

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 519.6

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-7-18>


Увеличение точности решения краевых задач с линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями методом Бубнова-Галеркина

Н.К. Волосова¹ , К.А. Волосов² , А.К. Волосова² , М.И. Карлов³,
Д.Ф. Пастухов⁴  , Ю.Ф. Пастухов⁴ 

¹ Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Российская Федерация

² Российский университет транспорта, г. Москва, Российская Федерация

³ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
г. Долгопрудный, Российская Федерация

⁴ Полоцкий государственный университет им. Евфросинии Полоцкой, г. Новополоцк, Республика Беларусь

✉ dmitrij.pastuhov@mail.ru

Аннотация

Введение. Исследуется возможность увеличения точности численного решения краевой задачи модифицированным методом Бубнова-Галеркина с линейным обыкновенным дифференциальным уравнением, в котором коэффициенты и правая часть являются непрерывными функциями. Порядок дифференциального уравнения n должен быть меньше числа координатных функций m .

Материалы и методы. Для численного решения краевой задачи использован модифицированный метод Петрова-Галеркина с системой линейно независимых базисных функций степенного вида на отрезке $[-1, 1]$ с единичной нормой Чебышева для каждой функции системы. В систему линейных алгебраических уравнений включены только линейно независимые краевые условия исходной задачи.







Результаты исследования. Впервые построена интегральная квадратурная формула на равномерной сетке с двадцать вторым порядком погрешности для вычисления элементов матрицы и коэффициентов правой части системы линейных алгебраических уравнений с учетом скалярного произведения двух функций по новой квадратурной формуле. Доказана теорема существования и единственности решения краевой задачи с неразделенными краевыми условиями общего вида, если известны n линейно независимых частных решений однородного дифференциального уравнения порядка n .

Обсуждение и заключение. Точно решена гидродинамическая задача в вязком сильном пограничном слое с уравнением третьего порядка. Аналитическое решение сравнено с численным решением, равномерная норма разности решений не превышает $5 \cdot 10^{-15}$. Полученные обобщенным методом Бубнова-Галеркина формулы могут быть полезными для решения краевых задач с линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями третьего и более высоких порядков.

Ключевые слова: гидродинамика, численные методы, обыкновенные дифференциальные уравнения, краевые задачи, метод Галеркина

Для цитирования. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Увеличение точности решения краевых задач с линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями методом Бубнова-Галеркина. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):7–18. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-7-18>

Increasing the Accuracy of Solving Boundary Value Problems with Linear Ordinary Differential Equations Using the Bubnov-Galerkin Method

Natalya K. Volosova¹ , Konstantin A. Volosov² , Aleksandra K. Volosova² , Mikhail I. Karlov³,
Dmitriy F. Pastukhov⁴  , Yuriy F. Pastukhov⁴ 

¹ MGТУ named after N.E. Bauman, Moscow, Russian Federation

² Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation

³ Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russian Federation

⁴ Polotsk State University named after Euphrosyne of Polotsk, Novopolotsk, Republic of Belarus

 dmitrij.pastuhov@mail.ru

Abstract

Introduction. This study investigates the possibility of increasing the accuracy of numerically solving boundary value problems using the modified Bubnov-Galerkin method with a linear ordinary differential equation, where the coefficients and the right-hand side are continuous functions. The order of the differential equation n must be less than the number of coordinate functions m .

Materials and Methods. A modified Petrov-Galerkin method was used to numerically solve the boundary value problem. It employs a system of linearly independent power-type basis functions on the interval $[-1, 1]$, each normalized by the unit Chebyshev norm. The system of linear algebraic equations includes only the linearly independent boundary conditions of the original problem.

Results. For the first time, an integral quadrature formula with a 22nd order error was developed for a uniform grid. This formula is used to calculate the matrix elements and coefficients in the right-hand side of the system of linear algebraic equations, taking into account the scalar product of two functions based on the new quadrature formula. The study proves a theorem on the existence and uniqueness of a solution for boundary value problems with general non-separated conditions, provided that n linearly independent particular solutions of a homogeneous differential equation of order n are known.

Discussion and Conclusion. The hydrodynamic problem in a viscous strong boundary layer with a third-order equation was precisely solved. The analytical solution was compared with its numerical counterpart, and the uniform norm of their difference did not exceed $5 \cdot 10^{-15}$. The formulas derived using the generalized Bubnov-Galerkin method may be useful for solving boundary value problems with linear ordinary differential equations of the third and higher orders.

Keywords: hydrodynamics, numerical methods, ordinary differential equations, boundary value problems, Galerkin method

For Citation. Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Karlov M.I., Pastukhov D.F., Pastukhov Yu.F. Increasing the accuracy of solving boundary value problems with a linear differential equation using the Bubnov-Galerkin method. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):7–18. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-7-18>

Введение. Для решения краевой задачи на отрезке с обыкновенным дифференциальным уравнением наиболее известны метод прогонки [1] и метод стрельбы [1]. В указанных методах неизвестная функция отыскивается на заданной сетке (сеточная функция) с использованием разностных уравнений. В данной работе рассматривается краевая задача в пограничном слое вязкой несжимаемой жидкости с обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядка [2–3], а ее численное решение находится в функциональном виде. Гидродинамическая задача в пограничном вязком слое решается с помощью модифицированного метода Бубнова-Галеркина [4] с системой линейно независимых базисных функций. Базисные функции имеют простой степенной вид, каждая из них задана на отрезке $[-1, 1]$ и имеет единичную норму Чебышева. Неизвестная функция-решение раскладывается по системе линейно независимых базисных функций. В данной работе обобщена теорема существования и единственности решения краевой задачи на отрезке $[a, b]$ с линейным обыкновенным дифференциальным уравнением произвольного порядка n на случай неразделенных краевых условий.

В настоящей работе впервые получена квадратурная интегральная формула на равномерной сетке, у которой число интервалов кратно двадцати. Квадратурная формула имеет 22-ой порядок погрешности. По сравнению с предыдущей работой [4] новая квадратурная формула, применяемая для вычисления элементов матрицы и коэффициентов правой части системы линейных алгебраических уравнений с помощью формулы скалярного произведения двух функций, позволяет уменьшить норму Чебышева погрешности задачи в десятки раз. Для уравнения третьего порядка в СЛАУ включаются $n-1$ линейно независимых краевых условий и $m-n+1$ условий ортогональности невязки дифференциального уравнения к базисным функциям [4–5] (n — порядок ОДУ, m — число базисных функций). Получено точное решение задачи [2] с выбранными параметрами, что позволило вычислить векторную норму Чебышева разности точного и численного решения. Методы точных вычислений в гидродинамике приведены в работах [6–8].

