

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 519.6

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-20-30>


Достаточные условия сходимости решений линеаризованной задачи к решению исходной нелинейной задачи транспорта многофракционных наносов в зоне мелководья

В.В. Сидорякина

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

✉ cvv9@mail.ru

Аннотация

Введение. Рассматривается пространственно-двумерная модель транспорта наносов многофракционного состава, ориентированная на зоны мелководья. Для описания этого процесса может быть использована начально-краевая задача для параболического уравнения с нелинейными коэффициентами. Ее исследование проводится с помощью линеаризации на временной сетке с шагом τ , при которой нелинейные коэффициенты рассчитываются «с запаздыванием» на предыдущем временном слое. Для линеаризованной задачи транспорта многофракционных наносов ранее были определены условия корректности, построена и исследована консервативная устойчивая разностная схема, численно реализованная для модельных и реальных задач (Азовское море и Таганрогский залив, Цимлянское водохранилище). Однако вопросы сходимости решений линеаризованной задачи к решению исходной нелинейной начально-краевой задачи транспорта многофракционных наносов пока оставались не рассмотренными. Результаты исследований, представленные в данной работе, восполняют этот пробел. Ранее автором совместно с А.И. Сухиновым удалось провести аналогичные исследования для случая, когда фракционный состав наносов не учитывается. Эти исследования легли в основу для получения нового результата.

Материалы и методы. Получение неравенств, гарантирующих сходимость решений цепочки линеаризованных задач к решению исходных нелинейных задач, проводится методом математической индукции с привлечением теории дифференциальных уравнений.

Результаты исследования. Определены условия сходимости решений линеаризованной задачи транспорта наносов многофракционного состава к решению нелинейной задачи в норме банахового пространства L_1 со скоростью $O(\tau)$.

Обсуждение и заключение. Полученные результаты исследования могут быть использованы при прогнозировании нелинейных гидрофизических процессов, повышения их точности и надежности в силу наличия новых функциональных возможностей учета физически важных факторов.

Ключевые слова: пространственно-двумерная модель транспорта наносов, многофракционный состав наносов, зона мелководья, нелинейная задача, линеаризованная задача

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25–11–68060, <https://rscf.ru/project/25-11-68060>

Для цитирования. Сидорякина В.В. Достаточные условия сходимости решений линеаризованной задачи к решению исходной нелинейной задачи транспорта многофракционных наносов в зоне мелководья. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(1):20–30. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-20-30>

Sufficient Conditions for the Convergence of Solutions of the Linearized Problem to the Solution of the Original Nonlinear Problem of Multifractional Sediment Transport in Shallow Water

Valentina V. Sidoryakina 

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

✉ cvv9@mail.ru

Abstract

Introduction. This paper examines a two-dimensional spatial model of multifractional sediment transport, specifically focusing on shallow water zones. This process can be described using an initial-boundary value problem for a parabolic equation with nonlinear coefficients. The study employs a temporal grid linearization method with a step size τ , where nonlinear coefficients are calculated with a “lag” at the previous time layer. Previously, the well-posedness conditions for the linearized sediment transport problem were established, and a conservative and stable finite-difference scheme was developed and analyzed, with numerical implementations for both model and real-world problems (the Sea of Azov, the Taganrog Bay, and the Tsimlyansk Reservoir). However, the convergence of solutions of the linearized problem to the solution of the original nonlinear initial-boundary value problem for multifractional sediment transport had not yet been explored. The research results presented in this paper fill this gap. Earlier, the author, together with A.I. Sukhinov, conducted similar studies in the case where sediment fraction composition was not considered. These studies formed the basis for obtaining new results.

Materials and Methods. The derivation of inequalities guaranteeing the convergence of the solutions of a sequence of linearized problems to the solution of the original nonlinear problem is carried out using the method of mathematical induction, with the application of differential equation theory.

Results. The conditions for the convergence of solutions of the linearized multifractional sediment transport problem to the solution of the nonlinear problem in the Banach space L_1 norm at a rate $O(\tau)$ of are determined.

Discussion and Conclusion. The obtained research results can be used for forecasting nonlinear hydrophysical processes, improving their accuracy and reliability due to the new functional capabilities that account for physically significant factors.

Keywords: two-dimensional spatial sediment transport model, multifractional sediment composition, shallow water zone, nonlinear problem, linearized problem

Funding. This research was supported by a grant from the Russian Science Foundation No. 25–11–68060, <https://rscf.ru/project/25-11-68060>

For Citation. Sidoryakina V.V. Sufficient conditions for the convergence of solutions of the linearized problem to the solution of the original nonlinear problem of transport of multifractional sediments in the shallow water zone. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(1):20–30. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-20-30>

Введение. Одна из важных и сложных проблем в исследовании транспорта донных отложений в зонах мелководья — учет его фракционного состава. Фракционный состав наносов существенно изменяется в зависимости от уклона и морфологического строения дна, глубины, скорости потока, шероховатости донной поверхности и др. Различия фракционного состава определяют характер движения наносов и процессы осадконакопления. Принятие во внимание показателя крупности частиц при математическом моделировании процесса транспортировки наносов дает возможности для построения более точных и определенных прогнозов морфодинамики поверхности дна. В настоящей работе рассматривается нелинейная 2D модель транспорта наносов, учитывающая их фракционный состав [1–4]. Для ее исследования выполнена линеаризация на временной сетке с шагом τ , при которой нелинейные коэффициенты рассчитываются «с запаздыванием» на предыдущем временном слое. Методом математической индукции с привлечением теории дифференциальных уравнений определены достаточные условия сходимости решений линеаризованной задачи к решению исходной нелинейной начально-краевой задачи. Отметим, что проведенные ранее исследования гарантируют корректность ее постановки. Исследование вопросов существования и единственности решений линеаризованной задачи транспорта многофракционных наносов были представлены в работе [3]. В работе [4] показана непрерывная зависимость решений линеаризованной задачи транспорта многофракционных наносов от входных данных задачи. Результаты исследования корректности линеаризованной задачи транспорта наносов, не учитывающей их разнородный фракционный состав, представлены в работах [5–8].

