

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ MATHEMATICAL MODELLING



УДК 519.6

Оригинальное эмпирическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-24-32>


## Вероятностный анализ распределения потоков тепла в Северной Атлантике за 1979–2022 годы

К.П. Беляев<sup>1</sup> , А.А. Кулешов<sup>2</sup> , А.В. Новикова<sup>3</sup>, Н.П. Тучкова<sup>4</sup> <sup>1</sup>Институт океанологии им. П.П. Ширшова Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация<sup>2</sup>Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация<sup>3</sup>Филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в Севастополе, г. Севастополь, Российская Федерация<sup>4</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация [andrew\\_kuleshov@mail.ru](mailto:andrew_kuleshov@mail.ru)

### Аннотация

**Введение.** Изучение процессов теплообмена и распределения потоков тепла в океанах имеет важное значение для понимания климатических изменений на Земле. Северная Атлантика, являющаяся одним из ключевых компонентов глобальной климатической системы, играет существенную роль в регулировании климата наших широт. Одним из ключевых инструментов для анализа распределения тепла в океанах является вероятностный анализ. В настоящей работе методами математического моделирования проводится статистический анализ данных наблюдений тепловых потоков в Северной Атлантике.

**Материалы и методы.** Используемые методы включают в себя анализ случайных процессов, заданных стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) или уравнением Ито, аппроксимацию данных наблюдений и решение уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) для описания эволюции вероятностного распределения тепла в океане.

**Результаты исследования.** С помощью методов математического моделирования проведен вероятностный анализ распределения потоков тепла в Северной Атлантике за период с 1979 по 2022 годы. Результаты исследования позволили установить закономерности распределения потоков тепла в изучаемом регионе за рассматриваемый период времени.

**Обсуждение и заключения.** Полученные результаты могут быть полезными для дальнейшего изучения климатических процессов в Северной Атлантике, а также для разработки стратегий управления ресурсами и защиты окружающей среды.

**Ключевые слова:** случайный процесс, стохастическое дифференциальное уравнение, уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова, поток тепла

**Финансирование.** Исследование выполнено в рамках государственного задания, тема № FMWE-2024-0016.

**Для цитирования.** Беляев К.П., Кулешов А.А., Новикова А.В., Тучкова Н.П. Вероятностный анализ распределения потоков тепла в Северной Атлантике за 1979–2022 годы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):24–32. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-24-32>

## Probabilistic Analysis of Heat Flux Distribution in the North Atlantic for 1979–2022

Konstantin P. Belyaev<sup>1</sup> , Andrey A. Kuleshov<sup>2</sup>  , Anastasiya V. Novikova<sup>3</sup>, Natalia P. Tuchkova<sup>4</sup> 

<sup>1</sup>Shirshov Institute of Oceanology of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup>Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

<sup>3</sup>Lomonosov Moscow State University Branch in Sevastopol, Sevastopol, Russian Federation

<sup>4</sup>Federal Research Center “Computer Sciences and Control” of Russian Academy of Sciences,

Moscow, Russian Federation

 [andrew\\_kuleshov@mail.ru](mailto:andrew_kuleshov@mail.ru)

### Abstract

**Introduction.** The study of heat interaction processes and the distribution of heat fluxes in the oceans is important for understanding climate change on Earth. The North Atlantic, which is one of the key components of the global climate system, plays a significant role in regulating the climate of our latitudes. One of the key tools for analyzing heat distribution in the oceans is probabilistic analysis. In this work, using mathematical modelling methods, a statistical analysis of observational data on heat fluxes in the North Atlantic is carried out.

**Materials and Methods.** The used methods include the analysis of random processes specified by the stochastic differential equation (SDE) or the Ito equation, approximation of observational data, and solution of the Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) equation to describe the evolution of the probabilistic distribution of heat in the ocean.

**Results.** Using mathematical modelling methods, a probabilistic analysis of the distribution of heat fluxes in the North Atlantic for the period from 1979 to 2022 has been carried out. The results of the study made it possible to establish patterns of distribution of heat flux in the studied region over the period of time under consideration.

**Discussion and Conclusions.** The results may be useful for further study of climate processes in the North Atlantic, as well as for the development of resource management and environmental protection strategies.

**Keywords:** Random process, stochastic differential equation, Fokker-Planck-Kolmogorov equation, heat flow

**Funding information.** The research was carried out within the framework of a state assignment, topic No. FMWE-2024-0016.

**For citation.** Belyaev K.P., Kuleshov A.A., Novikova A.V., Tuchkova N.P. Probabilistic analysis of heat flux distribution in the North Atlantic for 1979–2022. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):24–32. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-24-32>

**Введение.** Изучение процессов теплообмена и распределения потоков тепла в океанах имеет важное значение для понимания климатических изменений на Земле. Северная Атлантика, являющаяся одним из ключевых компонентов глобальной климатической системы, играет существенную роль в регулировании климата наших широт. В последние десятилетия наблюдается усиление интереса к изучению изменений температурного режима этого региона и взаимодействия океана и атмосферы в связи с феноменом глобального потепления и его влиянием на климатические процессы в различных частях планеты.

Одним из ключевых инструментов для исследования распределения тепла в океанах является вероятностный анализ. Он позволяет количественно оценить вероятность различных сценариев теплового обмена и выявить тенденции в изменениях климата. В Северной Атлантике тепловой поток играет критическую роль в формировании климатических условий региона, поэтому проведение вероятностного анализа распределения потоков тепла за период с 1979 по 2022 годы позволит более глубоко понять динамику климатических процессов в этом ключевом регионе.

