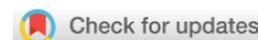
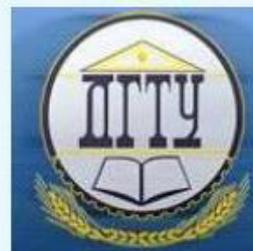


ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ INFORMATION TECHNOLOGY



УДК 004.032.26

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-68-79>


Применение нейронных сетей для решения задачи Дирихле для областей сложной формы

А.В. Галабурдин

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

✉ Galaburdin@mail.ru

Аннотация

Введение. Многие задачи в математике сводятся к решению дифференциальных уравнений в частных производных для областей сложной формы. Не всегда существующие аналитические и численные методы позволяют эффективно получить решение подобных задач. В последнее время достаточно успешно для решения дифференциальных уравнений в частных производных применяются нейронные сети. При этом обычно рассматриваются краевые задачи для областей, имеющих простую форму. В данной работе предпринимается попытка построить нейронную сеть, способную эффективно решать краевые задачи для областей сложной формы.

Материалы и методы. Предлагается метод построения нейронной сети для решения задачи Дирихле для областей сложной формы. В качестве активационных функций принимаются производные от сингулярных решений уравнения Лапласа. Сингулярные точки этих решений распределены по замкнутым кривым, охватывающих границу области. Настройка весов сети сводится к минимизации среднеквадратической ошибки обучения.

Результаты исследования. Представлены результаты решения задач Дирихле для различных областей сложной формы. Результаты представлены в виде таблиц, содержащих точное решение и решение, полученное при помощи нейронной сети. На рисунках представлен вид областей и расположение точек, в которых определялось решение.

Обсуждение и заключения. Представленные результаты свидетельствуют о хорошем совпадении полученного решения с точным. Отмечается, что данный метод легко применим к различным краевым задачам. Указываются способы повышения эффективности подобных нейронных сетей.

Ключевые слова: задача Дирихле для области сложной формы, нейронные сети

Для цитирования. Галабурдин А.В. Применение нейронных сетей для решения задачи Дирихле для областей сложной формы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):68–79.

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-68-79>

Original Theoretical Research

Application of Neural Networks to Solve the Dirichlet Problem for Areas of Complex

Alexander V. Galaburдин

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

✉ Galaburdin@mail.ru

Abstract

Introduction. Many mathematical problems are reduced to solving partial differential equations (PDEs) in domains of complex shapes. Existing analytical and numerical methods do not always provide efficient solutions for such problems. Recently, neural networks have been successfully applied to solve PDEs, typically addressing boundary value problems for domains with simple shapes. This paper attempts to construct a neural network capable of effectively solving boundary value problems for domains of complex shapes.

Materials and Methods. A method for constructing a neural network to solve the Dirichlet problem for regions of complex shape is proposed. Derivatives of singular solutions of the Laplace equation are accepted as activation functions. Singular

points of these solutions are distributed along closed curves encompassing the boundary of the domain. The adjustment of the network weights is reduced to minimizing the root-mean-square error during training.

Results. The results of solving Dirichlet problems for various complex-shaped domains are presented. The results are provided in tables, comparing the exact solution and the solution obtained using the neural network. Figures show the domain shapes and the locations of points where the solutions were determined.

Discussion and Conclusion. The presented results indicate a good agreement between the obtained solution and the exact one. It is noted that this method can be easily applied to various boundary value problems. Methods for enhancing the efficiency of such neural networks are suggested.

Keywords: Dirichlet problem, complex-shaped domain, neural networks

For citation. Galaburdin A.V. Application of Neural Networks to Solve the Dirichlet Problem for Areas of Complex Shape. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):68–79. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-68-79>

Введение. Достаточно часто при моделировании различных явлений используются дифференциальные уравнения в частных производных. При этом области, на которых определены дифференциальные уравнения, часто имеют достаточно сложную форму, которая или не позволяет применять известные методы, или же существенно затрудняет их применение. Быстрое развитие вычислительной техники позволило использовать при решении дифференциальных уравнений в частных производных различные методы машинного обучения.

В последнее время для решения подобных задач все чаще стали привлекать метод нейронных сетей, теоретические основы которого были заложены еще в середине прошлого века в трудах А.Н. Колмогорова [1]. При разработке подобных методов обычно используют хорошо изученные дифференциальные уравнения, решения которых находятся достаточно просто. Многие разработчики для этой цели применяют краевые задачи для уравнения Лапласа.

Так, работа [2] посвящена оценке качества приближённых решений уравнения Лапласа, построенных с помощью нейронных сетей. А в [3] нейронная сеть применяется при решении задачи о прогибе мембраны. В статье [4] рассматривается пример численного решения уравнения Пуассона в двухмерной области методом Галеркина и методом Рунге с глубокими нейронными сетями. Различные подходы к обучению радиально-базисной нейронной сети при решении уравнения Пуассона обсуждаются в [5].

В работе [6] предложена архитектура сети, которая позволяет находить решение уравнений Лапласа, Пуассона, теплопроводности и волновых уравнений для областей прямоугольной формы. Методы решения дифференциальных уравнений в частных производных с использованием радиально-базисных нейронных сетей, сетей прямого распространения и модифицированной нейронной сети рассматриваются в [7]. Используя нейронную сеть персептронного типа с одним скрытым слоем в [8] получена аналитическая аппроксимация решения уравнений в частных производных параболического типа.

Использование радиально-базисных функций при реализации метода конечных элементов с применением нейронной сети исследуется в [9]. В работах [10, 11] при обучении радиально-базисных нейронных сетей варьируются параметры радиально-базисных функций.