Материалы и методы. Уравнение транспорта наносов, включающих R фракций, запишем в виде:

$$(1 - \tilde{\varepsilon}) \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{r=1}^R \operatorname{div}(V_r k_r \vec{\tau}_b) = \sum_{r=1}^R \operatorname{div} \left(V_r k_r \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H \right) - \sum_{r=1}^R \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r, \quad r = \overline{1, R}, \quad (1)$$

где $H = H(x, y, t)$ — глубина водоема; $\tilde{\varepsilon}$ — усредненная по всем компонентам пористость донных отложений; t — временная переменная, $t \in [0, T]$; V_r — объемная доля r -ой компоненты; $\vec{\tau}_b$ — вектор касательного тангенциально-

го напряжения на дне водоема; $\tau_{bc,r}$ — критическое значение тангенциального напряжения для r -ой компоненты наносов, $\tau_{bc,r} = a_r \sin \varphi_0$, где a_r — некоторый коэффициент для r -ой компоненты наносов, φ_0 — угол естественного откоса грунта в водоеме; w — компонента по вертикали вектора $\vec{U}$ скорости движения водной среды; $w_{g,r}$ — гидравлическая крупность или скорость осаднения r -ой компоненты; ρ_r — плотность r -ой компоненты донного материала; c_r — концентрация r -ой фракции взвеси; k_r — коэффициент, определяемый соотношением:

$$k_r = k_r(H, x, y, t) = \frac{A \tilde{\omega} d_r}{((\rho_r - \rho_0) g d_r)^\beta} \left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \text{grad} H \right|^{\beta-1},$$

($\tilde{\omega}$ — усредненная частота волн; d_r — характерный размер r -ой компоненты; g — ускорение силы тяжести; ρ_0 — плотность водной среды; A и β — безразмерные постоянные),

$$k_r \geq k_{0,r} = \text{const} > 0, \forall (x, y) \in \bar{G}, r = \overline{1, R}, 0 < t \leq T.$$

Считаем, что $\Pi_T = G \times (0, T)$ есть область задания уравнения (1). Пусть процесс транспорта наносов происходит в области с границей Γ , представляющей кусочно-гладкую линию. Граница этого цилиндра состоит из боковой поверхности $\Gamma \times [0, T]$ и двух оснований — $\bar{G} \times \{0\}$ и $\bar{G} \times \{T\}$.

Уравнение (1) рассматривается в области $G(x, y) = \{0 < x < L_x, 0 < y < L_y\}$ (рис. 1).

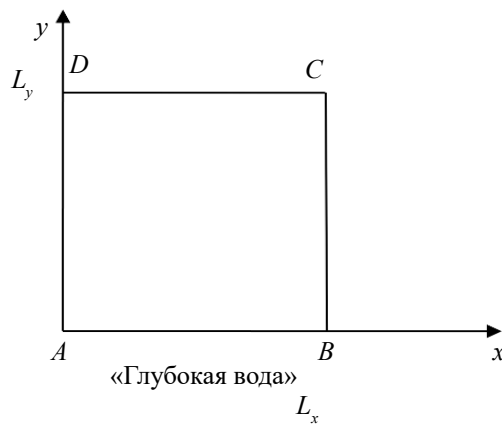


Рис. 1. Расчетная область

Дополним уравнение (1) начальными и граничными условиями:

$$H(x, y, 0) = H_0(x, y), \quad H_0(x, y) \in C^2(G) \cap C(\bar{G}), \quad (2)$$

$$AD: H(0, y, t) = H_1(y, t), \quad (3)$$

$$BC: H(L_x, y, t) = H_2(y, t), \quad (4)$$

$$AB: H(x, 0, t) = H_3(x), \quad (5)$$

$$CD: H(x, L'_y, t) = H_4(x, t) \geq c_0 \equiv \text{const} > 0, L'_y < L_y. \quad (6)$$

Дополнительно предполагаем:

$$AB: |\vec{\tau}_b| = 0, \quad (7)$$

$$\text{grad}_{(x,y)} H \in C(\bar{\Pi}_T) \cap C^1(\Pi_T), \quad \text{grad}_{(x,y)} H_0 \in C(\bar{G}), \quad (8)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = 0, \quad (9)$$

$$k_r \geq k_{0,r} = \text{const} > 0, \forall (x, y) \in \bar{G}. \quad (10)$$

$$\vec{\tau}_b = \tau_{bx} \vec{i} + \tau_{by} \vec{j}, |\tau_{bx}| \leq c_1, |\tau_{by}| \leq c_2, c_1 = \text{const}, c_2 = \text{const}. \quad (11)$$

Условие

$$H(x, y, t) \geq c_0 \equiv \text{const} > 0, 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L'_y, 0 \leq t \leq T, \quad (12)$$

гарантирует, что не возникает осушения области рассмотрения задачи.

Линеаризация задачи (1)–(6) выполнена на временной сетке:

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N_t, N_t \tau = T\},$$

методами, изложенными в работах [5–10].

После линеаризации уравнение (1) и начальные условия (2) записываются в виде:

$$(1-\tilde{\varepsilon})\frac{\partial H^{(n)}}{\partial t} = \sum_{r=1}^R \operatorname{div} \left(V_r k_r^{(n-1)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H^{(n)} \right) - \sum_{r=1}^R \operatorname{div} (V_r k_r^{(n-1)} \vec{\tau}_b) - \sum_{r=1}^R \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r, \quad (13)$$

$$r = \overline{1, R}, \quad t_{n-1} < t \leq t_n, \quad n = 1, 2, \dots, N_t,$$

$$H^{(1)}(x, y, t_0) = H_0(x, y), \quad H^{(n)}(x, y, t_{n-1}) = H^{(n-1)}(x, y, t_{n-1}), \quad (x, y) \in \bar{G}, \quad n = 2, \dots, N. \quad (14)$$

Коэффициент $k_r^{(n-1)}$ в уравнении (14) определяется равенством:

$$k_r^{(n-1)} = k_r^{(n-1)}(H^{(n-1)}, x, y, t) = \frac{A\tilde{\omega}d_r}{((\rho_r - \rho_0)gd_r)^\beta} \left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H^{(n-1)}(x, y, t_{n-1}) \right|^{\beta-1}.$$

Результаты исследования. Покажем, что решение задачи (13), (14), (3)–(6) стремится к решению нелинейной задачи (1)–(6) в норме пространства $L_1(G \times [0, T])$ при $\tau \rightarrow 0$, $N\tau = T$.

