ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
COMPUTATIONAL MATHEMATICS

Check for updates

УДК 519.642.2
https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-1-43-54

Научная статья

Разностный метод решения интегро-дифференциального уравнения параболического типа в многомерной области с неоднородными краевыми условиями первого рода

З.В. Бештокова
Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик, Российская Федерация
✉zarabaeva@yandex.ru

Аннотация
Введение. Изучается многомерное (по пространственным переменным) интегро-дифференциальное уравнение параболического типа с неоднородными граничными условиями первого рода. Построенная локально-одномерная разностная схема может быть использована при решении прикладных задач, приводящих к многомерным интегро-дифференциальным уравнениям параболического типа, например, при математическом моделировании облачных процессов, при рассмотрении проблемы активного воздействия на конвективные облака с целью предотвращения града и искусственного увеличения осадков, а также при описании функции распределения по массам капель за счет микрофизических процессов конденсации, коагуляции, дробления и замерзания капель в конвективных облаках.
Материалы и методы. В данной работе для приближенного решения начально-краевой задачи построена локально-одномерная схема А.А. Самарского с порядком аппроксимации $O(h^2+\tau)$. Основной метод исследования — метод энергетических неравенств.
Результаты исследования. Получены априорные оценки в разностной трактовке, откуда следуют единственность, устойчивость, а также сходимость решения локально-одномерной разностной схемы к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы.
Обсуждение и заключения. Результаты исследования могут быть использованы для дальнейшей разработки теории краевых задач для параболических уравнений с переменными коэффициентами, а также могут найти применение в области теории разностных схем, в области вычислительной математики и численного моделирования.

Ключевые слова: многомерная задача, уравнение диффузии, параболическое уравнение, условие первого рода, разностные схемы, локально-одномерная схема, априорная оценка, устойчивость, сходимость

Для цитирования. Бештокова З.В. Разностный метод решения интегро-дифференциального уравнения параболического типа в многомерной области с неоднородными краевыми условиями первого рода. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(1):43–54. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-1-43-54

Original article

Finite Difference Method for Solving Parabolic-Type Integro-Differential Equations in Multidimensional Domain with Nonhomogeneous First-Order Boundary Conditions

Zaryana V. Beshtokova
Institute of Applied Mathematics and Automation, KBNC RAS, Nalchik, Russian Federation
✉ zarabaeva@yandex.ru

Abstract
Introduction. We investigate a multidimensional (in terms of spatial variables) parabolic-type integro-differential equation with nonhomogeneous first-order boundary conditions. The locally one-dimensional finite difference scheme developed herein can be applied to solve various applied problems leading to multidimensional parabolic-type integro-differential

equations. Examples include mathematical modelling of cloud processes, addressing the issue of active intervention in convective clouds to prevent hail and artificially enhance precipitation, as well as describing the droplet mass distribution function due to microphysical processes such as condensation, coagulation, fragmentation, and freezing of droplets in convective clouds.
Materials and Methods. In this study, an approximate solution to the initial-boundary value problem is constructed using the locally one-dimensional scheme of A.A. Samarsky with a specified order of approximation $O(h^2+\tau)$. The primary research method employed is the method of energy inequalities.
Results. A priori estimates have been obtained in the discrete interpretation, from which uniqueness, stability, and convergence of the solution of the locally one-dimensional difference scheme to the solution of the original differential problem follow, with a convergence rate equal to the order of approximation of the difference scheme.
Discussion and Conclusions. The research findings can be utilized for further development of boundary value problem theory for parabolic equations with variable coefficients. Additionally, they may find applications in the fields of difference scheme theory, computational mathematics, and numerical modelling.

Keywords: multidimensional problem, diffusion equation, parabolic equation, first-order condition, difference schemes, locally one-dimensional scheme, a priori estimate, stability, convergence

For citation. Beshtokova Z.V. Finite Difference Method for Solving Parabolic-Type In-tegro-Differential Equations in Multidimensional Domain with Nonhomogeneous First-Order Boundary Conditions. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(1):43–54. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-1-43-54

Введение. Большой интерес с точки зрения физических приложений представляют интегро-дифференциальные уравнения, в которых неизвестная функция входит в дифференциальное выражение и, вместе с тем, фигурирует под знаком интеграла. Тематике интегро-дифференцнальных уравнений посвящена обширная библиография. Подробный обзор достижений в этой области до 1962 года представлен М.М. Вайнбергом в работе [1]. На необходимость рассмотрения операторных уравнений Вольтерра впервые указал академик М.М. Лаврентьев в своем докладе [2] на Международном конгрессе математиков в Ницце в 1970 году.

Изучению различных краевых задач для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений посвящены работы [3–4], интегро-дифференциальных уравнений соболевского типа — работы [5–7]. В работах [8–10] изучены математические модели, учитывающие память в диффузии, возникающие в моделях вязкоупругих сил в неньютоновских жидкостях и являющиеся результатом модифицированного закона Фурье, применяемого к анизотропным неоднородным средам. В [11] исследуются диффузионные модели, в которых интегральные члены присутствуют в граничном потоке.

Целью настоящей работы является построение и исследование локально-одномерной разностной схемы А.А. Самарского (ЛОС) порядка аппроксимации $O(h^2+\tau)$ для приближенного решения краевой задачи с неоднородными граничными условиями первого рода для интегро-дифференциального многомерного параболического уравнения.

Научной новизной работы является разработка ЛОС и получение на основании метода энергетических неравенств априорной оценки в разностной форме для решения ЛОС с неоднородными граничными условиями первого рода, откуда следуют единственность решения, непрерывная и равномерная зависимость решения ЛОС от входных данных, а также сходимость решения ЛОС к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы.

Методам расщепления многомерных задач на одномерные посвящены работы J. Douglas, D.W. Peaceman, H.H. Rachford [12–13], Н.Н. Яненко [14], А.А. Самарского [15], Г.И. Марчука [16], Е.Г. Дьяконова [17] и др.

Численным методам решения локальных и нелокальных краевых задач для многомерных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа на основе различных методов расщепления посвящены работы автора [18–20].

Материалы и методы

Постановка задачи. В замкнутой области $\overline{Q}_T=\overline{G}\times[0,T]$, основанием которой является p-мерный куб $\overline{G}=\{x=(x_1,x_2,...,x_p):0\le x_\alpha\le l,\ \ \alpha=1,2,...,p\}$ с границей Γ, $\overline{G}=G\cup\Gamma$, рассматривается задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\int_0^t \rho_1(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau=Lu+f(x,t),\quad (x,t)\in Q_T, \tag{1}$$

$$u\big|_\Gamma=\mu(x,t),\quad 0\le t\le T, \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{G}, \tag{3}$$

где

$$Lu=\sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u,\ \ L_\alpha u=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)-q_\alpha(x,t)u-\int_0^l \rho_{2,\alpha}(\xi,t)u(\xi,t)d\xi_\alpha,$$

$$0<c_0\le k_\alpha(x,t)\le c_1,\quad \left|k_{\alpha,x_\alpha}(x,t)\right|,\ \left|\rho_1(x,t,\tau)\right|,\ \left|\rho_{2,\alpha}(x,t)\right|,\left|q_\alpha(x,t)\right|\le c_2,$$

$$u(x,t)\in C^{4,2}\left(\overline{Q_T}\right),\ k_\alpha(x,t)\in C^{3,1}\left(\overline{Q_T}\right),\ \rho_1(x,t,\tau),\ \rho_{2,\alpha}(x,t),\ q_\alpha(x,t),\ f(x,t)\in C^{2,1}\left(\overline{Q_T}\right),\ 0\le\tau\le t, \tag{4}$$

$\mu(x,t)$, $u_0(x)$ — непрерывные функции; $\alpha = 1,2,...,p$, c_0, c_1, $c_2 = \mathrm{const} > 0$, $C^{m,n}$ — класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными порядка m по x и n по t, $Q_T = G\times(0,T]$.

