

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 519.6

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-3-43-59>


Построение разностных схем второго порядка точности для задач диффузии-конвекции мультифракционных взвесей в прибрежных морских системах

В.В. Сидорякина^{1,2} ¹ Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация² Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), г. Таганрог, Российская Федерация✉ cvv9@mail.ru

Аннотация

Введение. Рассматривается начально-краевая задача транспорта мультифракционных взвесей применительно к прибрежным морским системам. Данная задача описывает процессы переноса и осаждения частиц взвеси, а также взаимный переход между её различными фракциями. С целью получения монотонных разностных схем для задач диффузии-конвекции взвесей целесообразно использовать разностные схемы, удовлетворяющие принципу максимума. При построении разностной схемы, для которой будет выполнен принцип максимума, желательно получить второй порядок аппроксимации по пространственной переменной как для внутренних, так и для граничных точек исследуемой области.

Материалы и методы. Данная задача вызывает определенные трудности при рассмотрении границ геометрической области, для которых выполнены граничные условия второго и третьего рода. В этих случаях, чтобы сохранить второй порядок погрешности аппроксимации, вводится «расширенная» сетка (сетка, дополненная фиктивными узлами). Ориентиром служит аппроксимация указанных граничных условий по формуле центральных разностей и исключение из полученных выражений функций концентрации взвеси в фиктивном узле.

Результаты исследования. Построены разностные схемы второго порядка точности для задачи диффузии-конвекции мультифракционных взвесей в прибрежных морских системах.

Обсуждение и заключение. Предложенные схемы не являются абсолютно стабильными и подробный анализ устойчивости и сходимости, связанный с отношением шагов сетки, является важной проблемой, которую автор планирует решать в будущем.

Ключевые слова: прибрежные морские системы, мультифракционная взвесь, задача диффузии-конвекции, разностная схема, погрешность аппроксимации

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23–21–00509, <https://rscf.ru/project/23-21-00509>

Для цитирования. Сидорякина В.В. Построение разностных схем второго порядка точности для задач диффузии-конвекции мультифракционных взвесей в прибрежных морских системах. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(3):43–59. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-3-43-59>

Original Theoretical Research

Construction of Second-Order Finite Difference Schemes for Diffusion-Convection Problems of Multifractional Suspensions in Coastal Marine Systems

Valentina V. Sidoryakina^{1,2} ¹ Don State Technical University, 1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, Russian Federation² Taganrog Institute named after A.P. Chekhov (branch) of RSUE, Taganrog, Russian Federation✉ cvv9@mail.ru

Abstract

Introduction. This paper addresses an initial-boundary value problem for the transport of multifractional suspensions applied to coastal marine systems. This problem describes the processes of transport, deposition of suspension particles,

and the transitions between its various fractions. To obtain monotonic finite difference schemes for diffusion-convection problems of suspensions, it is advisable to use schemes that satisfy the maximum principle. When constructing a finite difference scheme that adheres to the maximum principle, it is desirable to achieve second-order spatial accuracy for both interior and boundary points of the domain under study.

Materials and Methods. This problem presents certain difficulties when considering the boundaries of the geometric domain, where boundary conditions of the second and third kinds are applied. In these cases, to maintain second-order approximation accuracy, an “extended” grid is introduced (a grid supplemented with fictitious nodes). The guideline is the approximation of the given boundary conditions using the central difference formula, with the exclusion of the concentration function at the fictitious node from the resulting expressions.

Results. Second-order accurate finite difference schemes for the diffusion-convection problem of multifractional suspensions in coastal marine systems are constructed.

Discussion and Conclusion. The proposed schemes are not absolutely stable, and a detailed analysis of stability and convergence, particularly concerning the grid step ratio, remains an important problem that the author plans to address in the future.

Keywords: coastal marine systems, multifractional suspension, diffusion-convection problem, difference scheme, approximation error

Funding information. The study was supported by the Russian Science Foundation grant no. 23–21–00509, <https://rscf.ru/project/23-21-00509>

For citation. Sidoryakina V.V. Construction of Second-Order Finite Difference Schemes for Diffusion-Convection Problems of Multifract Suspensions in Coastal Marine Systems. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(3):43–59. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-3-43-59>

Введение. Взвешенное вещество (взвесь) является естественной частью морских систем. Изменения количественного и качественного состава взвеси могут структурировать ландшафт, негативно влиять на экологические сообщества и сократить срок службы инфраструктуры. Для решения данных проблем необходимо четкое понимание процессов транспортировки взвеси с учетом пространственных и временных изменений. Как правило, для этих целей прибегают к методам математического и численного моделирования [1–4].

В рамках данной статьи читателю предлагается ознакомиться с математической моделью транспортировки взвеси, основанной на трехмерном уравнении диффузии-конвекции. В ней учитываются многофракционный состав взвеси, скорость водного потока, гидравлическая крупность, сложная геометрия дна, ветровые напряжения, трение о дно и т. д. [5–8]. Особое внимание уделено аппроксимации предложенной модели во внутренних и граничных точках расчетной области. Предложенные методы позволяют построить разностную схему, аппроксимирующую рассматриваемую модель со вторым порядком точности относительно шагов пространственной сетки с учетом граничных условий второго и третьего рода.

Материалы и методы

1. Постановка задачи диффузии-конвекции мультифракционных взвесей. В прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ рассмотрим трехмерное уравнение диффузии-конвекции с использованием кососимметрической формы представления оператора конвективного переноса [5–7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_r}{\partial t} + C_0 c_r &= D c_r + F_r, \quad r=1,2,3, \quad (x,y,z) \in \bar{G}, \quad \bar{G} = \{0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq L_z\}; \\ C_0 c_r &\equiv \frac{1}{2} \left[u \frac{\partial c_r}{\partial x} + v \frac{\partial c_r}{\partial y} + w \frac{\partial c_r}{\partial z} + w_r' \frac{\partial (u c_r)}{\partial x} + \frac{\partial (v c_r)}{\partial y} + \frac{\partial (w_r' c_r)}{\partial z} \right], \\ D c_r &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{h,r} \frac{\partial c_r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{h,r} \frac{\partial c_r}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{v,r} \frac{\partial c_r}{\partial z} \right), \\ F_1 &= (\alpha_2 c_2(x,y,z,t) - \beta_1 c_1) + \gamma_1 c_1, \\ F_2 &= (\beta_1 c_1(x,y,z,t) - \alpha_2 c_2) + (\alpha_3 c_3(x,y,z,t) - \beta_2 c_2) + \gamma_2 c_2, \\ F_3 &= (\beta_2 c_2(x,y,z,t) - \alpha_3 c_3) + \gamma_3 c_3, \end{aligned} \quad (1)$$

где $c_r, c_r = c_r(x,y,z,t)$ — концентрация частиц в момент времени $t, t \in [0; T]$; u, v, w — компоненты вектора $\vec{U}$ скорости водной среды; $w_r', w_r' = w + w_{g,r}$ — гидравлическая крупность частиц; $\mu_{h,r}, \mu_{v,r}$ — коэффициенты горизонтальной и вертикальной диффузии частиц; F_r — функция источника; α_r, β_r — коэффициенты, описывающие интенсивность превращения частиц одной фракции в другую, $\alpha_r \geq 0, \beta_r \geq 0$; γ_r — мощность внешнего источника частиц. Здесь нижний индекс r указывает на принадлежность частицы к фракции под номером r .

Уравнение (1) дополняется начальными условиями:

$$c_r(x,y,z,0) = c_{r,0}(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \bar{G}; \quad (2)$$

и граничными условиями:

– на боковых гранях параллелепипеда G :

$$c_r = c'_r, \text{ если } u_n < 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial c_r}{\partial \vec{n}} = 0, \text{ если } u_n \geq 0; \quad (4)$$

(u_n — проекция вектора скорости на внешнюю нормаль $\vec{n}$ к границе, c'_r известные значения концентраций);

– на верхнем основании параллелепипеда G :

$$\frac{\partial c_r}{\partial z} = 0; \quad (5)$$

– на нижнем основании параллелепипеда G :

$$\frac{\partial c_r}{\partial z} = -\varepsilon_r c_r. \quad (6)$$

Методами, изложенными в работе [9], выполнено преобразование с «запаздыванием» на временной сетке $\bar{\omega}_t = \{t_n = n\tau, n=0,1,\dots,N_t, N_t\tau=T\}$ и переход к новой системе координат $Ox\eta\theta$, $\theta \in [0;1]$ по формулам:

$$\theta = \frac{z-\eta}{h}, x_0 = x, y_0 = y, \quad (7)$$

где h — глубина; η — высота свободной поверхности относительно свободной поверхности) [10].

Уравнение (1) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_r^n}{\partial t} + C_0 c_r^n &= D c_r^n + F_r^n, r=1,2,3, t_{n-1} < t \leq t_n, n=1,2,\dots,N_t, \\ C_0 c_r^n &\equiv \frac{1}{2} \left[u \frac{\partial c_r^n}{\partial x} + v \frac{\partial c_r^n}{\partial y} + w' \frac{1}{H} \frac{\partial c_r^n}{\partial \theta} + \frac{\partial(u c_r^n)}{\partial x} + \frac{\partial(v c_r^n)}{\partial y} + \frac{1}{H} \frac{\partial(w' c_r^n)}{\partial \theta} \right], \\ D c_r^n &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{h,r} \frac{\partial c_r^n}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{h,r} \frac{\partial c_r^n}{\partial y} \right) + \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu_{v,r} \frac{\partial c_r^n}{\partial \theta} \right), \\ F_1^n &= (\alpha_2 c_2^{n-1}(x,y,\theta,t_{n-1}) - \beta_1 c_1^n) + \gamma_1^n c_1^n, \\ F_2^n &= (\beta_1 c_1^{n-1}(x,y,\theta,t_{n-1}) - \alpha_2 c_2^n) + (\alpha_3 c_3^{n-1}(x,y,\theta,t_{n-1}) - \beta_2 c_2^n) + \gamma_2^n c_2^n, \\ F_3^n &= (\beta_2 c_2^{n-1}(x,y,\theta,t_{n-1}) - \alpha_3 c_3^n) + \gamma_3^n c_3^n. \end{aligned} \quad (8)$$

Начальные и граничные условия (2)–(6) соответствующим образом примут вид:

$$c_r^1(x,y,\theta,0) = c_{r,0}, (x,y,\theta) \in \bar{G}, \quad (9)$$

$$c_r^n(x,y,\theta,t_{n-1}) = c_r^{n-1}(x,y,\theta,t_{n-1}), n=2,\dots,N_t, (x,y,\theta) \in G;$$

$$c_r^n = c'_r, \text{ если } u_n < 0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial c_r^n}{\partial \vec{n}} = 0, \text{ если } u_n \geq 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial c_r^n}{\partial \theta} = 0; \quad (12)$$

$$\frac{\partial c_r^n}{\partial \theta} = -\varepsilon_r c_r^n. \quad (13)$$

2. Разностная схема второго порядка точности для задачи диффузии-конвекции мультифракционных взвесей во внутренних узлах. Предположим существование непрерывных (ограниченных) частных производных четвертого порядка относительно пространственных переменных (x, y, θ) для функций c_r^n , $r=1,2,3$ и непрерывных

частных производных второго порядка относительно временной переменной t , то есть $\frac{\partial^4 c_r^n}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 c_r^n}{\partial y^4}, \frac{\partial^4 c_r^n}{\partial \theta^4}, \frac{\partial^2 c_r^n}{\partial t^2}$ —

непрерывные и, следовательно, ограниченные функции для всех $(x,y,\theta) \in \bar{G}, t_{n-1} \leq t \leq t_n, n=1,\dots,N_t$. Также предпо-

ложим непрерывности частных производных второго порядка: $\frac{\partial^2 \mu_{h,r}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \mu_{h,r}}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \mu_{v,r}}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w'}{\partial \theta^2}$.

