

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

INFORMATION TECHNOLOGIES



УДК 004.032.26

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-35-42>


Применение нейронных сетей для решения нелинейных краевых задач для областей сложной формы

А.В. Галабурдин

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

✉ Galaburdin@mail.ru

Аннотация

Введение. Многие практически важные задачи сводятся к нелинейным дифференциальным уравнениям. В настоящей работе рассмотрен один из вариантов применения нейронных сетей к решению некоторых нелинейных краевых задач для областей сложной формы, а именно к решению стационарного дифференциального уравнения теплопроводности с коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры.

Материалы и методы. Исходная нелинейная краевая задача сводится к линейной с помощью преобразования Кирхгофа. Нейронная сеть строится для решения полученной линейной краевой задачи. При этом в качестве активационных функций принимаются производные от сингулярных решений уравнения Лапласа, а сингулярные точки этих решений распределены по замкнутым кривым, охватывающим границу области. Для настройки весов сети минимизировалась среднеквадратическая ошибка обучения.

Результаты исследования. Получены результаты решения задачи теплопроводности для различных областей сложной формы и различных форм зависимости коэффициента теплопроводности от температуры. Полученные результаты представлены в виде таблиц, которые содержат точное решение и решение, полученное при помощи нейронной сети.

Обсуждение и заключение. По результатам проведенных расчетов можно сделать вывод о том, что предложенный метод является достаточно эффективным для решения указанного типа краевых задач. Использование в качестве активационных функций производных от сингулярных решений уравнения представляется весьма перспективным.

Ключевые слова: нелинейные краевые задачи для областей сложной формы, нейронные сети

Благодарности. Автор выражает благодарность сотрудникам редакции за указанные замечания по оформлению, которые позволили сделать статью более удобной для восприятия.

Для цитирования. Галабурдин А.В. Применение нейронных сетей для решения нелинейных краевых задач для областей сложной формы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):35–42. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-35-42>

Original Theoretical Reserach

Application of Neural Networks for Solving Nonlinear Boundary Problems for Complex-Shaped Domains

Alexander V. Galaburdin

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

✉ Galaburdin@mail.ru

Abstract

Introduction. Many practically significant tasks reduce to nonlinear differential equations. In this study, one of the applications of neural networks for solving specific nonlinear boundary problems for complex-shaped domains is considered. Specifically, the focus is on solving a stationary heat conduction differential equation with a thermal conductivity coefficient dependent on temperature.

Materials and Methods. The original nonlinear boundary problem is linearized through Kirchhoff transformation. A neural network is constructed to solve the resulting linear boundary problem. In this context, derivatives of singular solutions to the

Laplace equation are used as activation functions, and these singular points are distributed along closed curves encompassing the boundary of the domain. The weights of the network were tuned by minimizing the mean squared error of training.

Results. Results for the heat conduction problem are obtained for various complex-shaped domains and different forms of dependence of the thermal conductivity coefficient on temperature. The results are presented in tables that contain the exact solution and the solution obtained using the neural network.

Discussion and Conclusion. Based on the computational results, it can be concluded that the proposed method is sufficiently effective for solving the specified type of boundary problems. The use of derivatives of singular solutions to the Laplace equation as activation functions appears to be a promising approach.

Keywords: nonlinear boundary problems for complex-shaped domains, neural networks

Acknowledgments. The author expresses gratitude to the editorial staff for their remarks on the formatting, which allowed the article to be made more accessible.

For Citation. Galaburdin A.V. Application of Neural Networks for Solving Nonlinear Boundary Problems for Complex-Shaped Domains. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):35–42. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-35-42>

Введение. При построении моделей различных природных явлений часто используется аппарат дифференциальных уравнений. Сложность моделируемых явлений приводит, соответственно, к сложным системам дифференциальных уравнений с непростой формой области. В настоящее время при решении подобных краевых задач все чаще применяется метод нейронных сетей.