Присутствие в исследуемом дифференциальном уравнении интеграла по времени связано с необходимостью учитывать зависимость мгновенных значений характеристик описываемого объекта от их соответствующих предыдущих значений, то есть влияние на текущее состояние системы ее предыстории. В современной литературе подобные технические и природные системы называют системами с последействием, наследственностью или динамической памятью. Присутствие в уравнении нелокального источника в интегральной форме из физических соображений совершенно естественно и возникает при математическом моделировании в тех случаях, когда имеются источники (или стоки в зависимости от знака $\rho_{2,\alpha}(\xi,t)$) и невозможно получить информацию о происходящем процессе с помощью непосредственных измерений или же когда возможно измерение лишь некоторых усредненных (интегральных) характеристик искомой величины.

Для приближенного решения начально-краевой задачи построена локально-одномерная схема А.А. Самарского с порядком аппроксимации $O(h^2+\tau)$. Основной метод исследования — метод энергетических неравенств. Сформулированы и доказаны две теоремы: теорема об устойчивости и теорема о сходимости.

Результаты исследования

1. Построение локально-одномерной схемы (ЛОС). По каждому направлению O_{x_α} введем равномерную сетку с шагом $h = \dfrac{l}{N}$ (кубическая сетка с шагом h):

$$\overline{\omega}_h = \overline{\omega}^p_{h,\alpha}, \quad \overline{\omega}_{h,\alpha} = \left\{x^{(i_\alpha)}_\alpha = i_\alpha h : i_\alpha = 1,...,N-1, \quad x^{(0)}_\alpha = 0, \quad x^{(N)}_\alpha = N\frac{h}{2}\right\},$$

$$\omega_h = \omega^p_{h,\alpha}, \quad \omega_{h,\alpha} = \left\{x^{(i_\alpha)}_\alpha = i_\alpha h : i_\alpha = 1,...,N-1\right\}, \quad \alpha = 1,2,...,p.$$

На отрезке $[0,T]$ также введём равномерную сетку $\overline{\omega}_\tau = \left\{t_j = j\tau,\ j = 0,1,...,j_0\right\}$ с шагом $\tau = T/j_0$. Каждый из отрезков $[t_j, t_{j+1}]$ разобьем на p частей, введя точки $t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \tau\dfrac{\alpha}{p}$, $\alpha = 1,2,...,p-1$, и обозначим через $\Delta_\alpha = \left(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}, t_{j+\frac{\alpha}{p}}\right]$ полуинтервал, где $\alpha = 1,2,..., p$.

Уравнение (1) перепишем в виде

$$\sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u = 0, \quad L_\alpha u = \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t} - \overline{L}_\alpha u - f_\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f,$$

где $f_\alpha(x,t)$, $(\alpha = 1,2,..., p)$ произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и $f(x,t)$ удовлетворяющие условию нормировки $\sum\limits_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f$.

На каждом полуинтервале Δ_α, $(\alpha = 1,2,..., p)$, будем последовательно решать задачи

$$L_\alpha \vartheta_{(\alpha)} = \frac{1}{p}\frac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial t} - \overline{L}_\alpha \vartheta_{(\alpha)} - f_\alpha, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_\alpha, \quad \alpha = 1,2,...,p, \tag{5}$$

$$\begin{cases} \vartheta_\alpha = \mu_{-\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ \vartheta_\alpha = \mu_{+\alpha}, & x_\alpha = l, \end{cases}$$

полагая при этом [21], что

$$\vartheta_{(1)}(x,0) = u_0(x), \quad \vartheta^j_{(1)}(x,t_j) = \vartheta^{j-1}_{(p)}(x,t_j), \quad j = 1,2,...,j_0,$$

$$\vartheta^j_{(\alpha)}(x,t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}) = \vartheta^j_{(\alpha-1)}(x,t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}), \quad \alpha = 2,....,p, \quad j = 1,2,...,j_0-1,$$

где $\overline{L}_\alpha \vartheta_{(\alpha)} = \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\dfrac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha}\right) - d_\alpha \vartheta_{(\alpha)} - \displaystyle\int_0^l \rho_{2,\alpha}(\xi,t)\,\vartheta_{(\alpha)}(\xi,t)\,d\xi_\alpha - \frac{1}{p}\int_0^t \rho_1(x,t,\tau)\,\vartheta_{(\alpha)}(x,\tau,t)\,d\tau,$

$\mu_{-\alpha} = \mu(x',0,t)$, $\mu_{+\alpha} = \mu(x',l,t)$ — непрерывные функции.

Аппроксимируем каждое уравнение (5) номера α неявной схемой на полуинтервале Δ_α, тогда получим цепочку из p одномерных разностных схем:

$$\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad x_\alpha \in \omega_h, \quad \alpha = 1,2,...,p, \tag{6}$$

$$\begin{cases} y^{j+\frac{\alpha}{p}} = \mu_{-\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ y^{j+\frac{\alpha}{p}} = \mu_{+\alpha}, & x_\alpha = l, \end{cases} \tag{7}$$

$$y(x,0)=u_0(x), \tag{8}$$

где $\Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} = \left(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\right)_{x_\alpha} - d_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} - \sum_{i_\alpha=0}^{N} p_{2,\alpha} y_{i_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} \hbar - \frac{1}{p}\sum_{i_\alpha=0}^{N} p_1(x_1,x_2,....,x_p;t_j,t_{j'}) y(x,t_{j'+\frac{\alpha}{p}})\tau,$

$$a_\alpha = k_\alpha(x^{(-0,5\alpha)},\bar{t}),\quad x^{(-0,5\alpha)}=(x_1,...,x_{\alpha-1},x_\alpha-0,5h_\alpha,x_{\alpha+1},....,x_p),\qquad \hbar=\begin{cases} h,\ i_\alpha=\overline{1,N-1}\\ \frac{h}{2},i_\alpha=0,N,\end{cases}$$

$$d_\alpha=q_\alpha(x,\bar{t}),\quad \varphi_\alpha=f_\alpha(x,\bar{t}),\quad p_1(x,t,\bar{t})=\rho_1(x,t,\bar{t}),\quad p_{2,\alpha}=\rho_{2,\alpha}(x,\bar{t}),\quad \bar{t}=t_{j+\frac{1}{2}}.$$

2. Погрешность аппроксимации ЛОС. Подставляя $y^{j+\frac{\alpha}{p}}=z^{j+\frac{\alpha}{p}}+u^{j+\frac{\alpha}{p}}$ в схему (6)–(8), получим задачу для погрешности $z^{j+\frac{\alpha}{p}}$:

$$\frac{z^{j+\frac{\alpha}{p}}-z^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}=\Lambda_\alpha z^{j+\frac{\alpha}{p}}+\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \tag{9}$$

$$z^{j+\frac{\alpha}{p}}=0\quad \text{при}\quad x\in\gamma_{h,\alpha},\quad z(x,0)=0,$$

где $u^{j+\frac{\alpha}{p}}$ — решение исходной задачи (1)–(3), $y^{j+\frac{\alpha}{p}}$ — решение разностной задачи (6)–(8),

$$\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}=\Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}}+\varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}-\frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}}-u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}.$$

Обозначив через $\overset{0}{\psi}_\alpha=\left(\bar{L}_\alpha u+f_\alpha-\frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1/2}$ и замечая, что $\sum_{\alpha=1}^{p}\overset{0}{\psi}_\alpha=0,$ если $\sum_{\alpha=1}^{p}f_\alpha=f,$ представим погрешность в виде суммы $\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}=\overset{0}{\psi}_\alpha+\psi_\alpha^*$:

$$\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}=\Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}}+\varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}-\frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}}-u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}+\overset{0}{\psi}_\alpha-\overset{0}{\psi}_\alpha=\left(\Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}}-\bar{L}_\alpha u^{j+\frac{1}{2}}\right)+$$

$$+\left(\varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}-f_\alpha^{j+\frac{1}{2}}\right)-\left(\frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}}-u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}-\frac{1}{p}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+\frac{1}{2}}\right)+\overset{0}{\psi}_\alpha=\overset{0}{\psi}_\alpha+\psi_\alpha^*.$$

Очевидно,что $\psi_\alpha^*=O(h^2+\tau),\ \overset{0}{\psi}_\alpha=O(1),\ \sum_{\alpha=1}^{p}\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}=\sum_{\alpha=1}^{p}\overset{0}{\psi}_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{p}\psi_\alpha^*=O(h^2+\tau).$

3. Устойчивость ЛОС. Для устойчивости ЛОС справедлива следующая

Теорема 1. Пусть выполнены условия гладкости и ограниченности (4), тогда локально-одномерная схема (6)–(8) устойчива по правой части и начальным данным, так что для решения схемы (6)–(8) при $\tau\le\tau_0$ справедлива оценка

$$|\rho_p y^{j+1}|^2_{L_2(\omega_h)}+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(||[\rho_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\omega_h)}+|[y^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}+\right)\le \tag{10}$$

$$\le M\left(\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}|[\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}+\frac{\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}(0,x',t_{j'})+\mu^2_{+\alpha}(l,x',t_{j'})\right)\overline{H}}{\hbar}+|[y^0]|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}\right).$$

где $M=\text{const}>0$ не зависит от h и τ.