Для аппроксимации задачи (8)–(13) используем сетки:

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_x \times \omega_y \times \omega_\theta, \quad \bar{\omega} = \bar{\omega}_x \times \bar{\omega}_y \times \bar{\omega}_\theta, \\ \omega_x &= \{x: x = ih_x; i=1, \dots, N_x-1; (N_x-1)h_x \equiv L_x - h_x\}, \\ \omega_y &= \{y: y = jh_y; j=1, \dots, N_y-1; (N_y-1)h_y \equiv L_y - h_y\}, \\ \omega_\theta &= \{\theta: \theta = kh_\theta; k=1, \dots, N_\theta-1; (N_\theta-1)h_\theta \equiv 1 - h_\theta\}, \\ \bar{\omega}_x &= \{x: x = ih_x; i=0, 1, \dots, N_x; N_x h_x \equiv L_x\}, \\ \bar{\omega}_y &= \{y: y = jh_y; j=0, 1, \dots, N_y; N_y h_y \equiv L_y\}, \\ \bar{\omega}_\theta &= \{\theta: \theta = kh_\theta; k=0, 1, \dots, N_\theta; N_\theta h_\theta \equiv 1\}.\end{aligned}$$

Далее при записи сеточных функций для c_r^n и F_r^n будет использоваться черта над ними. После введенных предположений приходим к аппроксимации уравнения (8):

$$\begin{aligned}& \frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^{n-1}(x_i, y_j, \theta_k)}{\tau} + C_0 \bar{c}_r^n = D \bar{c}_r^n + \bar{F}_r^n, \quad r=1, 2, 3, (x_i, y_j, \theta_k) \in \omega, t_n \in \bar{\omega}_\tau, \\ & C_0 \bar{c}_r^n = \frac{1}{2h_x} (u^n(x_i + 0.5h_x, y_j, \theta_k) \bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, \theta_k) - u^n(x_i - 0.5h_x, y_j, \theta_k) \bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, \theta_k)) + \\ & + \frac{1}{2h_y} (v^n(x_i, y_j + 0.5h_y, \theta_k) \bar{c}_r^n(x_i, y_j + h_y, \theta_k) - v^n(x_i, y_j - 0.5h_y, \theta_k) \bar{c}_r^n(x_i, y_j - h_y, \theta_k)) + \\ & + \frac{1}{2H(x, y)h_\theta} (w_r^n(x_i, y_j, \theta_k + 0.5h_\theta) \bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k + h_\theta) - w_r^n(x_i, y_j, \theta_k - 0.5h_\theta) \bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k - h_\theta)), \\ & D \bar{c}_r^n = \frac{1}{h_x^2} (\mu_{h_x}(x_i + 0.5h_x, y_j, \theta_k) (\bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k)) - \mu_{h_x}(x_i - 0.5h_x, y_j, \theta_k) \cdot \\ & \cdot (\bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, \theta_k))) + \frac{1}{h_y^2} (\mu_{h_y}(x_i, y_j + 0.5h_y, \theta_k) (\bar{c}_r^n(x_i, y_j + h_y, \theta_k) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k)) - \\ & - \mu_{h_y}(x_i, y_j - 0.5h_y, \theta_k) (\bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j - h_y, \theta_k))) + \frac{1}{H^2(x, y)h_\theta^2} (\mu_{v,r}(x_i, y_j, \theta_k + 0.5h_\theta) \cdot \\ & \cdot (\bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k + h_\theta) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k)) - \mu_{v,r}(x_i, y_j, \theta_k - 0.5h_\theta) (\bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k - h_\theta))), \\ & \bar{F}_1^n = (\alpha_2 \bar{c}_2^{n-1}(x, y, \theta, t_{n-1}) - \beta_1 \bar{c}_1^n) + \gamma_1^n \bar{c}_1^n, \\ & \bar{F}_2^n = (\beta_1 \bar{c}_1^{n-1}(x, y, \theta, t_{n-1}) - \alpha_2 \bar{c}_2^n) + (\alpha_3 \bar{c}_3^{n-1}(x, y, \theta, t_{n-1}) - \beta_2 \bar{c}_2^n) + \gamma_2^n \bar{c}_2^n, \\ & \bar{F}_3^n = (\beta_2 \bar{c}_2^{n-1}(x, y, \theta, t_{n-1}) - \alpha_3 \bar{c}_3^n) + \gamma_3^n \bar{c}_3^n.\end{aligned} \quad (14)$$

Убедимся в том, что разностная схема (14) имеет второй порядок точности. С этой целью в уравнение (14) подставим точное решение $c_r^n(x_i, y_j, \theta_k) \equiv c_r(x_i, y_j, \theta_k, t_n)$, $(x_i, y_j, \theta_k) \in G$, $t_n \in \omega_\tau$, $n=0, 1, \dots, N_t$ задачи (3)–(8) и покажем, что для погрешности аппроксимации

$$\psi^n(x_i, y_j, \theta_k) = -\frac{c_r^n(x_i, y_j, \theta_k) - c_r^{n-1}(x_i, y_j, \theta_k)}{\tau} - C_0 c_r^n(x_i, y_j, \theta_k) + D c_r^n(x_i, y_j, \theta_k) + F_r^n(x_i, y_j, \theta_k) \quad (15)$$

выполнено соотношение:

$$\psi^n(x_i, y_j, \theta_k) = O(\tau + h^2), \quad n=0, 1, \dots, N_t, \quad (16)$$

где $h^2 = h_x^2 + h_y^2 + h_\theta^2$.

Представим разложение функции c_r^{n-1} в ряд Тейлора относительно узла $(x_i, y_j, \theta_k, t_n)$:

$$c_r^{n-1}(x_i, y_j, \theta_k, t_{n-1}) = c_r^n(x_i, y_j, \theta_k, t_n) - \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, \theta_k, t_n)}{\partial t} \tau + \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, \theta_k, t_n)}{\partial t^2} \frac{\tau^2}{2} + O(\tau^3). \quad (17)$$

С использованием соотношения (17) для первого слагаемого из левой части (15), находим:

$$\frac{c_r^n(x_i, y_j, \theta_k, t_n) - c_r^{n-1}(x_i, y_j, \theta_k, t_{n-1})}{\tau} = \frac{1}{\tau} \left[c_r^n(x_i, y_j, \theta_k, t_n) - \left(c_r^n(x_i, y_j, \theta_k, t_n) - \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, \theta_k, t_n)}{\partial t} \tau + \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, \theta_k, t_n)}{\partial t^2} \frac{\tau^2}{2} + O(\tau^3) \right) \right] = \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, \theta_k, t_n)}{\partial t} + O(\tau). \quad (18)$$

Для оценки погрешности аппроксимации оператора конвективного переноса из уравнения (15) используются разложения c_r^n, u^n, v^n, w_r^n в ряд Тейлора в окрестности узла $(x_i, y_j, \theta_k, t_n)$:

$$c_r^n(x_i \pm h_x, y_j, \theta_k) = c_r^n(x_i, y_j, \theta_k) \pm \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial x} h_x + \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial x^2} \frac{h_x^2}{2} + O(h_x^3), \quad (19)$$

$$c_r^n(x_i, y_j \pm h_y, \theta_k) = c_r^n(x_i, y_j, \theta_k) \pm \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial y} h_y + \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial y^2} \frac{h_y^2}{2} + O(h_y^3), \quad (20)$$

$$c_r^n(x_i, y_j, \theta_k \pm h_\theta) = c_r^n(x_i, y_j, \theta_k) \pm \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial \theta} h_\theta + \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial \theta^2} \frac{h_\theta^2}{2} + O(h_\theta^3), \quad (21)$$

$$u^n(x_i + 0.5h_x, y_j, \theta_k) + u^n(x_i - 0.5h_x, y_j, \theta_k) = 2u^n(x_i, y_j, \theta_k) + O(h_x^2), \quad (22)$$

$$u^n(x_i + 0.5h_x, y_j, \theta_k) - u^n(x_i - 0.5h_x, y_j, \theta_k) = \frac{\partial u^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial x} h_x + O(h_x^3), \quad (23)$$

$$v^n(x_i, y_j + 0.5h_y, \theta_k) + v^n(x_i, y_j - 0.5h_y, \theta_k) = 2v^n(x_i, y_j, \theta_k) + O(h_y^2), \quad (24)$$

$$v^n(x_i, y_j + 0.5h_y, \theta_k) - v^n(x_i, y_j - 0.5h_y, \theta_k) = \frac{\partial v^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial y} h_y + O(h_y^3), \quad (25)$$

$$w_r^n(x_i, y_j, \theta_k + 0.5h_\theta) + w_r^n(x_i, y_j, \theta_k - 0.5h_\theta) = 2w_r^n(x_i, y_j, \theta_k) + O(h_\theta^2), \quad (26)$$

$$w_r^n(x_i, y_j, \theta_k + 0.5h_\theta) - w_r^n(x_i, y_j, \theta_k - 0.5h_\theta) = \frac{\partial w_r^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial \theta} h_\theta + O(h_\theta^3). \quad (27)$$