Работ в этом направлении достаточно много, однако каждое новое корректное и содержательное исследование представляет собой большой интерес с точки зрения используемых методов и результатов их применения к анализу конкретных геофизических феноменов. Отметим важные исследования последнего времени в этой области [1]. Анализ потоков тепла, их динамика и пространственное распределение в Северной Атлантике хорошо описаны, например, в работах [2, 3]. Статистический и достаточно подробный математический анализ потоков тепла выполнен ранее в [4].

В данной работе проведен статистический анализ данных наблюдений из архива ERA5 [5] и построены численные решения уравнений ФПК на основе статистически определенных коэффициентов СДУ (уравнения Ито) для межгодовой изменчивости в Северной Атлантике за 1979–2022 гг. Эти результаты являются новыми и оригинальными.

Была осуществлена выборка данных из архива ERA5 о распределении потоков тепла в Северной Атлантике за период с 1979 по 2022 годы. Далее были рассчитаны коэффициенты сноса и диффузии для межгодовой изменчивости потоков тепла, затем была проведена их аппроксимация тригонометрическими полиномами, и, наконец, было численно решено уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова с аппроксимированными коэффициентами сноса и диффузии при заданных начальных условиях на функцию распределения потоков. В заключении статьи приводится анализ результатов и дается их геофизическая интерпретация.

## Материалы и методы

**Математическая модель.** Изменение потоков моделировалось с помощью стохастического дифференциального уравнения (уравнения Ито) [1, 6]:

$$dX = a(t, X)dt + b(t, X)dW, \quad (1)$$

где  $X(t)$  — поток тепла в момент времени  $t$ ;  $dX = X(t + dt) - X(t)$  — изменчивость (инкремент) потока тепла за время  $dt$  в фиксированной точке;  $a(t, X)$ ,  $b(t, X)$  — коэффициенты сноса и диффузии, зависящие от времени  $t$  и от значений процесса  $X(t)$ ;  $dW$  — стандартное обозначение гауссова «белого шума» с нулевым средним и единичной дисперсией, не зависящего от процесса  $X(t)$ . В работе использовались данные по потокам тепла, заданные в узлах одноградусной сетки с временным разрешением 6 часов с 1 января 1998 года до 31 декабря 2022 года. Потоки явного и скрытого тепла, соответственно, рассчитывались по формулам:

$$Q_h = c_p \rho C_T (T_w - T_a) \mathbf{V}, \quad (2)$$

$$Q_e = L \rho C_e (Q_s - Q) \mathbf{V}. \quad (3)$$

В формулах (2) и (3) потоки тепла явно рассчитываются через следующие параметры на границе раздела океана и атмосферы: температура воды и воздуха  $T_w$ ,  $T_a$ , модуль скорости ветра  $\mathbf{V}$ , удельная влажность приводного воздуха  $Q$  и максимальная для данной величины температуры поверхности океана насыщенная удельная влажность над поверхностью воды  $Q_s$ . В качестве коэффициентов пропорциональности в соотношениях (2) и (3) служат коэффициенты обмена теплом  $C_T$  (число Шмидта) и влагой  $C_e$  (число Дальтона). Также в формулах присутствуют удельная теплота испарения  $L$ , удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении  $c_p$  и его плотность  $\rho$ . В данном исследовании значения потоков  $Q_h$ ,  $Q_e$  считались уже известными, дополнительного расчета по формулам (2) и (3) не требовалось.

В работе проводится моделирование процессов изменчивости потоков тепла в Северной Атлантике и расчеты коэффициентов сноса и диффузии на каждый момент времени по формулам (3). В настоящей работе приводятся только карты потока на середину каждого месяца.

Пусть условная вероятность

$$P(y|x) = P(X(t+dt) = y | X(t) = x),$$

если  $y, x$  дискретны, условная плотность вероятности (производная Радона-Никодима)  $p(y|x) = p(X(t+dt) = y | x < X(t) = x + dx)$  и если процесс  $X(t)$  рассматривается как непрерывный. Для определенности будем рассматривать процесс как непрерывный с условной плотностью вероятности  $p(y|x)$ . Чтобы отличать сам процесс  $X(t)$  от его значений, последние будем обозначать маленькими буквами. Для определения коэффициентов  $a(t, x)$ ,  $b(t, x)$  используются следующие формулы [6]:

$$a(t, x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - x) p(y|x) dy, \quad (4)$$

$$b^2(t, x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - x)^2 p(y|x) dy. \quad (5)$$

Таким образом, для определения коэффициентов  $a(t, x)$ ,  $b(t, x)$  по формулам (4) и (5) необходимо выполнить алгоритм, описанный в [1]. Интервал значений  $X(t)$  от  $X_{\min}(t) = X_{\min}$  до  $X_{\max}(t) = X_{\max}$  разбивается точками  $X_i = X_{\min} + i * \frac{X_{\max} - X_{\min}}{L}$ ,  $i = 0, \dots, L$  на  $L$  подинтервалов  $[X_i, X_{i+1}]$  и фиксируются все точки области, где  $X_i < X(t) = x < X_{i+1}$ . Далее считается количество точек сетки, попавших в этот интервал. Пусть таких точек будет  $m$  (необходимо так выбрать интервалы, чтобы для любого  $X_i < X(t) = x < X_{i+1}$   $m$  было больше 0). Переходя на шаг  $t + dt$  делаем аналогичное разбиение интервала значений  $X(t)$  на подинтервалы  $[Y_i, Y_{i+1}]$  и выбираем среди фиксированных на предыдущем шаге точек те и только те точки, для которых  $Y_i < X(t + dt) = y < Y_{i+1}$  для любого  $y$ . Пусть таких точек будет  $l$ . Тогда  $P(y|x) = l/m$ . Далее по формулам (4) и (5) рассчитываются коэффициенты  $a(t, x)$  и  $b^2(t, x)$ .