Обозначим решение нелинейной задачи $H_{np}(x, y, t)$, $(x, y) \in \bar{G}$, а решение линеаризованной задачи — $H_{lp}(x, y, t)$, $(x, y) \in \bar{G}$. Отметим, что для каждого временного слоя определяется своя функция решения $H_{lp} = (x, y, t)$ и в целом для линеаризованной задачи строится семейство решений — $\{H_{lp}^{(n)}(x, y, t)\}$, $n = 1, 2, \dots, N$, зависящее от параметра τ .

Предполагаем, что:

1. функция $H_{np} = (x, y, t)$ ограничена на промежутке $0 < t \leq T$;
2. существуют и ограничены производные:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\operatorname{grad} \left(\frac{\partial H_{np}}{\partial t} \right) \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\operatorname{grad} \left(\frac{\partial H_{np}}{\partial t} \right) \right), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\operatorname{grad} \left(\frac{\partial H_{lp}}{\partial t} \right) \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\operatorname{grad} \left(\frac{\partial H_{lp}}{\partial t} \right) \right);$$

3. ограничено выражение $\frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r$.

Подставим функцию $H_{np} = (x, y, t)$ в уравнение (1), а функцию $H_{lp} = (x, y, t)$ — в уравнение (12). Получим:

$$(1-\tilde{\varepsilon})\frac{\partial H_{np}}{\partial t} = \sum_{r=1}^R \operatorname{div} \left(V_r k_{np,r} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{np} \right) - \sum_{r=1}^R \operatorname{div} (V_r k_{np,r} \vec{\tau}_b) - \sum_{r=1}^R \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r, \quad r = \overline{1, R}, \quad (15)$$

$$(1-\tilde{\varepsilon})\frac{\partial H_{lp}^{(n)}}{\partial t} = \sum_{r=1}^R \operatorname{div} \left(V_r k_{lp,r}^{(n-1)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{lp}^{(n)} \right) - \sum_{r=1}^R \operatorname{div} (V_r k_{lp,r}^{(n-1)} \vec{\tau}_b) - \sum_{r=1}^R \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r, \quad (16)$$

$$r = \overline{1, R}, \quad t_{n-1} < t \leq t_n, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

где

$$k_{np,r} = k_{np,r}(H_{np}, x, y, t) = \frac{A\tilde{\omega}d_r}{((\rho_r - \rho_0)gd_r)^\beta} \left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{np}(x, y, t) \right|^{\beta-1},$$

$$k_{lp,r}^{(n-1)} = k_{lp,r}^{(n-1)}(H_{lp}^{(n-1)}, x, y, t) = \frac{A\tilde{\omega}d_r}{((\rho_r - \rho_0)gd_r)^\beta} \left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{lp}^{(n-1)}(x, y, t) \right|^{\beta-1}.$$

Умножим обе части уравнения (15) и (16) на функции $H_{np}(x, y, t)$, $H_{lp}^{(n)} = H_{lp}^{(n)}(x, y, t)$, $(x, y) \in \bar{G}$, соответственно. После интегрирования полученных выражений по переменным t , $0 < t \leq T$ и (x, y) в области G и выполнения несложных преобразований можем записать:

$$\frac{1}{2}(1-\tilde{\varepsilon}) \iint_G (H_{np}^2(x, y, T) - H_{np}^2(x, y, 0)) dx dy = \sum_{r=1}^R \int_0^T \left(\iint_G H_{np} \operatorname{div} \left(V_r k_{np,r} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{np} \right) dx dy \right) dt - \sum_{r=1}^R \int_0^T \left(\iint_G H_{np} \operatorname{div} (V_r k_{np,r} \vec{\tau}_b) dx dy \right) dt - \sum_{r=1}^R \int_0^T \left(\iint_G H_{np} \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r dx dy \right) dt, \quad (17)$$

$$(1-\tilde{\varepsilon}) \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \frac{\partial H_{lp}^{(n)}}{\partial t} dx dy \right) dt = \sum_{r=1}^R \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} \left(V_r k_{lp,r}^{(n-1)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{lp}^{(n)} \right) dx dy \right) dt - \sum_{r=1}^R \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} (V_r k_{lp,r}^{(n-1)} \vec{\tau}_b) dx dy \right) dt - \sum_{r=1}^R \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r dx dy \right) dt, \quad r = \overline{1, R}. \quad (18)$$

Просуммировав обе части соотношения (18) по n , $n = 1, \dots, N$, находим

$$(1 - \tilde{\varepsilon}) \iint_G \left(\sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}}^{t_n} H_{lp}^{(n)} \frac{\partial H_{lp}}{\partial t} dt \right) dx dy = \sum_{r=1}^R \sum_{n=1}^N \left[\int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} \left(V_r k_{lp,r}^{(n-1)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{lp}^{(n)} \right) dx dy \right) dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} \left(V_r k_{lp,r}^{(n-1)} \vec{\tau}_b \right) dx dy \right) dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r dx dy \right) dt \right]. \quad (19)$$

Преобразуя левую часть равенства (19), запишем

$$\frac{1}{2} (1 - \tilde{\varepsilon}) \iint_G \left(H_{lp}^2(x, y, T) - H_{lp}^2(x, y, 0) \right) dx dy = \sum_{r=1}^R \sum_{n=1}^N \left[\int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} \left(V_r k_{lp,r}^{(n-1)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{lp}^{(n)} \right) dx dy \right) dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} \left(V_r k_{lp,r}^{(n-1)} \vec{\tau}_b \right) dx dy \right) dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r dx dy \right) dt \right]. \quad (20)$$