При подстановке в выражение (15) для $C_0 c_r^n$ соответствующих выражений (19)–(27), получаем:

$$C_0 c_r^n = \frac{1}{2} \frac{\partial u^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial x} c_r^n(x_i, y_j, \theta_k) + u^n \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial y} c_r^n(x_i, y_j, \theta_k) + v^n(x_i, y_j, \theta_k) \cdot \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial y} + \frac{1}{2H(x_i, y_j)} \frac{\partial w_r^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial \theta} c_r^n(x_i, y_j, \theta_k) + \frac{1}{H(x_i, y_j)} w_r^n(x_i, y_j, \theta_k) \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial \theta} + O(h_x^2 + h_y^2 + h_\theta^2). \quad (28)$$

Для оценки погрешности аппроксимации оператора диффузионного переноса из уравнения (15) используются разложения $c_r^n, \mu_{h,r}, \mu_{v,r}$ в ряд Тейлора в окрестности точки (x_i, y_j, θ_k) :

$$c_r^n(x_i \pm h_x, y_j, \theta_k) = c_r^n(x_i, y_j, \theta_k) \pm \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial x} h_x + \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial x^2} \frac{h_x^2}{2} \pm \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial x^3} \frac{h_x^3}{6} + O(h_x^4), \quad (29)$$

$$c_r^n(x_i, y_j \pm h_y, \theta_k) = c_r^n(x_i, y_j, \theta_k) \pm \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial y} h_y + \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial y^2} \frac{h_y^2}{2} \pm \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial y^3} \frac{h_y^3}{6} + O(h_y^4), \quad (30)$$

$$c_r^n(x_i, y_j, \theta_k \pm h_\theta) = c_r^n(x_i, y_j, \theta_k) \pm \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial \theta} h_\theta + \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial \theta^2} \frac{h_\theta^2}{2} \pm \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial \theta^3} \frac{h_\theta^3}{6} + O(h_\theta^4), \quad (31)$$

$$\mu_{h,r}(x_i + 0.5h_x, y_j, \theta_k) + \mu_{h,r}(x_i - 0.5h_x, y_j, \theta_k) = 2\mu_{h,r}(x_i, y_j, \theta_k) + O(h_x^2), \quad (32)$$

$$\mu_{h,r}(x_i + 0.5h_x, y_j, \theta_k) - \mu_{h,r}(x_i - 0.5h_x, y_j, \theta_k) = \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial x} h_x + O(h_x^3), \quad (33)$$

$$\mu_{h,r}(x_i, y_j + 0.5h_y, \theta_k) + \mu_{h,r}(x_i, y_j - 0.5h_y, \theta_k) = 2\mu_{h,r}(x_i, y_j, \theta_k) + O(h_y^2), \quad (34)$$

$$\mu_{h,r}(x_i, y_j + 0,5h_y, \theta_k) - \mu_{h,r}(x_i, y_j - 0,5h_y, \theta_k) = \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial y} h_y + O(h_y^3), \quad (35)$$

$$\mu_{v,r}(x_i, y_j, \theta_k + 0,5h_\theta) + \mu_{v,r}(x_i, y_j, \theta_k - 0,5h_\theta) = 2\mu_{v,r}(x_i, y_j, \theta_k) + O(h_\theta^2), \quad (36)$$

$$\mu_{v,r}(x_i, y_j, \theta_k + 0,5h_\theta) - \mu_{v,r}(x_i, y_j, \theta_k - 0,5h_\theta) = \frac{\partial \mu_{v,r}(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial \theta} h_\theta + O(h_\theta^3). \quad (37)$$

При подстановке в выражение для Dc_r^n соответствующих выражений из равенств (29)–(37), получаем:

$$\begin{aligned} Dc_r^n = & \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial x} \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial x} + \mu_{h,r}(x_i, y_j, \theta_k) \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial x^2} + \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial y} \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial y} + \\ & + \mu_{h,r}(x_i, y_j, \theta_k) \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial y^2} + \frac{1}{H^2(x_i, y_j)} \left(\frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial \theta} \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial \theta} + \mu_{h,r}(x_i, y_j, \theta_k) \cdot \right. \\ & \left. \cdot \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, \theta_k)}{\partial \theta^2} \right) + O(h_x^2 + h_y^2 + h_\theta^2). \end{aligned} \quad (38)$$

Из равенств (18), (28) и (38) следует, что общий порядок погрешности аппроксимации разностной схемы (14) в узлах сетки $\bar{\omega}_\tau \times \omega$ равен $O(\tau + h^2)$, $h^2 = h_x^2 + h_y^2 + h_\theta^2$.

Отметим, что начальное условие (9) задаётся на сетке $\bar{\omega}_\tau \times \omega$ точно.

3. Разностная схема второго порядка точности для задачи диффузии-конвекции мультифракционных взвесей в граничных узлах. Будем предполагать существование и непрерывность производных

$$\frac{\partial^4 c_r^n}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 c_r^n}{\partial y^4}, \frac{\partial^4 c_r^n}{\partial \theta^4}, \frac{\partial^2 c_r^n}{\partial t^2}, \quad r = 1, 2, 3, \text{ а также непрерывности частных производных второго порядка: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w_r'}{\partial \theta^2},$$

$$\frac{\partial^2 \mu_{h,r}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \mu_{h,r}}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \mu_{v,r}}{\partial \theta^2}.$$

Дополнительно считаем, что существуют и непрерывны смешанные частные производные:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 c_r^n}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 c_r^n}{\partial y \partial t}, \frac{\partial^2 c_r^n}{\partial \theta \partial t}, \frac{\partial^4 c_r^n}{\partial t \partial x^3}, \frac{\partial^4 c_r^n}{\partial t \partial y^3}, \frac{\partial^4 c_r^n}{\partial t \partial \theta^3}, \frac{\partial^4 c_r^n}{\partial y \partial x^3}, \frac{\partial^4 c_r^n}{\partial \theta \partial x^3}, \frac{\partial^4 c_r^n}{\partial x \partial y^3}, \frac{\partial^4 c_r^n}{\partial \theta \partial y^3}, \frac{\partial^4 c_r^n}{\partial x \partial \theta^3}, \frac{\partial^4 c_r^n}{\partial y \partial \theta^3}, \\ & \frac{\partial^5 c_r^n}{\partial y^2 \partial x^3}, \frac{\partial^5 c_r^n}{\partial \theta^2 \partial x^3}, \frac{\partial^5 c_r^n}{\partial x^2 \partial y^3}, \frac{\partial^5 c_r^n}{\partial \theta^2 \partial y^3}, \frac{\partial^5 c_r^n}{\partial x^2 \partial \theta^3}, \frac{\partial^5 c_r^n}{\partial y^2 \partial \theta^3}, \\ & \frac{\partial^2 \mu_{h,r}}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \mu_{h,r}}{\partial x \partial \theta}, \frac{\partial^2 \mu_{h,r}}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 \mu_{h,r}}{\partial \theta \partial x}, \frac{\partial^2 \mu_{v,r}}{\partial y \partial \theta}, \frac{\partial^2 v^n}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 v^n}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 v^n}{\partial y \partial \theta}, \frac{\partial^2 w_r''}{\partial x \partial \theta}, \frac{\partial^2 w_r''}{\partial y \partial \theta}, \frac{\partial^2 w_r''}{\partial \theta \partial x}, \frac{\partial^2 w_r''}{\partial \theta \partial y}. \end{aligned}$$

Будем считать, что выполнены условия:

$$k_{11} \leq \frac{h_x}{h_y} \leq k_{12}, k_{21} \leq \frac{h_\theta}{h_x} \leq k_{22}, k_{31} \leq \frac{h_\theta}{h_y} \leq k_{32}, \quad (39)$$

$k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}, k_{31}, k_{32}$ — некоторые положительные константы.

Для аппроксимации граничных условий введём расширенную сетку:

$$\bar{\omega}^+ = \{(x_i, y_j, \theta_k), i = -1, 0, \dots, N_x + 1, j = -1, 0, \dots, N_y + 1, k = -1, 0, \dots, N_\theta + 1,$$

$$x_i = ih_x; y_j = jh_y; \theta_k = kh_\theta; N_x h_x = L_x; N_y h_y = L_y; N_\theta h_\theta = 1\}.$$

Для узлов сетки $\bar{\omega}^+ \setminus \bar{\omega}$ значения компонент вектора скорости предполагается равным нулю:

$$\bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k) = 0, \text{ если } (x_i, y_j, \theta_k) \in \bar{\omega}^+ \setminus \bar{\omega}. \quad (40)$$

Кроме того, будем считать известными значения компонент вектора скоростей водной среды и гидравлической крупности частиц взвеси в узлах сетки $\bar{\omega}^+ \setminus \bar{\omega}$ с дробными значениями индексов: $u^n(-0,5h_x, y_j, \theta_k)$, $u^n(L_x + 0,5h_x, y_j, \theta_k)$, $v^n(x_i, -0,5h_y, \theta_k)$, $v^n(x_i, L_y + 0,5h_y, \theta_k)$ и $w_r^n(x_i, y_j, -0,5h_\theta)$, $w_r^n(x_i, y_j, 1 + 0,5h_\theta)$.

Граничные условия (10) аппроксимируются следующим образом:

$$\begin{cases} \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k) = c_r', \text{ если } u^n(0,5h_x, y_j, \theta_k) + u^n(-0,5h_x, y_j, \theta_k) > 0, \\ \bar{c}_r^n(L_x, y_j, \theta_k) = c_r', \text{ если } u^n(L_x - 0,5h_x, y_j, \theta_k) + u^n(L_x + 0,5h_x, y_j, \theta_k) < 0, (x_i, y_j, \theta_k) \in \bar{\omega}^+; \end{cases} \quad (41)$$

$$\begin{cases} \bar{c}_r^n(x_i, 0, \theta_k) = c'_r, & \text{если } v^n(x_i, 0, 5h_y, \theta_k) + v^n(x_i, -0, 5h_y, \theta_k) > 0, \\ \bar{c}_r^n(x_i, L_y, \theta_k) = c'_r, & \text{если } v^n(x_i, L_y, -0, 5h_y, \theta_k) + v^n(x_i, L_y, 0, 5h_y, \theta_k) < 0, (x_i, y_j, \theta_k) \in \bar{\omega}^+. \end{cases}$$

В случае потоков на боковых гранях области G , совпадающих по направлению с внешними нормальными к границам, т. е. при выполнении условий

$$\begin{aligned} u^n(0, 5h_x, y_j, \theta_k) + u^n(-0, 5h_x, y_j, \theta_k) < 0, \\ u^n(L_x - 0, 5h_x, y_j, \theta_k) + u^n(L_x + 0, 5h_x, y_j, \theta_k) > 0, (x_i, y_j, \theta_k) \in \bar{\omega}^+; \\ v^n(x_i, 0, 5h_y, \theta_k) + v^n(x_i, -0, 5h_y, \theta_k) < 0, \\ v^n(x_i, L_y - 0, 5h_y, \theta_k) + v^n(x_i, L_y + 0, 5h_y, \theta_k) > 0, (x_i, y_j, \theta_k) \in \bar{\omega}^+ \end{aligned} \quad (42)$$

имеют место граничные условия Неймана.