Материалы и методы

Постановка задачи. Пусть неизвестная функция $u(x)$, принадлежащая классу n раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $u(x) \in C^n[a, b]$, является решением краевой задачи с обыкновенным дифференциальным уравнением порядка n с переменными коэффициентами $g_i(x) \in C[a, b], i = 0, n$:

$$\begin{cases} L[u(x)] = f(x), x \in (a, b) \\ L[u(x)] \equiv \left(\sum_{i=0}^n g_i(x) \frac{d^i}{dx^i} \right) u(x), \end{cases} \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{\mu}^i u^{(i)}(a) + \beta_{\mu}^i u^{(i)}(b)) = \gamma_{\mu}, \mu = \overline{1, n}. \quad (2)$$

В краевой задаче (1)–(2) функции $g_i(x) (i = \overline{0, n}), f(x) \in C[a, b]$ заданы и непрерывны на отрезке $[a, b]$. Краевые условия (2) заданы линейными формами относительно функции и производных до $n-1$ порядка включительно в точках $x = a, x = b$ и являются краевыми условиями общего вида. Для замкнутости задачи (1) необходимо, чтобы полное число краевых условий было равно n . Матрицы коэффициентов $\alpha_{\mu}^i, \beta_{\mu}^i, i = \overline{0, n-1}, \mu = \overline{1, n}$, а также числа $\gamma_{\mu}, \mu = \overline{1, n}$ заданы. Связь между числами $\alpha_{\mu}^i, \beta_{\mu}^i$ определяет существование и единственность решения краевой задачи (1)–(2).

Теорема 1. Пусть известно n линейно независимых частных решений однородного уравнения (1) $U_j(x), j = \overline{1, n}$. Тогда краевая задача (1)–(2) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда выполнено условие $\det A_{\mu j} \neq 0, \mu = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$,

где

$$A_{\mu j} = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{\mu}^i U_j^{(i)}(a) + \beta_{\mu}^i U_j^{(i)}(b)), \mu, j = \overline{1, n}.$$

Доказательство. Запишем общее решение линейного неоднородного уравнения (1):

$$u(x) = \sum_{j=1}^n U_j(x) D_j + \overline{u(x)}, j = \overline{1, n},$$

где D_j — произвольные постоянные интегрирования; $\overline{u(x)}$ — частное решение неоднородного уравнения (1)

$L[\overline{u(x)}] = f(x); U_j(x)$ — частные линейно независимые решения однородного уравнения $L[U_j(x)] = 0, j = \overline{1, n}$.

Подставим решение $u(x)$ в краевые условия (2):

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{\mu}^i u^{(i)}(a) + \beta_{\mu}^i u^{(i)}(b)) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\alpha_{\mu}^i \left(\sum_{j=1}^n U_j^{(i)}(a) D_j + \overline{u^{(i)}(a)} \right) + \beta_{\mu}^i \left(\sum_{j=1}^n U_j^{(i)}(b) D_j + \overline{u^{(i)}(b)} \right) \right] = \gamma_{\mu} \Leftrightarrow \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{\mu}^i U_j^{(i)}(a) + \beta_{\mu}^i U_j^{(i)}(b) \right) D_j = \gamma_{\mu} - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{\mu}^i \overline{u^{(i)}(a)} + \beta_{\mu}^i \overline{u^{(i)}(b)}, \mu = \overline{1, n}.$$

Неоднородная система n линейных алгебраических уравнений (3) относительно n неизвестных $D_j, j = \overline{1, n}$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда матрица A не вырождена, то есть $\det A_{\mu j} \neq 0, \mu = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$,

$$A_{\mu j} = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{\mu}^i U_j^{(i)}(a) + \beta_{\mu}^i U_j^{(i)}(b)), \mu, j = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Теорема 1 доказана. Отметим, что теорема 1 обобщает утверждение 1 в работе [4, с. 25] для случая разделенных краевых условий.

В работах по гидродинамике [2–3] Т.Я. Ершова приводит двумерную гидродинамическую задачу для вязкого слоя с учетом уравнения неразрывности в несжимаемой жидкости и уравнения динамики жидкости, сводимую с помощью автомодельных переменных к одному дифференциальному уравнению третьего порядка в сильном пограничном слое:

$$\begin{cases} Lu \equiv \varepsilon u''(x) + ru'(x) = f(x), x \in (0, 1), \varepsilon \in (0, 1), r = const > 0, \\ u(0) = 0, u(1) = 0, u'(1) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Решим задачу (5) аналитически с частным случаем правой части уравнения $f(x) \equiv 1, \varepsilon u''(x) + ru'(x) \equiv 1, z(x) = u'(x), \varepsilon z'(x) + rz(x) = 1$. Запишем общее решение однородного уравнения

$$\varepsilon z'(x) + rz(x) = 0 \Leftrightarrow z'(x) = -\frac{r}{\varepsilon} z(x) \Leftrightarrow z(x) = C_0 \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon} x\right).$$

Интегрируя дважды последнее решение, получим

$$u'(x) = \int z(x) dx = -C_0 \frac{\varepsilon}{r} \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon} x\right) + C_1, u(x) = \int u'(x) dx = C_0 \frac{\varepsilon^2}{r^2} \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon} x\right) + C_1 x + C_2.$$

Частное решение уравнения $\varepsilon u''(x) + ru'(x) \equiv 1$ ищем в виде:

$$\overline{u(x)} = Cx^2, \overline{u'}(x) = 0, 2rC = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2r}, \overline{u(x)} = \frac{x^2}{2r},$$

$$u_{on}(x) = u_{oo}(x) + \overline{u(x)} = C_0 \frac{\varepsilon^2}{r^2} \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon} x\right) + C_1 x + C_2 + \frac{x^2}{2r}, u'_{on}(x) = -C_0 \frac{\varepsilon}{r} \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon} x\right) + C_1 + \frac{x}{r}. \quad (6)$$

Функция (6) является общим решением уравнения (5) с правой частью $f(x) \equiv 1$. Используем краевые условия задачи (5):

$$u(0) = 0 \Leftrightarrow C_0 \frac{\varepsilon^2}{r^2} + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = -C_0 \frac{\varepsilon^2}{r^2},$$

$$u(1) = 0 \Leftrightarrow C_0 \frac{\varepsilon^2}{r^2} \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right) + C_1 + C_2 + \frac{1}{2r} = 0, u'(1) = 0 \Leftrightarrow -C_0 \frac{\varepsilon}{r} \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right) + C_1 + \frac{1}{r} = 0.$$