**Параболическое уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова.** Как было указано в предыдущем параграфе, изменчивость случайного процесса представляется в виде (1). Выражение (1) понимается в интегральном смысле, то есть

$$X(t + \Delta t) - X(t) = \int_t^{t+\Delta t} a(u, X) du + \int_t^{t+\Delta t} b(u, X) [W(u + du) - W(u)].$$

Коэффициенты  $a(t, x)$  и  $b^2(t, x)$  рассчитаны по формулам (4) и (5). Как следствие, можно записать уравнение для расчета вероятностей значений потока в заданный (климатический) момент времени в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial(a(t, x)p)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(b^2(t, x)p)}{\partial x^2}, \quad (6)$$

где  $p(t, x)$  — искомая плотность вероятности в момент  $t$  значения потока  $x$ , а остальные обозначения приведены выше. Уравнение (6) (уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова) решается при граничных условиях Зоммерфельда и при заданном начальном распределении вероятности. Аналитически эта задача, вообще говоря, не решается, но численно ее решение не представляет особых трудностей. Однако для сильно осциллирующих коэффициентов численное решение этого уравнения приводит к значительным вычислительным ошибкам. Поэтому с целью уменьшения вычислительных ошибок имеет смысл сгладить сильно осциллирующие коэффициенты  $a(t, x)$  и  $b^2(t, x)$ .

**Метод наименьших квадратов для аппроксимации среднемесячных коэффициентов.** Аппроксимация коэффициента  $a(t, x)$  находится в виде тригонометрической функции

$$\hat{a}(t, x) = A(x) \sin(wt) + B(x) \cos(wt) + C(x). \quad (7)$$

Такая форма аппроксимирующей функции была выбрана потому, что исходные коэффициенты сноса и коэффициенты диффузии имеют ярко выраженный внутригодовой цикл, где частота колебаний  $w = 2\pi/12$  (мес.<sup>-1</sup>). Таким образом эта форма аппроксимации физически обоснована.

Параметры  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $C(x)$  были определяются последовательно методом наименьших квадратов. Сначала определяются параметры  $C(x)$  как среднее значение выборки

$$\frac{1}{518} \sum_{t=1}^{518} a(t, x) - C(x) = 0, \quad (8)$$

а затем определяются  $A(x)$  и  $B(x)$ . Этот алгоритм хорошо известен в практических приложениях и не нуждается в дополнительных обоснованиях. После того как все амплитуды определены по формуле (7), аппроксимация коэффициента  $a(t, x)$  приводится к виду

$$\hat{a}(t, x) = A(x) \sin(\omega t + \varphi(x)) + C(x). \quad (9)$$

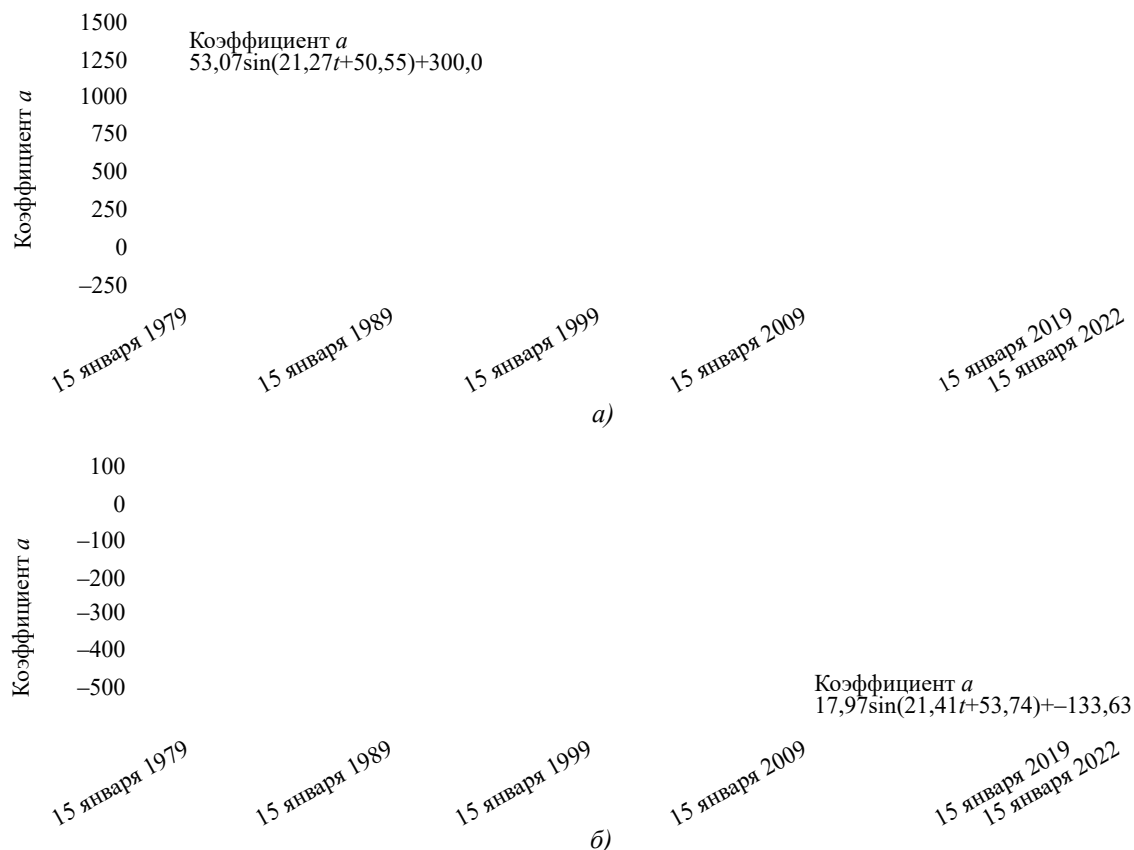
Та же процедура применена для аппроксимации коэффициента диффузии  $b(t, X)$ :