Большую популярность приобретает сейчас метод решения уравнений в частных производных, использующий физико-информированную нейронную сеть [12]. В работе [13] описываются алгоритмы применения физико-информированных нейронных сетей при решении задач классической механики.

Методом искусственных нейронных сетей работе [14] решались уравнения Навье-Стокса. В статье [15] исследованы подходы к решению задач теплопереноса на основе нейронной сети персептронного типа.

Приведенные выше примеры наглядно свидетельствуют о широком спектре задач, решаемых с привлечением нейронных сетей, и о разнообразных подходах к применению нейронных сетей при решении различных краевых задач. Нейронные сети чаще применяются к решению краевых задач для областей, имеющих простую форму. Цель данной работы — предложить подход к использованию нейронных сетей при решении краевых задач для областей сложной формы.

Материалы и методы. Рассмотрим задачу Дирихле для плоской области G , ограниченной гладкой замкнутой кривой γ . Одним из эффективных методов, применяемых при решении данной задачи, является метод граничных интегральных уравнений. Для получения соответствующего граничного интегрального уравнения можно воспользоваться формулой Грина:

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial n} U \, d\gamma - \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial n} u \, d\gamma.$$

Здесь U — сингулярное решение уравнения Лапласа.

Используя квадратурную формулу для вычисления интегралов, данное соотношение можно представить в виде

$$u_i = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N C_k \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_k [U]_{ik} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N C_k [u]_k \left[\frac{\partial U}{\partial n} \right]_{ik}, \quad (1)$$

где u_i — значение u в i -ой точке границы γ , C_k — коэффициенты квадратурной формулы.

В данном выражении величины $[U]_{ik}$ и $\left[\frac{\partial U}{\partial n}\right]_{ik}$ можно рассматривать как активационные функции, а $C_k \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_k$ и $C_k [u]_k$ — как веса.

Требую выполнения соотношения (1) в каждой точке границы для всех функций обучающего множества, можно, используя метод наименьших квадратов, получить систему уравнений для определения весов. Однако данные системы уравнений являются плохо обусловленными. Для того, чтобы улучшить обусловленность указанных систем уравнений, можно увеличить сингулярность величин $[U]_{ik}$ и $\left[\frac{\partial U}{\partial n}\right]_{ik}$, сместив контур интегрирования на некоторое расстояние от границы области γ .

Тогда решение задачи Дирихле будем искать в виде:

$$u(x) = \sum_{k=1}^N w_k f(s_k) U(x, \sigma_k) + \sum_{k=1}^N v_k f(s_k) V(x, \tau_k),$$

где $f(s_k)$ — значение неизвестной функции u на границе области; $U(x, \sigma_k)$ и $V(x, \tau_k)$ — активационные функции; σ_k и τ_k точки замкнутых кривых γ_1 и γ_2 , охватывающих границу области γ ; x — точка области G .

Кривые γ_1 и γ_2 подобны контуру γ и получаются из него смещением каждой точки в направлении внешней нормали к границе области на расстояния ε_1 и ε_2 соответственно.

При обучении сети настраиваются веса и определяются величины ε_1 и ε_2 , для чего минимизируется функционал ошибки

$$J(w_k, v_k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^N w_k f_k^j U(x_i, \sigma_k) + v_k f_k^j V(x_i, \tau_k) - f_i^j \right\}^2,$$

где x_i — координата i -ой точки граничного контура γ ; f_i^j — граничное значение j -ой функции обучающего множества в точке x_i .

Из соотношений $\frac{\partial J}{\partial w_m} = 0$ и $\frac{\partial J}{\partial v_m} = 0, m = 1, 2, \dots, N$ получим систему линейных уравнений для определения w_m и v_m .

Значения ε_1 и ε_2 определяются простым перебором. При этом полагается $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + 1$, а значения $\varepsilon_1 = a + hj, j = 1, 2, \dots, L$. Выбирается значение ε_1 , которое обеспечивает лучший результат. После этого все параметры нейронной сети определены и ее настройка завершается.

Оценить точность полученного решения можно, сравнив значения u на границе области, вычисленные с помощью нейронной сети

$$\tilde{u}(s_i) = \sum_{k=1}^N w_k f(s_k) U(s_i, \sigma_k) + \sum_{k=1}^N v_k f(s_k) V(s_i, \tau_k)$$

с заданными граничными условиями $f(s)$.

Определенные параметры сети не всегда обеспечивают желаемую точность полученного с помощью нейронной сети решения. В этом случае нужной точности можно достичь итерационным уточнением полученного результата:

$$\Delta u^o(s_i) = f(s_i), \quad u_t^o(s_i) = f(s_i),$$

$$\Delta v^{n+1}(s_i) = \sum_{k=1}^N w_k \Delta u^n(s_k) U(s_i, \sigma_k) + \sum_{k=1}^N v_k \Delta u^n(s_k) V(s_i, \tau_k),$$

$$\Delta u^{n+1}(s_i) = \Delta u^{n+1}(s_i) - \Delta v^{n+1}(s_i), \quad u_t^{n+1}(s_i) = u_t^{n+1}(s_i) + \Delta u^{n+1}(s_i),$$

$u_t^{n+1}(s_i)$ — значения уточненного решения на границе области.

Процесс уточнения решения продолжается до тех пор, пока или не будет достигнута заданная точность

$$\frac{\|\Delta u^{n+1}(s_i)\|}{\|u_t^{n+1}(s_i)\|} < \delta \quad \text{или же не начнет расти величина} \quad \frac{\|\Delta u^{n+1}(s_i)\|}{\|u_t^{n+1}(s_i)\|}.$$

После этого можно вычислить значение решения в любой точке x области G по формуле:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{k=1}^N w_k u_k u_t(s_k) U(x, \sigma_k) + \sum_{k=1}^N v_k u_t(s_k) V(x, \tau_k),$$

где $u_t(s_k)$ найденные уточненные значения неизвестной функции на границе γ .