Тогда

$$C_1 = C_0 \frac{\varepsilon}{r} \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{r}, C_0 \frac{\varepsilon^2}{r^2} \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right) + C_1 + C_2 + \frac{1}{2r} = 0 \Leftrightarrow$$

$$C_0 \frac{\varepsilon^2}{r^2} \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right) + C_0 \frac{\varepsilon}{r} \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{r} - C_0 \frac{\varepsilon^2}{r^2} + \frac{1}{2r} = 0 \Leftrightarrow C_0 = \frac{r}{2\left((\varepsilon^2 + \varepsilon r) \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right) - \varepsilon^2\right)},$$

$$C_2 = -C_0 \frac{\varepsilon^2}{r^2} = \frac{\varepsilon^2}{2r\left(\varepsilon^2 - (\varepsilon^2 + \varepsilon r) \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right)\right)}, C_1 = \frac{\varepsilon \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right)}{2\left((\varepsilon^2 + \varepsilon r) \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right) - \varepsilon^2\right)} - \frac{1}{r}.$$

В итоге получаем:

$$u(x) = \frac{\varepsilon^2 \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon} x\right)}{2r\left((\varepsilon^2 + \varepsilon r) \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right) - \varepsilon^2\right)} + \left\{ \frac{\varepsilon \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right)}{2\left((\varepsilon^2 + \varepsilon r) \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right) - \varepsilon^2\right)} - \frac{1}{r} \right\} x + \frac{\varepsilon^2}{2r\left(\varepsilon^2 - (\varepsilon^2 + \varepsilon r) \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right)\right)} + \frac{x^2}{2r}. \quad (7)$$

Для тестирования программы, использующей алгоритм Бубнова-Галеркина [2–4], выберем параметры $r = 1$, $\varepsilon = 1/2$, из формулы (7) получим функцию (8):

$$u(x) = \frac{\exp(2-2x)}{2(3-e^2)} + \frac{(e^2-2)x}{(3-e^2)} - \frac{e^2}{2(3-e^2)} + \frac{x^2}{2}. \quad (8)$$

Как и в работе [4], выберем систему базисных функций $\phi_i(x), i = \overline{0, m}, m > n$, линейно независимую

$$\{\phi_i(x)\}_{i=0}^m = \left\{ \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right)^i, x \in [a, b], i = \overline{0, m} \right\}, \|\phi_i(x)\|_C = \max_{x \in [a, b]} |\phi_i(x)| = 1 \forall i = \overline{0, m}. \quad (9)$$

Линейное преобразование $z = \frac{2x-a-b}{b-a}, z \in [-1, 1]$ взаимно однозначно отображает отрезок $[a, b]$ на отрезок $[-1, 1]$. Базисные функции $\phi_i(x)$ четного индекса четны на отрезке $[-1, 1]$, а нечетного индекса нечетны. Обозначим середину отрезка $[a, b]$ через $c = (a+b)/2$. Разложим решение общей задачи (1) по системе базисных функций (9):

$$u(x) = u(c) + \sum_{j=1}^m \phi_j(x) D_j = u(c) + \sum_{j=1}^m \left(\frac{2(x-c)}{b-a} \right)^j D_j. \quad (10)$$

Из формулы (10) следует тождество $u(c) = u(c)$, а сама формула (10) — это разложение неизвестной функции в степенной ряд с центром $x = c = (a+b)/2$.

Замечание. Метод Бубнова-Галеркина является ортогональным, однако метод не требует, чтобы система базисных функций была системой ортогональных полиномов, как, например, многочлены Лежандра на отрезке $[-1, 1]$ с весовой функцией $\rho(z) \equiv 1, z \in [-1, 1]$. Достаточно линейной независимости системы функций (9). Отметим, что ортогональность системы функций (9) невязке дифференциального уравнения в задаче (1) записывается с весовой функцией $\rho(z) \equiv 1, z \in [-1, 1]$. А находить производные любого порядка от функций (9) значительно проще, чем от многочленов Лежандра.

Подставим (10) в уравнение (1) и запишем невязку уравнения (1):

$$R(u(x)) = L[u(x)] - f(x) = L\left(u(c) + \sum_{j=1}^m \phi_j(x) D_j\right) - f(x) = L(u(c)) + \sum_{j=1}^m L\phi_j(x) D_j - f(x).$$

Согласно методу Бубнова-Галеркина, запишем условия ортогональности невязки максимальному числу координатных функций $\{1, z, z^2, \dots, z^{m-3}\}$, для решения задачи (5) с уравнением третьего порядка, дающим максимальный вклад в невязку уравнения (5) ($m-n+1$ функциям в общей задаче (1)):

$$\langle R(u(x)), \phi_i(x) \rangle = 0, i = \overline{0, m-3} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^m \langle L\phi_j(x), \phi_i(x) \rangle D_j = \langle f(x) - L(u(c)), \phi_i(x) \rangle, i = \overline{0, m-3}, \quad (11)$$

где в формуле (11) символом $\langle q, g \rangle$ обозначено скалярное произведение функций:

$$\langle q, g \rangle = \int_a^b q(x)g(x)dx, \quad L(u(c)) = g_0(x)u(c) = g_0(x)u_c. \quad (12)$$

Для замкнутости системы (11) необходимо еще два уравнения. Как показано в работе [9] в краевой задаче необходимо искать решение на классе допустимых функций, то есть использовать все линейно независимые краевые условия. На концах отрезка в точках $x = a, x = b$, используя формулу (10), получим:

$$u(a) \equiv u_a = u(c) + \sum_{j=1}^m \left(\frac{2a-a-b}{b-a} \right)^j D_j = u_c + \sum_{j=1}^m (-1)^j D_j, \quad u(b) \equiv u_b = u(c) + \sum_{j=1}^m \left(\frac{2b-a-b}{b-a} \right)^j D_j = u_c + \sum_{j=1}^m D_j.$$

Складывая два последних уравнения и выражая $u(c) = u_c$, получим:

$$u_c = \left(\frac{u_a + u_b}{2} \right) - D_2 - D_4 - \dots - \begin{cases} D_m, m = 2l \\ D_{m-1}, m = 2l + 1. \end{cases} \quad (13)$$