Следует отметить, что теоретические основы метода нейронных сетей были заложены еще в середине прошлого века в трудах А.Н. Колмогорова [1]. Развитие теории в работе [2] раскрыто применительно к решению задачи о прогибе мембраны. В [3] предложена структура нейронной сети, позволяющей решать уравнения Лапласа, Пуассона, теплопроводности. Численное решение уравнения Пуассона в двумерной области, полученное методом Галеркина и методом Рунге с глубокими нейронными сетями представлено в статье [4]. В статье [5] исследованы подходы к решению задач теплопереноса на основе нейронной сети персептронного типа.

В последнее время достаточно часто при решении уравнений в частных производных используют физико-информированную нейронную сеть [6]. В статье [7] представлены решения задач классической механики посредством применения физико-информированных нейронных сетей. В работе [8] рассмотрен подход к решению прямых и обратных задач рассеяния с использованием радиально-базисной нейронной сети. В статье [9] на основе метода доверительных областей разработан метод обучения РБФ-сетей с настраиваемым функциональным базисом при решении краевых задач математической физики. Статья [10] посвящена изучению использования физико-информированных нейронных сетей при решении нестационарной нелинейной системы дифференциальных уравнений, описывающей процесс движения одномерного теплопроводного газа. В работах [11, 12] рассматривается применение нейронных сетей при решении уравнений Навье-Стокса. В работах [13, 14] при построении нейронной сети используются в качестве активационных функций радиально-базисные функции и при обучении варьируются их параметры.

Настоящая работа является развитием подхода к решению дифференциальных уравнений в частных производных методом нейронных сетей, изложенного в статье [15]. Целью данной работы является разработка подхода к применению нейронных сетей для решения нелинейных краевых задач для областей сложной формы.

Материалы и методы. Рассмотрим краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(W) \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(W) \frac{\partial W}{\partial y} \right) = 0 \quad (1)$$

на плоской области G ограниченной замкнутой кривой γ .

Данное уравнение описывает стационарное тепловое поле. В этом случае W — температура, а $k(W)$ — коэффициент теплопроводности. С помощью преобразования Кирхгофа [16, 17] данная задача сводилась к линейной. Суть преобразования состоит в том, что вводится функция $u(W)$, для которой

$$\text{grad}(u(W)) = \frac{du(W)}{dW} \text{grad}(W).$$

Тогда можно положить

$$\frac{du(W)}{dW} = k(W) \quad (2)$$

и исходное дифференциальное уравнение примет вид $\Delta u(x, y) = 0$.

Из (2) получим

$$u(x, y) = \int_{W_0}^W k(W) dW,$$

где W_0 — произвольная исходная величина.

Если в исходной задаче на границе области заданы значения $W = W_o$, то для u получим граничные условия

$$u_o = \int_{w_o}^{w_o} k(W) dW.$$

Выразив W , получим решение исходной краевой задачи.

Таким образом, исходная нелинейная задача сводится к задаче Дирихле, которая решается с применением нейронной сети [15]. В основу нейронной сети положено соотношение

$$u_i = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N c_k \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_k [U]_{ik} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N c_k [u]_k \left[\frac{\partial U}{\partial n} \right]_{ik}.$$

В приведенном выражении величины $[U]_{ik}$ и $\left[\frac{\partial U}{\partial n} \right]_{ik}$ можно рассматривать как активационные функции, а $c_k \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_k$ и $c_k [u]_k$ — как веса.

Используя метод наименьших квадратов и требуя выполнения указанного соотношения в каждой точке границы для всех функций обучающего множества, можно получить систему уравнений для определения весов. Чтобы улучшить обусловленность данной системы уравнений следует увеличить сингулярность величин $[U]_{ik}$ и $\left[\frac{\partial U}{\partial n} \right]_{ik}$, сместив контур интегрирования на некоторое расстояние от границы области γ .

Окончательно, решение задачи Дирихле следует искать в виде:

$$u(x) = \sum_{k=1}^N w_k p(s_k) U(x, \sigma_k) + \sum_{k=1}^N v_k p(s_k) V(x, \sigma_k),$$

где $p(s_k)$ — значение неизвестной функции u на границе области; $U(x, \sigma_k)$ и $V(x, \sigma_k)$ — активационные функции; σ_k и τ_k — точки замкнутых кривых γ_1 и γ_2 , охватывающих границу области; γ, x — точки области G .

