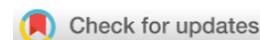


ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 519.6

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-7-19>


Решение краевых задач для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений методом Бубнова-Галеркина

Н.К. Волосова¹ , К.А. Волосов² , А.К. Волосова² , М.И. Карлов³,
Д.Ф. Пастухов⁴  , Ю.Ф. Пастухов⁴ 

¹ Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Российская Федерация

² Российский университет транспорта, г. Москва, Российская Федерация

³ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
г. Долгопрудный, Российская Федерация

⁴ Полоцкий государственный университет им. Евфросинии Полоцкой, г. Новополоцк, Республика Беларусь

✉ dmitrij.pastuhov@mail.ru

Аннотация

Введение. Исследуется возможность численного решения модифицированным методом Бубнова-Галеркина краевой задачи с нелинейным дифференциальным уравнением, непрерывными коэффициентами и правой частью. В постановке задачи частные производные коэффициентов уравнения являются непрерывными функциями по всем аргументам. Порядок нелинейного дифференциального уравнения n строго меньше числа координатных функций m . **Материалы и методы.** Для численного решения нелинейной краевой задачи использован модифицированный метод Петрова-Галеркина и идея единственности разложения гладкой функции по системе линейно независимых базисных функций степенного вида на отрезке $[-1,1]$ с единичной нормой Чебышева для каждой функции системы. В систему линейных алгебраических уравнений включены линейно независимые краевые условия. При этом элементы матрицы и правая часть системы зависят от индекса простой итерации s . От индекса s зависит и вектор коэффициентов разложения решения по базисным функциям. Обратная матрица системы находилась библиотекой линейной алгебры `Msimsl` на языке Fortran.

Результаты исследования. Сформулированы достаточные условия существования и единственности решения краевой задачи с нелинейным дифференциальным уравнением методом простой итерации. При выполнении достаточных условий коэффициенты разложения абсолютно уменьшаются с ростом номера базисной функции.

Обсуждение и заключение. Точно решены три краевых задачи с нелинейным уравнением второго порядка и одна задача с уравнением третьего порядка. Аналитические решения сравнены с численными решениями, равномерная норма разности имеет порядок 10^{-13} , 10^{-11} , 10^{-10} , 10^{-10} соответственно. Модифицированный метод Бубнова-Галеркина позволяет находить решение каждой ветви многозначной функции в краевых задачах с нелинейными дифференциальными уравнениями.

Ключевые слова: гидродинамика, механика, численные методы, нелинейные дифференциальные уравнения, краевые задачи, метод Галеркина

Для цитирования. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Решение краевых задач для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений методом Бубнова-Галеркина. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(1):7–19. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-7-19>

Solution of Boundary Value Problems for Certain Nonlinear Differential Equations Using the Bubnov-Galerkin Method

Natalya K. Volosova¹ , Konstantin A. Volosov² , Aleksandra K. Volosova² , Mikhail I. Karlov³,
Dmitriy F. Pastukhov⁴ ✉, Yuriy F. Pastukhov⁴ 

¹ MGTU named after. N.E. Bauman, Moscow, Russian Federation

² Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation

³ Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russian Federation

⁴ Polotsk State University named after Euphrosyne of Polotsk, Novopolotsk, Republic of Belarus

✉ dmitrij.pastuhov@mail.ru

Abstract

Introduction. This study investigates the possibility of numerically solving a boundary value problem with a nonlinear differential equation, continuous coefficients, and a right-hand side using the modified Bubnov-Galerkin method. In the problem formulation, the partial derivatives of the equation's coefficients are continuous functions of all arguments. The order of the nonlinear differential equation n is strictly less than the number of coordinate functions m .

Materials and Methods. To numerically solve the nonlinear boundary value problem, the modified Petrov-Galerkin method and the uniqueness property of decomposing a smooth function into a system of linearly independent polynomial basis functions on the interval $[-1,1]$ with a unit Chebyshev norm for each function in the system are used. The system of linear algebraic equations includes linearly independent boundary conditions. The matrix elements and the right-hand side of the system depend on the simple iteration index s . The coefficient vector of the solution decomposition into basis functions also depends on the index s . The inverse matrix of the system was computed using the Msimsl linear algebra library in Fortran.

Results. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution to the boundary value problem with a nonlinear differential equation using the simple iteration method have been formulated. When the sufficient conditions are met, the decomposition coefficients decrease absolutely as the basis function index increases.

Discussion and Conclusion. Three boundary value problems with a second-order nonlinear equation and one problem with a third-order equation were solved exactly. The analytical solutions were compared with numerical solutions, with the uniform norm of the difference having an order of 10^{-13} , 10^{-11} , 10^{-10} , 10^{-10} , respectively. The modified Bubnov-Galerkin method allows for solving each branch of a multivalued function in boundary value problems with nonlinear differential equations.

Keywords: hydrodynamics, mechanics, numerical methods, nonlinear differential equations, boundary value problems, Galerkin method

For Citation. Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Karlov M.I., Pastukhov D.F., Pastukhov Yu.F. Solution of Boundary Value Problems for Certain Nonlinear Differential Equations Using the Bubnov-Galerkin Method. *Computation Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(1):7–19. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-7-19>

Введение. Для решения краевой задачи на отрезке с нелинейным дифференциальным уравнением известен, например, метод Ньютона [1, с. 460]. Методы решения краевых задач в гидродинамике и в механике содержатся также в работах [2, 3]. Методы решения нелинейных краевых задач имеют много общего с методами решения линейных задач [1, с. 458]. В данной работе модифицированный метод Бубнова-Галеркина, предложенный в работах [4, 5] для решения краевых задач с линейными дифференциальными уравнениями, был обобщен на случай краевых задач с нелинейными дифференциальными уравнениями.

В данной работе любая ветвь (график) гладкого решения нелинейного дифференциального уравнения представляется в виде линейной комбинации базисных функций степенного вида (то есть численное решение представимо в функциональном виде). Все базисные функции заданы на отрезке $[-1,1]$ с единичной нормой Чебышева.

Решение нелинейной краевой задачи сводится к методу простой итерации. В каждой итерации решается система линейных алгебраических уравнений, элементы матрицы которой и коэффициенты правой части зависят от номера итерации s . Для уравнения третьего порядка в СЛАУ включаются $n-1$ линейно независимых краевых условий и $m-n+1$ условий ортогональности невязки дифференциального уравнения к базисным функциям [1, 6] (n — порядок ОДУ, m — число базисных функций).

В работах [7–10] получены новые результаты и идеи решения краевых задач, в том числе решения задач с высокой степенью точности или в областях сложной формы.