Аналогично, выражая $\frac{u_b - u_a}{2}$, получим формулу:

$$\frac{u_b - u_a}{2} = D_1 + D_3 + \dots + \begin{cases} D_{m-1}, m = 2l \\ D_m, m = 2l + 1. \end{cases} \quad (14)$$

Вычислим первую производную $u(x)$ из формулы (10) и приравняем ее к нулю в точке $x = b$ согласно краевому условию задачи (5):

$$u'(x) = \sum_{j=1}^m \phi_j'(x) D_j = \sum_{j=1}^m \frac{2j}{j-1} \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right)_{x=b}^{j-1} D_j = 0 \Leftrightarrow D_1 + 2D_2 + 3D_3 + \dots + mD_m = 0. \quad (15)$$

Подставим значение $u(c)$ из формулы (13) в правую часть уравнения (11), затем перенесем в левую часть уравнения (11) все слагаемые с D_j . С учетом формул (14), (15) получим систему линейных алгебраических уравнений (16) относительно неизвестных коэффициентов D_j

$$\sum_{j=1}^m a_{i,j} D_j = \bar{f}_i, \quad i = \overline{0, m-1}, \quad (16)$$

где элементы матрицы $a_{i,j}, i = \overline{0, m-1}, j = \overline{1, m}$ и коэффициенты правой части \bar{f}_i системы уравнений (16) равны

$$a_{i,j} = \begin{cases} \langle L\phi_j, \phi_i \rangle, \text{ если } j \equiv 1 \pmod{2}, i = \overline{0, m-3} \\ \langle L(\phi_j - 1), \phi_i \rangle, \text{ если } j \equiv 0 \pmod{2}, i = \overline{0, m-3} \\ 1, \text{ если } i = m-2, j \equiv 1 \pmod{2} \\ 0, \text{ если } i = m-2, j \equiv 0 \pmod{2} \\ j, \text{ если } i = m-1 \end{cases},$$

$$\bar{f}_i = \begin{cases} \left\langle f(x) - L\left(\frac{u_a + u_b}{2}\right), \phi_i(x) \right\rangle, \text{ если } i = \overline{0, m-3}, L\left(\frac{u_a + u_b}{2}\right) = \left(\frac{u_a + u_b}{2}\right) g_0(x) \\ \frac{u_b - u_a}{2}, \text{ если } i = m-2 \\ 0, \text{ если } i = m-1 \end{cases}.$$

Действие линейного дифференциального оператора третьего порядка в задаче (5) на базисную функцию с индексом j можно представить системой формул (17):

$$L\phi_j = \begin{cases} g_0(x), \text{ если } j = 0, \\ \frac{2g_1(x)}{(b-a)} + g_0(x) \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right), \text{ если } j = 1, \\ 8g_2(x) \frac{1}{(b-a)^2} + 4g_1(x) \frac{(2x-a-b)}{(b-a)^2} + g_0(x) \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right)^2, \text{ если } j = 2, \\ 8j(j-1)(j-2)g_2(x) \frac{(2x-a-b)^{j-3}}{(b-a)^j} + 4j(j-1)g_2(x) \frac{(2x-a-b)^{j-2}}{(b-a)^j} + \\ + 2jg_1(x) \frac{(2x-a-b)^{j-1}}{(b-a)^j} + g_0(x) \frac{(2x-a-b)^j}{(b-a)^j}, \text{ если } j \geq 3. \end{cases} \quad (17)$$

Численное решение задачи (5) после подстановки (13) в формулу (10) примет вид (18):

$$u(x) = \left(\frac{u_a + u_b}{2} \right) + \sum_{j=1}^m \left[\left(\frac{(2x-a-b)}{b-a} \right)^j + \left(\frac{-1+(-1)^{j+1}}{2} \right) \right] D_j. \quad (18)$$

В решении (18) неизвестный вектор D находится из СЛАУ (16) $D = A^{-1} \bar{f}$. Оценка равномерной нормы решения $u(x)$ дает следующий результат:

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \frac{|u_a| + |u_b|}{2} + 2 \sum_{j=1}^m |D_j| \leq \frac{|u_a| + |u_b|}{2} + 2m \max_{j=1, m} D_j = \frac{|u_a| + |u_b|}{2} + 2m \|D\|_C \leq \frac{|u_a| + |u_b|}{2} + 2m \|A^{-1}\|_C \|\bar{f}\|_C \Rightarrow \\ \|u\|_C &\leq \frac{|u_a| + |u_b|}{2} + 2m \|A^{-1}\|_C \|\bar{f}\|_C. \end{aligned}$$

где норма обратной матрицы A^{-1} определяется формулой $\|A^{-1}\|_C = \max_{i=1, m} \sum_{j=1}^m |a_{i,j}^{-1}|$.

В работе [4] для вычисления всех матричных элементов $a_{i,j}$, а также коэффициентов правой части \bar{f}_i СЛАУ (16) посредством скалярного произведения 2-х функций (12) применялась составная квадратурная интегральная формула (19) с равномерным шагом и с 12-м порядком погрешности $O(h^{12})$, которую использовала программа для численного решения тестового примера 3:

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \int_a^b y_1(x) y_2(x) dx = 5h \sum_{i=0}^{n_1} y_1(x_i) y_2(x_i) C_i + O(h^{12}), n_1 = 10p, h = \frac{b-a}{n_1}, p \in N, \quad (19)$$

где весовые коэффициенты интегральной квадратурной формулы (19) определяются величиной остатка по модулю 10 от номера узла равномерной сетки i .

$$C_i = \begin{cases} \frac{16067}{299376}, & i = 0 \vee i = n_1, \\ \frac{16067}{149688}, & (i \equiv 0 \pmod{10}) \wedge (0 < i < n_1), \\ \frac{26575}{74844}, & (i \equiv 1 \pmod{10}) \vee (i \equiv 9 \pmod{10}), \\ \frac{-16175}{99792}, & (i \equiv 2 \pmod{10}) \vee (i \equiv 8 \pmod{10}), \\ \frac{5675}{6237}, & (i \equiv 3 \pmod{10}) \vee (i \equiv 7 \pmod{10}), \\ \frac{-4825}{5544}, & (i \equiv 4 \pmod{10}) \vee (i \equiv 6 \pmod{10}), \\ \frac{17807}{12474}, & i \equiv 5 \pmod{10}. \end{cases} \quad (20)$$

Применяя формулу скалярного произведения двух функций по формуле (19) с весовыми коэффициентами (20) и алгоритмом Петрова-Галеркина (16)–(18) с числом базисных функций $m = 16$ и числом интервалов интегрирования $n_1 = 20$ программа дает равномерную норму невязки в задаче (5) (точное решение вычисляется по формуле (8) на равномерной сетке:

$$u_i^{exact}, x_i = a + h \cdot i, i = \overline{0, n_1}, h = \frac{b-a}{n_1},$$

$$\|u^{num} - u^{exact}\|_C = \max_{i=0, n_1} |u_i^{num} - u_i^{exact}| \approx 2,016997679987753E-012.$$

В данной работе впервые получена новая квадратурная интегральная формула с равномерным шагом и с 22-м порядком погрешности $O(h^{22})$ для увеличения точности скалярного произведения и вычисления матричных элементов, а также коэффициентов правой части СЛАУ (16), тем самым уменьшая норму погрешности задачи (5).