Замкнутые кривые γ_1 и γ_2 подобны контуру γ и получаются из него смещением каждой точки в направлении внешней нормали к границе области на расстояния ρ_1 и ρ_2 соответственно. В процессе обучения сети определяются веса и величины ρ_1 и ρ_2 . Для этого минимизируется функционал ошибки

$$\Pi(w_k, v_k, \rho_1, \rho_2) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^N w_k p_k^j U(x_i, \sigma_k) + v_k p_k^j V(x_i, \sigma_k) - p_k^j \right\}^2$$

где x_i — координата i -ой точки граничного контура γ ; p_k^j — граничное значение j -ой функции обучающего множества в точке x_k .

Из соотношений $\frac{\partial \Pi}{\partial w_m} = 0$ и $\frac{\partial \Pi}{\partial v_m} = 0$, $m = 1, 2, \dots, N$ получим систему линейных уравнений для определения w_m и v_m .

Значение ρ_1 определяется простым перебором, а $\rho_2 = \rho_1 + 1$.

Для оценки точности полученного решения можно сравнить значения u на границе области, вычисленные с помощью нейронной сети

$$\tilde{u}(s_i) = \sum_{k=1}^N w_k p(s_k) U(s_i, \sigma_k) + \sum_{k=1}^N v_k p(s_k) V(s_i, \sigma_k)$$

с заданными граничными условиями $u(s)$.

Полученные параметры сети не обеспечивают желаемую точность полученного решения. Повысить точность можно итерационным уточнением полученного результата по следующей схеме:

$$\begin{aligned} \Delta u^0(s_i) &= p(s_i), \quad q^0(s_i) = p(s_i), \\ \Delta v^{n+1}(s_i) &= \sum_{k=1}^N w_k \Delta u^n(s_k) U(s_i, \sigma_k) + \sum_{k=1}^N v_k \Delta u^n(s_k) V(s_i, \tau_k), \\ \Delta u^{n+1}(s_i) &= \Delta u^{n+1}(s_i) - \Delta v^{n+1}(s_i), \quad u_i^{n+1}(s_i) = \Delta u_i^{n+1}(s_i) - \Delta u^{n+1}(s_i), \end{aligned}$$

где $u_i^{n+1}(s_i)$ — значения уточненного решения на границе области.

Процесс уточнения решения продолжается до тех пор, пока величина

$$\frac{\|\Delta u^{n+1}(s_i)\|}{\|u_i^{n+1}(s_i)\|}$$

не будет достаточно малой (меньше заданного δ_0) или же пока она не начнет расти. Приведенные ниже результаты получены при $\delta_0 = 0,0025$.

Определить значение u в любой точке x области G можно по формуле

$$\tilde{u}(x) = \sum_{k=1}^N w_k u_t(s_k) U(x, \sigma_k) + \sum_{k=1}^N v_k u_t(s_k) V(s_k, \tau_k).$$

В качестве обучающего множества использовалось множество функций, являющихся решением уравнения Лапласа

$$r^k \cos\left(k \arccos\left(\frac{x}{r}\right)\right) + r^k \sin\left(k \arccos\left(\frac{x}{r}\right)\right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots, M$. Расчеты проводились при $M = 75$.

Указанные функции задавались в различных системах координат, повернутых друг относительно друга на угол, кратный $2\pi/5$.

Активационные функции:

$$U(x, y, t, s) = \frac{\beta^5 - 10\beta^3\delta^2 + 5\beta\delta^4 + \delta^5 - 10\delta^3\beta^2 + 5\delta\beta^4}{R^{10}},$$

$$V(x, y, t, s) = \frac{\beta^7 - 21\beta^5\delta^2 + 35\beta^3\delta^4 - 7\beta\delta^6}{R^{10}}n_x + \frac{\delta^7 - 21\delta^5\beta^2 + 35\delta^3\beta^4 - 7\delta\beta^6}{R^{10}}n_y,$$

где $\delta = x - t$; $\beta = y - s$; $R = \sqrt{\delta^2 + \beta^2}$; n_x, n_y — координаты вектора внешней нормали к границе области.