$$\hat{b}(t, x) = D(x) \sin(\omega t + \psi(x)) + F(x). \quad (10)$$

## Результаты исследования

**Анализ коэффициентов уравнения ФПК.** Для уравнения (6) была реализована неявная разностная схема второго порядка аппроксимации [7] со сглаженными по формулам (9), (10) коэффициентами.

На рис. 1 показаны графики коэффициентов  $a(t, X)$  и  $\hat{a}(t, x)$  средние за месяц для период 40 лет. Красным показаны сглаженные кривые  $\hat{a}(t, x)$ , построенные по формулам (7), где соответствующие амплитуды и фазы найдены методом наименьших квадратов. На рис. 1 показаны изменения коэффициентов  $a(t, X)$  и  $\hat{a}(t, x)$  во времени при значениях потоков  $X$ , равных  $X_{\max}$  (рис. 1 а),  $X_{\min}$  (рис. 1 б) и среднему значению по области (рис. 1 в).



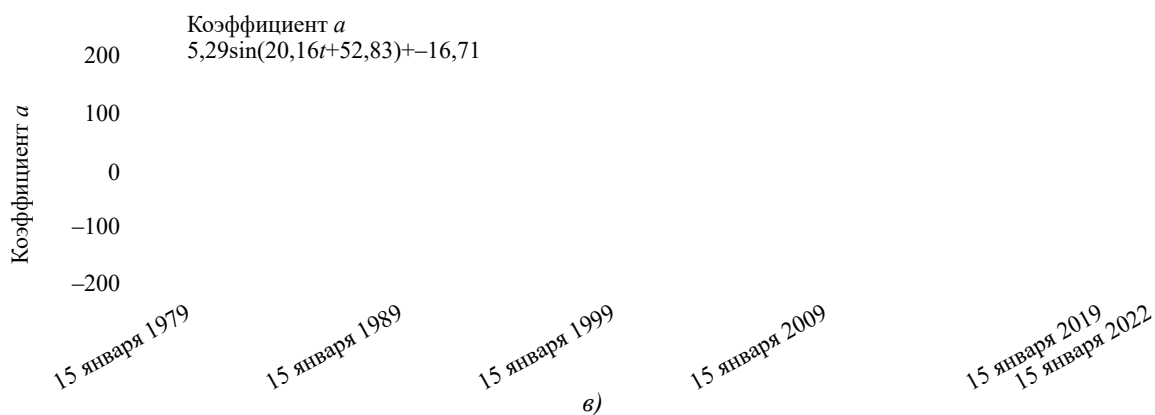
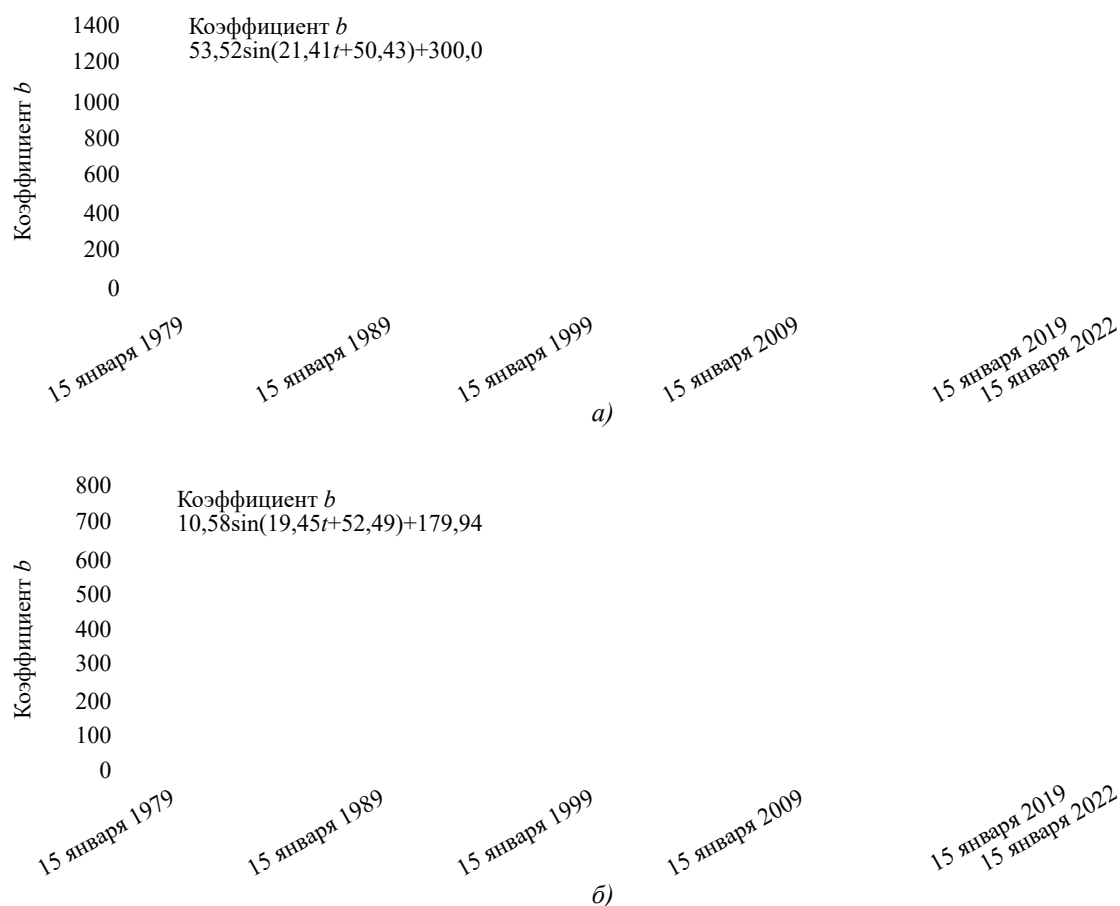