Перейдём к построению разностной схемы для случая, когда выполнено условие (11).

При $x_i = 0$ условие (11) равносильно следующему:

$$\frac{\partial \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} = 0. \quad (43)$$

На сетке $\bar{\omega}^+$ узел является внутренним (рис. 1).

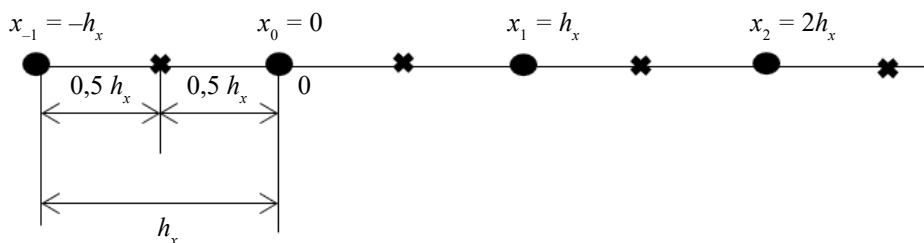


Рис. 1. Построение расширенной сетки на левом конце отрезка $0 \leq x_i \leq L_x$

Разностная схема в узлах $(0, y_j, \theta_k)$ запишется в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^{n-1}(0, y_j, \theta_k)}{\tau} + \frac{1}{2h_x} (u^n(0, 5h_x, y_j, \theta_k) \bar{c}_r^n(h_x, y_j, \theta_k) - u^n(-0, 5h_x, y_j, \theta_k) \bar{c}_r^n(-h_x, y_j, \theta_k)) + \\ & + \frac{1}{2h_y} (v^n(0, y_j + 0, 5h_y, \theta_k) \bar{c}_r^n(0, y_j + h_y, \theta_k) - v^n(0, y_j - 0, 5h_y, \theta_k) \bar{c}_r^n(0, y_j - h_y, \theta_k)) + \frac{1}{2H(0, y_j)h_0} \cdot \\ & \cdot (w_r^n(0, y_j, \theta_k + 0, 5h_0) \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k + h_0) - w_r^n(0, y_j, \theta_k - 0, 5h_0) \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k - h_0)) = \frac{1}{h_x^2} (\mu_{h,r}(0, 5h_x, y_j, \theta_k) \cdot \\ & \cdot (\bar{c}_r^n(h_x, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k)) - \mu_{h,r}(-0, 5h_x, y_j, \theta_k) (\bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^n(-h_x, y_j, \theta_k))) + \frac{1}{h_y^2} \cdot \\ & \cdot (\mu_{h,r}(0, y_j + 0, 5h_y, \theta_k) (\bar{c}_r^n(0, y_j + h_y, \theta_k) - \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k)) - \mu_{h,r}(0, y_j - 0, 5h_y, \theta_k) (\bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k) - \\ & - \bar{c}_r^n(0, y_j - h_y, \theta_k))) + \frac{1}{H^2(0, y_j)h_0^2} (\mu_{v,r}(0, y_j, \theta_k + 0, 5h_0) (\bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k + h_0) - \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k)) - \\ & - \mu_{v,r}(0, y_j, \theta_k - 0, 5h_0) (\bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k - h_0))) + \bar{F}_r^n, \\ & (0, y_j, \theta_k) \in \bar{\omega}^+, r=1, 2, 3, n=1, \dots, N_t. \end{aligned} \quad (44)$$

В своих рассуждениях ориентируемся на аппроксимацию рассматриваемого граничного условия по формуле центральных разностей и исключение из полученного выражения и уравнения (44) значений в фиктивном узле $(-h_x, y_j, \theta_k)$. Функции $\bar{c}_r^n(-h_x, y_j, \theta_k)$ будут входить в выражения:

$$\frac{1}{2h_x} (u^n(0, 5h_x, y_j, \theta_k) \bar{c}_r^n(h_x, y_j, \theta_k) - u^n(-0, 5h_x, y_j, \theta_k) \bar{c}_r^n(-h_x, y_j, \theta_k))$$

$$\frac{1}{h_x^2}(\mu_{h,r}(0,5h_x,y_j,\theta_k)(\bar{c}_r^n(h_x,y_j,\theta_k)-\bar{c}_r^n(0,y_j,\theta_k))-\mu_{h,r}(-0,5h_x,y_j,\theta_k)(\bar{c}_r^n(0,y_j,\theta_k)-\bar{c}_r^n(-h_x,y_j,\theta_k))),$$

которые мы соответственно обозначим как $C_0\bar{c}_r^n|_{x_i=0}$ и $D\bar{c}_r^n|_{x_i=0}$.

Условие (43) запишем в виде:

$$\frac{\bar{c}_r^n(h_x,y_j,\theta_k)-\bar{c}_r^n(-h_x,y_j,\theta_k)}{2h_x}=0 \quad (45)$$

и из него получим:

$$\bar{c}_r^n(-h_x,y_j,\theta_k)=\bar{c}_r^n(h_x,y_j,\theta_k). \quad (46)$$

Подставляя полученное по формуле (46) значение $\bar{c}_r^n(-h_x,y_j,\theta_k)$ в выражение для $C_0\bar{c}_r^n|_{x_i=0}$, находим:

$$C_0\bar{c}_r^n|_{x_i=0} \cong \frac{1}{2h_x}(u^n(0,5h_x,y_j,\theta_k)-u^n(-0,5h_x,y_j,\theta_k))\bar{c}_r^n(h_x,y_j,\theta_k). \quad (47)$$

Предварительные выкладки показали, что при использовании равенства (45) погрешность аппроксимация выражения для $C_0\bar{c}_r^n|_{x_i=0}$ будет $O(h^2)$, а выражения для $D\bar{c}_r^n|_{x_i=0}$ — $O(h_x)$. Чтобы получить общий порядок погрешности аппроксимации $O(h^2)$ разностной схемы, для оператора $D\bar{c}_r^n|_{x_i=0}$ будет предложен иной подход.

При разложении функций $c_r^n(\pm h_x,y_j,\theta_k)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(0,y_j,\theta_k)$ получаем:

$$c_r^n(\pm h_x,y_j,\theta_k)=c_r^n(0,y_j,\theta_k) \pm \frac{\partial c_r^n(0,y_j,\theta_k)}{\partial x}h_x + \frac{\partial^2 c_r^n(0,y_j,\theta_k)}{\partial x^2}\frac{h_x^2}{2} \pm \frac{\partial^3 c_r^n(0,y_j,\theta_k)}{\partial x^3}\frac{h_x^3}{6} + \frac{\partial^4 c_r^n(0,y_j,\theta_k)}{\partial x^4}\frac{h_x^4}{24} + O(h_x^5). \quad (48)$$

При использовании соотношения (48) выпишем в явном виде главный член невязки:

$$\frac{\bar{c}_r^n(h_x,y_j,\theta_k)-\bar{c}_r^n(-h_x,y_j,\theta_k)}{2h_x} = \frac{\partial c_r^n(0,y_j,\theta_k)}{\partial x} + \frac{\partial^3 c_r^n(0,y_j,\theta_k)}{\partial x^3}\frac{h_x^2}{6} + O(h_x^4).$$

Последнее выражение с учётом условия $\frac{\partial c_r^n(0,y_j,\theta_k)}{\partial x}=0$ может быть записано в виде:

$$\frac{\bar{c}_r^n(h_x,y_j,\theta_k)-\bar{c}_r^n(-h_x,y_j,\theta_k)}{2h_x} = \frac{h_x^2}{6}\frac{\partial^3 c_r^n(0,y_j,\theta_k)}{\partial x^3} + O(h_x^4). \quad (49)$$

С помощью равенства (49) найдем значение функции c_r^{n-1} в фиктивном узле $(-h_x,y,\theta)$ из выражения:

$$\bar{c}_r^n(-h_x,y_j,\theta_k)=\bar{c}_r^n(h_x,y_j,\theta_k)-\frac{h_x^3}{3}\frac{\partial^3 c_r^n(0,y_j,\theta_k)}{\partial x^3} + O(h_x^5). \quad (50)$$

Дальнейшие рассуждения будут направлены на аппроксимацию производной $\frac{\partial^3 c_r^n(0,y_j,\theta_k)}{\partial x^3}$.