Далее через M_i, $i=1,2,...$ обозначаются положительные постоянные, зависящие только от входных данных задачи (1)–(3).

Доказательство. Исследование проведем с помощью метода энергетических неравенств, для чего введём скалярные произведения и нормы в следующем виде:

$$\frac{1}{p}y_{\bar{t}}^{(\alpha)}=\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}}-y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau},\quad (u,v)_\alpha=\sum_{i_\alpha=1}^{N-1}u_{i_\alpha}v_{i_\alpha}h,\quad \|y^{(\alpha)}|^2_{L_2(\alpha)}=\sum_{i_\alpha=1}^{N-1}y^2_{i_\alpha}h,$$

$$(u,v)=\sum_{x\in\omega_h} uvH,\quad H=h^p,\quad |\,y^{(\alpha)}\,|^2_{L_2(\omega_h)}=\sum_{i_\beta\ne i_\alpha}|\,y^{(\alpha)}\,|^2_{L_2(\alpha)}\,H/h,\quad [u,v]_\alpha=\sum_{i_\alpha=0}^{N} u_{i_\alpha}v_{i_\alpha}\hbar,\ \ |[y^{(\alpha)}]|^2_{L_2(\alpha)}=\sum_{i_\alpha=0}^{N} y^2_{i_\alpha}\hbar,$$

$$[u,v]=\sum_{x\in\overline{\omega}_h} uv\overline{H},\quad \overline{H}=\hbar^p,\quad |\,[y^{(\alpha)}]\,|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}=\sum_{i_\beta\ne i_\alpha}|\,[y^{(\alpha)}]\,|^2_{L_2(\alpha)}\,\overline{H}/\hbar.$$

Умножив уравнение (6) на $y^{(\alpha)}h$, где $y^{(\alpha)}=y^{j+\frac{\alpha}{p}}$ и просуммировав по s_α от η_α до ξ_α, получим [22]:

$$\frac{1}{p}\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} y^{(\alpha)}_{\bar t,s_\alpha}y^{(\alpha)}_{s_\alpha}h=\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\Lambda_\alpha y^{(\alpha)}_{s_\alpha}y^{(\alpha)}_{s_\alpha}h+\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\varphi_{(\alpha),s_\alpha}y^{(\alpha)}_{s_\alpha}h,\quad 0\le\eta_\alpha\le\xi_\alpha\le N. \tag{11}$$

Преобразуем каждое слагаемое тождества (11):

$$\frac{1}{p}\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} y^{(\alpha)}_{\bar t,s_\alpha}y^{(\alpha)}_{s_\alpha}h=\frac{1}{2p}\left(\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\left(y^{(\alpha)}_{s_\alpha}\right)^2h\right)_{\bar t}+\frac{\tau}{2p}\left(\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\left(y^{(\alpha)}_{\bar t,s_\alpha}\right)^2h\right), \tag{12}$$

$$\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\Lambda_\alpha y^{(\alpha)}_{s_\alpha}y^{(\alpha)}_{s_\alpha}h=\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}(a_\alpha y_{\bar x_\alpha,s_\alpha})_{x_\alpha}y^{(\alpha)}_{s_\alpha}h-\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}d_\alpha\left(y^{(\alpha)}_{s_\alpha}\right)^2h-\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\left(y^{(\alpha)}_{s_\alpha}\sum_{i_\alpha=0}^{N}p_{2,\alpha,i_\alpha}y_{i_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\hbar\right)h- \tag{13}$$

$$-\frac{1}{p}\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\left(y^{(\alpha)}_{s_\alpha}\sum_{j'=0}^{j}p_1\left(x,t_j,t_{j'}\right)y\left(x,t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right)\tau\right)h=-\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha+1}a_{\alpha,s_\alpha}\left(y_{\bar x_\alpha,s_\alpha}\right)^2h+a_{\alpha,\xi_\alpha+1}y^{(\alpha)}_{\bar x_\alpha,\xi_\alpha+1}y^{(\alpha)}_{\xi_\alpha+1}-a_{\alpha,\eta_\alpha}y^{(\alpha)}_{\bar x_\alpha,\eta_\alpha}y^{(\alpha)}_{\eta_\alpha-1}-$$

$$-\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}d_{\alpha,s_\alpha}\left(y^{(\alpha)}_{s_\alpha}\right)^2h-\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\left(y^{(\alpha)}_{s_\alpha}\sum_{i_\alpha=0}^{N}p_{2,\alpha,i_\alpha}y_{i_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\hbar\right)h-\frac{1}{p}\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\left(y^{(\alpha)}_{s_\alpha}\sum_{j'=0}^{j}p_1\left(x,t_j,t_{j'}\right)y\left(x,t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right)\tau\right)h,$$

$$\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\varphi_{(\alpha),s_\alpha}y^{(\alpha)}_{s_\alpha}h\le\frac{1}{2}\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\varphi^2_{(\alpha),s_\alpha}h+\frac{1}{2}\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\left(y^{(\alpha)}_{s_\alpha}\right)^2h. \tag{14}$$

Преобразуем отдельно выражение $a_{\alpha,\xi_\alpha+1}y^{(\alpha)}_{\bar x_\alpha,\xi_\alpha+1}y^{(\alpha)}_{\xi_\alpha+1}-a_{\alpha,\eta_\alpha}y^{(\alpha)}_{\bar x_\alpha,\eta_\alpha}y^{(\alpha)}_{\eta_\alpha-1}$, тогда с учетом $(y^2)_{(\bar x_\alpha)}=2y_{(\bar x_\alpha)}y^{(\alpha)}-hy^2_{(\bar x_\alpha)}$ получим

$$a_{\alpha,\xi_\alpha+1}y^{(\alpha)}_{\bar x_\alpha,\xi_\alpha+1}y^{(\alpha)}_{\xi_\alpha+1}-a_{\alpha,\eta_\alpha}y^{(\alpha)}_{\bar x_\alpha,\eta_\alpha}y^{(\alpha)}_{\eta_\alpha-1}=\frac{1}{2}\left(a_\alpha y^2\right)_{\bar x_\alpha,\xi_\alpha+1}-\frac{1}{2}\left(a_\alpha\right)_{\bar x_\alpha,\xi_\alpha+1}y^2_{\xi_\alpha}+ \tag{15}$$

$$+\frac{1}{2}a_{\xi_\alpha+1}y^2_{\bar x_\alpha,\xi_\alpha+1}h-\frac{1}{2}\left(a_\alpha y^2\right)_{\bar x_\alpha,\eta_\alpha}+\frac{1}{2}\left(a_\alpha\right)_{\bar x_\alpha,\eta_\alpha}y^2_{\eta_\alpha-1}+\frac{1}{2}a_{\eta_\alpha}y^2_{\bar x_\alpha,\eta_\alpha}h.$$