Для квадратурной интегральной формулы на равномерной сетке [1, с. 87] и с погрешностью $O(h^{22})$ с учетом симметрии запишем квадратурную формулу относительно средней точки отрезка $[a, b]$:

$$c = (a+b)/2 \Leftrightarrow z = 0, \quad x = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2} z, z \in [-1, 1], x \in [a, b], dx = \frac{(b-a)}{2} dz$$

получим:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^1 f(z) dz, \int_{-1}^1 f(z) dz = C_0 f(0) + \sum_{i=1}^{i=10} C_i (f(-z_i) + f(z_i)), z_i = i/10. \quad (21)$$

Подставляя в формулу (21) степенные функции четной степени (функции нечетной степени дают тривиальное тождество $0=0$) $f(z) = \{0, z^2, z^4, z^6, z^8, z^{10}, z^{12}, z^{14}, z^{16}, z^{18}, z^{20}\}$, получим систему из 11 линейных алгебраических неоднородных уравнений относительно переменных $C_i, i = 0, 10$:

$$I_{2k} = \int_{-1}^1 z^{2k} dz = \frac{2}{2k+1} = \begin{cases} C_0 + 2\sum_{i=1}^{10} C_i, k = 0 \\ 2\sum_{i=1}^{10} z_i^{2k} C_i, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; z_i = i/10, i = \overline{1, 10}. \end{cases} \tag{22}$$

Результаты исследования. Система уравнений (22) решалась в программной среде Texas Instruments в символьном виде без округлений. Коэффициенты C_i представлены формулой (24), а их проверка приведена таблице 1, представляющей численное значение I_k^{num} (правая часть формулы (22)) и точное значение интеграла $I_k^{exact} = \frac{1+(-1)^k}{k+1}$ (левая часть (22)) для степенных функций $f(z) = \{1, z, z^2, \dots, z^{21}, z^{22}\}$ на отрезке $[-1, 1]$ с учетом коэффициентов.

Таблица 1

Сравнение численных и точных значений

| k | $I_k^{exact} = \frac{1+(-1)^k}{k+1}$ | I_k^{num} |
|-----|--------------------------------------|-------------------------|
| 0 | 2,0000000000000000 | 2,000000000000003 |
| 1 | 0,0000000000000000E+000 | 1,379105163401562E-015 |
| 2 | 0,6666666666666667 | 0,666666666666679 |
| 3 | 0,0000000000000000E+000 | 2,586472702681419E-015 |
| 4 | 0,4000000000000000 | 0,399999999999999 |
| 5 | 0,0000000000000000E+000 | -3,694961003830599E-016 |
| 6 | 0,285714285714286 | 0,285714285714285 |
| 7 | 0,0000000000000000E+000 | -4,388850394221322E-016 |
| 8 | 0,2222222222222222 | 0,222222222222222 |
| 9 | 0,0000000000000000E+000 | -1,752070710736575E-016 |
| 10 | 0,181818181818182 | 0,181818181818181 |
| 11 | 0,0000000000000000E+000 | -1,613292832658431E-016 |
| 12 | 0,153846153846154 | 0,153846153846153 |
| 13 | 0,0000000000000000E+000 | -8,500145032286355E-017 |
| 14 | 0,133333333333333 | 0,133333333333333 |
| 15 | 0,0000000000000000E+000 | 2,602085213965211E-017 |
| 16 | 0,117647058823529 | 0,117647058823529 |
| 17 | 0,0000000000000000E+000 | 1,092875789865388E-016 |
| 18 | 0,105263157894737 | 0,105263157894737 |
| 19 | 0,0000000000000000E+000 | 1,578598363138894E-016 |
| 20 | 9,523809523809523E-002 | 9,523809523809518E-002 |
| 21 | 0,0000000000000000E+000 | 1,717376241217039E-016 |
| 22 | 8,695652173913043E-002 | 8,695652174444995E-002 |

Условия системы (22) и таблица 1 показывают, что у квадратурных формул (22) и (23) двадцать второй порядок погрешности.

Если

$$b - a = nh, n = 20s, s \in N, \left(\frac{b-a}{2}\right) = 10sh, x_i = a + i \cdot h, i = \overline{0, n},$$

то

$$\int_a^b f(x) dx = 10h \sum_{i=0}^{n=20s} C_i f(x_i) + O(h^{22}), x_i = a + i \cdot h, i = \overline{0, n},$$

а скалярное произведение двух функций по аналогии с формулами (19), (20) будет иметь вид:

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \int_a^b y_1(x)y_2(x)dx = 10h \sum_{i=0}^{n_1} y_1(x_i)y_2(x_i)C_i + O(h^{22}), n_1 = 20s, h = \frac{b-a}{n_1}, s \in N, \quad (23)$$