Обе части уравнения (8) продифференцируем по переменной x и из полученного равенства выразим производную $\frac{\partial^3 \bar{c}_r^n}{\partial x^3}$. Далее здесь перейдем к пределу при $x \rightarrow 0$ и учитывая, что $\frac{\partial c_r^n(0,y_j,\theta_k)}{\partial x}=0$, находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 c_r^n(0,y_j,\theta_k)}{\partial x^3} = & \frac{1}{\mu_{h,r}(0,y_j,\theta_k)} \left[\frac{\partial^2 c_r^n(0,y_j,\theta_k)}{\partial x \partial t} + u^n(0,y_j,\theta_k) \frac{\partial^2 c_r^n(0,y_j,\theta_k)}{\partial x^2} + \frac{\partial v^n(0,y_j,\theta_k)}{\partial x} \frac{\partial c_r^n(0,y_j,\theta_k)}{\partial y} + \right. \\ & + v^n(0,y_j,\theta_k) \frac{\partial^2 c_r^n(0,y_j,\theta_k)}{\partial x \partial y} + \frac{1}{H(0,y_j)} \frac{\partial w_r^n(0,y_j,\theta_k)}{\partial x} \frac{\partial c_r^n(0,y_j,\theta_k)}{\partial \theta} + \frac{1}{H(0,y_j)} w_r^n(0,y_j,\theta_k) \frac{\partial^2 c_r^n(0,y_j,\theta_k)}{\partial x \partial \theta} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^n(0,y_j,\theta_k)}{\partial x^2} c_r^n(0,y_j,\theta_k) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v^n(0,y_j,\theta_k)}{\partial x \partial y} c_r^n(0,y_j,\theta_k) + \frac{1}{2H(0,y_j)} \frac{\partial^2 w_r^n(0,y_j,\theta_k)}{\partial x \partial \theta} c_r^n(0,y_j,\theta_k) - \\ & \left. - \frac{\partial \mu_{h,r}(0,y_j,\theta_k)}{\partial x} \frac{\partial^2 c_r^n(0,y_j,\theta_k)}{\partial x^2} - \frac{\partial \mu_{h,r}(0,y_j,\theta_k)}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{c}_r^n(0,y_j,\theta_k)}{\partial y^2} - \mu_{h,r}(0,y_j,\theta_k) \frac{\partial^3 \bar{c}_r^n}{\partial x \partial y^2} - \frac{1}{H^2(0,y_j)} \right]. \end{aligned} \quad (51)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mu_{v,r}(0, y_j, \theta_k) \partial c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial \mu_{v,r}(0, y_j, \theta_k) \partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial \theta} + \frac{\partial \mu_{v,r}(0, y_j, \theta_k) \partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial \mu_{v,r}(0, y_j, \theta_k) \partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial \theta^2} + \right. \\ \left. + \mu_{v,r}(0, y_j, \theta_k) \frac{\partial^3 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x \partial \theta^2} \right), r=1,2,3, (0, y_j, \theta_k) \in \bar{G}.$$

Очевидным образом, здесь выполнено равенство:

$$\frac{\partial F_1^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} = \frac{\partial F_2^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} = \frac{\partial F_3^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} = 0.$$

Для удобства восприятия текста читателем, аппроксимацию выражения в прямых скобках из правой части выражения (51) проведем для каждого слагаемого отдельно. Изначально отметим, что для коэффициента

$\frac{1}{\mu_{h,r}(0, y_j, \theta_k)}$, стоящего перед данной скобкой, используем выражение:

$$\frac{1}{\mu_{h,r}(0, y_j, \theta_k)} = \frac{2}{\mu_{h,r}(0, 5h_x, y_j, \theta_k) + \mu_{h,r}(-0, 5h_x, y_j, \theta_k)}. \quad (52)$$

Рассмотрим производную $\frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x \partial t}$. Для неё имеем:

$$\frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x \partial t} = \frac{1}{2h_x} \left(\frac{\partial \bar{c}_r^n(h_x, y_j, \theta_k, t_n)}{\partial t} - \frac{\partial \bar{c}_r^n(-h_x, y_j, \theta_k, t_n)}{\partial t} \right) + O(h_x^2) = \frac{1}{2h_x} \cdot \\ \cdot \left(\frac{\bar{c}_r^n(h_x, y_j, \theta_k, t_n + \tau) - \bar{c}_r^n(h_x, y_j, \theta_k, t_n - \tau)}{2\tau} - \frac{\bar{c}_r^n(-h_x, y_j, \theta_k, t_n + \tau) - \bar{c}_r^n(-h_x, y_j, \theta_k, t_n - \tau)}{2\tau} \right) + O(\tau^2) + \\ + O(h_x^2) = \frac{1}{2h_x} \left(\frac{\bar{c}_r^n(h_x, y_j, \theta_k, t_n + \tau) - \bar{c}_r^n(-h_x, y_j, \theta_k, t_n + \tau)}{2h_x} - \frac{\bar{c}_r^n(h_x, y_j, \theta_k, t_n - \tau) - \bar{c}_r^n(-h_x, y_j, \theta_k, t_n - \tau)}{2h_x} \right) + \\ + \frac{1}{2h_x} O(\tau^2) + O(h_x^2). \quad (53)$$

Используя равенство (50), могут быть записаны соотношения:

$$\frac{\bar{c}_r^n(h_x, y_j, \theta_k, t_n \pm \tau) - \bar{c}_r^n(-h_x, y_j, \theta_k, t_n \pm \tau)}{2h_x} = \frac{h_x^2}{6} \frac{\partial^3 c_r^n(0, y_j, \theta_k, t_n \pm \tau)}{\partial x^3} + O(h_x^4). \quad (54)$$

С помощью равенства (54) преобразуем равенство (53):

$$\frac{\partial^2 c_r^n}{\partial x \partial t} = \frac{1}{2\tau} \frac{h_x^2}{6} \left(\frac{\partial^3 c_r^n(0, y_j, \theta_k, t_n + \tau)}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 c_r^n(0, y_j, \theta_k, t_n - \tau)}{\partial x^3} \right) + \frac{1}{2h_x} O(\tau^2) + O(h_x^2).$$

Введя обозначение $\varphi(0, y_j, \theta_k, t_n \pm \tau) = \frac{\partial^3 c_r^n(0, y_j, \theta_k, t_n \pm \tau)}{\partial x^3}$, последнее равенство запишем в виде:

$$\frac{\partial^2 c_r^n}{\partial x \partial t} = \frac{h_x^2}{6} \left(\frac{\varphi(0, y_j, \theta_k, t_n + \tau) - \varphi(0, y_j, \theta_k, t_n - \tau)}{2\tau} \right) + \frac{1}{2h_x} O(\tau^2) + O(h_x^2). \quad (55)$$

Откуда следует:

$$\frac{\partial^2 c_r^n}{\partial x \partial t} = \frac{h_x^2}{6} \left(\frac{\partial \varphi(0, y_j, \theta_k, t_n)}{\partial t} + O(\tau^2) \right) + \frac{1}{2h_x} O(\tau^2) + O(h_x^2).$$

В соответствии с условием Куранта [11] величина τ ограничена и можем считать выполнимым равенство: $\frac{1}{2h_x} O(\tau^2) = O(h_x)$. С учётом сказанного, имеем:

$$\frac{\partial^2 c_r^n}{\partial x \partial t} = \frac{h_x^2}{6} \frac{\partial \varphi(0, y_j, \theta_k, t_n)}{\partial t} + O(h_x). \quad (56)$$

Учитывая соотношение (56) при ограниченности производной $\frac{\partial \varphi(0, y_j, \theta_k, t_n \pm \tau)}{\partial t} = \frac{\partial^4 c_r^n(0, y_j, \theta_k, t_n \pm \tau)}{\partial t \partial x^3}$ с точностью до $O(h_x)$ выражение $\frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x \partial t}$ равно нулю.

Далее покажем, что производная $\frac{\partial^3 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x \partial y^2}$ при аппроксимации с погрешностью $O(h_x)$ также обращаются в ноль.

С учетом неравенства $k_{11} \leq \frac{h_x}{h_y} \leq k_{12}$ из (39), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x \partial y^2} &= \frac{1}{2h_x} \left(\frac{\partial^2 \bar{c}_r^n(h_x, y_j, \theta_k)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \bar{c}_r^n(-h_x, y_j, \theta_k)}{\partial y^2} \right) + O(h_x^2) = \\ &= \frac{1}{2h_x} \left(\frac{\bar{c}_r^n(h_x, y_j + h_y, \theta_k) - 2\bar{c}_r^n(h_x, y_j, \theta_k) + \bar{c}_r^n(h_x, y_j - h_y, \theta_k)}{h_y^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\bar{c}_r^n(-h_x, y_j + h_y, \theta_k) - 2\bar{c}_r^n(-h_x, y_j, \theta_k) + \bar{c}_r^n(-h_x, y_j - h_y, \theta_k)}{h_y^2} + O(h_y^2) \right) + O(h_x^2) = \\ &= \frac{1}{h_y^2} \left(\frac{\bar{c}_r^n(h_x, y_j + h_y, \theta_k) - \bar{c}_r^n(-h_x, y_j + h_y, \theta_k)}{2h_x} - 2 \frac{\bar{c}_r^n(h_x, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^n(-h_x, y_j, \theta_k)}{2h_x} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{c}_r^n(h_x, y_j - h_y, \theta_k) - \bar{c}_r^n(-h_x, y_j - h_y, \theta_k)}{2h_x} \right) + \frac{1}{2h_x} O(h_y^2) + O(h_x^2) = \\ &= \frac{1}{h_y^2} \left(\frac{\bar{c}_r^n(h_x, y_j + h_y, \theta_k) - \bar{c}_r^n(-h_x, y_j + h_y, \theta_k)}{2h_x} - 2 \frac{\bar{c}_r^n(h_x, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^n(-h_x, y_j, \theta_k)}{2h_x} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{c}_r^n(h_x, y_j - h_y, \theta_k) - \bar{c}_r^n(-h_x, y_j - h_y, \theta_k)}{2h_x} \right) + O(h_x^2 + h_y^2). \end{aligned} \quad (57)$$

На основе равенства (57), может быть записано соотношение:

$$\frac{\bar{c}_r^n(h_x, y_j \pm h_y, \theta_k) - \bar{c}_r^n(-h_x, y_j \pm h_y, \theta_k)}{2h_x} = \frac{h_x^2}{6} \frac{\partial^3 c_r^n(0, y_j \pm h_y, \theta_k)}{\partial x^3} + O(h_x^4). \quad (58)$$

Используя равенства (58), преобразуем соотношение (57):

$$\frac{\partial^3 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x \partial y^2} = \frac{1}{h_y^2} \frac{h_x^2}{6} \left(\frac{\partial^3 c_r^n(0, y_j + h_y, \theta_k)}{\partial x^3} - 2 \frac{\partial^3 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 c_r^n(0, y_j - h_y, \theta_k)}{\partial x^3} \right) + O(h_x^2 + h_y^2).$$

Пусть $\varphi(0, y_j \pm h_y, \theta_k) = \frac{\partial^3 c_r^n(0, y_j \pm h_y, \theta_k)}{\partial x^3}$, $\varphi(0, y_j, \theta_k) = \frac{\partial^3 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x^3}$. Тогда последнее равенство может быть записано в виде:

$$\frac{\partial^3 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x \partial y^2} = \frac{h_x^2}{6} \left(\frac{\varphi(0, y_j + h_y, \theta_k) - 2\varphi(0, y_j, \theta_k) + \varphi(0, y_j - h_y, \theta_k)}{h_y^2} \right) + O(h_x^2 + h_y^2). \quad (59)$$

Из равенства (59) следует:

$$\frac{\partial^3 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x \partial y^2} = \frac{h_x^2}{6} \left(\frac{\partial^2 \varphi(0, y_j, \theta_k)}{\partial y^2} + O(h_y^2) \right) + O(h_x^2 + h_y^2).$$

Последнее равенство можно преобразовать к виду:

$$\frac{\partial^3 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x \partial y^2} = \frac{h_x^2}{6} \frac{\partial^2 \varphi(0, y_j, \theta_k)}{\partial y^2} + O(h_x). \quad (60)$$

Учитывая соотношение (60) при ограниченности производной $\frac{\partial^2 \varphi(0, y_j, \theta_k)}{\partial y^2} = \frac{\partial^5 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial y^2 \partial x^3}$ с точностью до $O(h_x)$ выражение $\frac{\partial^3 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x \partial y^2}$ равно нулю.