Материалы и методы

Постановка задачи. Пусть неизвестная функция $u(x)$, принадлежащая классу n раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $C^n[a, b]$, является решением краевой задачи с нелинейным дифференциальным уравнением порядка n с переменными коэффициентами $g_i(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(i)}(x)) \in C[a, b], i = 0, n$

$$\begin{cases} L[u(x)] = f(x, u(x)), x \in (a, b), u(x) \in (c, d) \\ L[u(x)] \equiv \left(\sum_{i=0}^n g_i(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(i)}(x)) \frac{d^i}{dx^i} \right) u(x), \end{cases} \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{\mu}^i u^{(i)}(a) + \beta_{\mu}^i u^{(i)}(b)) = \gamma_{\mu}, \mu = \overline{1, n}. \quad (2)$$

В краевой задаче (1)–(2) заданные функции $g_i(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(i)}(x)) \in C[a, b], i = \overline{0, n}$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ по всем аргументам. Каждое слагаемое нелинейного уравнения (1) можно представить так, чтобы коэффициент $g_i(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(i)}(x)), i = \overline{0, n}$, умноженный на производную $\frac{d^i u(x)}{dx^i}$, зависел от производных функции $u^{(p)}(x), p = \overline{0, i}$ не выше i -го порядка.

Для простоты краевые условия (2) заданы в точках $x=a, x=b$ линейными формами относительно функции и производных до $n-1$ порядка включительно, как и в линейной краевой задаче. Для замкнутости задачи (1) необходимо, чтобы полное число краевых условий было равно n . Матрицы коэффициентов $\alpha_{\mu}^i, \beta_{\mu}^i, i = \overline{0, n-1}, \mu = \overline{1, n}$, а также числа $\gamma_{\mu}, \mu = \overline{1, n}$ заданы. Для однозначного выделения ветви нелинейного решения уравнения (1) можно задать одно или несколько дополнительных условий к краевым условиям вида (2).

Пусть также коэффициенты $g_i(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(i)}(x)) \in C[a, b], i = \overline{0, n}$ непрерывно дифференцируемы по переменным $u^{(p)}$, то есть $\frac{\partial g_i}{\partial u^{(p)}} \in C[c_i, d_i], p = \overline{0, i}$.

Обобщим метод Бубнова-Галеркина, предложенный в работах [4, 5] для решения краевых задач с линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями, на случай нелинейного дифференциального уравнения. Предположим, что любую гладкую функцию $u(x)$ или ее выделенную ветвь (решение уравнения (1)) можно однозначно представить линейной суммой базисных степенных функций [4, 5]:

$$\{\phi_i(x)\}_{i=0}^m = \left\{ \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right)^i, x \in [a, b], i = \overline{0, m} \right\}, \|\phi_i(x)\|_C = \max_{x \in [a, b]} |\phi_i(x)| = 1 \forall i = \overline{0, m}, \quad (3)$$

$$u(x) = u(c) + \sum_{j=1}^m \phi_j(x) D_j = u(c) + \sum_{j=1}^m \left(\frac{2(x-c)}{b-a} \right)^j D_j, c = \frac{a+b}{2}. \quad (4)$$

Поиск вектора разложения D_j для решения краевой задачи (1)–(2) по базисным функциям $\phi_j(x)$ является целью численного алгоритма. Запишем невязку нелинейного уравнения (1) и учтем представление его решения формулой (4):

$$\begin{aligned} R(u(x)) &= L[u(x)] - f(x, u(x)) = \left(\sum_{i=0}^n g_i(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(i)}(x)) \frac{d^i}{dx^i} \right) u(x) - f(x, u(x)) = \\ &= \sum_{j=1}^m D_j \sum_{i=1}^n g_i(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(i)}(x)) \frac{d^i \phi_j(x)}{dx^i} + g_0(x, u(x)) \cdot u(x) - f(x, u(x)) = \\ &= \sum_{j=1}^m D_j \sum_{i=1}^n g_i(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(i)}(x)) \frac{d^i \phi_j(x)}{dx^i} - \overline{f(x, u(x))}, \overline{f(x, u(x))} = f(x, u(x)) - g_0(x, u(x)) \cdot u(x). \end{aligned}$$

Потребуем [1, 4–6], чтобы невязка $R(u(x))$ была ортогональна максимальному числу $m-n+1$ базисных функций (здесь m — число базисных координатных функций, а n — порядок дифференциального уравнения):

$$\langle R(u(x)), \phi_k(x) \rangle = 0 \Leftrightarrow k = \overline{0, m-n},$$

$$\left\langle \sum_{j=1}^m D_j \sum_{i=1}^n g_i(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(i)}(x)) \frac{d^i \phi_j(x)}{dx^i} - \overline{f(x, u(x))}, \phi_k(x) \right\rangle = 0 \forall k = \overline{0, m-n} \Leftrightarrow \quad (5)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m A_{k,j} D_j = F_k, F_k = \langle \overline{f(x, u(x))}, \phi_k(x) \rangle \\ A_{k,j} = \left\langle \sum_{i=1}^n g_i(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(i)}(x)) \frac{d^i \phi_j(x)}{dx^i}, \phi_k(x) \right\rangle, k = \overline{0, m-n}. \end{cases}$$

Остальные линейно независимые краевые условия (2) для системы линейных алгебраических уравнений (5) следует выбрать из множества допустимых функций исходной краевой задачи (1) [11].

Будем решать СЛАУ (5), в которой матричные коэффициенты и коэффициенты правой части зависят неявно от решения $u(x)$, методом простой итерации. Для этого рассмотрим неявную зависимость решения от вектора разложения $D_j^s, s = 0, 1, 2, \dots, j = \overline{1, m}$, (4) по системе базисных функций с номером итерации s .

Получим из (5):

$$A_{k,j} = A_{k,j}(u^s) = A_{k,j}(u(D^s)), F_k = F_k(u^s) = F_k(u(D^s)), D = D^{s+1},$$

$$\sum_{j=1}^m A_{k,j}(D^s) \cdot D_j^{s+1} = F_k(D^s), j = \overline{1, m}, k = \overline{0, m-n}, D^{s+1} = A^{-1}(D^s) \cdot F(D^s), s = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Обозначим предельные значения

$$\lim_{s \rightarrow \infty} A(D^s) = A, \lim_{s \rightarrow \infty} F(D^s) = F, \lim_{s \rightarrow \infty} D^s = D.$$

Запишем предельный вид уравнения (6):

$$AD = F. \quad (7)$$

Теорема 1 (достаточные условия существования и единственности решения D уравнения (7) в простой итерации (6)).