Рис. 1. Изменение во времени коэффициента сноса  $a(t, X)$  (вт/м<sup>2</sup>/сут.) и сглаженного коэффициента  $\hat{a}(t, x)$  (красные кривые) за 40 лет:  $a$  — при значениях потоков  $X_{\max}$ ;  $\hat{a}$  — при значениях потоков  $X_{\min}$ ;  $\bar{a}$  — при средних значениях потоков  $X$

Графики имеют разумную физическую интерпретацию. На первом заметно преобладание «пиков» кривых вверх и достижение значения коэффициента сноса максимума. На втором графике «пики» смотрят вниз, коэффициент сноса достигает минимума. На третьем заметен разброс значений от 200 до -200, где сами коэффициенты в среднем около нуля.

Аналогично выглядят графики коэффициента диффузии  $b(t, X)$  и  $\hat{b}(t, x)$  (рис. 2).



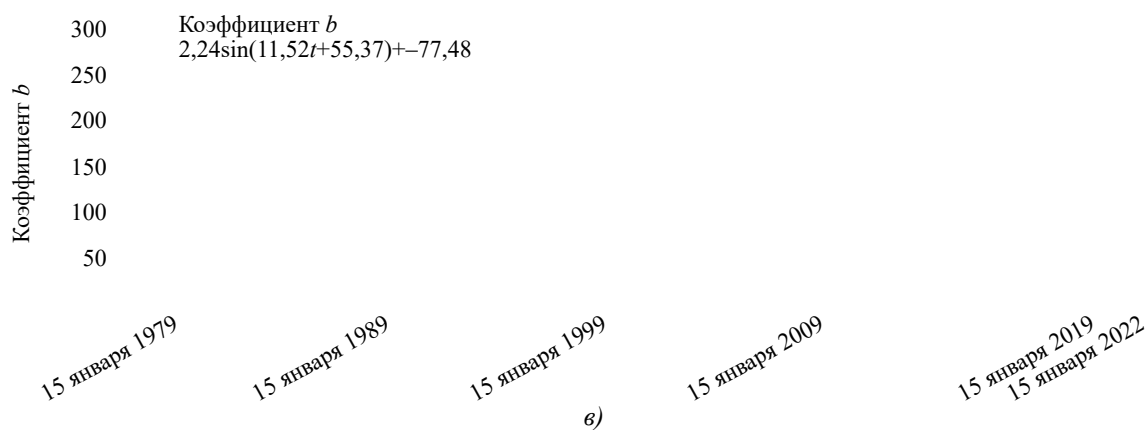
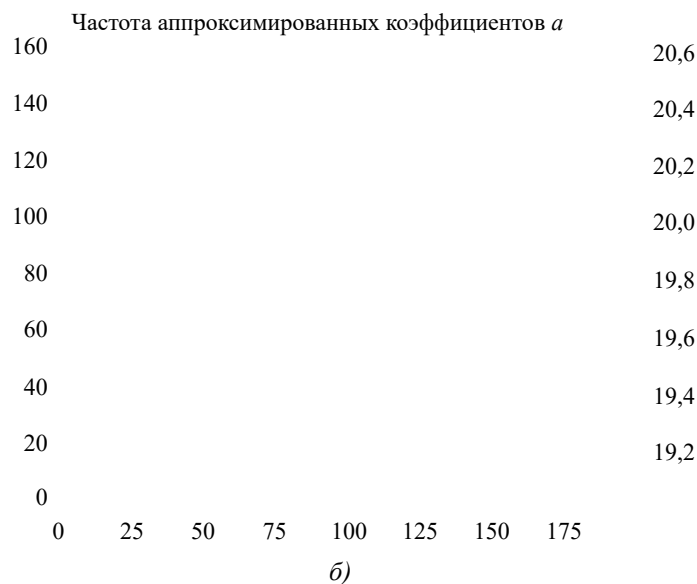
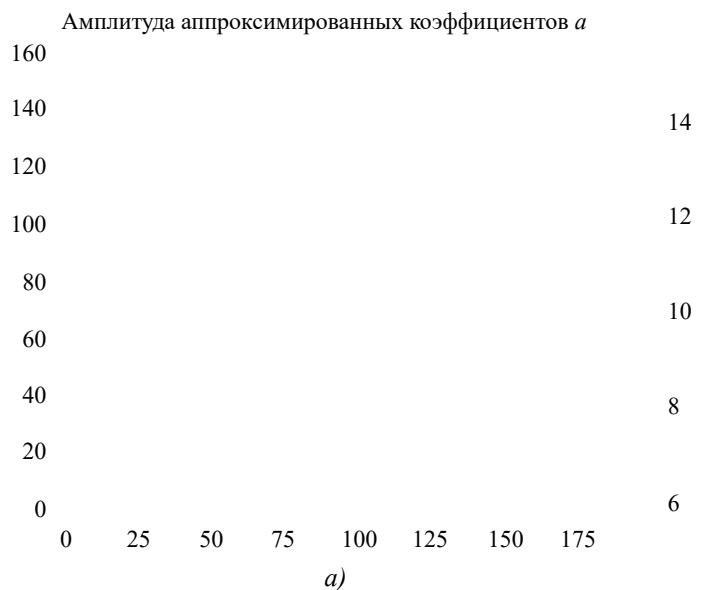