Проводя аналогичные рассуждения для производных $\frac{\partial^3 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x \partial \theta^2}$, $\frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x \partial \theta}$ можно легко убедиться, что при выполнении неравенств из (40), с точностью до $O(h_x)$ эти производные равны нулю.

Обратимся к производной $\frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x^2}$. Имеем:

$$\frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x^2} = \frac{\bar{c}_r^n(h_x, y_j, \theta_k) - 2\bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k) + \bar{c}_r^n(-h_x, y_j, \theta_k)}{h_x^2} + O(h_x^2). \quad (61)$$

В последнем равенстве значение функции $\bar{c}_r^n$ в фиктивном узле $(-h_x, y_j, \theta_k)$ будет заменено с помощью выражения (50). Получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x^2} &= \frac{1}{h_x^2} \left(\bar{c}_r^n(h_x, y_j, \theta_k) - 2\bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k) + \left(\bar{c}_r^n(h_x, y_j, \theta_k) - \frac{h_x^3}{3} \frac{\partial^3 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x^3} + O(h_x^5) \right) \right) + \\ &+ O(h_x^2) = \frac{1}{h_x^2} \left(2(\bar{c}_r^n(h_x, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k)) - \frac{h_x^3}{3} \frac{\partial^3 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x^3} \right) + O(h_x^2) \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x^2} \cong \frac{2}{h_x^2} (\bar{c}_r^n(h_x, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k)) - \frac{h_x}{3} \frac{\partial^3 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x^3}. \quad (62)$$

Слагаемые $u^n(0, y_j, \theta_k) \frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial \mu_{h,r}(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} \frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x^2}$ из равенства (51), включающие множителем $\frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x^2}$, с использованием соотношения (62), аппроксимируются выражениями:

$$\begin{aligned} u^n(0, y_j, \theta_k) \frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x^2} &\cong \frac{1}{2} (u^n(0, 5h_x, y_j, \theta_k) + u^n(-0, 5h_x, y_j, \theta_k)) \left(\frac{2}{h_x^2} (\bar{c}_r^n(h_x, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k)) - \right. \\ &\left. - \frac{h_x}{3} \frac{\partial^3 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x^3} \right); \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_{h,r}(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} \frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x^2} &\cong \frac{1}{h_x} (\mu_{h,r}(0, 5h_x, y_j, \theta_k) - \mu_{h,r}(-0, 5h_x, y_j, \theta_k)) \left(\frac{2}{h_x^2} (\bar{c}_r^n(h_x, y_j, \theta_k) - \right. \\ &\left. - \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k)) - \frac{h_x}{3} \frac{\partial^3 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x^3} \right). \end{aligned} \quad (64)$$

При аппроксимации производной $\frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial y^2}$, получаем:

$$\frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial y^2} = \frac{\bar{c}_r^n(0, y_j + h_y, \theta_k) - 2\bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k) + \bar{c}_r^n(0, y_j - h_y, \theta_k)}{h_y^2} + O(h_y^2). \quad (65)$$

Аппроксимируя слагаемое $\frac{\partial \mu_{h,r}(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} \frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial y^2}$ из равенства (51), включающее множителем $\frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial y^2}$, с использованием соотношения (65), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_{h,r}(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} \frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial y^2} &\cong \frac{1}{h_x h_y^2} (\mu_{h,r}(0, 5h_x, y_j, \theta_k) - \mu_{h,r}(-0, 5h_x, y_j, \theta_k)) (\bar{c}_r^n(0, y_j + h_y, \theta_k) - \\ &- 2\bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k) + \bar{c}_r^n(0, y_j - h_y, \theta_k)). \end{aligned} \quad (66)$$

Аппроксимация вида (66) выполнена с точностью $O(h_x)$. В самом деле, не сложно убедиться:

$$\bar{c}_r^n(0, y_j + h_y, \theta_k) - 2\bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k) + \bar{c}_r^n(0, y_j - h_y, \theta_k) = \frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial y^2} h_y^2 + O(h_y^3), \quad (67)$$

$$\mu_{h,r}(0, 5h_x, y_j, \theta_k) - \mu_{h,r}(-0, 5h_x, y_j, \theta_k) = \frac{\partial \mu_{h,r}(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} h_x + O(h_x^2). \quad (68)$$

С учётом равенств (67), (68) для соотношения (66), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_{h,r}(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} \frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial y^2} &= \frac{1}{h_x h_y^2} \left(\frac{\partial \mu_{h,r}(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} h_x + O(h_x^3) \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial y^2} h_y^2 + O(h_y^3) \right) = \\ &= \frac{\partial \mu_{h,r}(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial y^2} + O(h_x). \end{aligned} \quad (69)$$

При аппроксимации производной $\frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial \theta^2}$, получаем:

$$\frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial \theta^2} = \frac{\bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k + h_0) - 2\bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k) + \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k - h_0)}{h_0^2} + O(h_0^2). \quad (70)$$

Тогда для слагаемого $\frac{1}{H^2(0, y_j)} \frac{\partial \mu_{v,r}(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} \frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial \theta^2}$ из равенства (51), включающего множителем $\frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial \theta^2}$, находим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{H^2(0, y_j)} \frac{\partial \mu_{v,r}(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} \frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial \theta^2} &\cong \frac{1}{h_x h_0^2 H^2(0, y_j)} (\mu_{v,r}(0, 5h_x, y_j, \theta_k) - \mu_{v,r}(-0, 5h_x, y_j, \theta_k)) \cdot \\ &\cdot (\bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k + h_0) - 2\bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k) + \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k - h_0)). \end{aligned} \quad (71)$$

Погрешность аппроксимации выражения $\frac{1}{H^2(0, y_j)} \frac{\partial \mu_{v,r}(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} \frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial \theta^2}$ соотношением (71), есть $O(h_x)$. В самом деле, с учётом равенства

$$\bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k + h_0) - 2\bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k) + \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k - h_0) = 2 \frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial \theta^2} h_0^2 + O(h_0^3), \quad (72)$$

получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{H^2(0, y_j)} \frac{\partial \mu_{v,r}(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} \frac{\partial^2 c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial \theta^2} &= \frac{1}{h_x h_0^2 H^2(0, y_j)} \left(\frac{\partial \mu_{h,r}(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} h_x + O(h_x^3) \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial \theta^2} h_0^2 + \right. \\ &\left. + O(h_0^3) \right) = \frac{\partial \mu_{h,r}(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial \theta^2} + O(h_x). \end{aligned} \quad (73)$$

Далее рассмотрим производную $\frac{\partial c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial y}$. При её аппроксимации центральными разностями получаем:

$$\frac{\partial c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial y} = \frac{\bar{c}_r^n(0, y_j + h_y, \theta_k) - \bar{c}_r^n(0, y_j - h_y, \theta_k)}{2h_y} + O(h_y^2). \quad (74)$$

Тогда для слагаемого $\frac{\partial v^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} \frac{\partial c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial y}$ из равенства (51), включающего множителем $\frac{\partial c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial y}$, находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} \frac{\partial c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial y} &\cong \frac{1}{2h_x h_y} (v^n(0, 5h_x, y_j, \theta_k) - v^n(-0, 5h_x, y_j, \theta_k)) (\bar{c}_r^n(0, y_j + h_y, \theta_k) - \\ &- \bar{c}_r^n(0, y_j - h_y, \theta_k)). \end{aligned} \quad (75)$$

Здесь

$$\frac{\partial v^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} = \frac{v^n(0, 5h_x, y_j, \theta_k) - v^n(-0, 5h_x, y_j, \theta_k)}{h_x} + O(h_x^2). \quad (76)$$

Несложно убедиться, что погрешность аппроксимации для выражения $\frac{\partial v^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} \frac{\partial c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial y}$, выполненная соотношением (75), есть $O(h_x^2)$ и имеет место равенство:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} \frac{\partial c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial y} &= \frac{1}{2h_x h_y} \left(\frac{\partial v^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} h_x + O(h_x^3) \right) \left(2 \frac{\partial \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial y} h_y + O(h_y^3) \right) = \\ &= 2 \frac{\partial v^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} \frac{\partial \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial y} + O(h_x^2). \end{aligned} \quad (77)$$

При аппроксимации производной $\frac{\partial c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial \theta}$, получаем:

$$\frac{\partial c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial \theta} = \frac{\bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k + h_0) - \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k - h_0)}{2h_0} + O(h_0^2). \quad (78)$$

Тогда для слагаемых $\frac{1}{H(0, y_j)} \frac{\partial w_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} \frac{\partial c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial \theta}$ и $\frac{1}{H^2(0, y_j)} \frac{\partial^2 \mu_{v,r}(0, y_j, \theta_k)}{\partial x \partial \theta} \frac{\partial c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial \theta}$ из равенства (51)

включающих множителем $\frac{\partial c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial \theta}$, находим:

$$\frac{1}{H(0, y_j)} \frac{\partial w_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} \frac{\partial c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial \theta} \cong \frac{1}{2h_x h_0 H(0, y_j)} (w_r^n(0, 5h_x, y_j, \theta_k) - w_r^n(-0, 5h_x, y_j, \theta_k)) \cdot (\bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k + h_0) - \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k - h_0)); \quad (79)$$

$$\frac{1}{H^2(0, y_j)} \frac{\partial^2 \mu_{v,r}(0, y_j, \theta_k)}{\partial x \partial \theta} \frac{\partial c_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial \theta} \cong \frac{1}{2h_x h_0^2 H^2(0, y_j)} [(\mu_{v,r}(0, 5h_x, y_j, \theta_k + 0, 5h_0) - \mu_{v,r}(-0, 5h_x, y_j, \theta_k + 0, 5h_0)) - (\mu_{v,r}(0, 5h_x, y_j, \theta_k - 0, 5h_0) - \mu_{v,r}(-0, 5h_x, y_j, \theta_k - 0, 5h_0))] \cdot (\bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k + h_0) - \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k - h_0)). \quad (80)$$