Вычитая из равенства (17) выражение (20) и учитывая, что $H_{np} = (x, y, t) = H_{lp} = (x, y, t)$, $H_{lp} = (x, y, t) = H_{lp}^{(0)}$ получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (1 - \tilde{\varepsilon}) \iint_G \left(H_{np}^2(x, y, T) - H_{lp}^2(x, y, T) \right) dx dy = \\ & = \sum_{r=1}^R \int_0^T \left(\iint_G H_{np} \operatorname{div} \left(V_r k_{np,r} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{np} \right) dx dy \right) dt - \sum_{r=1}^R \int_0^T \left(\iint_G H_{np} \operatorname{div} \left(V_r k_{np,r} \vec{\tau}_b \right) dx dy \right) dt - \\ & - \sum_{r=1}^R \int_0^T \left(\iint_G H_{np} \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r dx dy \right) dt - \sum_{r=1}^R \sum_{n=1}^N \left[\int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} \left(V_r k_{lp,r}^{(n-1)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{lp}^{(n)} \right) dx dy \right) dt + \right. \\ & \left. + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} \left(V_r k_{lp,r}^{(n-1)} \vec{\tau}_b \right) dx dy \right) dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r dx dy \right) dt \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Выполним преобразования правой части равенства (21). С этой целью добавим, а затем вычтем выражения

$H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} \left(V_r k_{np,r} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{np} \right)$, $H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} \left(V_r k_{np,r} \vec{\tau}_b \right)$ под знаком интеграла соответственно в четвертом и пятом слагаемом правой части равенства (21).

Комбинируя слагаемые, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (1 - \tilde{\varepsilon}) \iint_G \left(H_{np}^2(x, y, T) - H_{lp}^2(x, y, T) \right) dx dy = \\ & = \sum_{r=1}^R \sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left[\left(\iint_G (H_{np} - H_{lp}^{(n)}) \operatorname{div} \left(V_r k_{np,r} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{np} \right) dx dy \right) + \iint_G H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} \left(V_r \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \cdot \right. \right. \\ & \cdot (k_{np,r} \operatorname{grad} H_{np} - k_{lp,r}^{(n-1)} \operatorname{grad} H_{lp}^{(n)}) dx dy + \iint_G (H_{lp}^{(n)} - H_{np}) \operatorname{div} \left(V_r k_{np,r} \vec{\tau}_b \right) dx dy + \\ & \left. \left. + \iint_G H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} \left(V_r (k_{lp,r}^{(n-1)} - k_{np,r}) \vec{\tau}_b \right) dx dy + \iint_G (H_{lp}^{(n)} - H_{np}) \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r dx dy \right) dt. \right] \end{aligned} \quad (22)$$

Оценим каждый из интегралов, стоящих в правой части равенства (22) под знаком суммы. Для этих целей используем рассуждения, подробно описанные в работе [9].

Введем обозначения:

$$I_{1,r}^n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G (H_{np} - H_{lp}^{(n)}) \operatorname{div} \left(V_r k_{np,r} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{np} \right) dx dy \right) dt, \quad (23)$$

$$I_{2,r}^n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} \left(V_r \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} (k_{np,r} \operatorname{grad} H_{np} - k_{lp,r}^{(n-1)} \operatorname{grad} H_{lp}^{(n)}) \right) dx dy \right) dt, \quad (24)$$

$$I_{3,r}^n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G (H_{lp}^{(n)} - H_{np}) \operatorname{div} \left(V_r k_{np,r} \vec{\tau}_b \right) dx dy \right) dt, \quad (25)$$

$$I_{4,r}^n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} \left(V_r (k_{lp,r}^{(n-1)} - k_{np,r}) \vec{\tau}_b \right) dx dy \right) dt, \quad (26)$$

$$I_{5,r}^n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G (H_{lp}^{(n)} - H_{np}) \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r dx dy \right) dt, \quad n = 1, \dots, N. \quad (27)$$

При $n = 1$ для интегралов (23)–(27), находим:

$$\begin{aligned} I_{1,r}^1 &\leq \frac{1}{2} \tau^2 L_x L_y M_{1,r}^1, \quad I_{2,r}^1 \leq \frac{1}{2} \tau^2 M_{2,r}^1 L_x L_y, \quad I_{3,r}^1 \leq \frac{1}{2} \tau^2 L_x L_y M_{3,r}^1, \\ I_{4,r}^1 &\leq \frac{1}{2} \tau^2 M_{4,r}^1 L_x L_y, \quad I_{5,r}^1 \leq \frac{1}{2} \tau^2 L_x L_y M_{5,r}^1, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} M_{1,r}^1 &\equiv \max_{t_0 \leq t \leq t_1} \left\{ \max_{(x,y) \in \bar{G}} \left| \left(\frac{\partial H_{np}}{\partial t}(x,y,\xi_1) - \frac{\partial H_{lp}^{(1)}}{\partial t}(x,y,\xi_2) \right) \operatorname{div} \left(V_r k_{np,r} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{np} \right) \right| \right\}, \\ M_{2,r}^1 &\equiv \max_{t_0 \leq t \leq t_1} \left\{ \max_{(x,y) \in \bar{G}} \left| H_{lp}^{(1)} \operatorname{div} \left(V_r \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \left(\frac{\partial k_{np,r}}{\partial t}(x,y,\xi_3) \operatorname{grad} H_{np} + k_{lp,r}^{(0)} \operatorname{grad} \frac{\partial H_{np}}{\partial t}(x,y,\xi_4) \right) \right) \right| \right\}, \\ M_{3,r}^1 &\equiv \max_{t_0 \leq t \leq t_1} \left\{ \max_{(x,y) \in \bar{G}} \left| \left(\frac{\partial H_{lp}^{(1)}}{\partial t}(x,y,\xi_5) - \frac{\partial H_{np}}{\partial t}(x,y,\xi_6) \right) \operatorname{div} (V_r k_{np,r} \vec{\tau}_b) \right| \right\}, \\ M_{4,r}^1 &\equiv \max_{t_0 \leq t \leq t_1} \left\{ \max_{(x,y) \in \bar{G}} \left| H_{lp}^{(1)} \operatorname{div} \left(V_r \left(-\frac{\partial k_{np,r}}{\partial t}(x,y,\xi_7) \right) \vec{\tau}_b \right) \right| \right\}, \\ M_{5,r}^1 &\equiv \max_{t_0 \leq t \leq t_1} \left\{ \max_{(x,y) \in \bar{G}} \left| \left(\frac{\partial H_{lp}^{(1)}}{\partial t}(x,y,\xi_5) - \frac{\partial H_{np}}{\partial t}(x,y,\xi_6) \right) \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r \right| \right\}, \\ t_0 &< \xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \xi_4, \quad \xi_5, \quad \xi_6, \quad \xi_7 \leq t_1, \quad t_0 < t \leq t_1. \end{aligned}$$