Учитывая преобразования (12)–(15), из (11) находим

$$\frac{1}{2p}\left(\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\left(y^{(\alpha)}_{s_\alpha}\right)^2h\right)_{\bar t}+\frac{\tau}{2p}\left(\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\left(y^{(\alpha)}_{\bar t,s_\alpha}\right)^2h\right)+\frac{1}{2}\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha-1}^{\xi_\alpha}a_{\alpha,s_\alpha}\left(y_{\bar x_\alpha,s_\alpha}\right)^2h\le \tag{16}$$

$$\le\frac{1}{2}\left(a_\alpha y^2\right)_{\bar x_\alpha,\xi_\alpha+1}-\frac{1}{2}\left(a_\alpha\right)_{\bar x_\alpha,\xi_\alpha+1}y^2_{\xi_\alpha}+\frac{1}{2}\left(a_\alpha\right)_{\bar x_\alpha,\eta_\alpha}y^2_{\eta_\alpha-1}-\frac{1}{2}\left(a_\alpha y^2\right)_{\bar x_\alpha,\eta_\alpha}-$$

$$-\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\left(y^{(\alpha)}_{s_\alpha}\sum_{i_\alpha=0}^{N}p_{2,\alpha,i_\alpha}y_{i_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\hbar\right)h-\frac{1}{p}\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\left(y^{(\alpha)}_{s_\alpha}\sum_{j'=0}^{j}p_1\left(x,t_j,t_{j'}\right)y(x,t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\,\tau\right)h-$$

$$-\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}d_{\alpha,s_\alpha}\left(y^{(\alpha)}_{s_\alpha}\right)^2h+\frac{1}{2}\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\varphi^2_{(\alpha),s_\alpha}h+\frac{1}{2}\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\left(y^{(\alpha)}_{s_\alpha}\right)^2h.$$

Умножим теперь (16) на h и просуммируем по ξ_α от η_α до N, затем полученное неравенство умножим на h и просуммируем по η_α от 0 до N. Тогда получим

$$\frac{1}{2p}\left(\sum_{\eta_\alpha=0}^{N}h\sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^{N}h\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\left(y^{(\alpha)}_{s_\alpha}\right)^2h\right)_{\bar t}+\frac{1}{2}\sum_{\eta_\alpha=0}^{N}h\sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^{N}h\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha-1}^{\xi_\alpha}a_{\alpha,s_\alpha}\left(y_{\bar x_\alpha,s_\alpha}\right)^2h\le \tag{17}$$

$$\le\frac{1}{2}\sum_{\eta_\alpha=0}^{N}h\sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^{N}\left(a_\alpha y^2\right)_{\bar x_\alpha,\xi_\alpha+1}h-\frac{1}{2}\sum_{\eta_\alpha=0}^{N}h\sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^{N}\left(a_\alpha\right)_{\bar x_\alpha,\xi_\alpha+1}y^2_{\xi_\alpha}h+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\eta_\alpha=0}^{N}h\sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^{N}\left(a_\alpha\right)_{\bar x_\alpha,\eta_\alpha}y^2_{\eta_\alpha-1}h-\frac{1}{2}\sum_{\eta_\alpha=0}^{N}h\sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^{N}\left(a_\alpha y^2\right)_{\bar x_\alpha,\eta_\alpha}h-\frac{1}{2}\sum_{\eta_\alpha=0}^{N}h\sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^{N}h\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\left(y^{(\alpha)}_{s_\alpha}\sum_{i_\alpha=0}^{N}p_{2,\alpha,i_\alpha}y_{i_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\hbar\right)h-$$

$$-\frac{1}{p}\sum_{\eta_\alpha=0}^{N}h\sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^{N}h\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\left(y_{s_\alpha}^{(\alpha)}\sum_{j'=0}^{j}p_1\left(x,t_j,t_{j'}\right)y(x,t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\tau\right)h\;+\;\frac{1}{2}\sum_{\eta_\alpha=0}^{N}h\sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^{N}h\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\varphi^2_{(\alpha),s_\alpha}h+M_1\sum_{\eta_\alpha=0}^{N}h\sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^{N}h\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\left(y_{s_\alpha}^{(\alpha)}\right)^2h.$$

Преобразуем сумму $\sum_{\eta_\alpha=0}^{N}h\sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^{N}h\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\varphi^2_{(\alpha),s_\alpha}h$ следующим образом:

$$\sum_{\eta_\alpha=0}^{N}h\sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^{N}h\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha}\varphi^2_{(\alpha),s_\alpha}h=\sum_{\eta_\alpha=0}^{N}h\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{N}\varphi^2_{(\alpha),s_\alpha}h\sum_{\xi_\alpha=s_\alpha}^{N}h=$$

$$=\sum_{\eta_\alpha=0}^{N}h\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{N}\left(l-x_\alpha\right)\varphi^2_{(\alpha),s_\alpha}h=\sum_{s_\alpha=0}^{N}\left(l-x_\alpha\right)\varphi^2_{(\alpha),s_\alpha}h\sum_{\eta_\alpha=0}^{s_\alpha}h=\sum_{s_\alpha=0}^{N}x_\alpha\left(l-x_\alpha\right)\varphi^2_{(\alpha),s_\alpha}h=\sum_{s_\alpha=1}^{N-1}x_\alpha\left(l-x_\alpha\right)\varphi^2_{(\alpha),s_\alpha}h.$$

Учитывая последнее, из (17) находим:

$$\frac{1}{2p}\left(\sum_{s_\alpha=1}^{N-1}x_\alpha\left(l-x_\alpha\right)\left(y_{s_\alpha}^{(\alpha)}\right)^2h\right)_{\bar t}+\frac{1}{2}\sum_{s_\alpha=1}^{N-1}x_\alpha\left(l-x_\alpha\right)a_{\alpha,s_\alpha}\left(y_{\bar x_\alpha,s_\alpha}\right)^2h\le \tag{18}$$

$$\le\frac{1}{2}\sum_{s_\alpha=0}^{N-1}x_\alpha\left(a_\alpha y^2\right)_{\bar x_\alpha,s_\alpha+1}h-\frac{1}{2}\sum_{s_\alpha=0}^{N-1}x_\alpha\left(a_\alpha\right)_{\bar x_\alpha,s_\alpha+1}y^2_{s_\alpha}h-\frac{1}{2}\sum_{s_\alpha=1}^{N}\left(l-x_\alpha\right)\left(a_\alpha y^2\right)_{\bar x_\alpha,s_\alpha}h+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{s_\alpha=1}^{N}\left(l-x_\alpha\right)\left(a_\alpha\right)_{\bar x_\alpha,s_\alpha}y^2_{s_\alpha-1}h-\frac{1}{2}\sum_{s_\alpha=1}^{N-1}x_\alpha\left(l-x_\alpha\right)\left(y_{s_\alpha}^{(\alpha)}\sum_{i_\alpha=0}^{N}p_{2,\alpha,i_\alpha}y_{i_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\hbar\right)h-$$

$$-\frac{1}{p}\sum_{s_\alpha=1}^{N-1}x_\alpha\left(l-x_\alpha\right)\left(y_{s_\alpha}^{(\alpha)}\sum_{j'=0}^{j}p_1\left(x,t_j,t_{j'}\right)y\left(x,t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right)\tau\right)h+\frac{1}{2}\sum_{s_\alpha=1}^{N-1}x_\alpha\left(l-x_\alpha\right)\varphi^2_{(\alpha),s_\alpha}h+M_1\sum_{s_\alpha=1}^{N-1}x_\alpha\left(l-x_\alpha\right)\left(y_{s_\alpha}^{(\alpha)}\right)^2h.$$