В качестве обучающего множества использовались функции, являющиеся решением уравнения Лапласа

$$r^k \cos\left(\text{karccos}\left(\frac{x}{r}\right)\right) + r^k \sin\left(\text{karccos}\left(\frac{x}{r}\right)\right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots, M$.

Причем данные функции задавались в различных системах координат, повернутых друг относительно друга на угол кратный $2\pi/5$.

Результаты исследования. Представленный выше метод был использован при решении задачи Дирихле для областей, граница γ которых задавалась в виде

$$\begin{cases} x = a \cos(t) + g \cos(\infty t), \\ y = b \sin(t) + q \sin(\infty t), \end{cases} t \in [0, 2\pi],$$

где a, b, g, q, ∞ — изменяемые параметры.

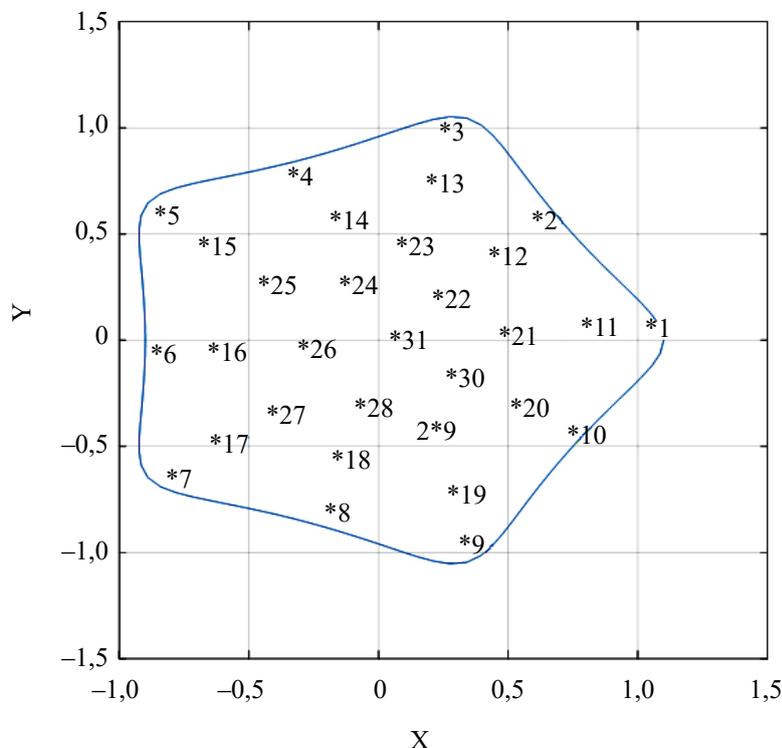


Рис. 1. Область $G1$

На рис. 1 представлена область, граница которой соответствует $a = 1, b = 1, g = 0,1, q = -0,1, \infty = 4$. Звездочками с номерами обозначены места расположения точек области $G1$, в которых вычисляются точные значения решения задачи Дирихле и значения, полученные при помощи нейронной сети при значении $\varepsilon_1 = 5$.

В таблице 1 представлены результаты расчетов, соответствующие решению

$$u = e^{2,45x} \cos 2,45y. \quad (2)$$

В таблице представлены номера точек области $G1$, их координаты, точное решение задачи Дирихле и решение, полученные нейронной сетью.

В таблице 2 представлены результаты расчетов, соответствующие решению

$$u = \frac{x^3 + xy^2 + x^2 - y^2 + 5x + 5}{(x+1)^2 + y^2}. \quad (3)$$

в области $G1$.

На рис. 2 представлена область, соответствующая $a = 1, b = 1, g = 0,1, q = 0,1, \infty = 5$. В таблице 3 и 4 представлены результаты расчетов, соответствующие решению (2) и (3) в области $G2$ при значении $\varepsilon_1 = 6,45$. На рис. 3 представлена область $G3$, соответствующая $a = 1, b = 1, g = 0,2, q = -0,2, \infty = 2$, а результаты расчетов, соответствующие решению (2) и (3) в области $G3$ при $\varepsilon_1 = 6,3$, представлены в таблицах 5 и 6.