Учитывая полученные оценки (28) и пользуясь неравенством многоугольника для модулей величин, получаем неравенство вида:

$$\iint_G (H_{np}^2(x,y,t_1) - H_{lp}^{(1)2}(x,y,t_1)) dx dy \leq \tau^2 L_x L_y \sum_{r=1}^R M_{1,r}^*, \quad (29)$$

где

$$M_{1,r}^* = \frac{1}{1 - \varepsilon} (M_{1,r}^1 + M_{2,r}^1 + M_{3,r}^1 + M_{4,r}^1 + M_{5,r}^1).$$

Меняя местами функции $H_{np}^2(x,y,t_1)$ и $H_{lp}^{(1)2}(x,y,t_1)$ проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше, можно получить оценку:

$$\iint_G (H_{lp}^{(1)2}(x,y,t_1) - H_{np}^2(x,y,t_1)) dx dy \leq \tau^2 L_x L_y \sum_{r=1}^R M_{1,r}^*. \quad (30)$$

Из неравенств (29) и (30) следует неравенство:

$$\iint_G |H_{lp}^{(1)2}(x,y,t_1) - H_{np}^2(x,y,t_1)| dx dy \leq \tau^2 L_x L_y \sum_{r=1}^R M_{1,r}^*. \quad (31)$$

Преобразуем левую часть неравенства (31):

$$\begin{aligned} \iint_G |H_{lp}^{(1)2}(x,y,t_1) - H_{np}^2(x,y,t_1)| dx dy &= \iint_G |H_{lp}^{(1)}(x,y,t_1) - H_{np}(x,y,t_1)| \cdot \\ &\cdot |H_{lp}^{(1)}(x,y,t_1) + H_{np}(x,y,t_1)| dx dy. \end{aligned} \quad (32)$$

Далее будем предполагать, что неравенство вида (12) выполняется для функций $H_{np} = (x,y,t)$ и $H_{lp}^{(1)}$, т. е.

$$H_{np}(x,y,t) \geq c_0 > 0, \quad (x,y) \in \bar{G}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (33)$$

$$H_{lp}^{(1)}(x,y,t) \geq c_0 > 0, \quad (x,y) \in \bar{G}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (34)$$

С учетом выражений (33)–(34) находим:

$$\iint_G |H_{lp}^{(1)2}(x,y,t_1) - H_{np}^2(x,y,t_1)| dx dy \geq 2c_0 \iint_G |H_{lp}^{(1)}(x,y,t_1) - H_{np}(x,y,t_1)| dx dy. \quad (35)$$

Из соотношений (31), (32) и (35) следует следующая оценка:

$$\iint_G \left| H_{lp}^{(1)}(x, y, t_1) - H_{np}(x, y, t_1) \right| dx dy \leq \frac{1}{2c_0} \tau^2 L_x L_y \sum_{r=1}^R M_{1,r}^*. \quad (36)$$

Требуемая оценка для $n = 1$ получена, т. к. неравенство (36) эквивалентно соотношению вида:

$$\left\| H_{lp}^{(1)}(x, y, t_1) - H_{np}(x, y, t_1) \right\|_{L_1(G \times [t_0, t_1])} \leq \frac{1}{2c_0} \tau^2 L_x L_y \sum_{r=1}^R M_{1,r}^*, \quad (37)$$

где

$$\|Q(x, y, t)\|_{L_1(G \times [t_0, t_1])} \equiv \int_{t_0}^{t_1} \left(\iint_G |Q(x, y, t)| dx dy \right) dt.$$

При $n = 2$ для интегралов (23)–(27), находим:

