфику прибрежных территорий, подбирались коэффициенты k_3, k_4 и k_5 порядка 1÷5. На рис. 2 представлена зависимость времени исполнения расчета от количества узлов расчётной сетки для случаев, когда использовались параллельный и последовательный алгоритм.

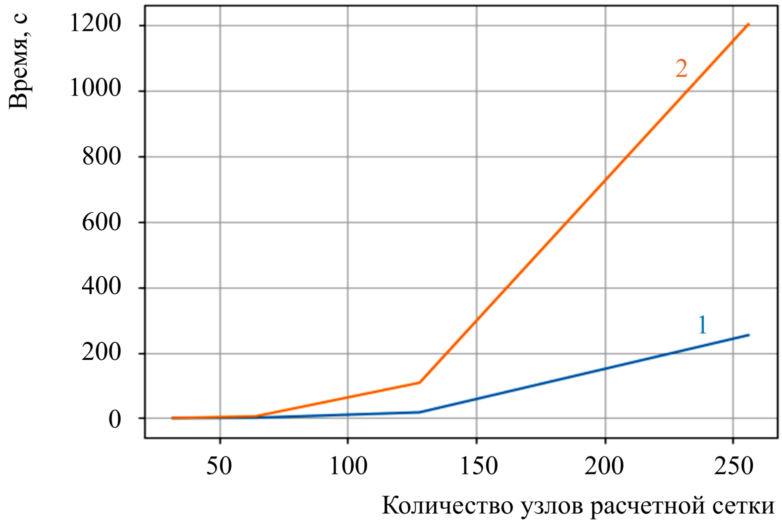

Рис. 2. Графики зависимости времени исполнения расчета от количества узлов расчётной сетки:
1 — для параллельного алгоритма, 2 — для последовательного алгоритма

Приведем сравнительный анализ времени исполнения расчета (таблица 1).

Таблица 1

Сравнение времени исполнения расчета в случае параллельного и последовательного алгоритмов

Количество узлов сетки	32×32	64×64	128×128	256×256
Время работы параллельного алгоритма, с	0,111	1,125	17,656	253,561
Время работы последовательного алгоритма, с	0,388	5,405	108,180	1203,670

Результаты демонстрируют сокращение времени расчётов для параллельного алгоритма более чем в 4 раза по сравнению с последовательным алгоритмом.

Обсуждение и заключения. Предложены алгоритмы параллельного и последовательного счёта для решения трехмерной задачи диффузии-конвекции. Применение параллельного алгоритма может ощутимо снизить время расчета (более чем в 4 раза), что является важным для случаев оперативного проведения риск-анализа и определения судьбы взвешенного вещества в море. Разработанное программное средство позволяет его практически использовать для решения конкретных гидрофизических задач, в том числе в качестве элемента программного комплекса [11].

Список литературы

1. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А., Сидорякина В.В., Проценко С.В. Комплекс объединенных моделей транспорта наносов и взвесей с учетом трехмерных гидродинамических процессов в прибрежной зоне. *Математическое моделирование*. 2020;32(2):3–23. https://doi.org/10.20948/mm-2020-02-01

2. Alekseenko E., Roux B., Sukhinov A., et. al. Nonlinear hydrodynamics in a mediterranean lagoon. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2017;57(6):978–994. https://doi.org/10.5194/npg-20-189-2013

3. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Бондаренко Ю.С. Оценка погрешности решения уравнения на основе схем с весами. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2011;8(121):6–13.

4. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Построение дискретной двумерной математической модели транспорта наносов. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2011;8(121):32–44.

5. Sidoryakina V.V. Efficient algorithms for the numerical solution of the coupled sediment and suspended matter transport problems in coastal systems. *Proceedings of the 21st International Workshop on Computer Science and Information Technologies (CSIT 2019). Series: Atlantis Highlights in Computer Sciences.* 2019;3:243–248. https://doi.org/10.2991/csit-19.2019.42

6. Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V. About correctness of the suspension transport and sedimentation model, taking into account bot-tom relief changes. *Computational Mathematics and Information Technologies Electronic Journal.* 2018;2(2):76–90. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2018-2-76-90

7. Сидорякина В.В., Сухинов А.И. Исследование корректности и численная реализация линеаризованной двумерной задачи транспорта наносов. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2017;57(6):985–1002. https://doi.org/10.7868/S0044466917060138

8. Сидорякина В.В., Сухинов А.И. Построение и исследование близости решений в L2 двух краевых задач для модели переноса многокомпонентных взвесей в прибрежных системах. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2023;63(10):1721–1732. https://doi.org/10.1134/S0965542523100111

9. Сухинов А.И. *Двумерные схемы расщепления и некоторые их приложения*. Москва: Макс ПРЕСС. Изд-во МГУ, 2005. 408 с.