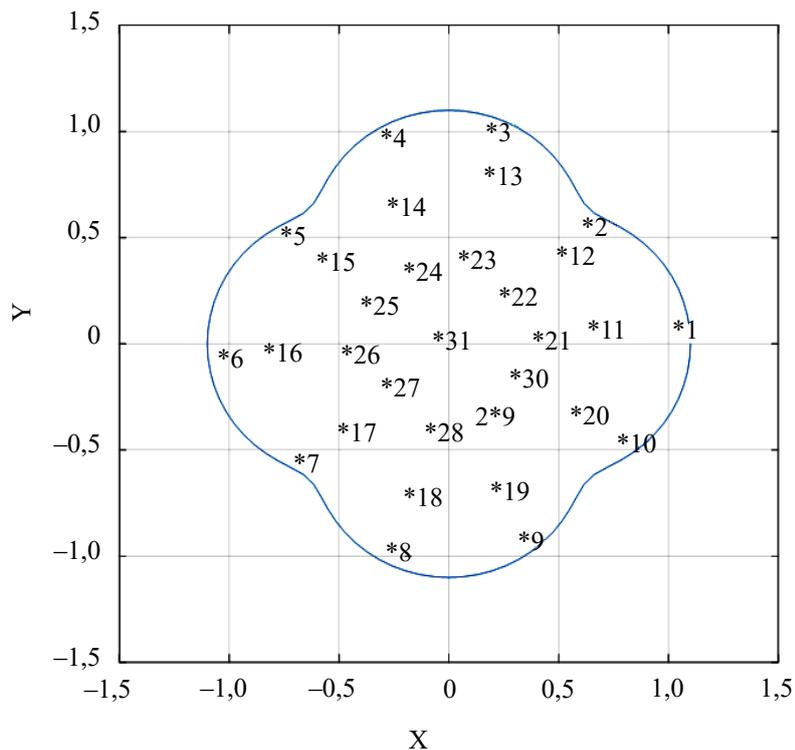


Рис. 2. Область G2

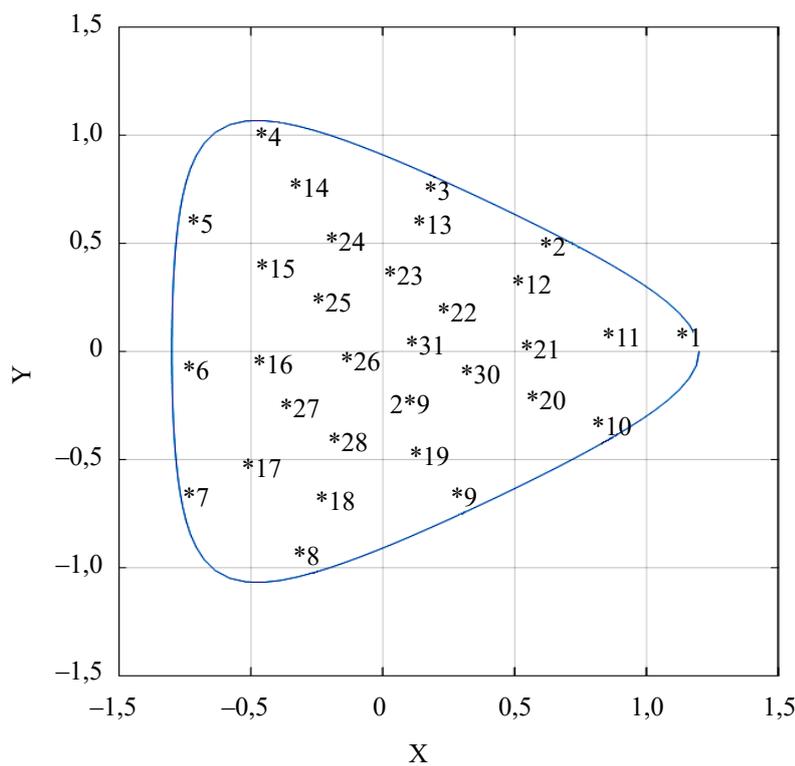


Рис. 3. Область G3

Таблица 1

Результаты расчетов

Номер точки	1	2	3	4	5	6	7
x	1,0351	0,6510	0,2626	-0,3216	-0,8728	-0,8497	-0,8020
y	0,0602	0,5496	1,0030	0,7890	0,5597	-0,0620	-0,6571
Точное решение	12,4909	1,0954	-1,4745	-0,1611	0,0234	0,1233	-0,0055

Продолжение таблицы 1

Решение НС	12,477	1,1020	-1,4730	-0,1630	0,0240	0,1240	-0,0090
Номер точки	8	9	10	11	12	13	14
x	-0,2036	0,3771	0,7239	0,7804	0,4546	0,1996	-0,2272
y	-0,8273	-0,9658	-0,4493	0,0437	0,3866	0,7557	0,5518
Точное решение	0,2675	-1,7992	2,6689	6,7272	1,7790	-0,4516	0,1244
Решение НС	0,2736	-1,7670	2,6512	6,7282	1,7803	-0,4501	0,1245
Номер точки	15	16	17	18	19	20	21
x	-0,6570	-0,5950	-0,6056	-0,1406	0,2827	0,5081	0,4747
y	0,4233	-0,0455	-0,4941	-0,5800	-0,7287	-0,3129	0,0239
Точное решение	0,1017	0,2313	0,0800	0,1058	-0,4254	2,5011	3,1943
Решение НС	0,1023	0,2312	0,0817	0,1020	-0,4318	2,4936	3,1933
Номер точки	22	23	24	25	26	27	28
x	0,2190	0,1240	-0,1139	-0,3981	-0,2894	-0,3700	-0,0650
y	0,1909	0,4589	0,2673	0,2597	-0,0257	-0,2984	-0,2831
Точное решение	1,5265	0,5851	0,6001	0,3033	0,4912	0,3007	0,6557
Решение НС	1,5259	0,5857	0,5997	0,3032	0,4903	0,3003	0,6527
Номер точки	29	30	31				
x	0,1694	0,2492	0,0744				
y	-0,4441	-0,1493	0,0000				
Точное решение	0,7030	1,7196	1,1998				
Решение НС	0,6961	1,7160	1,1980				