Пусть коэффициенты уравнения (1) непрерывны $g_i(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(i)}(x)) \in C[a, b], i = 0, n$ и непрерывно дифференцируемы по всем аргументам, начиная со второго $\frac{\partial g_i}{\partial u^{(p)}} \in C[c_p, d_p], p = \overline{0, i}, i = \overline{1, n}$. Пусть предельная матрица A в (7), вычисляемая по формулам (5), не вырождена. Пусть выполнены условия сжимающего отображения $q = \left\| A^{-1} \right\| \cdot \left\| G \right\| < 1$. Тогда в краевой задаче (1) с краевыми условиями (2) существует единственное решение. Норма невязки убывает согласно формуле $\left\| \delta D^s \right\| \leq \left\| \delta D^0 \right\| q^s / (1 - q)$, где s — номер итерации в алгоритме (6).

Доказательство. Рассмотрим приращение уравнения (6) в окрестности всех его предельных значений

$$AD = F \Rightarrow \delta AD + A \delta D = \delta F,$$

$\delta A^s = A^s - A$ — приращение матрицы размерности $m \times m$; A — матрица размерности $m \times m$; $\delta D^{s+1} = D^{s+1} - D$ — приращение вектора размерности m ; $\delta F^s = F^s - F$ — приращение вектора размерности m . Введем целый индекс $t = \overline{1, m}$ и рассмотрим приращение указанных величин $\delta A^s, \delta F^s$ как функцию приращения компоненты вектора δD^s_p , используя формулу (5) $\delta D_t^s = D_t^s - D_t^*$:

$$\delta A_{k,j}(\delta D_t^s) D = \left\langle \sum_{j=1}^m D_j \sum_{i=1}^n \sum_{p=0}^i \frac{\partial g_i}{\partial u_p} \cdot \phi_t^{(p)}(x) \cdot \phi_j^{(i)}(x), \phi_k(x) \right\rangle \delta D_t^s, u_p \equiv u^{(p)}(x) \quad t = \overline{1, m}, k = \overline{0, n-m}, j = \overline{1, m}.$$

В последней формуле добавилось суммирование по индексу p , так как коэффициенты нелинейного ОДУ $g_i(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(i)}(x))$ зависят от функции и от ее производных до i -го порядка включительно. Эффективная правая часть нелинейного уравнения $\overline{f(x, u(x))} = f(x, u(x)) - g_0(x, u(x)) \cdot u(x)$ зависит только от функции $u(x)$:

$$\delta F_k(\delta D_t^s) = \left\langle \frac{\partial \overline{f(x, u(x))}}{\partial u} \phi_t(x), \phi_k(x) \right\rangle \delta D_t^s, t = \overline{1, m}.$$

Получаем $\delta D^{s+1} = A^{-1} \left(\delta F^s - \delta A^s D \right)$ и последнее уравнение заменяем близким к нему уравнением простой итерации

$$\delta D^{s+1} = (A^s)^{-1} (\delta F^s - \delta A^s D^s) = (A^s)^{-1} G^s \delta D^s. \quad (8)$$

В уравнении (8)

$$A^s_{k,j} = \left\langle \sum_{i=1}^n g_i(x, u^s(x), u'^s(x), \dots, u^{(i)s}(x)) \frac{d^i \phi_j(x)}{dx^i}, \phi_k(x) \right\rangle, k = \overline{0, m-n}, j = \overline{1, m}, \quad (9)$$

$$G^s_{k,t} = \left\langle \frac{\partial \overline{f(x, u(x))}}{\partial u} \phi_t(x), \phi_k(x) \right\rangle - \left\langle \sum_{j=1}^m D_j \sum_{i=1}^n \sum_{p=0}^i \frac{\partial g_i}{\partial u_p} \cdot \phi_t^{(p)}(x) \cdot \phi_j^{(i)}(x), \phi_k(x) \right\rangle, k = \overline{0, m-n}, t = \overline{1, m}, \quad (10)$$

$\delta D_t^{s+1} = \delta D_t^s = 0, t = \overline{m-n+1, m}$ так как последние строки матричных коэффициентов и коэффициентов правой части в уравнении (5) определяются краевыми условиями и являются постоянными числами. В формуле (10) $\phi_t^{(p)}$ обозначает производную p -го порядка от базисной координатной функции с индексом t . Аналогично для $\phi_j^{(i)}(x)$. Явные формулы для $\phi_j^{(i)}(x)$ содержатся в работах [4, 5].

Оценим по норме правую и левую часть уравнения (8)

$$\|\delta D^{s+1}\| \leq \left\| (A^s)^{-1} \right\| \|G^s\| \|\delta D^s\| = q \|\delta D^s\|, q^s = \left\| (A^s)^{-1} \right\| \|G^s\| \leq \left\| \begin{pmatrix} * \\ A \end{pmatrix}^{-1} \right\| \|G^*\|. \quad (11)$$

В полных метрических пространствах [12], если параметр сжатия меньше единицы

$$q_s = \left\| (A^s)^{-1} \right\| \|G^s\| \leq q = \left\| \begin{pmatrix} * \\ A \end{pmatrix}^{-1} \right\| \|G^*\| < 1, s = 0, 1, 2, \dots$$

для отображения $\delta D^s \rightarrow \delta D^{s+1} = (A^s)^{-1} G^s \delta D^s$, то решение краевой задачи (1)–(2) существует и единственно.

Согласно работе А.Н. Колмогорова, С.В. Фомина [12, с. 87] норма невязки убывает по формуле $\|\delta D^s\| \leq \|\delta D^0\| q^s / (1 - q)$, $\|\delta D^s\| = \left\| D^s - D^* \right\| = \rho(D^s, D^*)$.

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим три примера решения нелинейной краевой задачи с уравнением второго порядка и один пример с уравнением третьего порядка.

Пример 1.

$$\begin{cases} u \cdot u''(x) - u' \cdot u'(x) = u^2(x) = f(x, u), \\ u(0) = 1, u(1) = e^{1/2}, x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (12)$$

Точное решение задачи получим, учитывая преобразования

$$u \cdot u''(x) - u' \cdot u'(x) = u^2(x) \Leftrightarrow \left(\frac{u'}{u} \right)' = (\ln(u(x)))'' = \frac{uu'' - (u')^2}{u^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\ln(u(x)) = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \Leftrightarrow u(x) = \overline{C_2} e^{\frac{x^2}{2} + C_1 x}, u(0) = 1 \Leftrightarrow \overline{C_2} = 1, u(1) = e^{1/2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + C_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow C_1 = 0.$$

В итоге точное решение примера (1) имеет вид $u(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$.