Результаты исследования. Предложенный метод применялся при решении задачи (1) для областей, граница γ которых задавалась в виде

$$\begin{cases} x = a \cos(t) + g \sin(\omega t) \\ y = a_1 \cos(t) + g_1 \sin(\omega t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

где a, a_1, g, g_1, ω — изменяемые параметры.

Задача 1. Рассмотрим область $G1$, соответствующую значениям параметров: $a = 1,15$; $a_1 = 1,15$; $g = 0,05$; $g_1 = -0,05$; $\omega = 7$ (рис. 1).

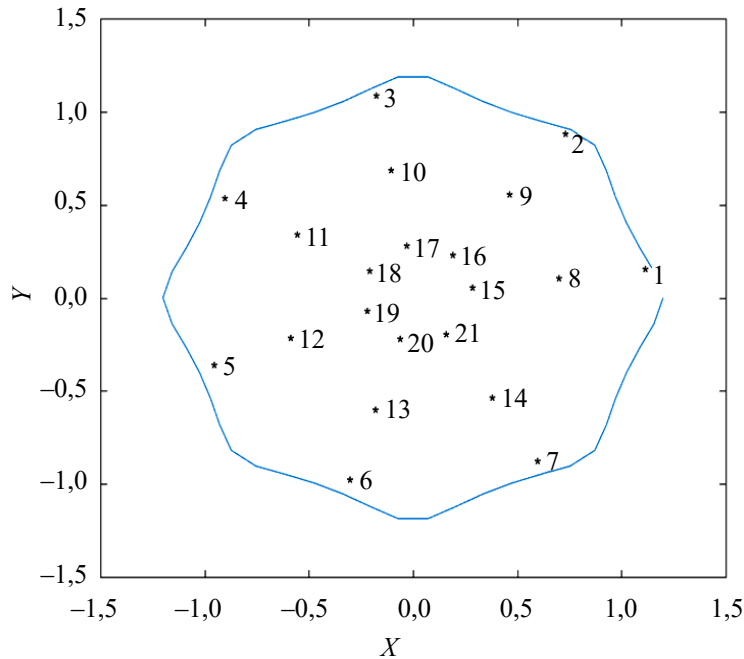


Рис. 1. Область $G1$

Звездочками обозначены места расположения точек области $G1$, в которых вычисляются точные значения решения задачи и значения, полученные при помощи нейронной сети при значении $\rho_1 = 7$, $\rho_2 = 8$.

Рассматривалось уравнение (1) для случая $k(W) = th(5W)$, которое имеет точное решение

$$W_o = \text{arch}(11,25((x-1,5)^2 + (y-1,5)^2)^5).$$

Результаты расчетов представлены в таблице 1.

Задача 2. Рассмотрим область $G2$ (рис. 2), соответствующую значениям параметров $a = 1$; $a_1 = 1$; $g = 0$; $g_1 = 0,3$; $\omega = 3$; $\rho_1 = 10,51$; $\rho_2 = 11,51$.

В уравнении (1) полагалось $k(W) = ch(5W)$, точное решение в этом случае имеет вид

$$W_o = \operatorname{arsh}(5e^{5x} \sin 5y) / 5.$$

Результаты расчетов представлены в таблице 2.