Рис. 2. Изменение во времени коэффициента сноса  $b(t, x)$  (вт/м<sup>2</sup>/сут.) и сглаженного коэффициента  $\hat{b}(t, x)$  (красные кривые) за 40 лет:  $a$  — при значениях потоков  $X_{\max}$ ;  $b$  — при значениях потоков  $X_{\min}$ ;  $v$  — при средних значениях потоков  $X$

По рассчитанным значениям амплитуды, фазы и сдвига в формуле (9) (как функций только пространственных переменных) были построены их карты. Для этого была использована готовая маска карты Северной Атлантики.

На картах хорошо виден Гольфстрим и Северо-Атлантическое течение (к северо-востоку от Исландии), где заметны локальные максимумы амплитуды (рис. 3  $a$ ), фазы (рис. 3  $b$ ) и сдвига (рис. 3  $в$ ).

Аналогичный вид имеют карты для амплитуды и фазы и сдвига коэффициента диффузии  $\hat{b}(t, x)$  (см. формулу (10)), которые приводить не будем.



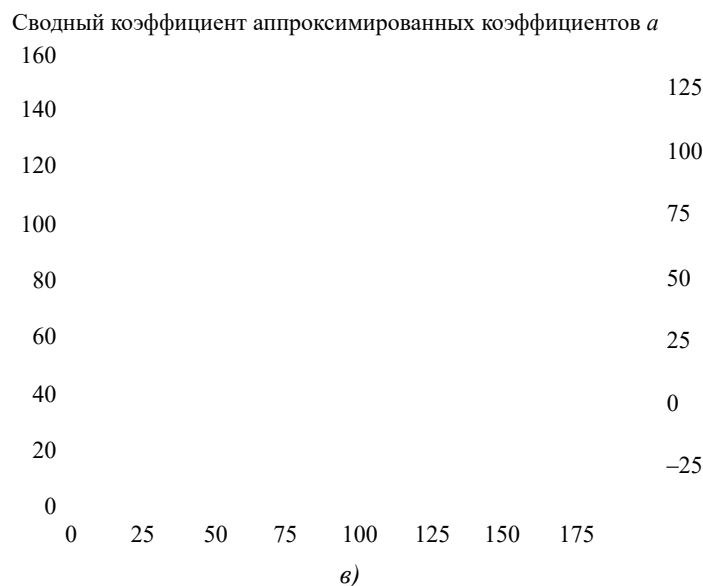


Рис. 3. Пространственное распределение для  $\hat{a}(t, x)$ :  $a$  — амплитуды;  $b$  — фазы;  $c$  — сдвига

**Результаты численных расчетов уравнения ФПК и их анализ.** На рис. 4 показаны результаты численного решения уравнения ФПК на 15 января 1979, 1989, 1999, 2009, 2019 и 2022 годов для среднего значения потоков на соответствующую дату. Начальное условие задавалось по формуле  $p(0, x) = 1 / \left[ (2\pi)^{1/2} \sigma \right] \exp(-x^2 / 2\sigma^2)$  (гауссова начальная плотность), где  $\sigma$  задавалось как разность между максимальным и минимальным значениями потока. Из этих рисунков видно, что графики плотности в целом разумны, хорошо отражают динамику коэффициентов уравнения, их максимальное значение осциллирует от 0,18 до 0,01 и их среднее значение тоже осциллирует от 0 (в начале и в конце расчета) до 50 (месяцев) на середину расчетов.