Приведем условие примера к численному алгоритму (5)–(6). Требуется также указать начальную функцию — решение, удовлетворяющее краевым условиям Дирихле, то есть заданным значениям функции на краях отрезка.

Получаем, что

$$u^0(x) = \frac{u_0 + u_n}{2} + \phi_1(x) D_1^0 = \frac{u_0 + u_n}{2} + \phi_1(x) \left(\frac{u_n - u_0}{2} \right), D_2^0 = \dots = D_n^0 = 0, \quad (13)$$

поскольку

$$\phi_1(a) = -1, \phi_1(b) = 1, u^0(a) = \frac{u_0 + u_n}{2} - \left(\frac{u_n - u_0}{2} \right) = u_0, u^0(b) = \frac{u_0 + u_n}{2} + \left(\frac{u_n - u_0}{2} \right) = u_n$$

и краевые условия для начальной функции $u^0(x)$ выполнены. Коэффициенты и правая часть в примере 1 имеют вид:

$$g_2(x, u, u', u'') = u, g_1(x, u, u') = -u', g_0(x, u) = 0, f(x, u) = u^2(x).$$

В численном алгоритме кроме формул (5)–(6) используем подробные формулы из работы [5], учитывающие краевые условия Дирихле для линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\sum_{j=1}^m a_{i,j}^s D_j^{s+1} = \overline{f_i^s}, i = \overline{0, m-1}. \quad (14)$$

Здесь элементы матрицы $a_{i,j}, i = \overline{0, m-1}, j = \overline{1, m}$ и коэффициенты правой части $\overline{f_i^s}$ системы уравнений (14) равны:

$$a_{i,j}^s = \begin{cases} \langle L^s \phi_j, \phi_i \rangle, j \equiv 1 \pmod{2}, i = \overline{0, m-2}, \\ \langle L^s (\phi_j - 1), \phi_i \rangle, j \equiv 0 \pmod{2}, i = \overline{0, m-2}, \\ 1, i = m-1, j \equiv 1 \pmod{2}, \\ 0, i = m-1, j \equiv 0 \pmod{2}, \end{cases}$$

$$\overline{f_i^s} = \begin{cases} \langle f(x, u^s) - L^s \left(\frac{u_a + u_b}{2} \right), \phi_i(x) \rangle, i = \overline{0, m-2}, \\ \frac{u_b - u_a}{2}, i = m-1. \end{cases}$$

Однако оператор $L^s \phi_j$ для матричных коэффициентов $a_{i,j}^s$ в (14) является нелинейным и вычисляется по формуле (1), в отличие от работы [5]. Абсолютная и относительная векторная норма Чебышева невязки задачи:

$$\|u^{num} - u^{exact}\|_c = 1,072313895664201E - 013, \frac{\|u^{num} - u^{exact}\|_c}{\|u^{exact}\|_c} = 6,503912545562317E - 014.$$

Число интервалов для вычисления скалярного произведения двух функций в (14) равно $n_1=20$, число координатных функций $m=15$, число итераций $n_1=30$.

Скалярное произведение функций вычислялось по формулам из работы [5]:

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \int_a^b y_1(x)y_2(x)dx = 10h \sum_{i=0}^{n_1} y_1(x_i)y_2(x_i)C_i + O(h^{22}), n_1 = 20s, h = \frac{b-a}{n_1}, s \in N, \quad (15)$$

$$C_i = \begin{cases} \frac{1145302367137}{48426042384720}, & \text{если } i = 0 \text{ или } i = n_1, \\ \frac{1145302367137}{24213021192360}, & \text{если } (i \equiv 0 \pmod{20}) \text{ и } (0 < i < n_1), \\ \frac{335582304250}{1470076286679}, & \text{если } (i \equiv 1 \pmod{20}) \text{ или } (i \equiv 19 \pmod{20}), \\ \frac{-19467909708875}{41162136027012}, & \text{если } (i \equiv 2 \pmod{20}) \text{ или } (i \equiv 18 \pmod{20}), \\ \frac{8274871497250}{3430178002251}, & \text{если } (i \equiv 3 \pmod{20}) \text{ или } (i \equiv 17 \pmod{20}), \\ \frac{-413929922392625}{54882848036016}, & \text{если } (i \equiv 4 \pmod{20}) \text{ или } (i \equiv 16 \pmod{20}), \\ \frac{50652939811064}{2450127144465}, & \text{если } (i \equiv 5 \pmod{20}) \text{ или } (i \equiv 15 \pmod{20}), \\ \frac{-155790561130375}{3430178002251}, & \text{если } (i \equiv 6 \pmod{20}) \text{ или } (i \equiv 14 \pmod{20}), \\ \frac{286955364893000}{3430178002251}, & \text{если } (i \equiv 7 \pmod{20}) \text{ или } (i \equiv 13 \pmod{20}), \\ \frac{-502376261017625}{3920203431144}, & \text{если } (i \equiv 8 \pmod{20}) \text{ или } (i \equiv 12 \pmod{20}), \\ \frac{1704056522480500}{10290534006753}, & \text{если } (i \equiv 9 \pmod{20}) \text{ или } (i \equiv 11 \pmod{20}), \\ \frac{-1684005984173647}{9355030915230}, & \text{если } i \equiv 10 \pmod{20}. \end{cases} \quad (16)$$

Результаты работы программы (пример 1) приведены в таблице 1.

Таблица 1

Численное $u_i^{numerical}$ и точное u_i^{exact} решения задачи (12)

x_i	$u_i^{numerical}$	u_i^{exact}	$u_i^{numerical} - u_i^{exact}$
0,0000000000000E+000	1,000000000000000	1,000000000000000	0,00000E+000
5,0000000000000E-002	1,00125078157569	1,00125078157562	6,533608E-014
0,100000000000000	1,00501252085944	1,00501252085940	3,497831E-014
0,150000000000000	1,01131351922362	1,01131351922361	5,002183E-015
0,200000000000000	1,02020134002678	1,02020134002676	2,150048E-014
0,250000000000000	1,03174340749917	1,03174340749910	7,15878E-014
0,300000000000000	1,04602785990882	1,04602785990872	1,072313E-013
0,350000000000000	1,06316467213420	1,06316467213410	9,834472E-014
0,400000000000000	1,08328706767501	1,08328706767496	5,269027E-014
0,450000000000000	1,10655324549790	1,10655324549789	4,473201E-015
0,500000000000000	1,13314845306681	1,13314845306683	-1,17629E-014
0,550000000000000	1,16328744359303	1,16328744359302	1,449849E-014
0,600000000000000	1,19721736312188	1,19721736312181	6,498762E-014