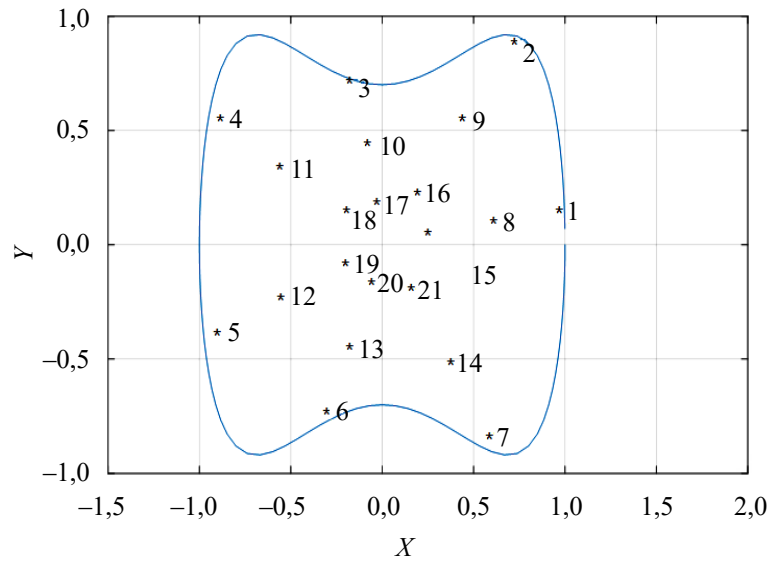


Рис. 2. Область G2

Таблица 1

Результаты расчетов

Номер точки	1	2	3	4	5	6	7
x	1,0534	0,6865	-0,1869	0,8848	-0,9709	-0,3193	0,5811
y	0,1275	0,8240	1,0218	0,3939	-0,3832	-0,9998	-0,9001
Точное решение	3,0529	2,6521	2,3621	2,8550	3,3731	3,8462	4,1520
Решение НС	3,0535	2,6479	2,3629	2,8491	3,3771	3,8434	4,1566
Номер точки	8	9	10	11	12	13	14
x	0,6937	0,4521	0,1231	-0,5826	-0,6035	-0,1984	0,3612
y	0,0839	0,5426	0,6729	0,3252	-0,2382	-0,6215	-0,5595
Точное решение	3,2590	3,0804	2,9504	3,1696	3,4495	3,7625	3,9935
Решение НС	3,2584	3,0790	2,9487	3,1681	3,4494	3,7628	3,9947
Номер точки	15	16	17	18	19	20	21
x	0,3340	0,2176	-0,0592	-0,2805	-0,2361	-0,0776	0,1413
y	0,0404	0,2612	0,3240	0,1566	-0,0932	-0,2431	-0,2189
Точное решение	3,5104	3,4526	3,4064	3,4820	3,5887	3,7314	3,8544
Решение НС	3,5100	3,4520	3,4058	3,4815	3,5885	3,7315	3,8547