Таблица 2

Результаты расчетов

Номер точки	1	2	3	4	5	6	7
x	1,0351	0,6510	0,2626	-0,3216	-0,8728	-0,8497	-0,8020
y	0,0602	0,5496	1,0030	0,7890	0,5597	-0,0620	-0,6571
Точное решение	3,9985	3,8121	3,1740	4,1404	7,0650	9,9034	5,9459
Решение НС	4,0010	3,8210	3,1740	4,1330	7,0860	9,8590	5,9370
Номер точки	8	9	10	11	12	13	14
x	-0,2036	0,3771	0,7239	0,7804	0,4546	0,1996	-0,2272
y	-0,8273	-0,9658	-0,4493	0,0437	0,3866	0,7557	0,5518
Точное решение	3,8595	3,2536	3,8810	4,0331	4,0649	3,7186	4,8021
Решение НС	3,8675	3,2293	3,8793	4,0297	4,0655	3,7168	4,7974
Номер точки	15	16	17	18	19	20	21
x	-0,6570	-0,5950	-0,6056	-0,1406	0,2827	0,5081	0,4747
y	0,4233	-0,0455	-0,4941	-0,5800	-0,7287	-0,3129	0,0239
Точное решение	6,8777	7,6080	6,2579	4,5410	3,7216	4,0829	4,2223
Решение НС	6,8790	7,5937	6,2519	4,5407	3,7254	4,0835	4,2207
Номер точки	22	23	24	25	26	27	28
x	0,2190	0,1240	-0,1139	-0,3981	-0,2894	-0,3700	-0,0650
y	0,1909	0,4589	0,2673	0,2597	-0,0257	-0,2984	-0,2831
Точное решение	4,4902	4,3447	5,1277	6,1527	5,9413	5,9450	4,9773
Решение НС	4,4883	4,3425	5,1237	6,1467	5,9351	5,9387	4,9750
Номер точки	29	30	31				
x	0,1694	0,2492	0,0744				
y	-0,4441	-0,1493	0,0000				

Продолжение таблицы 2

Точное решение	4,3023	4,4661	4,8261				
Решение НС	4,3041	4,4653	4,8236				

Таблица 3

Результаты расчетов

Номер точки	1	2	3	4	5	6	7
x	1,0403	0,6832	0,2463	-0,3558	-0,7924	-1,0403	-0,6832
y	0,0633	0,5522	0,9914	0,9278	0,4881	-0,0633	-0,5522
Точное решение	12,6374	1,1533	-1,3835	-0,2702	0,0526	0,0772	0,0406
Решение НС	12,5300	1,1510	-1,3230	-0,2480	0,0360	0,1000	0,0290
Номер точки	8	9	10	11	12	13	14
x	-0,2463	0,3558	0,7924	0,7591	0,4985	0,1798	-0,2596
y	-0,9914	-0,9278	-0,4881	0,0462	0,4029	0,7235	0,6771
Точное решение	-0,4138	-1,5445	2,5519	6,3819	1,8691	-0,3111	-0,0465
Решение НС	-0,4635	-1,4973	2,5558	6,3787	1,8724	-0,3007	-0,0338
Номер точки	15	16	17	18	19	20	21
x	-0,5782	-0,7591	-0,4985	-0,1798	0,2596	0,5782	0,4217
y	0,3562	-0,0462	-0,4029	-0,7235	-0,6771	-0,3562	0,0257
Точное решение	0,1559	0,1547	0,1625	-0,1290	-0,1660	2,6505	2,8047
Решение НС	0,1554	0,1509	0,1558	-0,1404	-0,1775	2,6392	2,8042
Номер точки	22	23	24	25	26	27	28
x	0,2770	0,0999	-0,1442	-0,3212	-0,4217	-0,2770	-0,0999
y	0,2238	0,4019	0,3761	0,1979	-0,0257	-0,2238	-0,4019
Точное решение	1,6820	0,7064	0,4246	0,4027	0,3551	0,4329	0,4331
Решение НС	1,6832	0,7097	0,4288	0,4031	0,3514	0,4279	0,4261
Номер точки	29	30	31				
x	0,1442	0,3212	-0,0282				
y	-0,3761	-0,1979	0,0000				
Точное решение	0,8608	1,9437	0,9332				
Решение НС	0,8512	1,9369	0,9308				

На рис. 4 и рис. 5 представлены графически полученные результаты решения задачи Дирихле в G_3 для решения (3).

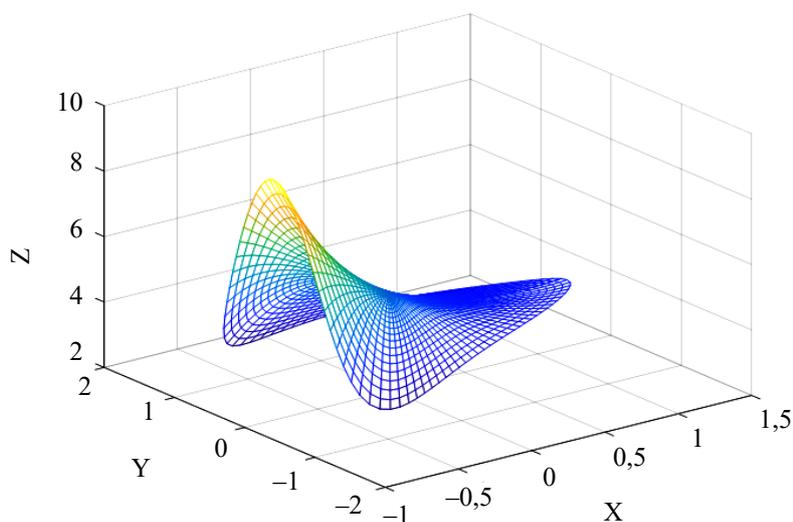


Рис. 4. НС решение в G_3 , соответствующее (3)