Окончание таблицы 1

x_i	$u_i^{numerical}$	u_i^{exact}	$u_i^{numerical} - u_i^{exact}$
0,6500000000000000	1,23522112174449	1,23522112174439	1,029619E-013
0,7000000000000000	1,27762131320499	1,27762131320489	1,004986E-013
0,7500000000000000	1,32478475872893	1,32478475872887	6,074600E-014
0,8000000000000000	1,37712776433597	1,37712776433596	1,600000E-014
0,8500000000000000	1,43512219658388	1,43512219658387	5,959208E-015
0,9000000000000000	1,49930250005679	1,49930250005677	2,719775E-014
0,9500000000000000	1,57027380147662	1,57027380147660	1,296022E-014
1,0000000000000000	1,64872127070013	1,64872127070013	4,737963E-017

Численное решение задачи (1)–(2) можно привести к виду (17), преобразуя формулу (4) с краевыми условиями Дирихле [4]:

$$u(x) = \left(\frac{u_a + u_b}{2} \right) + \sum_{j=1}^m \left[\left(\frac{(2x - a - b)}{b - a} \right)^j + \left(\frac{-1 + (-1)^{j+1}}{2} \right) \right] D_j^* \tag{17}$$

В (17) используются предельные значения D_j^* вектора разложения решения по базисным функциям, D_j^* — решение СЛАУ (14) на последней итерации.

Пример 2.

$$\begin{cases} 2u \cdot u''(x) + 2u' \cdot u'(x) = x = f(x, u), \\ u(1) = 1, u(2) = 2, x \in [1, 2]. \end{cases} \tag{18}$$

Поскольку

$$(u^2(x))' = 2uu', (u^2(x))'' = 2(u')^2 + 2uu'' = x \Rightarrow u^2(x) = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2 \Leftrightarrow$$

$$u(x) = \pm \sqrt{\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2}, \begin{cases} u(1) = 1 \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{6} + C_1 + C_2 \\ u(2) = 2 \Leftrightarrow 4 = \frac{8}{3} + 2C_1 + C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{5}{6} \\ 2C_1 + C_2 = \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow C_1 = \frac{11}{6}, C_2 = -1.$$

то $u(x) = \sqrt{\frac{x^3 + 11x - 6}{6}}$ — точное решение краевой задачи (18).

Отметим, что в данном случае краевые условия (18) однозначно выбирают одну ветвь решения, в противном случае можно задать дополнительные условия для выбора одной ветви.

Число интервалов для вычисления скалярного произведения двух функций в (18) равно $n_1=100$, число координатных функций $m=18$, число итераций $n_1=30$, $g_2(x, u, u', u'') = 2u, g_1(x, u, u') = 2u', g_0(x, u) = 0, f(x, u) = x$.

Таблица 2

Численное $u_i^{numerical}$ и точное u_i^{exact} решения задачи (18)

x_i	$u_i^{numerical}$	u_i^{exact}	$u_i^{numerical} - u_i^{exact}$
1,0000000000000000	1,0000000000000000	1,0000000000000000	0,0000000000E+000
1,0500000000000000	1,05732563573	1,05732563574331	-9,187983707E-012
1,1000000000000000	1,11287914887	1,1128791488746	3,6390890301E-012
1,1500000000000000	1,16696722317	1,16696722319009	-1,377342684E-011
1,2000000000000000	1,21983605454	1,21983605455815	-1,174038644E-011
1,2500000000000000	1,27168687184	1,27168687183599	4,801492536E-012
1,3000000000000000	1,32268665978	1,32268665979513	-8,256284544E-012
1,3500000000000000	1,37297578272	1,37297578274345	-2,059930004E-011
1,4000000000000000	1,42267353949	1,42267353950230	-5,676792369E-012
1,4500000000000000	1,47188229828	1,47188229828339	5,4383164638E-012
1,5000000000000000	1,52069063256	1,52069063257455	-8,254952277E-012
1,5500000000000000	1,56917573902	1,56917573904264	-1,900479773E-011

x_i	$u_i^{numerical}$	u_i^{exact}	$u_i^{numerical} - u_i^{exact}$
1,6000000000000000	1,61740532952	1,61740532953246	-6,780798145E-012
1,6500000000000000	1,66543913128	1,66543913128040	3,2989166953E-012
1,7000000000000000	1,71333009078	1,71333009078811	-7,917888567E-012
1,7500000000000000	1,76112535043	1,76112535045067	-1,482725053E-011
1,8000000000000000	1,80886704873	1,80886704873520	-2,779998453E-012
1,8500000000000000	1,85659298177	1,85659298178141	-1,615374500E-012
1,9000000000000000	1,90433715501	1,90433715502271	-6,362910198E-012
1,9500000000000000	1,95213024668	1,95213024667925	6,6588956570E-012
2,0000000000000000	2,0000000000000000	2,0000000000000000	0,0000000000E+000

Векторная норма Чебышева (абсолютная и относительная нормы) невязки задачи в примере (18) равны:

$$\|u^{num} - u^{exact}\|_c = 2,059930004350008E - 011, \frac{\|u^{num} - u^{exact}\|_c}{\|u^{exact}\|_c} = 1,029965002175004E - 011.$$

Замечание 1. Если краевые условия в примере (18) выбрать $u(1) = -1, u(2) = -2$, а точное решение задачи $u(x) = -\sqrt{\frac{x^3 + 11x - 6}{6}}$, то программа дает прежнюю векторную норму Чебышева невязки из-за симметрии примера (18) относительно преобразования $(x, u) \rightarrow (x, -u)$.

Поэтому алгоритм, использующий формулы (1), (5), (6), (13), (15), (16), (17) для нелинейной краевой задачи Дирихле с уравнением второго порядка, находит решение для каждой ветви многозначной функции-решения. Если краевые условия для ветвей совпадают, то можно выбрать дополнительное условие, например, значение

функции в середине отрезка $u(c) = u\left(\frac{a+b}{2}\right)$ и включить данное условие в СЛАУ (14), уменьшая при этом на 1 число условий ортогональности невязки ОДУ базисным функциями.