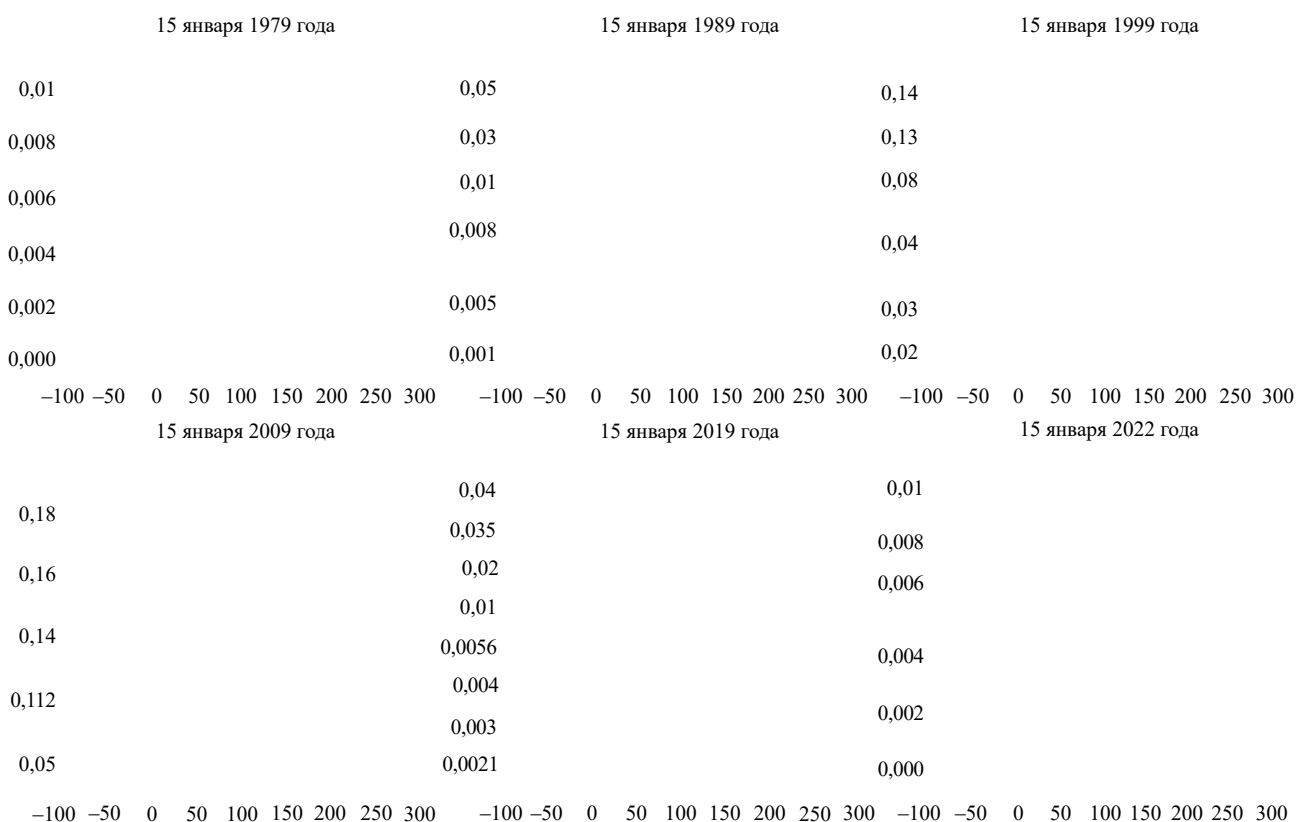


Рис. 4. Решение уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова с аппроксимированными коэффициентами

Графики не симметричны и распределение решения уравнения ФПК сильно отличается от нормального. Пульсации кривых на графиках в их верхней части объясняются грубым пространственным разрешением сетки (один градус — около 100 км), на которой находятся коэффициенты уравнения. Тем не менее эти распределения физически разумны и могут использоваться для приложений при анализе климатических данных и для климатических прогнозов.



**Обсуждение и заключение.** В работе с помощью методов математического моделирования проведен вероятностный анализ распределения потоков тепла в Северной Атлантике за период с 1979 по 2022 годы. Результаты исследования позволили установить количественные и качественные закономерности распределения потоков тепла в изучаемом регионе за рассматриваемый период времени. Полученные результаты могут быть полезными для дальнейшего изучения климатических процессов в Северной Атлантике, а также для разработки стратегий управления ресурсами и защиты окружающей среды.

Следует отметить, что проведенное исследование имеет свои ограничения, включая ограниченность доступных данных и предположения, лежащие в основе примененных моделей. Дальнейшие исследования в этой области могут включать расширение временного диапазона и улучшение методов анализа для получения более точных прогнозов и интерпретаций, например, исследование многомерных (взаимозависимых) величин и нахождение их совместных вероятностных распределений.

### Список литературы

1. Gorshenin A., Osipova A., Belyaev K. Stochastic analysis of air-sea heat fluxes variability in the North Atlantic in 1979–2022 based on reanalysis data. *Computers & Geosciences*. 2023;181(10):105461. <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2023.105461>
2. Cayan D.R. Variability of latent and sensible heat fluxes estimated using bulk formulate. *Atmosphere-Ocean*. 1992;30(1):1–42. <https://doi.org/10.1080/07055900.1992.9649429>
3. Parfitt R., Czaja A., Kwon Y.-O. The impact of SST resolution change in the ERA Interim reanalysis on wintertime Gulf Stream frontal air-sea interaction. *Geophysical Research Letters*. 2017;44(7):3246–3254. <https://doi.org/10.1007/s00376-020-0072-0>
4. Belyaev K., Gorshenin A., Korolev V., Osipova A. Comparison of Statistical Approaches for Reconstructing Random Coefficients in the Problem of Stochastic Modelling of Air-Sea Heat Flux Increments. *Mathematics*. 2024;12(2):228. <https://doi.org/10.3390/math12022288>
5. Simmons A., Hersbach H., Munoz-Sabater J., Nicolas J., Vamborg F., Berrisford P., de Rosnay P., Willett K., Woollen J. Low frequency variability and trends in surface air temperature and humidity from ERA5 and other datasets. *ECMWF Technical Memoranda*. 2021;881. <https://doi.org/10.21957/ly5vbtbfd>
6. Гихман И.И., Скороход А.В. *Введение в теорию случайных процессов*. Москва: Наука, 1977. 465 с.
7. Самарский А.А. *Теория разностных схем*. Москва: Наука, 1977. 656 с.