где C_i — весовые коэффициенты в составной квадратурной интегральной формуле (23) получены решением СЛАУ (22):

$$C_i = \begin{cases} \frac{1145302367137}{48426042384720}, & \text{если } i = 0 \text{ или } i = n_1, \\ \frac{1145302367137}{24213021192360}, & \text{если } (i \equiv 0 \pmod{20}) \text{ и } (0 < i < n_1), \\ \frac{335582304250}{1470076286679}, & \text{если } (i \equiv 1 \pmod{20}) \text{ или } (i \equiv 19 \pmod{20}), \\ \frac{-19467909708875}{41162136027012}, & \text{если } (i \equiv 2 \pmod{20}) \text{ или } (i \equiv 18 \pmod{20}), \\ \frac{8274871497250}{3430178002251}, & \text{если } (i \equiv 3 \pmod{20}) \text{ или } (i \equiv 17 \pmod{20}), \\ \frac{-413929922392625}{54882848036016}, & \text{если } (i \equiv 4 \pmod{20}) \text{ или } (i \equiv 16 \pmod{20}), \\ \frac{50652939811064}{2450127144465}, & \text{если } (i \equiv 5 \pmod{20}) \text{ или } (i \equiv 15 \pmod{20}), \\ \frac{-155790561130375}{3430178002251}, & \text{если } (i \equiv 6 \pmod{20}) \text{ или } (i \equiv 14 \pmod{20}), \\ \frac{286955364893000}{3430178002251}, & \text{если } (i \equiv 7 \pmod{20}) \text{ или } (i \equiv 13 \pmod{20}), \\ \frac{-502376261017625}{3920203431144}, & \text{если } (i \equiv 8 \pmod{20}) \text{ или } (i \equiv 12 \pmod{20}), \\ \frac{1704056522480500}{10290534006753}, & \text{если } (i \equiv 9 \pmod{20}) \text{ или } (i \equiv 11 \pmod{20}), \\ \frac{1684005984173647}{9355030915230}, & \text{если } i \equiv 10 \pmod{20}. \end{cases} \quad (24)$$

Найдем характеристическое уравнение и частные решения однородного уравнения (5) с выбранными параметрами:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, r = 1, \varepsilon u''(x) + ru''(x) = \frac{1}{2}u''(x) + u''(x) = 0 \Rightarrow \lambda^3 + 2\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -2,$$

которым соответствуют 3 частных линейно независимых решения:

$$\{U_1(x) = 1, U_2(x) = x, U_3(x) = \exp(-2x)\}, \{U_1'(x) = 0, U_2'(x) = 1, U_3'(x) = -2\exp(-2x)\}, \\ \{U_1''(x) = 0, U_2''(x) = 0, U_3''(x) = 4\exp(-2x)\}.$$

Проверим существование и единственность решения краевой задачи (5) с параметрами $\varepsilon = \frac{1}{2}, r = 1$. Запишем элементы матрицы по формуле (4):

$$A_{\mu j} = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{\mu}^i U_j^{(i)}(a) + \beta_{\mu}^i U_j^{(i)}(b)), \mu, j = \overline{1, n}, u(0) = 0, u(1) = 0, u'(1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1^0 = 1; \alpha_1^1 = 0; \alpha_1^2 = 0; \beta_1^0 = 0; \beta_1^1 = 0; \beta_1^2 = 0,$$

$$\alpha_2^0 = 0; \alpha_2^1 = 0; \alpha_2^2 = 0; \beta_2^0 = 1; \beta_2^1 = 0; \beta_2^2 = 0,$$

$$\alpha_3^0 = 0; \alpha_3^1 = 0; \alpha_3^2 = 0; \beta_3^0 = 0; \beta_3^1 = 1; \beta_3^2 = 0,$$

$$A_{11} = \alpha_1^0 U_1^{(0)}(0) + \beta_1^0 U_1^{(0)}(1) + \alpha_1^1 U_1^{(1)}(0) + \beta_1^1 U_1^{(1)}(1) + \alpha_1^2 U_1^{(2)}(0) + \beta_1^2 U_1^{(2)}(1) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1,$$

$$A_{21} = \alpha_2^0 U_1^{(0)}(0) + \beta_2^0 U_1^{(0)}(1) + \alpha_2^1 U_1^{(1)}(0) + \beta_2^1 U_1^{(1)}(1) + \alpha_2^2 U_1^{(2)}(0) + \beta_2^2 U_1^{(2)}(1) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1,$$

$$A_{31} = \alpha_3^0 U_1^{(0)}(0) + \beta_3^0 U_1^{(0)}(1) + \alpha_3^1 U_1^{(1)}(0) + \beta_3^1 U_1^{(1)}(1) + \alpha_3^2 U_1^{(2)}(0) + \beta_3^2 U_1^{(2)}(1) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0,$$

$$A_{12} = \alpha_1^0 U_2^{(0)}(0) + \beta_1^0 U_2^{(0)}(1) + \alpha_1^1 U_2^{(1)}(0) + \beta_1^1 U_2^{(1)}(1) + \alpha_1^2 U_2^{(2)}(0) + \beta_1^2 U_2^{(2)}(1) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0,$$

$$A_{22} = \alpha_2^0 U_2^{(0)}(0) + \beta_2^0 U_2^{(0)}(1) + \alpha_2^1 U_2^{(1)}(0) + \beta_2^1 U_2^{(1)}(1) + \alpha_2^2 U_2^{(2)}(0) + \beta_2^2 U_2^{(2)}(1) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1,$$

$$A_{32} = \alpha_3^0 U_2^{(0)}(0) + \beta_3^0 U_2^{(0)}(1) + \alpha_3^1 U_2^{(1)}(0) + \beta_3^1 U_2^{(1)}(1) + \alpha_3^2 U_2^{(2)}(0) + \beta_3^2 U_2^{(2)}(1) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1,$$

$$A_{13} = \alpha_1^0 U_3^{(0)}(0) + \beta_1^0 U_3^{(0)}(1) + \alpha_1^1 U_3^{(1)}(0) + \beta_1^1 U_3^{(1)}(1) + \alpha_1^2 U_3^{(2)}(0) + \beta_1^2 U_3^{(2)}(1) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot e^{-2} + 0 \cdot (-2) + 0 \cdot (-2e^{-2}) + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 4e^{-2} = 1,$$

$$A_{23} = \alpha_2^0 U_3^{(0)}(0) + \beta_2^0 U_3^{(0)}(1) + \alpha_2^1 U_3^{(1)}(0) + \beta_2^1 U_3^{(1)}(1) + \alpha_2^2 U_3^{(2)}(0) + \beta_2^2 U_3^{(2)}(1) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot e^{-2} + 0 \cdot (-2) + 0 \cdot (-2e^{-2}) + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 4e^{-2} = e^{-2},$$

$$A_{33} = \alpha_3^0 U_3^{(0)}(0) + \beta_3^0 U_3^{(0)}(1) + \alpha_3^1 U_3^{(1)}(0) + \beta_3^1 U_3^{(1)}(1) + \alpha_3^2 U_3^{(2)}(0) + \beta_3^2 U_3^{(2)}(1) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot e^{-2} + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot (-2e^{-2}) + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 4e^{-2} = -2e^{-2}.$$

Так как $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & e^{-2} \\ 0 & 1 & -2e^{-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & e^{-2} \\ 1 & -2e^{-2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3e^{-2} + 1 \neq 0$, то согласно Теореме 1 краевая задача (5) с параметрами

$\varepsilon = \frac{1}{2}, r = 1$ имеет единственное решение. Точное решение с правой частью $f(x) \equiv 1, \varepsilon = \frac{1}{2}, r = 1$ задается функцией (8). Других решений нет.