Здесь при записи соотношений (79), (80) использовались равенства:

$$\frac{\partial w_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x} = \frac{w_r^n(0, 5h_x, y_j, \theta_k) - w_r^n(-0, 5h_x, y_j, \theta_k)}{h_x} + O(h_x^2), \quad (81)$$

$$\frac{\partial^2 \mu_{v,r}(0, y_j, \theta_k)}{\partial x \partial \theta} = \frac{1}{h_0} \left(\frac{\mu_{v,r}(0, 5h_x, y_j, \theta_k + 0, 5h_0) - \mu_{v,r}(-0, 5h_x, y_j, \theta_k + 0, 5h_0)}{h_x} - \frac{\mu_{v,r}(0, 5h_x, y_j, \theta_k - 0, 5h_0) - \mu_{v,r}(-0, 5h_x, y_j, \theta_k - 0, 5h_0)}{h_x} \right) + \frac{1}{h_x} O(h_0^2) + O(h_x^2). \quad (82)$$

С учётом неравенства $k_{21} \leq \frac{h_0}{h_x} \leq k_{22}$ из (39) можем утверждать, что аппроксимация вида (80) выполнена с погрешностью $O(h_x)$.

При аппроксимации $c_r^n(0, y_j, \theta_k)$, заменяем её на сеточный аналог $\bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k)$.

Тогда для слагаемых $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x^2} c_r^n(0, y_j, \theta_k)$, $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 v^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x \partial y} c_r^n(0, y_j, \theta_k)$ и $\frac{1}{2H(0, y_j)} \frac{\partial^2 w_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x \partial \theta} c_r^n(0, y_j, \theta_k)$,

включающих множителем $\bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k)$, находим:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x^2} c_r^n(0, y_j, \theta_k) \cong \frac{1}{0, 5h_x^2 H(0, y_j)} (u^n(0, 5h_x, y_j, \theta_k) - 2u^n(0, y_j, \theta_k) + u^n(-0, 5h_x, y_j, \theta_k)) \cdot \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k); \quad (83)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 v^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x \partial y} c_r^n(0, y_j, \theta_k) \cong \frac{1}{2h_x h_y} [(v^n(0, 5h_x, y_j + 0, 5h_y, \theta_k) - v^n(-0, 5h_x, y_j + 0, 5h_y, \theta_k)) - (v^n(0, 5h_x, y_j - 0, 5h_y, \theta_k) - v^n(-0, 5h_x, y_j - 0, 5h_y, \theta_k))] \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k). \quad (84)$$

$$\frac{1}{2H(0, y_j)} \frac{\partial^2 w_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x \partial \theta} c_r^n(0, y_j, \theta_k) \cong \frac{1}{2h_x h_0 H(0, y_j)} [(w_r^n(0, 5h_x, y, \theta_k + 0, 5h_0) - w_r^n(-0, 5h_x, y, \theta_k + 0, 5h_0)) - (w_r^n(0, 5h_x, y, \theta_k - 0, 5h_0) - w_r^n(-0, 5h_x, y, \theta_k - 0, 5h_0))] \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k). \quad (85)$$

Очевидно, что выражение (83) получено с точностью $O(h_x^2)$.

При записи соотношений (84) и (85) использовались равенства:

$$\frac{\partial^2 v^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{h_y} \left(\frac{v^n(0, 5h_x, y_j + 0, 5h_y, \theta_k) - v^n(-0, 5h_x, y_j + 0, 5h_y, \theta_k)}{h_x} - \frac{v^n(0, 5h_x, y_j - 0, 5h_y, \theta_k) - v^n(-0, 5h_x, y_j - 0, 5h_y, \theta_k)}{h_x} \right) + \frac{1}{h_x} O(h_y^2) + O(h_x^2), \quad (86)$$

$$\frac{\partial^2 w_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x \partial \theta} = \frac{1}{h_\theta} \left(\frac{w_r^n(0, 5h_x, y_j, \theta_k + 0, 5h_\theta) - w_r^n(-0, 5h_x, y_j, \theta_k + 0, 5h_\theta)}{h_x} - \frac{w_r^n(0, 5h_x, y_j, \theta_k - 0, 5h_\theta) - w_r^n(-0, 5h_x, y_j, \theta_k - 0, 5h_\theta)}{h_x} \right) + \frac{1}{h_x} O(h_\theta^2) + O(h_x^2). \quad (87)$$

С учётом равенств (86) и (87) получаем, что погрешность аппроксимаций (84) и (85) есть $O(h_x)$.

Таким образом, получены аппроксимации всех слагаемых, находящихся в скобке правой части равенства (51). В результате подстановки в равенство (51) аппроксимаций, выполненных выражениями (63), (64), (66), (71), (75), (79), (80), (83)–(85) с погрешностью $O(h_x)$ (или выше), получаем:

$$\frac{\partial^3 \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k)}{\partial x^3} = \mathfrak{G}_1 + O(h_x), \quad (88)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_1 = & \mathfrak{G}_{10}(\mathfrak{G}_{11} \bar{c}(h_x, y_j, \theta_k) + \mathfrak{G}_{12} \bar{c}(0, y_j + h_y, \theta_k) + \mathfrak{G}_{13} \bar{c}(0, y_j - h_y, \theta_k) + \mathfrak{G}_{14} \bar{c}(0, y_j, \theta_k + h_\theta) + \mathfrak{G}_{15} \bar{c}(0, y_j, \theta_k - h_\theta) + \\ & + \mathfrak{G}_{16} \bar{c}(0, y_j, \theta_k)), \\ \mathfrak{G}_{10} = & \frac{3(\mu_{h,r}(0, 5h_x, y_j, \theta_k) + \mu_{h,r}(-0, 5h_x, y_j, \theta_k))}{4\mu_{h,r}(0, 5h_x, y_j, \theta_k) + 2\mu_{h,r}(-0, 5h_x, y_j, \theta_k) - (u^n(0, 5h_x, y_j, \theta_k) + u^n(-0, 5h_x, y_j, \theta_k))h_x}; \\ \mathfrak{G}_{11} = & \frac{1}{h_x^2} (u^n(0, 5h_x, y_j, \theta_k) + u^n(-0, 5h_x, y_j, \theta_k)) - \frac{2}{h_x^3} (\mu_{h,r}(0, 5h_x, y_j, \theta_k) - \mu_{h,r}(-0, 5h_x, y_j, \theta_k)); \\ \mathfrak{G}_{12} = & \frac{1}{h_x^2} (u^n(0, 5h_x, y_j, \theta_k) + u^n(-0, 5h_x, y_j, \theta_k)) - \frac{2}{h_x^3} (\mu_{h,r}(0, 5h_x, y_j, \theta_k) - \mu_{h,r}(-0, 5h_x, y_j, \theta_k)); \\ \mathfrak{G}_{13} = & \frac{1}{2h_x h_y} (v^n(0, 5h_x, y_j, \theta_k) - v^n(-0, 5h_x, y_j, \theta_k)) - \frac{1}{h_x h_y^2} (\mu_{h,r}(0, 5h_x, y_j, \theta_k) - \mu_{v,r}(-0, 5h_x, y_j, \theta_k)); \\ \mathfrak{G}_{14} = & -\frac{1}{2h_x h_y} (v^n(0, 5h_x, y_j, \theta_k) - v^n(-0, 5h_x, y_j, \theta_k)) - \frac{1}{h_x h_y^2} (\mu_{h,r}(0, 5h_x, y_j, \theta_k) - \mu_{v,r}(-0, 5h_x, y_j, \theta_k)); \\ \mathfrak{G}_{15} = & \frac{1}{2h_x h_\theta H(0, y_j)} (w_r^n(0, 5h_x, y_j, \theta_k) - w_r^n(-0, 5h_x, y_j, \theta_k)) - \frac{1}{h_x h_\theta^2 H^2(0, y_j)} (\mu_{v,r}(0, 5h_x, y_j, \theta_k) - \\ & - \mu_{v,r}(-0, 5h_x, y_j, \theta_k)) - \frac{1}{2h_x h_\theta^2 H^2(0, y_j)} (\mu_{v,r}(0, 5h_x, y_j, \theta_k + 0, 5h_\theta) - \mu_{v,r}(-0, 5h_x, y_j, \theta_k + 0, 5h_\theta) - \\ & - \mu_{v,r}(0, 5h_x, y_j, \theta_k - 0, 5h_\theta) + \mu_{v,r}(-0, 5h_x, y_j, \theta_k - 0, 5h_\theta)); \\ \mathfrak{G}_{16} = & -\frac{1}{2h_x h_\theta H(0, y_j)} (w_r^n(0, 5h_x, y_j, \theta_k) - w_r^n(-0, 5h_x, y_j, \theta_k)) - \frac{1}{h_x h_\theta^2 H^2(0, y_j)} (\mu_{v,r}(0, 5h_x, y_j, \theta_k) - \\ & - \mu_{v,r}(-0, 5h_x, y_j, \theta_k)) + \frac{1}{2h_x h_\theta^2 H^2(0, y_j)} (\mu_{v,r}(0, 5h_x, y_j, \theta_k + 0, 5h_\theta) - \mu_{v,r}(-0, 5h_x, y_j, \theta_k + 0, 5h_\theta) - \\ & - \mu_{v,r}(0, 5h_x, y_j, \theta_k - 0, 5h_\theta) + \mu_{v,r}(-0, 5h_x, y_j, \theta_k - 0, 5h_\theta)); \\ \mathfrak{G}_{17} = & \frac{1}{h_x^2} (u^n(0, 5h_x, y_j, \theta_k) + u^n(-0, 5h_x, y_j, \theta_k)) + \frac{2}{h_x^2 H(0, y_j)} (u^n(0, 5h_x, y_j, \theta_k) - \\ & - u^n(-0, 5h_x, y_j, \theta_k)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2u^n(0, y_j, \theta_k) + u^n(-0.5h_x, y_j, \theta_k) + \frac{1}{2h_x h_y} (v^n(0.5h_x, y_j + 0.5h_y, \theta_k) - v^n(-0.5h_x, y_j + 0.5h_y, \theta_k) - \\
 & -v^n(0.5h_x, y_j - 0.5h_y, \theta_k) + v^n(-0.5h_x, y_j - 0.5h_y, \theta_k)) + \frac{1}{2h_x h_0 H(0, y_j)} (w_r^n(0.5h_x, y_j, \theta_k + 0.5h_0) - \\
 & -w_r^n(-0.5h_x, y_j, \theta_k + 0.5h_0) - w_r^n(0.5h_x, y_j, \theta_k - 0.5h_0) + w_r^n(-0.5h_x, y_j, \theta_k - 0.5h_0)) + \\
 & + 2 \left(\frac{1}{h_x^3} + \frac{1}{h_x h_y^2} + \frac{1}{h_x h_0^2 H^2(0, y_j)} \right) (\mu_{h,r}(0.5h_x, y, \theta) - \mu_{h,r}(-0.5h_x, y_j, \theta_k)).
 \end{aligned}$$