Таблица 2

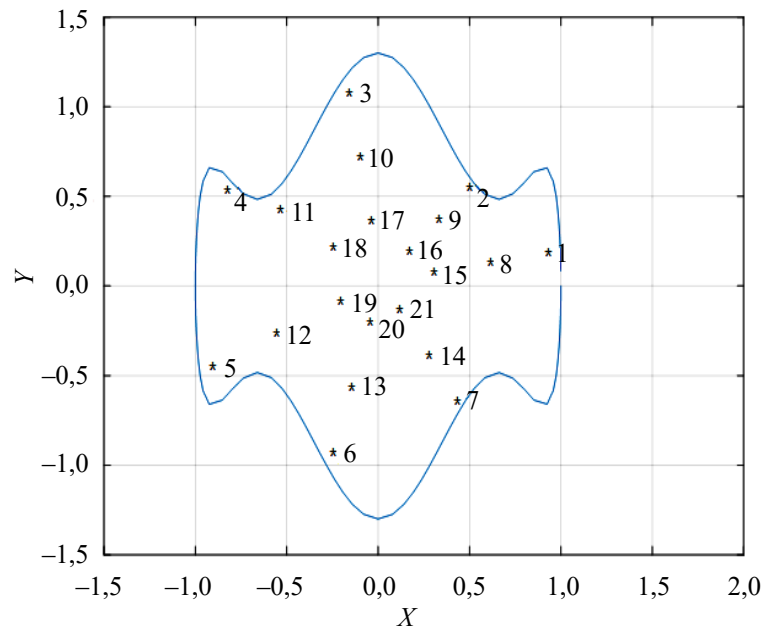
Результаты расчетов

Номер точки	1	2	3	4	5	6	7
x	0,9085	0,6728	-0,1902	-0,8641	-0,9230	-0,3228	0,5679
y	0,1291	0,8320	0,6703	0,5138	-0,4025	-0,7484	0,8587
Точное решение	0,3489	0,6987	0,6948	0,5361	0,3820	0,2615	0,1561
Решение НС	0,3510	0,6982	0,6941	0,5346	0,3850	0,2666	0,1589
Номер точки	8	9	10	11	12	13	14
x	0,5983	0,4430	-0,1253	-0,5690	-0,5737	-0,2006	0,3530
y	0,0850	0,5479	0,4414	0,3383	-0,2502	-0,4652	-0,5338

Окончание таблицы 1

Точное решение	0,1849	0,5233	0,5761	0,4537	0,3508	0,29214	0,1806
Решение НС	0,1879	0,5231	0,5753	0,4533	0,3521	0,29578	0,1836
Номер точки	15	16	17	18	19	20	21
x	0,2880	0,2133	-0,0603	0,2739	-0,2245	-0,0785	0,1381
y	0,0409	0,2638	0,2125	0,1629	-0,0979	-0,1820	-0,2088
Точное решение	0,0585	0,2897	0,3780	0,3021	0,2534	0,2496	0,1573
Решение НС	0,0607	0,2901	0,3780	0,3026	0,2544	0,2512	0,1591

Задача 3. Рассмотрим уравнение (1) в области $G3$ (рис. 3).

Рис. 3. Область $G3$

В этом случае полагаем $a = 1$; $a_1 = 1$; $g = 0$, $g_1 = 0,3$; $\omega = 5$; $\rho_1 = 11,65$; $\rho_2 = 12,65$. $K(W) = W^{1,5}$ а точное решение имеет вид:

$$W_o = \left\{ 2,5 \left((x^2 - y^2) \cos 1,5x \operatorname{ch} 1,5y + 2xy \sin 1,5x \operatorname{sh} 1,5y \right) + 25\sqrt{5} \right\}^{0,4}.$$

Результаты проведенных расчетов представлены в таблице 3.

Таблица 3

Результаты расчетов

Номер точки	1	2	3	4	5	6	7
x	0,9090	0,4788	-0,1752	-0,8421	-0,9238	-0,2642	0,4126
y	0,1524	0,5207	1,0491	0,5014	-0,4754	-0,9563	-0,6755
Точное решение	4,9224	5,0814	4,9816	4,7718	4,7525	4,9738	5,0741
Решение НС	5,0164	5,0845	5,0215	4,8410	4,7800	5,0122	5,1008
Номер точки	8	9	10	11	12	13	14
x	0,5986	0,3153	-0,1154	-0,5546	-0,5742	-0,1642	0,2564
y	0,1004	0,3429	0,6908	0,3962	-0,2955	-0,5944	-0,4199
Точное решение	4,9672	4,9862	4,9595	4,9035	4,8956	4,9575	4,9874
Решение НС	5,0201	5,0286	5,0030	4,9507	4,9375	4,9987	5,0289
Номер точки	15	16	17	18	19	20	21
x	0,2882	0,1518	-0,0555	-0,2671	-0,2246	-0,2246	0,1003
y	0,0483	0,1651	0,3326	0,1910	-0,1156	-0,2326	-0,1643
Точное решение	4,9643	4,9616	4,9576	4,9483	4,9471	4,9575	4,9625
Решение НС	5,0060	5,0049	4,9998	4,9910	4,9893	4,9988	5,0040

На рис. 4 и рис. 5 представлены для сравнения графически точное решение задачи 3 и решение, полученное при помощи нейронной сети.