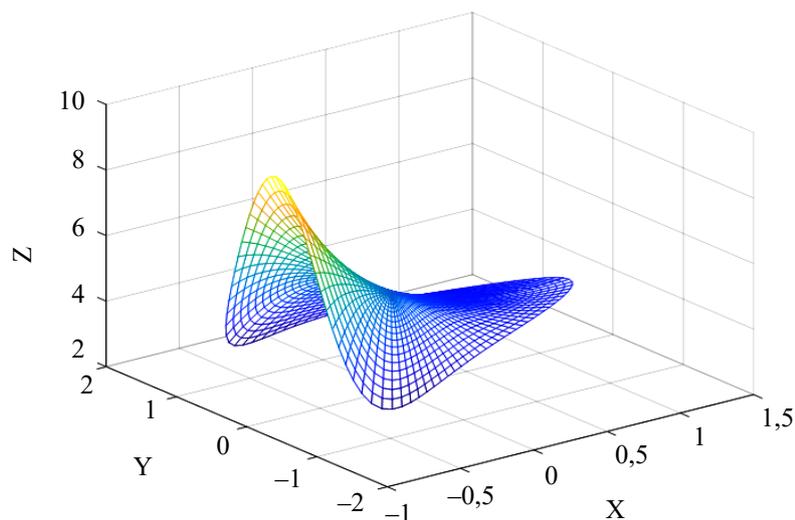


Рис. 5. Точное решение в G3, соответствующее (3)

Таблица 4

Результаты расчетов

Номер точки	1	2	3	4	5	6	7
x	1,0403	0,6832	0,2463	-0,3558	-0,7924	-1,0403	-0,6832
y	0,0633	0,5522	0,9914	0,9278	0,4881	-0,0633	-0,5522
Точное решение	3,9985	3,8023	3,1994	3,5918	7,2276	12,5939	6,2589
Решение НС	3,9990	3,7940	3,1690	3,6220	7,2120	12,488	6,2450
Номер точки	8	9	10	11	12	13	14
x	-0,2463	0,3558	0,7924	0,7591	0,4985	0,1798	-0,2596
y	-0,9914	-0,9278	-0,4881	0,0462	0,4029	0,7235	0,6771
Точное решение	3,2856	3,3263	3,8398	4,0402	4,0187	3,7979	4,4638
Решение НС	3,3086	3,3405	3,8291	4,0326	4,0107	3,7853	4,4515
Номер точки	15	16	17	18	19	20	21
x	-0,5782	-0,7591	-0,4985	-0,1798	0,2596	0,5782	0,4217
y	0,3562	-0,0462	-0,4029	-0,7235	-0,6771	-0,3562	0,0257
Точное решение	6,7562	8,9677	6,1858	4,1803	3,8289	4,0072	4,2753
Решение НС	6,7422	8,9594	6,1844	4,1866	3,8342	4,0038	4,2690
Номер точки	22	23	24	25	26	27	28
x	0,2770	0,0999	-0,1442	-0,3212	-0,4217	-0,2770	-0,0999
y	0,2238	0,4019	0,3761	0,1979	-0,0257	-0,2238	-0,4019
Точное решение	4,3835	4,4688	5,0283	5,9328	6,5585	5,7193	4,8676
Решение НС	4,3760	4,4594	5,0170	5,9234	6,5537	5,7168	4,8675
Номер точки	29	30	31				
x	0,1442	0,3212	-0,0282				
y	-0,3761	-0,1979	0,0000				
Точное решение	4,4325	4,3410	5,0723				
Решение НС	4,4321	4,3377	5,0668				

Таблица 5

Результаты расчетов

Номер точки	1	2	3	4	5	6	7
x	1,1387	0,6789	0,1404	-0,4339	-0,7355	-0,7488	-0,7213
y	0,0610	0,4697	0,7826	1,0207	0,5615	-0,0620	-0,6858

Продолжение таблицы 5

Точное решение	16,0958	2,1517	-0,4790	-0,2769	0,0320	0,1579	-0,0187
Решение НС	16,055	2,1310	-0,4540	-0,2700	0,0420	0,1780	-0,0090
Номер точки	8	9	10	11	12	13	14
x	-0,3119	0,2489	0,7847	0,8836	0,4897	0,0792	-0,3416
y	-0,9953	-0,7209	-0,4028	0,0444	0,3136	0,5423	0,7854
Точное решение	-0,3552	-0,3575	3,7699	8,6620	2,3870	0,2911	-0,1498
Решение НС	-0,3695	-0,3003	3,7043	8,6771	2,3820	0,3008	-0,1382
Номер точки	15	16	17	18	19	20	21
x	-0,5300	-0,4937	-0,5321	-0,2508	0,1566	0,5793	0,5776
y	0,4312	-0,0454	-0,5297	-0,7550	-0,4856	-0,2725	0,0244
Точное решение	0,1343	0,2965	0,0732	-0,1490	0,5459	3,2463	4,109099
Решение НС	0,1459	0,3115	0,0881	-0,1402	0,5636	3,2274	4,1094
Номер точки	22	23	24	25	26	27	28
x	0,2626	0,0059	-0,2309	-0,2835	-0,1876	-0,3050	-0,1775
y	0,1262	0,2540	0,5029	0,2748	-0,0254	-0,3423	-0,4667
Точное решение	1,8128	0,8243	0,1887	0,3903	0,6302	0,3166	0,2683
Решение НС	1,8150	0,8318	0,2004	0,4015	0,6414	0,3311	0,2834
Номер точки	29	30	31				
x	0,0459	0,3328	0,1744				
y	-0,2032	-0,1161	0,0000				
Точное решение	0,9832	2,1689	1,5329				
Решение НС	0,9924	2,1689	1,5373				