Используя равенство (88) для $D\bar{c}_r^n|_{x_i=0}$ можем составить выражение:

$$\begin{aligned}
 D\bar{c}_r^n|_{x_i=0} & \cong \frac{1}{h_x^2} (\mu_{h,r}(0.5h_x, y_j, \theta_k) + \mu_{h,r}(-0.5h_x, y_j, \theta_k)) (\bar{c}_r^n(h_x, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k)) - \\
 & - \mu_{h,r}(-0.5h_x, y_j, \theta_k) \frac{h_x}{3} \vartheta_1.
 \end{aligned} \tag{89}$$

Окончательно, разностная схема (44) с учётом соотношений (47) и (89) примет вид:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\bar{c}_r^n - \bar{c}_r^{n-1}}{\tau} + \frac{1}{2h_x} (u^n(0.5h_x, y_j, \theta_k) - u^n(-0.5h_x, y_j, \theta_k)) \bar{c}_r^n(h_x, y_j, \theta_k) + \\
 & + \frac{1}{2h_y} (v^n(0, y_j + 0.5h_y, \theta_k) \bar{c}_r^n(0, y_j + h_y, \theta_k) - v^n(0, y_j - 0.5h_y, \theta_k) \bar{c}_r^n(0, y_j - h_y, \theta_k)) + \frac{1}{2H(0, y_j)h_0} \cdot \\
 & \cdot (w_r^n(0, y_j, \theta_k + 0.5h_0) \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k + h_0) - w_r^n(0, y_j, \theta_k - 0.5h_0) \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k - h_0)) = \frac{1}{h_x^2} (\mu_{h,r}(0.5h_x, y_j, \theta_k) + \\
 & + \mu_{h,r}(-0.5h_x, y_j, \theta_k)) (\bar{c}_r^n(h_x, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k)) - \mu_{h,r}(-0.5h_x, y_j, \theta_k) \frac{h_x}{3} \vartheta_1 + \frac{1}{h_y^2} (\mu_{h,r}(0, y_j + 0.5h_y, \theta_k) \cdot \\
 & \cdot (\bar{c}_r^n(0, y_j + h_y, \theta_k) - \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k)) - \mu_{h,r}(0, y_j - 0.5h_y, \theta_k) (\bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^n(0, y_j - h_y, \theta_k))) + \\
 & + \frac{1}{H^2(0, y_j)h_0^2} (\mu_{v,r}(0, y_j, \theta_k + 0.5h_0) (\bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k + h_0) - \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k)) - \mu_{v,r}(0, y_j, \theta_k - 0.5h_0) \cdot \\
 & \cdot (\bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k - h_0))) + \bar{F}_r^n(0, y_j, \theta_k) \in \bar{\omega}^+, r=1,2,3, n=1, \dots, N_T.
 \end{aligned} \tag{90}$$

Погрешность аппроксимации схемы (90) в граничных узлах сетки $\bar{\omega}^+$ при $x_i = 0$ равна $O(\tau + h_x^2)$.

Для случая, когда выполнено граничное условие (11) и $x_i = L_P$, а также случаев граничных условий (12) и (13), методы построения разностной схемы для задачи (8)–(13) аналогичны тем, которые описаны выше, начиная с соотношения (43). В виду громоздкости их описания в рамках данной статьи они не приводятся.

Обсуждение и заключение. Предложена разностная схема второго порядка аппроксимации на равномерной сетке, которая приближает начально-краевую задачу для трехмерного уравнения диффузии-конвекции мультифракционных взвесей во всех узлах равномерной сетки, включая граничные узлы. Особое внимание уделено описанию методов аппроксимации в граничных узлах сетки с использованием расширенной сетки. Предложенная схема имеет погрешность аппроксимации в норме сеточного пространства S : второй — относительно шагов пространственной сетки и первый порядок точности относительно временного шага. Дальнейшие исследования связаны с доказательством устойчивости и сходимости построенной разностной схемы на основе сеточного принципа максимума при нежестких ограничениях на сеточное число Пекле, выполнении условия Куранта, указанных выше условий гладкости и других ограничениях, которые естественным образом выполняются для дискретных моделей гидрофизики прибрежных систем.

Список литературы / References

1. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Бондаренко Ю.С. Оценка погрешности решения уравнения на основе схем с весами. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2011;8(121):6–13.
- Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Bondarenko Yu.S. Error estimation of the solution to the equation based on weighted schemes. *Izvestiya YUFU. Technical Sciences*. 2011;8(121):6–13. (in Russ.)
2. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Построение дискретной двумерной математической модели транспорта наносов. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2011;8(121):32–44.
- Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A. Construction of a discrete two-dimensional mathematical model of sediment transport. *Izvestiya YUFU. Technical Sciences*. 2011;8(121):32–44. (in Russ.)
3. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А., Сидорякина В.В., Проценко С.В. Параллельные алгоритмы решения задачи динамики изменения рельефа дна в прибрежных системах. *Вычислительные методы и программирование*. 2020;21(3):196–206. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v21r318>
- Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A., Sidorakina V.V., Protsenko S.V. Parallel algorithms for solving the problem of dynamics of bottom relief changes in coastal systems. *Computational Methods and Programming*. 2020; 21(3):196–206. (in Russ.) <https://doi.org/10.26089/NumMet.v21r318>
4. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А., Сидорякина В.В., Проценко С.В. Комплекс объединенных моделей транспорта наносов и взвесей с учетом трехмерных гидродинамических процессов в прибрежной зоне. *Математическое моделирование*. 2020;32(2):3–23. <https://doi.org/10.20948/mm-2020-02-01>
- Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A., Sidorakina V.V., Protsenko S.V. A complex of combined models for sediment and suspension transport considering three-dimensional hydrodynamic processes in the coastal zone. *Mathematical Modelling*. 2020;32(2):3–23. (in Russ.) <https://doi.org/10.20948/mm-2020-02-01>
5. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko S.V., Sidoryakina V.V. Coupled 3D wave and 2D bottom deposit transportation models for the prediction of harmful phenomena in coastal zone. В сборнике: *Trends in the Analysis and Design of Marine Structures — Proceedings of the 7th International Conference on Marine Structures, MARSTRUCT 2019*. 2019. Р. 597–603. <https://doi.org/10.1201/9780429298875-68>
6. Сухинов А.И., Сидорякина В.В. Построение и исследование корректности математической модели транспорта и осаждения взвесей с учетом изменений рельефа дна. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2018;2(2):76–90. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2018-2-76-90>
- Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V. Development and analysis of the correctness of a mathematical model for the transport and sedimentation of suspensions, taking into account changes in bottom relief. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2018;2(2):76–90. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2018-2-76-90>
7. Sukhinov A.I., Sukhinov A.A., Sidoryakina V.V. Uniqueness of solving the problem of transport and sedimentation of multicomponent suspensions in coastal systems. В сборнике: *Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems*. Bristol, 2020;1479:012081. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012081>
8. Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V. Development and correctness analysis of the mathematical model of transport and suspension sedimentation depending on bottom relief variation. *Vestnik of Don State Technical University*. 2018;18(4): 350–361. <https://doi.org/10.23947/1992-5980-2018-18-4-350-361>
9. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Сидорякина В.В., Проценко С.В., Атаян А.М. Локально-двумерные схемы расщепления для параллельного решения трехмерной задачи транспорта взвешенного вещества. *Математическая физика и компьютерное моделирование*. 2021;24(2):38–53. <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2021.2.4>
- Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Sidoryakina V.V., Protsenko S.V., Atayan A.M. Locally two-dimensional splitting schemes for parallel solving of the three-dimensional problem of suspended substance transport. *Mathematical Physics and Computer Simulation*. 2021;24(2):38–53. (in Russ.) <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2021.2.4>
10. Сидорякина В.В., Сухинов А.И. Построение и исследование близости решений в L2 двух краевых задач для модели переноса многокомпонентных взвесей в прибрежных системах. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2023;63(10):1721–1732. <https://doi.org/10.1134/S0965542523100111>
- Sidoryakina V.V., Sukhinov A.I. Construction and analysis of the proximity of solutions in L2 for two boundary problems in the model of multicomponent suspension transport in coastal systems. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2023;63(10):1721–1732. (in Russ.) <https://doi.org/10.1134/S0965542523100111>
11. Курант Р. *Уравнения с частными производными*. Москва: МИР; 1964. 832 с.
- Courant R. *Partial Differential Equations*. Moscow: MIR; 1964. 832 p. (in Russ.)

Об авторе:

Валентина Владимировна Сидорякина, доцент кафедры математики и информатики, Донской государственный технический университет (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), кандидат физико-математических наук, [MathSciNet](#), [Spin-код](#), [ORCID](#), [ResearcherID](#), [ScopusID](#), cvv9@mail.ru

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

About the Author:

Valentina V. Sidoryakina, Associate Professor of the Department of Mathematics and Computer Science, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, Russian Federation, 344003), Candidate of Physical and Mathematical Sciences, [MathSciNet](#), [Spin-code](#), [ORCID](#), [ResearcherID](#), [ScopusID](#), cvv9@mail.ru

Conflict of Interest Statement: the author declares no conflict of interest.

The author has read and approved the final version of manuscript.

Поступила в редакцию / Received 19.08.2024

Поступила после рецензирования / Reviewed 02.09.2024

Принята к публикации / Accepted 02.09.2024