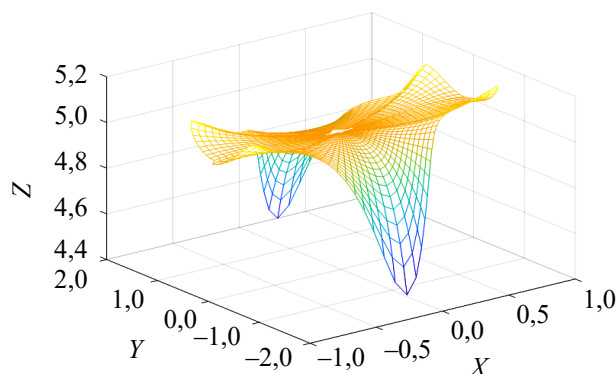


Рис. 4. Точное решение задачи 3

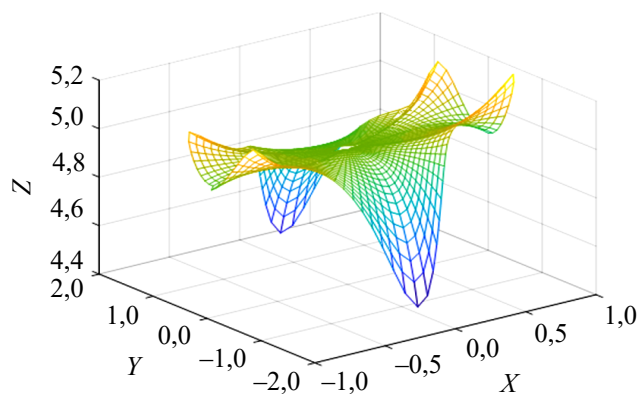


Рис. 5. Решение задачи 3, полученное нейронной сетью

Обсуждение и заключение. Представленные результаты являются развитием подхода к решению дифференциальных уравнений в частных производных методом нейронных сетей, изложенного в статье [15]. Они убедительно доказывают эффективность предложенного метода построения нейронной сети для решения краевых задач для областей сложной формы. Он обладает достаточно высоким потенциалом, что позволяет его развивать и совершенствовать, применяя при решении самых разных краевых задач.

Список литературы / References

1. Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения. *Доклады Академии наук СССР*. 1957;114(5):953–956.
Kolmogorov A.N. On the representation of continuous functions of several variables in the form of superpositions of continuous functions of one variable and addition. *Reports of the USSR Academy of Sciences*. 1957;114(5):953–956. (In Russ.)
2. Варшавчик Е.А., Галяутдинова А.Р., Седова Ю.С., Тархов Д.А. Решение дифференциальных уравнений в частных производных для областей с постоянными границами. В: *Сборник статей по материалам третьей всероссийской научно-практической конференции «Искусственный интеллект в решении актуальных социальных и экономических проблем XXI века»*. Пермь: издательство ПГНИУ; 2018. С. 294.
Varshavchik E.A., Galyautdinova A.R., Sedova Yu.S., Tarkhov D.A. Solution of partial differential equations for domains with constant boundaries. *Artificial intelligence in solving current social and economic problems of the 21st century: collection of articles. Art. based on materials from the Third All-Russian. scientific-practical conf.* Perm, May 14–18, 2018. Perm. state national research univ.; 2018. P. 294. (In Russ.)
3. Епифанов А.А. Применение методов глубокого обучения для решения дифференциальных уравнений в частных производных. *Успехи кибернетики*. 2020;1(4):22–28. <https://doi.org/10.51790/2712-9942-2020-1-4-3>
Epifanov A.A. Application of deep learning methods for solving partial differential equations. *Advances in cybernetics*. 2020;1(4):22–28. (In Russ.) <https://doi.org/10.51790/2712-9942-2020-1-4-3>
4. Cai S., Wang Z., Wang S., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks for heat transfer problems. *Journal of Heat Transfer*. 2021;143(6):060801. <https://doi.org/10.1115/1.4050542>
5. Корсунов Н.И., Ломакин А.В. Моделирование процессов, описываемых волновым дифференциальным уравнением, с использованием ячеистых нейронных сетей. *Научные ведомости. Серия: История. Политология. Экономика. Информатика*. 2014;15(186):103–107.
Korsunov N.I., Lomakin A.V. Modeling processes described by a wave differential equation using cellular neural networks. *Scientific bulletins. Series History. Political science. Economy. Informatics*. 2014;15(186):103–107. (In Russ.)