10. Sukhinov A.I., Sukhinov A.A., Sidoryakina V.V. Uniqueness of solving the problem of transport and sedimentation of multicomponent suspensions in coastal systems structures. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conference Series* 2020;1479(1):012081. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012081

11. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Сидорякина В.В., Проценко С.В., Атаян А.М. Локально-двумерные схемы расщепления для параллельного решения трехмерной задачи транспорта взвешенного вещества. *Математическая физика и компьютерное моделирование*. 2021;24(2):38–53. https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2021.2.4

12. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Сидорякина В.В., Проценко Е.А. Экономичные явно-неявные схемы решения многомерных задач диффузии-конвекции. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2019;12(4):435–445. https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.4.37

13. Belotserkovskii O.M., Gushchin V.A., Shchennikov V.V. Decomposition method applied to the solution of problems of viscous incompressible fluid dynamics. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1975;15:197–207.

14. Самарский А.А., Николаев Е.С. *Методы решения сеточных уравнений*. Москва: Наука, 1978. 592 с.

References

1. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A., Sidorjakina V.V., Protsenko S.V. Complex of combined models of sediment and suspended matter transport considering three-dimensional hydrodynamic processes in the coastal zone. *Mathematical Modelling*. 2020;32(2):3–23. (in Russ.). https://doi.org/10.20948/mm-2020-02-01

2. Alekseenko E., Roux B., Sukhinov A., et al. Nonlinear hydrodynamics in a Mediterranean lagoon. Computational *Mathematics and Mathematical Physics.* 2017;57(6):978–994. (in Russ.). https://doi.org/10.5194/npg-20-189-2013

3. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Bondarenko Y.S. Error estimation of the solution based on weighted schemes. *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*. 2011;8(121):6–13. (in Russ.).

4. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A. Construction of a discrete two-dimensional mathematical model of sediment transport. *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*. 2011;8(121):32–44. (in Russ.).

5. Sidoryakina V.V. Efficient algorithms for the numerical solution of the coupled sediment and suspended matter transport problems in coastal systems. *Proceedings of the 21st International Workshop on Computer Science and Information Technologies (CSIT 2019). Series: Atlantis Highlights in Computer Sciences*. 2019;3:243–248. https://doi.org/10.2991/csit-19.2019.42

6. Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V. About correctness of the suspension transport and sedimentation model, taking into account bottom relief changes. *Computational Mathematics and Information Technologies Electronic Journal*. 2018;2(2):76–90. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2018-2-76-90

7. Sidorjakina V.V., Sukhinov A.I. Investigation of correctness and numerical implementation of the linearized two-dimensional problem of sediment transport. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2017;57(6):985–1002. (in Russ.). https://doi.org/10.7868/S0044466917060138

8. Sidorjakina V.V., Sukhinov A.I. Construction and investigation of the proximity of solutions in L2 of two boundary problems for the model of transport of multicomponent suspensions in coastal systems. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2023;63(10):1721–1732. (in Russ.). https://doi.org/10.1134/S0965542523100111

9. Sukhinov A.I. Two-dimensional splitting schemes and some of their applications. Moscow: Max PRESS. Publishing house of MSU, 2005. 408 p. (in Russ.).

10. Sukhinov A.I., Sukhinov A.A., Sidoryakina V.V. Uniqueness of solving the problem of transport and sedimentation of multicomponent suspensions in coastal systems structures. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conference Series.* 2020;1479(1):012081. (in Russ.). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012081

11. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Sidorjakina V.V., Protsenko S.V., Atayan A.M. Locally two-dimensional splitting schemes for parallel solution of a three-dimensional transport problem of suspended matter. *Mathematical Physics and Computer Simulation.* 2021;24(2):38–53. (in Russ.). https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2021.2.4

12. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Sidorjakina V.V., Protsenko E.A. Economical implicit-explicit schemes for solving multidimensional diffusion-convection problems. Computational Continuum Mechanics. 2019;12(4):435–445. (in Russ.). https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.4.37

13. Belotserkovskii O.M., Gushchin V.A., Shchennikov V.V. Decomposition method applied to the solution of problems of viscous incompressible fluid dynamics. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1975;15:197–207.

14. Samarskiy A.A., Nikolayev E.S. *Methods for solving grid equations*. Moscow: Nauka, 1978. 592 p. (in Russ.).

Поступила в редакцию 11.03.2024
Поступила после рецензирования 18.03.2024
Принята к публикации 20.03.2024

Об авторах:

Сидорякина Валентина Владимировна, доцент кафедры математики и информатики, Донской государственный технический университет (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), кандидат физико-математических наук, MathSciNet, eLibrary.ru, ORCID, ResearcherID, ScopusID, cvv9@mail.ru

Соломаха Денис Анатольевич, студент 4 курса кафедры математики и информатики, Донской государственный технический университет (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), eLibrary.ru, solomakha.05@yandex.ru

Заявленный вклад соавторов:
все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Конфликт интересов
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Received 11.03.2024
Revised 18.03.2024
Accepted 20.03.2024

About the Authors:

Valentina V. Sidoryakina, Associate Professor of the Department of Mathematics and Computer Science, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), Candidate of Physical and Mathematical Sciences, MathSciNet, eLibrary.ru, ORCID, ResearcherID, ScopusID, cvv9@mail.ru

Denis A. Solomakha, 4th year student of the Department of Mathematics and Computer Science, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), eLibrary.ru, solomakha.05@yandex.ru

Claimed contributorship:
all authors have made an equivalent contribution to the preparation of the publication.

Conflict of interest statement
the authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.