Преобразуем первое, второе, третье и четвертое слагаемые правой части (18):

$$\frac{1}{2}\sum_{s_\alpha=0}^{N-1}x_\alpha\left(a_\alpha y^2\right)_{\bar x_\alpha,s_\alpha+1}h-\frac{1}{2}\sum_{s_\alpha=0}^{N-1}x_\alpha\left(a_\alpha\right)_{\bar x_\alpha,s_\alpha+1}y^2_{s_\alpha}h-\frac{1}{2}\sum_{s_\alpha=1}^{N}\left(l-x_\alpha\right)\left(a_\alpha y^2\right)_{\bar x_\alpha,s_\alpha}h+ \tag{19}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{s_\alpha=1}^{N}\left(l-x_\alpha\right)\left(a_\alpha\right)_{\bar x_\alpha,s_\alpha}y^2_{s_\alpha-1}h=\frac{1}{2}\sum_{s_\alpha=1}^{N}\left(2x_\alpha-h-l\right)\left(a_\alpha y^2\right)_{\bar x_\alpha,s_\alpha}h-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{s_\alpha=0}^{N-1}(2x_\alpha+h-l)\left(a_\alpha\right)_{\bar x_\alpha,s_\alpha+1}y^2_{s_\alpha}h=\frac{1}{2}\sum_{s_\alpha=1}^{N}\left((2x_\alpha-h-l\right)a_\alpha y^2\right)_{\bar x_\alpha,s_\alpha}h-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{s_\alpha=0}^{N-1}(2x_\alpha+h-l)_{\bar x_\alpha,s_\alpha}a_\alpha y^2_{s_\alpha}h-\frac{1}{2}\sum_{s_\alpha=0}^{N-1}\left(2x_\alpha+h-l\right)\left(a_\alpha\right)_{\bar x_\alpha,s_\alpha+1}y^2_{s_\alpha}h=$$

$$=-\sum_{s_\alpha=0}^{N}a_\alpha y^2_{s_\alpha}h-\frac{1}{2}\sum_{s_\alpha=0}^{N-1}(2x_\alpha+h-l)\left(a_\alpha\right)_{\bar x_\alpha,s_\alpha+1}y^2_{s_\alpha}h+\frac{l}{2}\left(a_{\alpha,N_\alpha}y^2_{N_\alpha}+a_{\alpha,0}y_0^2\right).$$

С учетом граничных условий (2) и (19) из (18) получим:

$$\frac{1}{2p}\left(\sum_{s_\alpha=1}^{N-1}x_\alpha\left(l-x_\alpha\right)\left(y_{s_\alpha}^{(\alpha)}\right)^2h\right)_{\bar t}+\frac{c_0}{2}\sum_{s_\alpha=1}^{N-1}x_\alpha\left(l-x_\alpha\right)\left(y_{\bar x_\alpha,s_\alpha}\right)^2h+ \tag{20}$$

$$+c_0\sum_{s_\alpha=0}^{N}(y^2_{s_\alpha})h\le-\frac{1}{2}\sum_{s_\alpha=0}^{N-1}\left(2x_\alpha+h-l\right)\left(a_\alpha\right)_{\bar x_\alpha,s_\alpha+1}y^2_{s_\alpha}h-\frac{1}{2}\sum_{s_\alpha=1}^{N-1}x_\alpha\left(l-x_\alpha\right)\left(y_{s_\alpha}^{(\alpha)}\sum_{i_\alpha=0}^{N}p_{2,\alpha,i_\alpha}y_{i_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\hbar\right)h-$$

$$-\frac{1}{p}\sum_{s_\alpha=1}^{N-1}x_\alpha\left(l-x_\alpha\right)\left(y_{s_\alpha}^{(\alpha)}\sum_{j'=0}^{j}p_1\left(x,t_j,t_{j'}\right)y\left(x,t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right)\tau\right)h+\;M_1\sum_{s_\alpha=1}^{N-1}x_\alpha\left(l-x_\alpha\right)\left(y_{s_\alpha}^{(\alpha)}\right)^2h+M_2\left(\sum_{s_\alpha=1}^{N-1}\varphi^2_{(\alpha),s_\alpha}h+\mu^2_{-\alpha}+\mu^2_{+\alpha}\right).$$

Оценим первое, второе и третье слагаемые правой части (20) с помощью неравенства Коши с ε, леммы 2 [22] и получим:

$$-\sum_{s_\alpha=0}^{N-1}(2x_\alpha+h-l)\left(a_\alpha\right)_{\bar x_\alpha,s_\alpha+1}y^2_{s_\alpha}h\le M_1\,|\,[y^{(\alpha)}]\,|^2_{L_2(\alpha)}\le\varepsilon M_1\,|[\rho_\alpha y^{(\alpha)}_{\bar x_\alpha}]\,|^2_{L_2(\alpha)}+M_2^\varepsilon\,|\,\rho_\alpha y^{(\alpha)}\,|^2_{L_2(\alpha)}, \tag{21}$$

$$-\sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha\left(l-x_\alpha\right)\left(y_{s_\alpha}^{(\alpha)}\sum_{i_\alpha=0}^{N} p_{2,\alpha,i_\alpha} y_{i_\alpha}^{(\alpha)}\hbar\right)h \le \frac{1}{4\varepsilon_1}\sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha\left(l-x_\alpha\right)\left(y_{s_\alpha}^{(\alpha)}\right)^2 h+\varepsilon_1\sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha\left(l-x_\alpha\right)\left(\sum_{i_\alpha=0}^{N} p_{2,\alpha,i_\alpha} y_{i_\alpha}^{(\alpha)}\hbar\right)^2 h \le \tag{22}$$

$$\le \frac{1}{4\varepsilon_1}\sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha\left(l-x_\alpha\right)\left(y_{s_\alpha}^{(\alpha)}\right)^2 h+\varepsilon_1 M_3\sum_{s_\alpha=1}^{N-1}\left(x_\alpha\left(l-x_\alpha\right)\sum_{i_\alpha=0}^{N}\left(y_{i_\alpha}^{(\alpha)}\right)^2\hbar\right)h \le$$

$$\le \frac{1}{4\varepsilon_1}\sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha\left(l-x_\alpha\right)\left(y_{s_\alpha}^{(\alpha)}\right)^2 h+\varepsilon_1 M_4\sum_{s_\alpha=0}^{N} y_{s_\alpha}^2 h \le \frac{1}{4\varepsilon_1}\,|\,\rho y^{(\alpha)}\,|_{L_2(\alpha)}^2+\varepsilon_1 M_4\,|\,[y^{(\alpha)}]\,|_{L_2(\alpha)}^2,$$

$$-\frac{1}{p}\sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha\left(l-x_\alpha\right)\left(y_{s_\alpha}^{(\alpha)}\sum_{j'=0}^{j} p_1\left(x,t_j,t_{j'}\right)y(x,t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\tau\right)h \le \tag{23}$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{p^2}\sum_{i_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha\left(l-x_\alpha\right)\left(\sum_{j'=0}^{j} p_1\left(x_{i_\alpha},t_j,t_{j'}\right)y(x_{i_\alpha},t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\tau\right)^2 h+\frac{1}{2}\,|\,\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}\,|_{L_2(\alpha)}^2\le$$

$$\le \frac{1}{2}\frac{1}{p^2}\sum_{i_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha\left(l-x_\alpha\right)\left(\sum_{j'=0}^{j} p_1^2\left(x_{i_\alpha},t_j,t_{j'}\right)\tau\sum_{j'=0}^{j} y^2(x_{i_\alpha},t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\tau\right)h+$$

$$+\frac{1}{2}\,|\,\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}\,|_{L_2(\alpha)}^2\le M_6\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{i_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha\left(l-x_\alpha\right)y^2(x_{i_\alpha},t^{j'+\frac{\alpha}{p}})h+\frac{1}{2}\,|\,\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}\,|_{L_2(\alpha)}^2=$$

$$=M_6\sum_{j'=0}^{j}\tau\,|\,\rho_\alpha y(x_{i_\alpha},t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\,|_{L_2(\alpha)}^2+\frac{1}{2}\,|\,\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}\,|_{L_2(\alpha)}^2,$$

где $\rho_\alpha=\sqrt{x_\alpha\left(l-x_\alpha\right)}$, $\rho_1=\rho_2=...=\rho_p$.

Учитывая (21)–(23), из (20) находим

$$\frac{1}{p}\left(|\,\rho_\alpha y^{(\alpha)}\,|_{L_2(\alpha)}^2\right)_{\bar t}+|[\rho_\alpha y_{\bar x_\alpha}^{(\alpha)}]\,|_{L_2(\alpha)}^2+|\,[y^{(\alpha)}]\,|_{L_2(\alpha)}^2\le \varepsilon M_7\,|[\rho_\alpha y_{\bar x_\alpha}^{(\alpha)}]\,|_{L_2(\alpha)}^2+\varepsilon_1 M_8\,|\,[y^{(\alpha)}]\,|_{L_2(\alpha)}^2+M_9\,|\,\rho_\alpha y^{(\alpha)}\,|_{L_2(\alpha)}^2+ \tag{24}$$

$$+M_{10}\sum_{j'=0}^{j}|\,\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\,|_{L_2(\alpha)}^2\,\tau+M_{11}\left(|\,[\varphi_{(\alpha)}]\,|_{L_2(\alpha)}^2+\mu_{-\alpha}^2+\mu_{+\alpha}^2\right).$$

где $\|\cdot\|_{L_2(\alpha)}$ означает, что норма берется по переменной x_α при фиксированных значениях остальных переменных.