Пример 3.

$$\begin{cases} \cos(u) \cdot u''(x) - \sin(u)u'(x) \cdot u'(x) = 2 = f(x, u), \\ u(0) = 0, u(1) = \pi/6, x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (19)$$

Так как

$$\begin{aligned} (\sin(u))' &= \cos(u)u', (\sin(u))'' = \cos(u)u'' - \sin(u)(u')^2 = 2 \Leftrightarrow \sin(u(x)) = x^2 + C_1x + C_2 \Rightarrow \\ u(x) &= \arcsin\left(x^2 + C_1x + C_2\right), \begin{cases} u(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = \arcsin(C_2) \\ u(1) = \pi/6 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 1 + C_1 + C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow C_1 = -\frac{1}{2}, C_2 = 0. \end{aligned}$$

Функция $u(x) = \arcsin\left(x^2 - \frac{x}{2}\right)$ является точным решением задачи (19).

В примере (19) $g_2(x, u, u', u'') = \cos(u), g_1(x, u, u') = -\sin(u)u', g_0(x, u) = 0, f(x, u) = 2$. Число интервалов для скалярного произведения двух функций $n_1=120$, число координатных функций $m=17$, число итераций $n_1=30$.

Таблица 3

Численное $u_i^{numerical}$ и точное u_i^{exact} решения задачи (19)

x_i	$u_i^{numerical}$	u_i^{exact}	$u_i^{numerical} - u_i^{exact}$
0,0000000E+000	0,0000000000E+000	0,00000000000E+000	0,00000E+000
4,16666666E-002	-1,90983832E-002	-1,9098383217E-002	-3,18418E-013
8,33333333E-002	-3,47292032E-002	-3,47292030514E-002	-2,030325E-010
0,125000000000	-4,68921831E-002	-4,68921831332E-002	-1,491510E-011
0,166666666666	-5,55841730E-002	-5,5584173280E-002	2,1348351E-010
0,208333333333	-6,08013439E-002	-6,08013437340E-002	-2,052915E-010
0,250000000000	-6,25407621E-002	-6,25407617964E-002	-3,182648E-010

x_i	$u_i^{numerical}$	u_i^{exact}	$u_i^{numerical} - u_i^{exact}$
0,291666666666	-6,08013435E-002	-6,0801343734E-002	1,7451315E-010
0,333333333333	-5,55841729E-002	-5,5584173280E-002	3,3926163E-010
0,375000000000	-4,68921832E-002	-4,6892183133E-002	-1,666960E-010
0,416666666666	-3,47292035E-002	-3,47292030514E-002	-5,013826E-010
0,458333333333	-1,90983833E-002	-1,90983832179E-002	-8,629465E-011
0,500000000000	4,30824846E-010	0,00000000000E+000	4,3082484E-010
0,541666666666	2,25713611E-002	2,25713609537E-002	2,0268367E-010
0,583333333333	4,86302760E-002	4,86302764989E-002	-4,379981E-010
0,625000000000	7,82046914E-002	7,82046919347E-002	-4,480854E-010
0,666666666666	0,1113410145	0,111341014340964	2,1420220E-010
0,708333333333	0,1481103594	0,148110359030227	3,9991367E-010
0,750000000000	0,1886163853	0,188616386175404	-2,500614E-010
0,791666666666	0,2330054316	0,233005432127055	-4,563276E-010
0,833333333333	0,2814800734	0,281480073230845	2,1672891E-010
0,875000000000	0,3343179941	0,334317994036368	1,4096033E-010
0,916666666666	0,3918993389	0,391899339315036	-3,222679E-010
0,958333333333	0,4547481928	0,454748192610442	2,4028019E-010
1,000000000000	0,523598775598299	0,523598775598299	2,8514517E-017

Векторная норма Чебышева невязки задачи в примере (19) равна

$$\|u^{num} - u^{exact}\|_c = 5,602360454820782E - 010 .$$

Пример 4 (с нелинейным дифференциальным уравнением 3-го порядка).

$$\begin{cases} -\sin(u) \cdot u''(x) - 3 \cos(u) \cdot u' \cdot u''(x) + \sin(u) \cdot (u')^2 \cdot u' = 6 = f(x, u), \\ u(0) = \pi/3, u(1) = \pi/2, u'(1) = 0, x \in [0, 1] \rightarrow u \in [\pi/3, \pi/2]. \end{cases} \quad (20)$$

Так как

$$(\cos(u))' = -\sin(u)u', (\cos(u))'' = -\sin(u)u'' - \cos(u)(u')^2, (\cos(u))''' = -\sin(u)u''' - 3\cos(u)u'u'' + \sin(u)(u')^3,$$

$$\cos(u) = x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3, u(x) = \arccos(x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3),$$

$$(\cos(u))' = -\sin(u)u' = 3x^2 + 2C_1x + C_2, u(0) = \pi/3 \Leftrightarrow \cos(\pi/3) = 1/2 = C_3,$$

$$\begin{cases} u(1) = \pi/2 \Leftrightarrow \cos(\pi/2) = 0 = 1 + C_1 + C_2 + 1/2 \\ u'(1) = 0 = \frac{(3x^2 + 2C_1x + C_2)_{x=1}}{-\sin(u = \pi/2)} \Leftrightarrow 3 + 2C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = -3/2 \\ 2C_1 + C_2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow C_1 = -\frac{3}{2}, C_2 = 0.$$

Функция $u(x) = \arccos\left(x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{2}\right) = \arccos\left(\frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{2}\right)$ является точным решением задачи (20).

Коэффициенты дифференциального уравнения в примере (20) равны $g_3(x, u, u', u'') = -\sin(u)$, $g_2(x, u, u', u'') = -3\cos(u)u'$, $g_1(x, u, u') = \sin(u)(u')^2$, $g_0(x, u) = 0$, $f(x, u) = 6$.

Для уравнения третьего порядка нужно модифицировать формулы алгоритма из работы [5] с учетом индекса итерации:

$$\sum_{j=1}^m a_{i,j}^s D_j^{s+1} = \overline{f_i^s}, i = \overline{0, m-1}. \quad (21)$$