$$\begin{aligned} I_{1,r}^2 &\leq \frac{1}{2} \tau^2 L_x L_y \left(\frac{1}{c_0} \tau M_{1,r}^* M_{1,r}^2 + M_{2,r}^2 \right), \quad I_{2,r}^2 \leq \frac{1}{2} \tau^2 L_x L_y M_{3,r}^2 M_{4,r}^2, \quad I_{3,r}^2 \leq \frac{1}{2} \tau^2 L_x L_y \left(\frac{1}{c_0} \tau M_{1,r}^* M_{5,r}^2 + M_{6,r}^2 \right), \\ I_{4,r}^2 &\leq \frac{1}{2} \tau^2 L_x L_y M_{3,r}^2 M_{7,r}^2, \quad I_{5,r}^2 \leq \frac{1}{2} \tau^2 L_x L_y \left(\frac{1}{c_0} \tau M_{1,r}^* M_{8,r}^2 + M_{9,r}^2 \right), \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} M_{1,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{(x,y) \in G} \left| \operatorname{div} \left(V_r k_{np,r} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{np} \right) \right| \right\}, \\ M_{2,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{(x,y) \in G} \left| \left(\frac{\partial H_{np}(x, y, \xi_1)}{\partial t} - \frac{\partial H_{lp}^{(2)}(x, y, \xi_2)}{\partial t} \right) \operatorname{div} \left(V_r k_{np,r} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{np} \right) \right| \right\}, \\ M_{3,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{(x,y) \in G} \left| H_{lp}^{(2)} \right| \right\}, \\ M_{4,r}^2 &= M_{21,r}^2 + M_{22,r}^2 + M_{23,r}^2 + M_{24,r}^2 + M_{25,r}^2 + M_{26,r}^2, \\ M_{5,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{(x,y) \in G} \left| \operatorname{div} (V_r k_{np,r} \vec{\tau}_b) \right| \right\}, \\ M_{6,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{(x,y) \in G} \left| \left(\frac{\partial H_{np}(x, y, \xi_1)}{\partial t} - \frac{\partial H_{lp}^{(2)}(x, y, \xi_2)}{\partial t} \right) \operatorname{div} (V_r k_{np,r} \vec{\tau}_b) \right| \right\}, \\ M_{7,r}^2 &= M_{31,r}^2 + M_{32,r}^2 + M_{33,r}^2, \\ M_{8,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{(x,y) \in G} \left| \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r \right| \right\}, \\ M_{9,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{(x,y) \in G} \left| \left(\frac{\partial H_{np}(x, y, \xi_1)}{\partial t} - \frac{\partial H_{lp}^{(2)}(x, y, \xi_2)}{\partial t} \right) \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r \right| \right\}, \\ M_{7,r}^2 &= M_{31,r}^2 + M_{32,r}^2 + M_{33,r}^2, \\ M_{11,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{x \in BC} \left| \tau_{bx} \frac{\partial H_2(y, t)}{\partial x} + \tau_{bx}^{(1)} \frac{\partial H_2(y, t_1)}{\partial x} \right| \right\}, \quad M_{12,r}^2 \equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{y \in BC} \left| \tau_{by} \frac{\partial H_2(y, t)}{\partial y} + \tau_{by}^{(1)} \frac{\partial H_2(y, t_1)}{\partial y} \right| \right\}, \\ M_{13,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{x \in CD} \left| \frac{\partial H_4(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial H_4(x, t_1)}{\partial x} \right| \right\}, \quad M_{14,r}^2 \equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{x \in CD} \left| \frac{\partial H_4(x, t)}{\partial y} + \frac{\partial H_4(x, t_1)}{\partial y} \right| \right\}, \\ M_{15,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{x \in AD} \left| \frac{\partial H_1(y, t)}{\partial x} + \frac{\partial H_1(y, t_1)}{\partial x} \right| \right\}, \quad M_{16,r}^2 \equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{y \in AD} \left| \frac{\partial H_1(y, t)}{\partial y} + \frac{\partial H_1(y, t_1)}{\partial y} \right| \right\}, \\ M_{21,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{y \in BC} \left| V_r \frac{\tau_{bc,r}^2}{\sin^2 \varphi_0} \frac{A \tilde{\omega} d_r}{((\rho_r - \rho_0) g d_r)^3} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_2(y, \xi_4)}{\partial t} \right) \left(\frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} M_{11,r}^2 - 2 \tau_{bx} \right) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_2(y, \xi_4)}{\partial t} \right) \left(\frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} M_{12,r}^2 - 2 \tau_{by} \right) \right] \frac{\partial H_2(y, t_1)}{\partial x} \right| \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{22,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{y \in BC} \left| k_{np,r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_2(y, \xi_4)}{\partial t} \right) \right| \right\}, \\
 M_{23,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{x \in CD} \left| V_r \frac{\tau_{bc,r}^2}{\sin^2 \varphi_0} \frac{A\tilde{\omega}d_r}{((\rho_r - \rho_0)gd_r)^3} (t - t_1) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_4(x, \xi_5)}{\partial t} \right) \left(\frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} M_{13,r}^2 - 2\tau_{bx} \right) + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_4(x, \xi_5)}{\partial t} \right) \left(\frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} M_{14,r}^2 - 2\tau_{by} \right) \right] \frac{\partial H_4(x, t_1)}{\partial y} \right\}, \\
 M_{24,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{x \in CD} \left| k_{np,r} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_4(x, \xi_5)}{\partial t} \right) \right| \right\}, \\
 M_{25,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{y \in AD} \left| V_r \frac{\tau_{bc,r}^2}{\sin^2 \varphi_0} \frac{A\tilde{\omega}d_r}{((\rho_r - \rho_0)gd_r)^3} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_1(y, \xi_3)}{\partial t} \right) \left(\frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} M_{15,r}^2 - 2\tau_{bx} \right) + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_1(y, \xi_3)}{\partial t} \right) \left(\frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} M_{16,r}^2 - 2\tau_{by} \right) \right] \frac{\partial H_1(y, t_1)}{\partial x} \right\}, \\
 M_{26,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{y \in AD} \left| k_{np,r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_1(y, \xi_3)}{\partial t} \right) \right| \right\}, \\
 M_{31,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{y \in BC} \left| V_r \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \frac{A\tilde{\omega}d_r}{((\rho_r - \rho_0)gd_r)^3} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_2(y, \xi_4)}{\partial t} \right) \left(2\tau_{bx} - \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} M_{11,r}^2 \right) + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_2(y, \xi_4)}{\partial t} \right) \left(2\tau_{by} - \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} M_{12,r}^2 \right) \right] \tau_{bx} \right\}, \\
 M_{32,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{x \in CD} \left| V_r \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \frac{A\tilde{\omega}d_r}{((\rho_r - \rho_0)gd_r)^3} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_4(x, \xi_5)}{\partial t} \right) \left(2\tau_{bx} - \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} M_{13,r}^2 \right) + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_4(x, \xi_5)}{\partial t} \right) \left(2\tau_{by} - \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} M_{14,r}^2 \right) \right] \tau_{by} \right\}, \\
 M_{33,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{y \in AD} \left| V_r \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \frac{A\tilde{\omega}d_r}{((\rho_r - \rho_0)gd_r)^3} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_1(y, \xi_3)}{\partial t} \right) \left(2\tau_{bx} - \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} M_{15,r}^2 \right) + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_1(y, \xi_3)}{\partial t} \right) \left(2\tau_{by} - \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} M_{16,r}^2 \right) \right] \tau_{by} \right\}, \\
 &\quad t_1 < \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5 \leq t_2, \quad t_1 < t \leq t_2.
 \end{aligned}$$