### References

1. Gorshenin A., Osipova A., Belyaev K. Stochastic analysis of air-sea heat fluxes variability in the North Atlantic in 1979–2022 based on reanalysis data. *Computers & Geosciences*. 2023;181(10):105461. <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2023.105461>
2. Cayan D.R. Variability of latent and sensible heat fluxes estimated using bulk formulate. *Atmosphere-Ocean*. 1992;30(1):1–42. <https://doi.org/10.1080/07055900.1992.9649429>
3. Parfitt R., Czaja A., Kwon Y.-O. The impact of SST resolution change in the ERA Interim reanalysis on wintertime Gulf Stream frontal air-sea interaction. *Geophysical Research Letters*. 2017;44(7):3246–3254. <https://doi.org/10.1007/s00376-020-0072-0>
4. Belyaev K., Gorshenin A., Korolev V., Osipova A. Comparison of Statistical Approaches for Reconstructing Random Coefficients in the Problem of Stochastic Modelling of Air-Sea Heat Flux Increments. *Mathematics*. 2024;12(2):228. <https://doi.org/10.3390/math12022288>
5. Simmons A., Hersbach H., Munoz-Sabater J., Nicolas J., Vamborg F., Berrisford P., de Rosnay P., Willett K., Woollen J. Low frequency variability and trends in surface air temperature and humidity from ERA5 and other datasets. *ECMWF Technical Memoranda*. 2021;881. <https://doi.org/10.21957/ly5vbtbfd>
8. Gikhman I.I., Skorokhod A.V. *Introduction to the Theory of Random Processes*. Dover Publications, 1996. 516 p. (In Russ.).
9. Samarsky A.A. *The Theory of Difference Schemes*. CRC Press, 2001. 786 p. (In Russ.). <https://doi.org/10.1201/9780203908518>

Поступила в редакцию 04.04.2024

Поступила после рецензирования 17.04.2024

Принята к публикации 22.04.2024

Об авторах:

**Беляев Константин Павлович**, ведущий научный сотрудник Института океанологии им. П.П. Ширшова Российской академии наук (РФ, 117997, Москва, Нахимовский просп., 36), [MathNet](#), [ScopusID](#), [ORCID](#), [kosbel55@gmail.com](mailto:kosbel55@gmail.com)



**Кулешов Андрей Александрович**, главный научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук (РФ, 125047, Москва, Миусская пл., 4), [MathNet](#), [ScopusID](#), [ORCID](#), [andrew\\_kuleshov@mail.ru](mailto:andrew_kuleshov@mail.ru)

**Новикова Анастасия Вячеславовна**, студент Филиала Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в Севастополе (РФ, 299001, Севастополь, ул. Героев Севастополя, 7), [novikovaav1@my.msu.ru](mailto:novikovaav1@my.msu.ru)

**Тучкова Наталия Павловна**, старший научный сотрудник Федерального исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук (РФ, 119333, Москва, ул. Вавилова, 40), [MathNet](#), [ScopusID](#), [ORCID](#), [natalia\\_tuchkova@mail.ru](mailto:natalia_tuchkova@mail.ru)

*Заявленный вклад соавторов:*

**К.П. Беляев** — постановка задачи, разработка методов исследования, анализ результатов.

**А.А. Кулешов** — постановка задачи, анализ результатов.

**А.В. Новикова** — проведение численных расчетов, визуализация результатов.

**Н.П. Тучкова** — подготовка геофизических данных.

*Конфликт интересов*

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

*Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

**Received** 04.04.2024

**Received** 17.04.2024

**Accepted** 22.04.2024

*About the Authors:*

**Konstantin P. Belyaev**, Leading Researcher at the P.P. Shirshov Institute of Oceanology of the Russian Academy of Sciences (36, Nakhimovsky Prospekt, Moscow, 117997, RF), [MathNet](#), [ScopusID](#), [ORCID](#), [kosbel55@gmail.com](mailto:kosbel55@gmail.com)

**Andrey A. Kuleshov**, Chief Researcher at the M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences (4, Miusskaya Sq., Moscow, 125047, RF), [MathNet](#), [ScopusID](#), [ORCID](#), [andrew\\_kuleshov@mail.ru](mailto:andrew_kuleshov@mail.ru)

**Anastasia V. Novikova**, Student at the Sevastopol Branch of Moscow State University named after M.V. Lomonosov (7, Heroes of Sevastopol St., Sevastopol, 299001, RF), [novikovaav1@my.msu.ru](mailto:novikovaav1@my.msu.ru)

**Natalia P. Tuchkova**, Senior Researcher at the Federal Research Center “Informatics and Management” of the Russian Academy of Sciences (40, Vavilova St., Moscow, 119333, RF), [MathNet](#), [ScopusID](#), [ORCID](#), [natalia\\_tuchkova@mail.ru](mailto:natalia_tuchkova@mail.ru)

*Contributions of the co-authors:*

**P.B. Konstantin** — problem statement, development of research methods, analysis of results.

**A.A. Kuleshov** — problem statement, analysis of results.

**A.V. Novikova** — numerical calculations, visualization of results.

**N.P. Tuchkova** — preparation of geophysical data.

*Conflict of interest statement*

The authors do not have any conflict of interest.

*All authors have read and approved the final manuscript.*