где элементы матрицы $a_{i,j}^s, i = \overline{0, m-1}, j = \overline{1, m}, s = 0, 1, 2, \dots$ и коэффициенты правой части $\overline{f_i^s}$ системы уравнений (21) с учетом нелинейного вида дифференциального оператора L^s , вычисляемого по формуле (1), равны:

$$L^s[u^s(x)] \equiv \left(\sum_{i=0}^n g_i(x, u^s(x), (u'(x))^s, \dots, (u^{(i)}(x))^s) \frac{d^i}{dx^i} \right) u^s(x),$$

$$L^s[\phi_j] \equiv \left(\sum_{i=0}^n g_i(x, u^s(x), (u'(x))^s, \dots, (u^{(i)}(x))^s) \frac{d^i}{dx^i} \right) \phi_j,$$

$$a_{i,j}^s = \begin{cases} \langle L^s \phi_j, \phi_i \rangle, & \text{если } j \equiv 1(\text{mod } 2), i = \overline{0, m-3}, \\ \langle L^s(\phi_j - 1), \phi_i \rangle, & \text{если } j \equiv 0(\text{mod } 2), i = \overline{0, m-3}, \\ 1, & \text{если } i = m-2, j \equiv 1(\text{mod } 2), \\ 0, & \text{если } i = m-2, j \equiv 0(\text{mod } 2), \\ j, & \text{если } i = m-1, \end{cases}$$

$$\overline{f}_i^s = \begin{cases} \left\langle f(x) - L^s \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right), \phi_i(x) \right\rangle, & \text{если } i = \overline{0, m-3}, L^s \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right) = \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right) g_0(x), \\ \frac{u_n - u_0}{2}, & \text{если } i = m-2, \\ 0, & \text{если } i = m-1. \end{cases}$$

Последняя строка коэффициентов для a_{ij}^s в (21) получена дифференцированием формулы (4), поскольку на правом конце отрезка в примере (20) $u'(b=1) = 0$:

$$(u'(x))^s = \sum_{j=1}^m \phi_j'(x) D_j^s = \sum_{j=1}^m \frac{2j}{(b-a)} \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right)^{j-1} D_j^s = 0 \Leftrightarrow D_1^s + 2D_2^s + 3D_3^s + \dots + mD_m^s = 0.$$

Число интервалов для скалярного произведения двух функций в (20) равно $n_1 = 100$, число координатных функций $m = 17$, число итераций $n_1 = 30$.

Таблица 4

Численное $u_i^{numerical}$ и точное u_i^{exact} решения задачи (20)

x_i	$u_i^{numerical}$	u_i^{exact}	$u_i^{numerical} - u_i^{exact}$
0,00000000E+000	1,047197551196	1,047197551196	-3,118165448E-016
5,00000000E-002	1,05137830714	1,051378307162	-1,8182033E-011
0,1000000000000	1,06328930398	1,063289303975	8,411912659E-012
0,1500000000000	1,08193034985	1,081930349812	4,527497062E-011
0,2000000000000	1,10626929727	1,106269297375	-1,03325620E-010
0,2500000000000	1,13528395573	1,135283955730	3,742097994E-012
0,3000000000000	1,16799174328	1,167991743151	1,319257321E-010
0,3500000000000	1,20346614669	1,203466146733	-3,93724372E-011
0,4000000000000	1,24084180881	1,240841808965	-1,47600610E-010
0,4500000000000	1,27931122393	1,279311223897	3,508758333E-011
0,5000000000000	1,31811607179	1,318116071652	1,431814589E-010
0,5500000000000	1,35653572032	1,356535720348	-2,54165034E-011
0,6000000000000	1,39387479319	1,393874793328	-1,33199911E-010
0,6500000000000	1,42945115362	1,429451153606	1,359530738E-011
0,7000000000000	1,46258526518	1,462585265086	1,018387917E-010
0,7500000000000	1,49259163483	1,492591634860	-2,76735182E-011
0,8000000000000	1,51877286350	1,518772863566	-6,40170944E-011
0,8500000000000	1,54041665402	1,540416653986	3,963527726E-011
0,9000000000000	1,55679586942	1,556795869421	-1,078461321E-013
0,9500000000000	1,56717131885	1,567171318855	-3,809447874E-012
1,0000000000000	1,570796326794	1,570796326794	-6,125742274E-017

Векторная норма Чебышева (абсолютная и относительная нормы) невязки задачи в примере (20) равны

$$\|u^{num} - u^{exact}\|_c = 1,522944525480727E - 010, \quad \frac{\|u^{num} - u^{exact}\|_c}{\|u^{exact}\|_c} = 1,454304895709992E - 010.$$

Замечание 2. Отметим, что в системах линейных алгебраических уравнений (14) и (21) для 4-х примеров при вычислении D_j^{s+1} использовалась библиотека линейной алгебры `msimsl` на языке FORTRAN.

Замечание 3. Сравнение результатов численного решения примеров в данной работе с решениями примеров [4], [5] показывает, что точность решения краевых задач достигается больше 10^{-13} – 10^{-14} , если в формуле скалярного произведения было использовано небольшое число интервалов ($n_1 = 20, 50$ в первом примере данной работы $n_1 = 20$) и ошибка округления не успевала вырасти из-за меньшего числа вычислений. Если число интервалов большое ($n_1 = 100$) во втором, третьем и в четвертом примерах данной работы, то точность вычислений невысокая 10^{-10} из-за роста ошибки округления и влияния ее на общую ошибку.

Обсуждение и заключение. Предложен алгоритм численного решения краевой задачи на отрезке с нелинейным дифференциальным уравнением порядка n модифицированным методом Бубнова-Галеркина. Предположена возможность разложения гладкого решения нелинейной задачи по системе линейно независимых на отрезке $[-1, 1]$ базисных функций с единичной нормой Чебышева. Число базисных функций m больше порядка дифференциального уравнения n . Получены формулы для элементов матрицы и коэффициентов правой части в системе линейных алгебраических уравнений второго и третьего порядков. СЛАУ (14) или (21) решаются последовательно методом простой итерации, число итераций $n_1 = 30$. Доказана теорема — достаточные условия существования и единственности решения краевой задачи с нелинейным ОДУ методом простой итерации.

Аналитически решены четыре нелинейных краевых задачи. Норма Чебышева разности точного и численного решений в решенных примерах имеет порядок 10^{-13} , 10^{-11} , 10^{-10} , 10^{-10} соответственно. Такая точность решения является промежуточной между одинарной 10^{-8} и двойной точностью 10^{-15} , а также сравнима с точностью 10^{-11} решения линейной краевой задачи в работе [4].