Выбирая $\varepsilon=\dfrac{1}{2M_7}$, $\varepsilon_1=\dfrac{1}{2M_8}$ из (24) находим

$$\frac{1}{p}\left(|\,\rho_\alpha y^{(\alpha)}\,|_{L_2(\alpha)}^2\right)_{\bar t}+|[\rho_\alpha y_{\bar x_\alpha}^{(\alpha)}]\,|_{L_2(\alpha)}^2+|\,[y^{(\alpha)}]\,|_{L_2(\alpha)}^2\le \tag{25}$$

$$\le M_{12}\,|\,\rho_\alpha y^{(\alpha)}\,|_{L_2(\alpha)}^2+M_{13}\sum_{j'=0}^{j}\|\,\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\,|_{L_2(\alpha)}^2\,\tau+M_{14}\left(|\,[\varphi_{(\alpha)}]\,|_{L_2(\alpha)}^2+\mu_{-\alpha}^2+\mu_{+\alpha}^2\right).$$

Подставляя после суммирования по $i_\alpha\ne i_\beta$, $\beta=1,2,...,p$ полученные оценки в тождество (25), получим неравенство:

$$\frac{1}{p}\left(|\,\rho_\alpha y^{(\alpha)}\,|_{L_2(\omega_h)}^2\right)_{\bar t}+|[\rho_\alpha y_{\bar x_\alpha}]\,|_{L_2(\omega_h)}^2+|\,[y^{(\alpha)}]\,|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2\le M_{15}\,|\,\rho_\alpha y^{(\alpha)}\,|_{L_2(\omega_h)}^2+ \tag{26}$$

$$+M_{16}\sum_{j'=0}^{j}|\,\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\,|_{L_2(\omega_h)}^2\,\tau+M_{17}\left(|\,[\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}]\,|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2+\sum_{i_\beta\ne i_\alpha}\left(\mu_{-\alpha}^2\left(t_j\right)+\mu_{+\alpha}^2\left(t_j\right)\right)\overline{H}/\hbar\right).$$

Просуммируем (26) сначала по $\alpha=1,2,...,p$, а затем, умножая обе части на τ и суммируя по j' от 0 до j, получаем:

$$|\,\rho_p y^{j+1}\,|_{L_2(\omega_h)}^2+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(|[\rho_\alpha y_{\bar x_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}]\,|_{L_2(\omega_h)}^2+|\,[y^{j'+\frac{\alpha}{p}}]\,|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2\right)\le \tag{27}$$

$$\le M_{18}\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}|\,\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\,|_{L_2(\omega_h)}^2+M_{19}\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{s=0}^{j'}|\,\rho_\alpha y^{s+\frac{\alpha}{p}}\,|_{L_2(\omega_h)}^2\,\tau+$$

$$+M_{20}\left(\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(|\,[\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}]\,|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2+\sum_{i_\beta\ne i_\alpha}\left(\mu_{-\alpha}^2\left(t_{j'}\right)+\mu_{+\alpha}^2\left(t_{j'}\right)\right)\overline{H}/\hbar\right)+|\,[y^0]\,|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2\right).$$

Из (27) имеем

$$|\rho_p y^{j+1}|^2_{L_2(\omega_h)} \le M_{21}\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}|\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}|^2_{L_2(\omega_h)} + M_{20}F^j, \tag{28}$$

где $M_{21} = M_{18} + TM_{19}$,

$$F^j = \sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(|[\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \sum_{i_\beta\ne i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}+\mu^2_{+\alpha}\right)\overline{H}/\hbar\right) + |[y^0]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}.$$

Покажем, что имеет место неравенство:

$$\max_{1\le\alpha\le p}|\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}|^2_{L_2(\omega_h)} \le \nu_1\sum_{j'=0}^{j-1}\max_{1\le\alpha\le p}|\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}|^2_{L_2(\omega_h)} + \nu_2 F^j,$$

где ν_1,ν_2 — известные положительные постоянные.

Для этого перепишем неравенство (26) в следующем виде:

$$\frac{1}{p}|\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}|^2_{L_2(\omega_h)} \le \frac{1}{p}|\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}|^2_{L_2(\omega_h)} + \tau M_{15}|\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}|^2_{L_2(\omega_h)} + \tau M_{16}\sum_{j'=0}^{j}|\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}|^2_{L_2(\omega_h)}\tau +$$
$$+\tau M_{17}\left(|[\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \sum_{i_\beta\ne i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}+\mu^2_{+\alpha}\right)\overline{H}/\hbar\right). \tag{29}$$

Просуммируем (29) по α' от 1 до α и получим:

$$\frac{1}{p}\sum_{\alpha'=1}^{\alpha}|\rho_{\alpha'} y^{j+\frac{\alpha'}{p}}|^2_{L_2(\omega_h)} \le \frac{1}{p}\sum_{\alpha'=1}^{\alpha}|\rho_{\alpha'} y^{j+\frac{\alpha'-1}{p}}|^2_{L_2(\omega_h)} +$$
$$+\tau M_{15}\sum_{\alpha'=1}^{\alpha}|\rho_{\alpha'} y^{j+\frac{\alpha'}{p}}|^2_{L_2(\omega_h)} + \tau M_{16}\sum_{\alpha'=1}^{\alpha}\sum_{j'=0}^{j}|\rho_{\alpha'} y^{j'+\frac{\alpha'}{p}}|^2_{L_2(\omega_h)}\tau +$$
$$+\tau M_{17}\sum_{\alpha'=1}^{\alpha}\left(|[\varphi^{j+\frac{\alpha'}{p}}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \sum_{i_\beta\ne i_{\alpha'}}\left(\mu^2_{-\alpha'}+\mu^2_{+\alpha'}\right)\overline{H}/\hbar\right).$$

Из последнего получаем

$$|\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}|^2_{L_2(\omega_h)} \le |\rho_1 y^j|^2_{L_2(\omega_h)} + \tau M_{15}\sum_{\alpha=1}^{p}|\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}|^2_{L_2(\omega_h)} + \tau M_{16}\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{j'=0}^{j}|\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}|^2_{L_2(\omega_h)}\tau +$$
$$+\tau M_{17}\sum_{\alpha=1}^{p}\left(|[\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \sum_{i_\beta\ne i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}+\mu^2_{+\alpha}\right)\overline{H}/\hbar\right). \tag{30}$$

Не нарушая общности, можно считать, что

$$\max_{1\le\alpha'\le p}|\rho_{\alpha'} y^{j+\frac{\alpha'}{p}}|^2_{L_2(\omega_h)} = |\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}|^2_{L_2(\omega_h)},$$

в противном случае (29) будем суммировать до такого α при котором $|\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}|^2_{L_2(\omega_h)}$ достигает максимального значения при фиксированном j. Тогда (30) перепишем в виде

$$\max_{1\le\alpha\le p}|\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}|^2_{L_2(\omega_h)} \le |\rho_1 y^j|^2_{L_2(\omega_h)} + p\tau M_{15}\max_{1\le\alpha\le p}|\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}|^2_{L_2(\omega_h)} + pM_{16}T\sum_{j'=0}^{j}\max_{1\le\alpha\le p}|\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}|^2_{L_2(\omega_h)}\tau +$$
$$+\tau M_{17}\sum_{\alpha=1}^{p}\left(|[\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \sum_{i_\beta\ne i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}+\mu^2_{+\alpha}\right)\overline{H}/\hbar\right). \tag{31}$$

Так как из (28) следует, что

$$|\rho_1 y^j|^2_{L_2(\omega_h)} = |\rho_p y^j|^2_{L_2(\omega_h)} \le M_{21}\sum_{j'=0}^{j-1}\max_{1\le\alpha\le p}|\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}|^2_{L_2(\omega_h)} + M_{20}F^j,$$

то из (31) имеем

$$\left(1-\tau M_{22}\right)\max_{1\le\alpha\le p}|\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}|^2_{L_2(\omega_h)} \le M_{23}\sum_{j'=0}^{j-1}\max_{1\le\alpha\le p}|\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}|^2_{L_2(\omega_h)} + M_{24}F^j, \tag{32}$$

где $M_{22} = pM_{15} + pM_{16}T$, $M_{23} = M_{21} + pM_{16}T$.