Итак, используя оценки (38), получаем:

$$\iint_G \left| H_{np}^2(x, y, t_2) - H_{lp}^{(2)}(x, y, t_2) \right| dx dy \leq \tau^2 L_x L_y \sum_{j=1}^R (M_{01,r}^2 + \tau M_{02,r}^2), \quad (39)$$

где

$$M_{r,01}^2 = \frac{1}{1 - \tilde{\varepsilon}} (M_{r,2}^2 + M_{r,6}^2 + M_{r,9}^2 + M_3^2 (M_{r,4}^2 + M_{r,7}^2)),$$

$$M_{r,02}^2 = \frac{1}{(1 - \tilde{\varepsilon})c_0} M_{r,1}^* (M_{r,1}^2 + M_{r,5}^2 + M_{r,8}^2).$$

Из неравенства (39) можно перейти к следующей оценке:

$$\left\| H_{lp}^{(2)}(x, y, t_2) - H_{np}(x, y, t_2) \right\|_{L_1(G \times [t_1, t_2])} \leq \frac{1}{2c_0} \tau^2 L_x L_y (1 + \tau) \sum_{r=1}^R M_{2,r}^*, \quad (40)$$

где

$$M_{2,r}^* = \max_{(x,y) \in G} \{ M_{01,r}^2; M_{02,r}^2 \},$$

$$\|Q(x, y, t)\|_{L_1(G \times [t_1, t_2])} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left(\iint_G |Q(x, y, t)| dx dy \right) dt.$$

Требуемая оценка для $n = 2$ получена. Выполнен первый шаг индукции.

Далее предполагаем, что при $n = s$ верна оценка:

$$\left\| H_{lp}^{(s)}(x, y, t_s) - H_{np}(x, y, t_s) \right\|_{L_1(G \times [t_{s-1}, t_s])} \leq \frac{1}{2c_0} \tau^2 L_x L_y \frac{1 - \tau^s}{1 - \tau} \sum_{r=1}^R M_{s,r}^*, \quad (41)$$

где $M_{s,r}^*$ — некоторая постоянная функция.

При $n = s + 1$ в (23)–(27) рассматриваются интегралы по временному интервалу $t_s < t \leq t_{s+1}$. Проводя оценки указанных интегралов с учетом (41) на предыдущем временном слое, получаем неравенство:

$$\iint_G |H_{lp}^2(x, y, t_{s+1}) - H_{np}^2(x, y, t_{s+1})| dx dy \leq \tau^2 L_x L_y \sum_{r=1}^R (M_{01,r}^{s+1} + \tau M_{02,r}^{s+1} + \dots + \tau^s M_{0s+1,r}^{s+1}) \quad (42)$$

с постоянными величинами $M_{01,r}^{s+1}, M_{02,r}^{s+1}, \dots, M_{0s+1,r}^{s+1}$, зависящими от модулей производных.

Используя неравенство (42), приходим к оценке

$$\left\| H_{lp}(x, y, t_{s+1}) - H_{np}(x, y, t_{s+1}) \right\|_{L_1(G \times [t_s, t_{s+1}])} \leq \frac{1}{2c_0} \tau^2 L_x L_y \frac{1 - \tau^{s+1}}{1 - \tau} \sum_{r=1}^R M_{s+1,r}^*, \quad (43)$$

где

$$M_{s+1,r}^* = \max_{(x,y) \in G} \{ M_{01,r}^{s+1}; M_{02,r}^{s+1}; \dots; M_{0s+1,r}^{s+1} \},$$

$$\|Q(x, y, t)\|_{L_1(G \times [t_s, t_{s+1}])} \equiv \int_{t_s}^{t_{s+1}} \left(\iint_G |Q(x, y, t)| dx dy \right) dt.$$

Выполнен индукционный переход, позволяющий говорить о верности утверждения для любого s , $1 < s \leq N$.

Используя оценки (37), (40) и (43) из формулы (22), находим:

$$\begin{aligned} \left\| H_{lp}(T) - H_{np}(T) \right\|_{L_1(G \times [0, T])} &\leq \frac{1}{2c_0(1 - \tau)} \tau^2 L_x L_y C ((1 - \tau) + (1 - \tau^2) + \dots + (1 - \tau^{N+1})) \leq \\ &\leq \frac{1}{2c_0(1 - \tau)} \tau^2 L_x L_y C \left[N + 1 - \frac{\tau - \tau^{N+2}}{1 - \tau} \right], \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$C \equiv \max_{(x,y) \in G} \left\{ \sum_{r=1}^R M_{1,r}^*, \sum_{r=1}^R M_{2,r}^*, \dots, \sum_{r=1}^R M_{s+1,r}^* \right\},$$

$$\|Q(x, y, t)\|_{L_1(G \times [0, T])} \equiv \int_0^T \left(\iint_G |Q(x, y, t)| dx dy \right) dt = \sum_{n=1}^N \left[\int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G |Q(x, y, t)| dx dy \right) dt \right].$$

Поскольку $N\tau \equiv T \equiv const$, то из неравенства (44) получаем

$$\left\| H_{lp}(T) - H_{np}(T) \right\|_{L_1(G \times [0, T])} = O(\tau), \quad (45)$$

что и завершает исследование сходимости линеаризованной задачи к решению исходной нелинейной задачи.

Обсуждение и заключение. Определены условия сходимости решений линеаризованной задачи транспорта наносов многофракционного состава к решению нелинейной задачи в норме банахового пространства L_1 со скоростью $O(\tau)$. Полученные результаты исследования могут быть использованы при прогнозировании нелинейных гидрофизических процессов, повышения их точности и надежности в силу наличия новых функциональных возможностей учета физически важных факторов.