6. Raissia M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*. 2019;378:686–707.
7. Зрелова Д.П., Ульянов С.В. Модели физически информированных/осведомленных классических Лагранжевых/Гамильтоновых нейронных сетей в глубоком обучении. *Современные информационные технологии и ИТ-образование*. 2022;18(2):310–325. <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.310-325>
- Zrelova D.P., Ulyanov S.V. Models of physically informed / aware classical Lagrangian / Hamiltonian neural networks in deep learning. *Modern information technologies and IT education*. 2022;18(2):310–325. (In Russ.) <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.310-325>
8. Шевкун С.А., Самойлов Н.С. Применение нейросетевого подхода к решению прямых и обратных задач рассеяния. *Вестник инженерной школы ДВФУ*. 2021;2(47):210–225.
- Shevkun S.A., Samoilov N.S. Application of a neural network approach to solving direct and inverse scattering problems. *Engineering School Bulletin FEFU*. 2021;2(47):210–225. (In Russ.)
9. Горбаченко В.И., Жуков М.В. Решение краевых задач математической физики с помощью сетей радиальных базисных функций. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2017;57(1):133–143.
- Gorbachenko V.I., Zhukov M.V. Solving boundary value problems of mathematical physics using radial basis networks. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2017;57(1):133–143. (In Russ.)
10. Кузнецов К.С., Амосова Е.В. Численное решение системы уравнений Навье-Стокса в случае сжимаемой среды с использованием нейронных сетей. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2024;67:31–41. <https://doi.org/10.17223/19988605/67/4>
- Kuznetsov K.S., Amosova E.V. Numerical solution of the system of Navier-Stokes equations in the case of a compressible medium using neural networks. *Bulletin of Tomsk State University. Management, computer technology and information science*. 2024;67:31–41. (In Russ.) <https://doi.org/10.17223/19988605/67/4>
11. Almajid M. Abu-alsaud M. Prediction of porous media fluid flow using physics informed neural networks. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 2021;208:109205. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.109205>
12. Eivazi H., Tahani M., Schlatter P., Vinuesa R. Physics-informed neural networks for solving Reynolds-averaged Navier-Stokes equations. *Physics of Fluids*. 2022;34(7):075117. <https://doi.org/10.1063/5.0095270>
13. Kansa E.J. Motivation for using radial basis functions to solve PDEs. URL: <http://uahtitan.uah.edu/kansaweb.html> (accessed: 28.11.2024).
14. Kansa E.J. Multiquadrics . A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. II. Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Comput. Math. Appl.* 1990;19(8):47–161.
15. Галабурдин А.В. Применение нейронных сетей для решения задачи Дирихле для областей сложной формы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):68–79. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-68-79>
- Galaburdin A.V. Application of neural networks to solve the Dirichlet problem for areas of complex shape. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2) :68–79. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-68-79> (In Russ.)
16. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. *Методы граничных элементов*. Москва: Мир; 1987. 524 с.
- Brebbia K., Telles J., Vroubel L. *Boundary element methods*. Moscow: Mir; 1987. 524 p. (In Russ.)
17. Аккуранов Ю.Н., Михайлов В.Н. The method of boundary integral equations for solving nonlinear heat transmission problem. *USSR Comput. Maths. Math. Phys.* 1980;20:117–125.

Об авторе:

Александр Васильевич Галабурдин, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9151-1000), Galaburdin@mail.ru

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

About the Author:

Alexander V. Galaburdin, Cand. Sci. (Phys. – math.), Associate Professor at the Department Mathematics and informatics, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostovon-Don, 344003, Russian Federation), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9151-1000), Galaburdin@mail.ru

Conflict of Interest Statement: the author declares no conflict of interest.

The author has read and approved the final version of manuscript.

Поступила в редакцию / Received 12.11.2024

Поступила после рецензирования / Reviewed 03.12.2024

Принята к публикации / Accepted 07.12.2024