Выбирая $\tau \le \tau_0 = \dfrac{1}{2M_{22}}$, из (32) находим

$$\max_{1\le\alpha\le p} |\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}|^2_{L_2(\omega_h)} \le \nu_1 \sum_{j'=0}^{j-1} \max_{1\le\alpha\le p} |\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}|^2_{L_2(\omega_h)} + \nu_2 F^j. \qquad (33)$$

Применяя к (33) Лемму 4 [23], получаем априорную оценку (10).

4. Сходимость ЛОС. Для сходимости ЛОС справедлива следующая

Теорема 2. Пусть задача (1)–(3) имеет единственное непрерывное в $\overline{Q}_T$ решение $u(x,t)$, существуют непрерывные в $\overline{Q}_T$ производные $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \dfrac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial t}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2}$, $1 \le \alpha, \beta \le p$, $\alpha \ne \beta$ и выполнены условия гладкости и ограниченности (4), тогда ЛОС (6)–(8) сходится к решению исходной задачи (1)–(3) со скоростью $O(h^2+\tau)$, так что при $\tau \le \tau_0$ имеет место оценка

$$|[y^{j+1} - u^{j+1}]|_1 \le M\left(h^2 + \tau\right), \qquad (34)$$

где

$$|[z^{j+1}]|_1 = \left(|\rho_p z^{j+1}|^2_{L_2(\omega_h)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left(||[\rho_\alpha z_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\omega_h)} + |[z^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\omega_h)} \right) \right)^{1/2}.$$

Доказательство. Представим решение задачи (9) для погрешности z в виде суммы $z_{(\alpha)} = \upsilon_{(\alpha)} + \eta_{(\alpha)}$, $z_{(\alpha)} = z^{j+\frac{\alpha}{p}}$, где $\eta_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{\eta_{(\alpha)} - \eta_{(\alpha-1)}}{\tau} = \psi_\alpha, \quad x \in \omega_h + \gamma_h, \quad \alpha = 1,2,...,p, \qquad (35)$$

$$\eta(x,0) = 0, \quad \psi_\alpha = \begin{cases} \psi_\alpha, \ x_\alpha \in \omega_h, \\ \psi_{-\alpha}, \ x_\alpha = 0, \\ \psi_{+\alpha}, \ x_\alpha = l. \end{cases}$$

Из (35) следует $\eta^{j+1} = \eta_{(p)} = \eta^j + \tau\left(\overset{0}{\psi}_1 + \overset{0}{\psi}_2 + ... + \overset{0}{\psi}_p\right) = \eta^j = ... = \eta^0 = 0$, $j = 0,1,...,j_0$, так как $\eta^0 = 0$.

Тогда имеем $\eta^\alpha = \tau\left(\overset{0}{\psi}_1 + \overset{0}{\psi}_2 + ... + \overset{0}{\psi}_\alpha\right) = -\tau\left(\overset{0}{\psi}_{\alpha+1} + ... + \overset{0}{\psi}_p\right) = O(\tau)$. Функция $\upsilon_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{\upsilon_{(\alpha)} - \upsilon_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_\alpha \upsilon_{(\alpha)} + \psi_\alpha, \ \ x \in \omega_h, \quad \alpha = 1,2,...,p, \qquad (36)$$

$$\upsilon_{(\alpha)} = -\eta_\alpha, \ \ x_\alpha \in \gamma_{h,\alpha}, \ \ \upsilon(x,0) = 0,$$

где $\widetilde{\psi}_\alpha = \overset{*}{\psi}_\alpha + \Lambda_\alpha \eta_{(\alpha)}$.

Если существуют непрерывные в замкнутой области $\overline{Q}_T$ производные $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \alpha \ne \beta$, то $\Lambda_\alpha \eta_{(\alpha)} = -\tau \Lambda_\alpha \left(\overset{0}{\psi}_{\alpha+1} + ... + \overset{0}{\psi}_p\right) = O(\tau)$.

Решение задачи (36) оценим с помощью Теоремы 1.

$$|\rho_p \upsilon^{j+1}|^2_{L_2(\omega_h)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left(|[\rho_\alpha \upsilon_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\omega_h)} + |[\upsilon^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} \right) \le \qquad (37)$$

$$\le M \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left(|[\widetilde{\psi}^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \sum_{i_\beta \ne i_\alpha} \left(\eta^2_{-\alpha}\left(0, x', t_{j'}\right) + \eta^2_{+\alpha}\left(l, x', t_{j'}\right) \right) \overline{H}/h \right).$$

Так как $\eta^{j+1} = 0$, $\eta_{(\alpha)}$, $\eta_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} = O(\tau)$ и

$$|[z^{j+1}]|_1^2 = |\rho_p z^{j+1}|^2_{L_2(\omega_h)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left(|[\rho_\alpha z_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\omega_h)} + |[z^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} \right) \le$$

$$\le |\rho_p \nu^{j+1}|^2_{L_2(\omega_h)} + 2 \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left(||[\rho_\alpha \nu_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\omega_h)} + |\rho_\alpha \eta_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\omega_h)} + |[\nu^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \right.$$

$$\left. + |[\eta^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} \right) \le 2 \left(|[\upsilon^{j+1}]|_1^2 + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left(|[\rho_\alpha \eta_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\omega_h)} + |[\eta^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} \right) \right),$$

тогда из оценки (37) следует сходимость со скоростью (34).

Обсуждение и заключения. Разработан и обоснован численный метод решения первой начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения параболического типа в многомерной области. Для приближенного решения поставленной задачи построена локально-одномерная разностная схема А.А. Самарского с порядком аппроксимации $O(h^2+\tau)$. Основная суть построения схемы состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению ряда одномерных задач по каждому из координатных направлений. При этом каждая из вспомогательных задач может не аппроксимировать исходную задачу, но в совокупности и в специальных нормах такая аппроксимация имеет место. Предложен вариант нахождения априорной оценки решения ЛОС с неоднородными краевыми условиями первого рода на основе метода энергетических неравенств, что является существенным для реализации исследуемой многомерной задачи. Из этой оценки следуют единственность, непрерывная и равномерная зависимость решения локально-одномерной разностной схемы от входных данных, а также сходимость решения схемы к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы.

Список литературы

1. Вайнберг М.М. Интегро-дифференциальные уравнения. *Итоги науки. Серия Математический анализ. Теория вероятности Регулирование*. 1964;5–37. URL: https://www.mathnet.ru/rus/intv82 (дата обращения: 16.11.2023).

2. Лаврентьев М.М. *Обратные задачи и специальные операторные уравнения первого рода. Международный конгресс математиковв Ницце*. Доклады советских математиков. Москва: Наука; 1972:130–136.

3. Васильев В.В. К вопросу о решении задачи Коши для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений. *Известия вузов. Математика*. 1961;4:8–24. URL: https://www.mathnet.ru/rus/ivm1896 (дата обращения: 17.11.2023).

4. Трубин В.Г. Решение одного вырождающегося интегро-дифференциального уравнения. *Дифференциальные и интегральные уравнения*. Иркутск: издательство Иркутского университета. 1978;5:94–101.