Таблица 6

Результаты расчетов

Номер точки	1	2	3	4	5	6	7
x	1,1387	0,6789	0,1404	-0,4339	-0,7355	-0,7488	-0,7213
y	0,0610	0,4697	0,7826	1,0207	0,5615	-0,0620	-0,6858
Точное решение	4,0101	3,8766	3,6988	3,1990	6,4195	8,8530	5,4894
Решение НС	4,0110	3,8840	3,6990	3,2160	6,4370	8,8080	5,4920
Номер точки	8	9	10	11	12	13	14
x	-0,3119	0,2489	0,7847	0,8836	0,4897	0,0792	-0,3416
y	-0,9953	-0,7209	-0,4028	0,0444	0,3136	0,5423	0,7854
Точное решение	3,2886	3,7558	3,9008	4,0079	4,0963	4,2640	4,1824
Решение НС	3,2830	3,7587	3,8986	4,0062	4,0998	4,2648	4,1807
Номер точки	15	16	17	18	19	20	21
x	-0,5300	-0,4937	-0,5321	-0,2508	0,1566	0,5793	0,5776
y	0,4312	-0,0454	-0,5297	-0,7550	-0,4856	-0,2725	0,0244
Точное решение	6,2152	6,9516	5,7855	4,1727	4,2569	4,0602	4,1378
Решение НС	6,2154	6,9378	5,7897	4,1682	4,2566	4,0600	4,1380
Номер точки	22	23	24	25	26	27	28
x	0,2626	0,0059	-0,2309	-0,2835	-0,1876	-0,3050	-0,1775
y	0,1262	0,2540	0,5029	0,2748	-0,0254	-0,3423	-0,4667
Точное решение	4,4559	4,8437	4,9521	5,6575	5,5545	5,5934	4,9136
Решение НС	4,4563	4,8424	4,9498	5,6532	5,5499	5,5904	4,9112
Номер точки	29	30	31				

x	0,0459	0,3328	0,1744			
y	-0,2032	-0,1161	0,0000			
Точное решение	4,8040	4,3626	4,6270			
Решение НС	4,8022	4,3624	4,6263			

Во всех случаях при уточнении решения принималось $M = 75$, $\delta = 0,00025$ и использовалась евклидова норма. В качестве активационных функций брались

$$U(x, y, t, s) = \frac{\partial^6}{\partial^3 t \partial^3 s} Y, \quad V(x, y, t, s) = \frac{\partial^5}{\partial^3 t \partial^2 s} Y - \frac{\partial^5}{\partial^2 t \partial^3 s} Y,$$

$$Y = \ln \frac{1}{R}, \quad R = \sqrt{(x-t)^2 + (y-s)^2}.$$

Обсуждение и заключения. Представленные результаты убедительно доказывают, что предложенный метод построения нейронной сети для решения задачи Дирихле для областей сложной формы весьма эффективен. Он может быть использован и при решении других дифференциальных уравнений в частных производных. Его легко можно перестроить и для решения пространственных задач, для решения краевых задач для многосвязных областей. Его эффективность можно повысить посредством соответствующего подбора активационных функций (за счет подбора параметров ε_1 и ε_2), за счет более оптимального подбора обучающего множества, за счет более оптимальной настройки весов. Все вышеуказанное свидетельствует о достаточно высоком потенциале предложенного метода.

Список литературы

1. Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения. *Доклады Академии наук СССР*. 1957;114(5):953–956.
2. Варшавчик Е.А., Галаяудинова А.Р., Седова Ю.С., Тархов Д.А. Решение дифференциальных уравнений в частных производных для областей с постоянными границами. Искусственный интеллект в решении актуальных социальных и экономических проблем XXI века. В: *Труды Третьей всерос. науч.-практ. конф.* Пермь: Издательство Перм. гос. нац. исслед. ун-та; 2018. С. 294–303.
3. Бортковская М.Р., Каверзнева Т.Т., Семенова Д.А., Шишкина И.А., Тархов Д.А., Удалов П.П. Построение математической модели прогиба мембраны с помощью двухслойного метода Эйлера по дифференциальному уравнению и экспериментальным данным. Искусственный интеллект в решении актуальных социальных и экономических проблем XXI века. В: *Труды Третьей всерос. науч.-практ. конф.* Пермь: Издательство Перм. гос. нац. исслед. ун-та; 2018. С. 194–201.
4. Елифанов А.А. Применение методов глубокого обучения для решения дифференциальных уравнений в частных производных. *Успехи кибернетики*. 2020;1(4):22–28. <https://doi.org/10.51790/2712-9942-2020-1-4-3>
5. Горбаченко В.И., Артюхина Е.В. Два подхода к обучению радиально-базис-ных нейронных сетей при решении дифференциальных уравнений в частных производных. Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. *Информатика и вычислительная техника*. 2007;2:56–66.
6. Корсунов Н.И., Ломакин А.В. Моделирование процессов, описываемых волновым дифференциальным уравнением, с использованием ячеистых нейронных сетей. *Научные ведомости. Серия История. Политология. Экономика. Информатика*. 2014;15(186):103–107.
7. Коваленко А.Н., Черноморец А.А., Петина М.А. О применении нейронных сетей для решения дифференциальных уравнений в частных производных. *Научные ведомости. Серия Экономика. Информатика*. 2017; 258:103–110.
8. Вершинин В.Е., Пономарев Р. Ю. Применение методов нейросетевого моделирования при решении начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. *Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика*. 2017;9(35):132–147. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-132-147>
9. Земскова Ю.Н. Применимость компактно поддерживаемых нейронных сетей для решения дифференциальных уравнений в частных производных методом конечных элементов. *Известия ПГПУ им. В.Г. Беллинского*. 2009;13(17): 44–148.
10. Kansa E.J. Motivation for using radial basis functions to solve PDEs. URL: <http://uahtitan.uah.edu/kansaweb.html> (дата обращения: 16.01.1999).
11. Kansa E.J. Multiquadrics. A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. II. Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Comput. Math. Appl.* 1990;19 (8/9):147–161.
12. Raissia M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*. 2019;378:686–707