Список литературы / References

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы: учебное пособие для студентов физико-математических специальностей высших учебных заведений*. Москва: Бином. Лаборатория знаний; 2011. 636 с.
Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Numerical methods: a textbook for students of physics and mathematics specialties of higher educational institutions*. Binom. lab. Knowledge; 2011. 636 p. (In Russ.)
2. Ершова Т.Я. Краевая задача для дифференциального уравнения третьего порядка с сильным пограничным слоем. *Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика*. 2020;1:30–39. <https://doi.org/10.3103/S0278641920010057>
Ershova T.Ya. Boundary value problem for a third-order differential equation with a strong boundary layer. *Bulletin of Moscow University. Episode 15: Computational mathematics and cybernetics*. 2020;1:30–39. (In Russ.) <https://doi.org/10.3103/S0278641920010057>
3. Морозова Е.А. Разрешимость краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2010;3(3):46–50.
Morozova E.A. Solvability of a boundary value problem for a system of ordinary differential equations. *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*. 2010;3(3):46–50. (In Russ.)
4. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированный метод Бубнова-Галеркина для решения краевых задач с линейным обыкновенным дифференциальным уравнением. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(3):23–33. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-3-23-33>
Volosova N.K. et al. Modified Bubnov-Galerkin method for solving boundary value problems with a linear ordinary differential equation. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(3):23–33. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-3-23-33>
5. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Увеличение точности решения краевых задач с линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями методом Бубнова-Галеркина. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):7–18. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-7-18>
Volosova N.K. et al. Increasing the accuracy of solving boundary value problems with a linear ordinary differential equation using the Bubnov-Galerkin method. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4): 7–18. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-7-18>
6. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. *Численные методы в задачах и упражнениях*. Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний; 2010. 240 с.
Bahvalov N.S., Lapin A.V., Chizhonkov E.V. *Numerical methods in problems and exercises*. M.: BINOM. Knowledge laboratory; 2010. 240 p. (in Russ.)
7. Петров А.Г. Высокоточные численные схемы решения плоских краевых задач для полигармонического уравнения и их применение к задачам гидродинамики. *Прикладная математика и механика*. 2023;87(3):343–368. <https://doi.org/10.31857/S0032823523030128>
Petrov A.G. High-precision numerical schemes for solving plane boundary value problems for a polyharmonic equation and their application to problems of hydrodynamics. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2023;87(3):343–368 (In Russ.) <https://doi.org/10.31857/S0032823523030128>

8. Сухинов А.И., Колгунова О.В., Гирмай М.З., Нахом О.С. Двумерная гидродинамическая модель прибрежных систем, учитывающая испарение. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):9–21. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-9-21>

Sukhinov A.I. et al. A two-dimensional hydrodynamic model of coastal systems, taking into account evaporation. *Computation Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):9–21. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-9-21>

9. Галабурдин А.В. Применение нейронных сетей для решения задач Дирихле для областей сложной формы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):68–79. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-9-21>

Galaburdin A.V. The application of neural networks to solve the problems of a conductor for regions of regional form. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):68–79. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-9-21>

10. Сидорякина В.В., Соломаха Д.А. Симметризованные варианты методов Зейделя и верхней релаксации решения двумерных разностных задач эллиптического типа. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):12–19. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-12-19>

Sidoryakina V.V., Solomaha D.A. Symmetrized versions of the Seidel and upper relaxation methods for solving two-dimensional difference problems of elliptic. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):12–19. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-12-19>

11. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. *Сборник задач по оптимизации: Теория. Примеры. Задачи*. Москва: Физматлит; 2008. 256 с.

Alekseev V.M., Galeev E.M., Tikhomirov V.M. *Collection of optimization problems: Theory. Examples. Problems*. Moscow: Fizmatlit; 2008. 256 p. (In Russ.)

12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. Москва: Физматлит; 2012. 572 с.

Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis. Textbook*. Moscow: Fizmatlit, 2012. 572 p. (In Russ.)

Об авторах:

Наталья Константиновна Волосова, аспирант Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана (105005, Российская Федерация, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, стр. 1), [ORCID](https://orcid.org/10.0000-9142-1000-0000-1000-1000), navalossova@yandex.ru

Константин Александрович Волосов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Российская Федерация, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9), [ORCID](https://orcid.org/10.0000-9142-1000-0000-1000-1000), [SPIN-код](https://spiner.kod.ru), konstantinvolosov@yandex.ru

Александра Константиновна Волосова, кандидат физико-математических наук, начальник аналитического отдела ООО «Трамплин» Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Российская Федерация, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9), [ORCID](https://orcid.org/10.0000-9142-1000-0000-1000-1000), [SPIN-код](https://spiner.kod.ru), alya01@yandex.ru

Михаил Иванович Карлов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Московского физико-технического института (141701, ГСП-4, Российская Федерация, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9), [SPIN-код](https://spiner.kod.ru), karlov.mipt@gmail.com

Дмитрий Феликсович Пастухов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), [ORCID](https://orcid.org/10.0000-9142-1000-0000-1000-1000), [SPIN-код](https://spiner.kod.ru), dmitrij.pastuhov@mail.ru

Юрий Феликсович Пастухов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), [ORCID](https://orcid.org/10.0000-9142-1000-0000-1000-1000), [SPIN-код](https://spiner.kod.ru), pulsar1900@mail.ru

Заявленный вклад авторов:

Н.К. Волосова: постановка задачи; формулировка идей исследования, целей и задач.

К.А. Волосов: научное руководство; разработка методологии.

А.К. Волосова: перевод; изучение истории задачи; поиск литературы.

М.И. Карлов: формальный анализ.

Д.Ф. Пастухов: написание черновика рукописи; визуализация; валидация.

Ю.Ф. Пастухов: разработка программного обеспечения; тестирование существующих компонентов кода.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Natalya K. Volosova, Post-graduate Student of Bauman Moscow State Technical University (2nd Baumanskaya St. 5–1, Moscow, 105005, Russian Federation), [ORCID](#), navalosova@yandex.ru

Konstantin A. Volosov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics of the Russian University of Transport (Obraztsova St. 9–9, Moscow, GSP-4, 127994, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), konstantinvolosov@yandex.ru

Aleksandra K. Volosova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Chief Analytical Department “Tramplin” LLC, Russian University of Transport (Obraztsova St. 9–9, Moscow, GSP-4, 127994, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), alya01@yandex.ru

Mikhail I. Karlov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (9, Institutsky Lane, GSP-4, Dolgoprudny, 141701, Russian Federation), [SPIN-code](#), karlov.mipt@gmail.com

Dmitriy F. Pastukhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (Blokhin St. 29, Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), [ORCID](#), [SPIN-code](#), dmitrij.pastuhov@mail.ru

Yuriy F. Pastukhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (Blokhin St. 29, Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), [ORCID](#), [SPIN-code](#), pulsar1900@mail.ru

Contributions of the authors:

N.K. Volosova: ideas; formulation or evolution of overarching research goals and aims.

K.A. Volosov: supervision; methodology.

A.K. Volosova: translation; study of the history of the task; literature.

M.I. Karlov: formal analysis.

D.F. Pastukhov: writing original draft preparation; visualization; validation.

Yu.F. Pastukhov: software; testing of existing code components.

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 17.01.2025

Поступила после рецензирования / Revised 14.02.2025

Принята к публикации / Accepted 04.03.2025