5. Guezane-Lakoud A., Belakroum D. Time-discretization schema for an integrodifferential Sobolev type equation with integral conditions. *Applied Mathematics and Computation*. 2012;218(9):4695–4702. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.11.077

6. Luoa Z.D., Teng F. A reduced-order extrapolated finite difference iterative scheme based on POD method for 2D Sobolev equation. *Applied Mathematics and Computation*. 2018;329:374–383. https://doi.org/10.1186/s13661-019-1176-2

7. Бештоков М.Х. Численное исследование начально-краевых задач для уравнения соболевского типа с дробной по времени производной. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2019;59(2):185–202. https://doi.org/10.1134/S0044466919020054

8. Grasselli M., Pata V. A reaction-diffusion equation with memory. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Ser. A*. 2006;15:1079–1088. https://doi.org/10.3934/dcds.2006.15.1079

9. Olmstead W.E., Davis S.H., Rosenblat S., Kath W.L. Bifurcation with memory. *SIAM Journal on Applied Mathematics.* 1986;46:171–188. https://doi.org/10.1137/0146013

10. Yong J, Zhang X. Heat equation with memory in anisotropic and non-homogeneous media. *Acta Mathematica Sinica. English Ser*. 2011;27:219–254. https://doi.org/10.1007/s10114-010-0077-1

11. Бештоков М.Х., Водахова В.А. Нелокальныекраевые задачи для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка. *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2019;29(4):459–482. https://doi.org/10.20537/vm190401

12. Douglas J., Rachford H.H. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. *Trans. Amer.Math. Soc*. 1956;82(2):421–43. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1956-0084194-4

13. Peaceman D.W., Rachford H.H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics.* 1955;3(1):28–41. https://doi.org/10.1137/0103003

14. Яненко Н.Н. *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики*. Новосибирск: Наука. Сибирское отделение; 1967. 194 с.

15. Самарский А.А. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1962;2(5):787–811. https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90504-4

16. Марчук Г.И. *Методы расщепления*. Москва: Наука; 1988. 263 с.

17. Дьяконов Е.Г. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1962;2(4):549–568. https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90531-7

18. Бештокова З.В., Шхануков-Лафишев М.Х. Локально-одномерная разностная схема третьей краевой задачи для параболического уравнения общего вида с нелокальным источником. *Дифференциальные уравнения*. 2018;54(7):891–901. https://doi.org/10.1134/S0374064118070051

19. Бештокова З.В. Локально-одномерная разностная схема для решения одной нелокальной краевой задачи для параболического уравнения в многомерной области. *Дифференциальные уравнения*. 2020;56(3):366–379. https://doi.org/10.1134/S0374064120030085

20. Бештокова З.В. Численный метод решения начально-краевой задачи для многомерного нагруженного параболического уравнения общего вида с условиями третьего рода. *Вестник Самарского государственного технического университетата. Серия Физико-математические науки*. 2022;26(1):7–35. https://doi.org/10.14498/vsgtu1908

21. Самарский А.А. *Теория разностных схем*. Москва: Наука; 1983. 614 с.

22. Алиханов А.А. Об устойчивости и сходимости нелокальных разностных схем. *Дифференциальные уравнения*. 2010;46(7):942–954. https://doi.org/10.1134/S0012266110070037

23. Самарский А.А., Гулин, А.В. *Устойчивость разностных схем*. Москва: Наука; 1973. 415 с.

References

1. Vaynberg M.M. Integro-differential equations. *Itogi nauki. ser. mat. anal. teor. ver. regulir.* 1962, Moscow: VINITI. 1964;5–37. (in Russ.). URL: https://www.mathnet.ru/eng/intv82 (accessed: 16.11.2023).

2. Lavrent'yev M.M. Inverse problems and special operator equations of the first kind. *Mezhdunarodnyy kongress matematikov. Doklady sovetskikh matematikov.* Moscow: Nauka.1972:130–136. (in Russ.).

3. Vasil'yev V.V. On the solution of the Cauchy problem for a class of linear integro-differential equations. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat*. 1961;4:8–24. (in Russ.). https://www.mathnet.ru/eng/ivm/y1961/i4/p8 (accessed: 17.11.2023).

4. Trubin V.G. Solution of a degenerate integro-differential equation. *Differential and integral equations*. Irkutsk: Irkut. un.-t.1978;5:94–101. (in Russ.).

5. Guezane-Lakoud A., Belakroum D. Time-discretization schema for an integrodifferential Sobolev type equation with integral conditions. *Applied Mathematics and Computation*. 2012:218(9):4695–4702. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.11.077

6. Luoa Z.D., Teng F. A reduced-order extrapolated finite difference iterative scheme based on POD method for 2D Sobolev equation. *Applied Mathematics and Computation*. 2018;329:374–383. https://doi.org/10.1186/s13661-019-1176-2

7. Beshtokov M.Kh. Numerical analysis of initial-boundary value problem for a Sobolev-type equation with a fractional-order time derivative. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2019;59(2):175–192. https://doi.org/10.1134/S0965542519020052

8. Grasselli M., Pata V. A reaction-diffusion equation with memory. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Ser. A*. 2006;15:1079–1088. https://doi.org/10.3934/dcds.2006.15.1079

9. Olmstead W.E., Davis S.H., Rosenblat S., Kath W.L. Bifurcation with memory. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1986;46:171–188. https://doi.org/10.1137/0146013

10. Yong J, Zhang X. Heat equation with memory in anisotropic and non-homogeneous media. *Acta Mathematica Sinica. English Ser.* 2011;27:219–254. https://doi.org/10.1007/s10114-010-0077-1

11. Beshtokov M.KH., Vodakhova V.A. Nonlocal boundary value problems for a fractional-order convection-diffusion equation. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*. 2019;29(4):459–482. (in Russ.). https://doi.org/10.20537/vm190401

12. Douglas J., Rachford H.H. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. *Trans. Amer. Math. Soc*. 1956;82(2):421–43. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1956-0084194-4

13. Peaceman D.W., Rachford H.H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*. 1955;3(1):28–41. https://doi.org/10.1137/0103003

14. Yanenko N.N. *Method of fractional steps*. Paris: Libraire Armand Colin. 1968. 165 p.

15. Samarskiy A.A. On an economical difference method for the solution of a multidimensional parabolic equation in an arbitrary region. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1963;2(5):894–926. (in Russ.). https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90504-4

16. Marchuk G.I. *Splitting methods*. Moscow: Nauka; 1988. 263 p. (in Russ.).

17. D'yakonov E.G. Difference schemes with a 'disintegrating' operator for multidimensional problems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1963;2(4):581–607. (in Russ.). https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90531-7

18. Beshtokova Z.V., Shkhanukov-Lafishev M.Kh. Locally one-dimensional difference scheme for the third boundary value problem for a parabolic equation of the general form with a nonlocal source. *Differential Equations*. 2018; 54(7):891–880. (in Russ.). https://doi.org/10.1134/S0012266118070042

19. Beshtokova Z.V. Locally one-dimensional difference scheme for a nonlocal boundary value problem for a parabolic equation in a multidimensional domain. *Differential Equations*. 2020; 56(3):354–368. https://doi.org/10.1134/S0012266120030088

20. Beshtokova Z.V. Numerical method for solving an initial-boundary value problem for a multidi-mensional loaded parabolic equation of a general form with conditions of the third kind. *Journal of Samara state technical university. Physical and mathematical science.* 2022; 26(1):7–35. (In Russ.). https://doi.org/10.14498/vsgtu1908

21. Samarskii A.A. *Theory of difference schemes*. Moscow: Nauka; 1983. 616 p. (In Russ.).

22. Alikhanov A.A. On the stability and convergence of nonlocal difference schemes. *Differential equations*. 2010; 46(7):949–961. https://doi.org/10.1134/S0012266110070037

23. Samarskii A.A., Gulin A.V. *Stability of difference schemes*. Moscow: Nauka; 1973. 416 p. (In Russ.).

Поступила в редакцию 08.12.2023
Поступила после рецензирования 28.02.2024
Принята к публикации 05.03.2024

Об авторе:
Бештокова Зарьяна Владимировна, младший научный сотрудник, отдел вычислительных методов, Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН (РФ, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а), ORCID, ScopusID, zarabaeva@yandex.ru

Конфликт интересов
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Received 08.12.2023
Revised 28.02.2024
Accepted 05.03.2024

About the Author:
Zaryana V. Beshtokova, Junior Researcher, Department of Computational Methods, Institute of Applied Mathematics and Automation, KBNC RAS (89a, Shortanova St., Nalchik, 360000, RF), ORCID, ScopusID, zarabaeva@yandex.ru

Conflict of interest statement
The author does not have any conflict of interest.

The author has read and approved the final manuscript.