Обратная матрица A^{-1} в системе линейных алгебраических уравнений СЛАУ (16) вычисляется библиотекой линейной алгебры *msimsl* для отыскания вектора коэффициентов разложения $D_j, j = 1, m$. Программа с использованием формул (16), (17), (18), (23), (24) дает численное решение задачи (5)

$$x_i = a + h \cdot i, i = \overline{0, n_1}, h = \frac{b-a}{n_1}, n_1 = 20, a = 0, b = 1,$$

с параметрами $\varepsilon = \frac{1}{2}, r = 1, f(x) \equiv 1, g_3(x) = \varepsilon = \frac{1}{2}, g_2(x) = r = 1, g_1(x) = 0, g_0(x) = 0$, представленное в таблице 2. Число базисных функций $m = 18$.

Таблица 2

Численное u_i^{num} и точное u_i^{exact} решения задачи (5)

| x_i | u_i^{num} | u_i^{exact} | $u_i^{num} - u_i^{exact}$ |
|---------------|-----------------------|-------------------------|---------------------------|
| 0,000000E+000 | 0,0000000000E+000 | 0,0000000000E+000 | 0,00000000E+000 |
| 5,000000E-002 | 1,99620012886537E-002 | 1,99620012886524E-002 | 1,231653667E-015 |
| 0,1000000000 | 3,48011017443269E-002 | 3,48011017443259E-002 | 1,006139616E-015 |
| 0,1500000000 | 4,52427162923431E-002 | 4,52427162923431E-002 | 6,938893903E-018 |
| 0,2000000000 | 5,19432275007362E-002 | 5,19432275007366E-002 | -3,816391647E-016 |
| 0,2500000000 | 5,54965548776091E-002 | 5,54965548776098E-002 | -6,800116025E-016 |
| 0,3000000000 | 5,64400990171948E-002 | 5,64400990171955E-002 | -7,563394355E-016 |
| 0,3500000000 | 5,52601200856299E-002 | 5,52601200856307E-002 | -8,118505867E-016 |
| 0,4000000000 | 5,23966044761353E-002 | 5,23966044761364E-002 | -1,033895191E-015 |
| 0,4500000000 | 4,82476683407243E-002 | 4,82476683407254E-002 | -1,075528555E-015 |
| 0,5000000000 | 4,31735420704626E-002 | 4,31735420704638E-002 | -1,221245327E-015 |
| 0,5500000000 | 3,75001756023005E-002 | 3,75001756023019E-002 | -1,415534356E-015 |
| 0,6000000000 | 3,15225006355969E-002 | 3,15225006355983E-002 | -1,450228825E-015 |
| 0,6500000000 | 2,55073824076967E-002 | 2,55073824076980E-002 | -1,356553758E-015 |
| 0,7000000000 | 1,96962905709227E-002 | 1,96962905709242E-002 | -1,467576060E-015 |
| 0,7500000000 | 1,43077159020167E-002 | 1,43077159020178E-002 | -1,103284130E-015 |
| 0,8000000000 | 9,53935703127063E-003 | 9,53935703127128E-003 | -6,574601973E-016 |
| 0,8500000000 | 5,57009907686709E-003 | 5,57009907686645E-003 | 6,435824095E-016 |
| 0,9000000000 | 2,56180398726754E-003 | 2,56180398726446E-003 | 3,080001531E-015 |
| 0,9500000000 | 6,609305099950E-004 | 6,609305099896E-004 | 5,435105490E-015 |
| 1,0000000000 | 0,0000000000E+000 | -1,110223024625157E-016 | 1,110223024E-016 |

В первом столбце таблицы 1 указаны значения узлов x_i равномерной сетки, во втором столбце записано численное решение u_i^{num} , в третьем столбце точное решение u_i^{exact} в узлах x_i . В последнем столбце находится разность решений $u_i^{num} - u_i^{exact}$.

```

norma C= 5.435105490669834E-015 n= 18 n1= 20
D( 1 ) -5.425383160656392E-002
D( 2 ) -2.983293942866721E-002
D( 3 ) 5.161097980956100E-002
D( 4 ) -1.280274485240004E-002
D( 5 ) 2.580548990467544E-003
D( 6 ) -4.300914983764449E-004
D( 7 ) 6.144164266031110E-005
D( 8 ) -7.680205348721532E-006
D( 9 ) 8.533561145054888E-007
D( 10 ) -8.533561228810689E-008
D( 11 ) 7.757808092804512E-009
D( 12 ) -6.46469953932031E-010
D( 13 ) 4.970810665385744E-011
D( 14 ) -3.580968394013108E-012
D( 15 ) 2.492338836360626E-013
D( 16 ) -3.917330812303257E-015
D( 17 ) -1.695030669349015E-015
D( 18 ) -3.164721066953407E-015
Fortran Pause - Enter command<CR> or <CR> to continue.
    
```

Рис. 1. Результаты работы программы

С учетом формул (23)–(24) программа дает норму погрешности $\|u^{num} - u^{exact}\|_C = \max_{i=0, n_1} |u_i^{num} - u_i^{exact}| \approx 5,435105E-015$ с результатом в десятки раз меньшим, чем с применением формул скалярного произведения функций (19)–(20). Рис. 1 показывает, что число базисных функций является оптимальным, если коэффициенты разложения решения по базисным функциям по абсолютной величине уменьшаются с ростом их индекса. Преимущество формул скалярного произведения (23)–(24) перед формулами (19)–(20) заключается также в слабой зависимости нормы погрешности от числа базисных функций в большом диапазоне их числа.