13. Зрелова Д.П., Ульянов С.В. Модели физически информированных осевых классических Лагранжевых Гамильтоновых нейронных сетей в глубоком обучении. *Современные информационные технологии и ИТ-образование*. 2022;18(2):310–325. <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.310-325>
14. Chen J., Viquerat J., NACHEM E. U-net Architectures for Fast Prediction of Incompressible Laminar Flows. URL: <https://arxiv.org/pdf/1999.13532.pdf> (дата обращения: 17.05.1999).
15. Cai S., Wang Z., Wang S., Perdikaris P., Karniadakis G. E. Physics-informed neural networks for heat transfer problems. *Journal of Heat Transfer*. 2021;143(6):060801. <https://doi.org/10.1115/1.4050542>

References

1. Kolmogorov A.N. On the Representation of Continuous Functions of Several Variables by Superpositions of Continuous Functions of One Variable and Addition. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 1957; 114(5): 953–956. (in Russ.).
2. Varshavchik E.A., Galyautdinova A.R., Sedova Y. S., Tarkhov D.A. Solving Partial Differential Equations for Regions with Constant Boundaries. Artificial Intelligence in Solving Current Social and Economic Problems of the 21st Century. In: *Proceedings of the Third All-Russian Scientific-Practical Conference*. Perm: Publishing House of Perm State National Research University; 2018. pp. 294–303. (in Russ.).
3. Bortkovskaya M.R., Kaverzneva T.T., Semenova D.A., Shishkina I.A., Tarkhov D.A., Udalov P.P. Construction of a Mathematical Model of Membrane Deflection Using the Two-Layer Euler Method Based on a Differential Equation and Experimental Data. Artificial Intelligence in Solving Current Social and Economic Problems of the 21st Century. In: *Proceedings of the Third All-Russian Scientific-Practical Conference*. Perm: Publishing House of Perm State National Research University; 2018. pp. 194–201. (in Russ.).
4. Epifanov A.A. Application of Deep Learning Methods for Solving Partial Differential Equations. *Advances in Cybernetics*. 2020;1(4): 22–28. (In Russ.). <https://doi.org/10.51790/2712-9942-2020-1-4-3>
5. Gorbatchenko V.I., Artyukhina E.V. Two Approaches to Training Radial Basis Neural Networks for Solving Partial Differential Equations. *Izvestiya Vuzov. Povolzhskiy Region. Technical Sciences. Informatics and Computer Technology*. 2007;2:56–66. (in Russ.).
6. Korsunov N.I., Lomakin A.V. Modelling Processes Described by the Wave Differential Equation Using Cellular Neural Networks. *Scientific Bulletins. Series History. Political Science. Economics. Informatics*. 2014;15(186):103–107. (in Russ.).
7. Kovalenko A.N., Chernomorets A.A., Petina M.A. On the Application of Neural Networks for Solving Partial Differential Equations. *Scientific Bulletins. Series Economics. Informatics*. 2017;258:103–110. (in Russ.).
8. Vershinin V.E., Ponomarev R.Y. Application of Neural Network Modelling Methods for Solving Initial-Boundary Value Problems for Partial Differential Equations. *Bulletin of Tyumen State University. Physical-Mathematical Modelling. Oil, Gas, Energy*. 2017;9(35):132–147. (in Russ.). <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-132-147>
9. Zemskova Y.N. Applicability of Compactly Supported Neural Networks for Solving Partial Differential Equations Using the Finite Element Method. *Izvestiya PGPU im. V.G. Belinskogo*. 2009;13(17):144–148. (in Russ.).
10. Kansa E.J. Motivation for Using Radial Basis Functions to Solve PDEs. URL: <http://uahtitan.uah.edu/kansaweb.html> (accessed: January 16, 1999).
11. Kansa E.J. Multiquadrics. A Scattered Data Approximation Scheme with Applications to Computational Fluid Dynamics. II. Solutions to Parabolic, Hyperbolic, and Elliptic Partial Differential Equations. *Comput. Math. Appl.* 1990; 19(8/9):147–161.
12. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-Informed Neural Networks: A Deep Learning Framework for Solving Forward and Inverse Problems Involving Nonlinear Partial Differential Equations. *Journal of Computational Physics*. 2019;378:686–707.
13. Zrelava D.P., Ulyanov S.V. Models of Physically Informed Classical Lagrangian Hamiltonian Neural Networks in Deep Learning. *Modern Information Technologies and IT Education*. 2022;18(2):310–325. (in Russ.). <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.310-325>
14. Chen J., Viquerat J., NACHEM E. U-net Architectures for Fast Prediction of Incompressible Laminar Flows. URL: <https://arxiv.org/pdf/1999.13532.pdf> (accessed: May 17, 1999).
15. Cai S., Wang Z., Wang S., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-Informed Neural Networks for Heat Transfer Problems. *Journal of Heat Transfer*. 2021;143(6):060801. <https://doi.org/10.1115/1.4050542>

Поступила в редакцию 26.04.2024

Поступила после рецензирования 14.05.2024

Принята к публикации 15.05.2024

Об авторе:

Александр Васильевич Галабурдин, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики Донского государственного технического университета (РФ, 344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID, Galaburdin@mail.ru](mailto:Galaburdin@mail.ru)

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Received 26.04.2024

Revised 14.05.2024

Accepted 15.05.2024

About the Author:

Alexander V. Galaburdin, associate professor of the department Mathematics and informatics, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostovon-Don, 344003, RF), Cand.Sci. (Phys. – math.), associate professor, [ORCID](#), Galaburdin@mail.ru

Conflict of interest statement

The author does not have any conflict of interest.

The author has read and approved the final manuscript.