Обсуждение и заключение. Обобщена теорема существования и единственности решения краевой задачи с линейным обыкновенным дифференциальным уравнением порядка n на случай неразделенных краевых условий, если известны n линейно независимых частных решений соответствующего однородного уравнения. Аналитически решена краевая задача с дифференциальным уравнением третьего порядка в пограничном слое с несжимаемой жидкостью с параметрами $\varepsilon = 0,5$, $r = 1$ и постоянной правой частью $f(x) = 1$. Предложен метод Бубнова-Галеркина с системой линейно независимых на отрезке $[-1, 1]$ базисных функций, ограниченных с единичной нормой Чебышева для численного решения краевой гидродинамической задачи с сильным пограничным слоем. Впервые получена квадратурная интегральная формула с равномерным шагом для вычисления матричных элементов и коэффициентов правой части методом Бубнова-Галеркина в СЛАУ (16) с двадцать вторым порядком погрешности. Векторная норма Чебышева для разности точного решения и численного решения на равномерной сетке со скалярным произведением (23), (24) сравнима с 10^{-15} и в десятки раз меньше нормы невязки со скалярным произведением по формулам (19), (20) в одной и той же гидродинамической задаче.

Список литературы / References

- Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы: учебное пособие для студентов физико-математических специальностей высших учебных заведений*. Москва: Бинوم. Лаборатория знаний; 2011. 636 с. Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Numerical methods: a textbook for students of physics and mathematics specialties of higher educational institutions*. Binom. lab. Knowledge; 2011. 636 p. (In Russ.)
- Ершова Т.Я. Краевая задача для дифференциального уравнения третьего порядка с сильным пограничным слоем. *Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика*. 2020;1:30–39. <https://doi.org/10.3103/S0278641920010057>
Ershova, T.Ya. Boundary value problem for a third-order differential equation with a strong boundary layer. *Bulletin of Moscow University. Episode 15: Computational mathematics and cybernetics*. 2020;1:30–39. (In Russ.) <https://doi.org/10.3103/S0278641920010057>
- Ершова Т.Я. О сходимости сеточного решения задачи для уравнения третьего порядка в случае сильного пограничного слоя. В: *Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения»*. Москва: МАКС Пресс; 2020. С. 77–78. Ershova, T.Ya. On the convergence of a grid solution to the problem for a third-order equation in the case of a strong boundary layer. *Lomonosov readings: scientific conference*. Moscow: MAKS Press LLC, 2020. P. 77–78. (In Russ.)
- Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированный метод Бубнова-Галеркина для решения краевых задач с линейным обыкновенным дифференциальным уравнением. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(3):23–33. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-3-23-33>
Volosova N.K. [et al.]. Modified Bubnov-Galerkin method for solving boundary value problems with a linear ordinary differential equation. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(3):23–33. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-3-23-33>
- Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. *Численные методы в задачах и упражнениях*. Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний; 2010. 240 с. Bahvalov N.S., Lapin A.V., Chizhonkov E.V. *Numerical methods in problems and exercises*. Moscow: BINOM. Knowledge laboratory; 2010. 240 p. (In Russ.)

6. Петров А.Г. Высокоточные численные схемы решения плоских краевых задач для полигармонического уравнения и их применение к задачам гидродинамики. *Прикладная математика и механика*. 2023;87(3):343–368. <https://doi.org/10.31857/S0032823523030128>

Petrov A.G. High-precision numerical schemes for solving plane boundary value problems for a polyharmonic equation and their application to problems of hydrodynamics. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2023;87(3):343–368 (In Russ.) <https://doi.org/10.31857/S0032823523030128>

7. Проскурин Д.К., Сысоев Д.В., Сазонова С.А. Сходимость вычислительного процесса при реализации вариационного метода решения краевой задачи гидродинамики. *Вестник Воронежского государственного технического университета*. 2021;17(3):14–19. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2021.17.3.002>

Proskurin D.K., Sysoev D.V., Sazonova S.A. Convergence of the computational process when implementing the variational method for solving the boundary value problem of hydrodynamics. *Bulletin of the Voronezh State Technical University*. 2021;17(3):14–19. (In Russ.) <https://doi.org/10.36622/VSTU.2021.17.3.002>

8. Сидорякина В.В., Соломаха Д.А. Симметризованные варианты методов Зейделя и верхней релаксации решения двумерных разностных задач эллиптического типа. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):12–19. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-12-19>

Sidoryakina V.V., Solomaha D.A. Symmetrized versions of the Seidel and upper relaxation methods for solving two-dimensional difference problems of elliptic. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):12–19. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-12-19>

9. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. *Сборник задач по оптимизации: Теория. Примеры. Задачи*. Москва: Физматлит; 2008. 256 с.

Alekseev V.M., Galeev E.M., Tikhomirov V.M. *Collection of optimization problems: Theory. Examples. Problems*. Moscow: Fizmatlit; 2008. 256 p. (In Russ.)

Об авторах:

Наталья Константиновна Волосова, аспирант Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана (105005, Российская Федерация, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, стр. 1), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9122-1111), navalossova@yandex.ru

Константин Александрович Волосов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Российская Федерация, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9122-1111), konstantinvolosov@yandex.ru

Александра Константиновна Волосова, кандидат физико-математических наук, начальник аналитического отдела ООО «Трамплин» Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Российская Федерация, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9122-1111), alya01@yandex.ru

Михаил Иванович Карлов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Московского физико-технического института (141701, ГСП-4, Российская Федерация, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9), karlov.mipt@gmail.com

Дмитрий Феликсович Пастухов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9122-1111), dmitrij.pastuhov@mail.ru

Юрий Феликсович Пастухов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9122-1111), pulsar1900@mail.ru

Заявленный вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Natalya K. Volosova, Post-graduate Student of Bauman Moscow State Technical University (2nd Baumanskaya St. 5–1, Moscow, 105005, Russian Federation), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9122-1111), navalossova@yandex.ru

Konstantin A. Volosov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics of the Russian University of Transport (Obraztsova St. 9–9, Moscow, GSP-4, 127994, Russian Federation), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9122-1111), konstantinvolosov@yandex.ru

Aleksandra K. Volosova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Chief Analytical Department “Tramplin” LLC, Russian University of Transport (Obraztsova St. 9–9, Moscow, GSP-4, 127994, Russian Federation), [ORCID](#), alya01@yandex.ru

Mikhail I. Karlov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (9, Institutsky Lane, GSP-4, Dolgoprudny, 141701, Russian Federation), karlov.mipt@gmail.com

Dmitriy F. Pastukhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (Blokhin St. 29, Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), [ORCID](#), dmitrij.pastuhov@mail.ru

Yuriy F. Pastukhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (Blokhin St. 29, Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), [ORCID](#), pulsar1900@mail.ru

Contributions of the authors: the authors contributed equally to this article.

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 18.11.2024

Поступила после рецензирования / Revised 12.12.2024

Принята к публикации / Accepted 16.12.2024