Список литературы / References

1. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Sidoryakina V.V. Parallel Solution of Sediment and Suspension Transportation Problems on the Basis of Explicit Schemes. *Communications in Computer and Information Science*. 2018;910:306–321. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99673-8_22

2. Сухинов А.И., Сидорякина В.В. Математическая нелинейная пространственно-двумерная модель транспорта многокомпонентных наносов в мелководных водоемах и ее линеаризация. *Вестник Таганрогского института имени А.П. Чехова*. 2018;2:242–245.
- Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V. Mathematical nonlinear spatial-two-dimensional model of multicomponent sediment transport in shallow water bodies and its linearization. *Bulletin of the Taganrog Institute named after A.P. Chekhov*. 2018;2:242–245. (In Russ.)
3. Сидорякина В.В. Существование и единственность решения начально-краевой задачи транспорта многокомпонентных наносов прибрежных морских систем. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):73–80. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-73-80>
- Sidoryakina V.V. Existence and uniqueness of the solution of the initial-boundary value problem of transport of multicomponent sediments of coastal marine systems. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):73–80. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-73-80>
4. Сидорякина В.В. Непрерывная зависимость решений линеаризованной начально-краевой задачи транспорта многокомпонентных наносов от входных данных задачи. *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*. 2024;1(221):30–37. <https://doi.org/10.18522/1026-2237-2024-1-30-37>
- Sidoryakina V.V. Continuous dependence of solutions of the linearized initial-boundary value problem of multicomponent sediment transport on the input data of the problem. *News of universities. North Caucasian region. Natural sciences*. 2024;1(221):30–37. (In Russ.) <https://doi.org/10.18522/1026-2237-2024-1-30-37>
5. Сидорякина В.В., Сухинов А.И. Исследование корректности и численная реализация линеаризованной двумерной задачи транспорта наносов. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2017;57(6):985–1002. <https://doi.org/10.7868/S0044466917060138>
- Sidoryakina V.V., Sukhinov A.I. Well-posedness analysis and numerical implementation of a linearized two-dimensional bottom sediment transport problem. *Comput. Math. Math. Phys.* 2017;57(6):978–994. <https://doi.org/10.1134/S0965542517060124>
6. Сухинов А.И., Сидорякина В.В., Сухинов А.А. Достаточные условия сходимости положительных решений линеаризованной двумерной задачи транспорта наносов. *Вестник Донского государственного технического университета*. 2017;17(1):5–17. <https://doi.org/10.23947/1992-5980-2017-17-1-5-17>
- Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V., Sukhinov A.A. Sufficient conditions for the convergence of positive solutions of a linearized two-dimensional sediment transport problem. *Bulletin of the Don State Technical University*. 2017;17(1):5–17. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/1992-5980-2017-17-1-5-17>
7. Сухинов А.И., Сидорякина В.В. О единственности решения линеаризованной двумерной начально-краевой задачи транспорта наносов. *Вестник Таганрогского института имени А.П. Чехова*. 2016;2:270–274.
- Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V. On the uniqueness of the solution of a linearized two-dimensional initial-boundary value problem of sediment transport. *Bulletin of the Taganrog Institute named after A.P. Chekhov*. 2016;2:270–274.
8. Сухинов А.И., Сидорякина В.В., Сухинов А.А. Линеаризация пространственно-двумерной задачи транспорта наносов и ее сходимость к исходной нелинейной задаче. В: *Труды международной конференции «Современные проблемы математической физики и вычислительной математики»*. Москва: МАКС Пресс; 2016. С. 113.
- Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V., Sukhinov A.A. Linearization of a spatially two-dimensional sediment transport problem and its convergence to the original nonlinear problem. In: *Proceedings of the International Conference “Modern Problems of Mathematical Physics and Computational Mathematics”*. Moscow: Publishing Department of the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University; MAKS Press; 2016. P. 113. (In Russ.)
9. Сухинов А.И., Сидорякина В.В. О сходимости решения линеаризованной последовательности задач к решению нелинейной задачи транспорта наносов. *Математическое моделирование*. 2017;29(11):19–39.
- Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V. Convergence of linearized sequence tasks to the nonlinear sediment transport task solution. *Mat. Model.* 2017;29(11):19–39.
10. Сухинов А.И., Проценко Е.А., Чистяков А.Е., Шретер С.А. Сравнение вычислительных эффективностей явной и неявной схем для задачи транспорта наносов в прибрежных водных системах. В: *Труды международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии (PaVT’2015)»*. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ; 2015. С. 297–307.
- Sukhinov A.I., Protsenko E.A., Chistyakov A.E., Shreter S.A. Comparison of computational efficiencies of explicit and implicit schemes for the problem of sediment transport in coastal water systems. In: *Proceedings of the International Scientific Conference “Parallel Computing Technologies (PaVT’2015)”*. Chelyabinsk: Publishing Center of SUSU; 2015. P. 297–307. (In Russ.)
11. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Построение дискретной двумерной математической модели транспорта наносов. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2011;8(121): 32–44.
- Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A. Construction of a discrete two-dimensional mathematical model of sediment transport. *Bulletin of SFedU. Engineering sciences*. 2011;8(121): 32–44. (In Russ.)
12. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Бондаренко Ю.С. Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2011;8(121):6–13.

Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Bondarenko Yu.S. Estimation of the error in solving the diffusion equation based on schemes with weights. *Bulletin of SFedU. Engineering sciences*. 2011;8(121):6–13. (In Russ.)

13. Sidoryakina V.V. Efficient algorithms for the numerical solution of the coupled sediment and suspended matter transport problems in coastal systems. *Atlantis Press. Series: Atlantis Highlights in Computer Sciences*. 2019;3:243–248. <https://doi.org/10.2991/cs19-2019.42>

14. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko S.V., Sidoryakina, V.V. Coupled 3D wave and 2D bottom deposit transportation models for the prediction of harmful phenomena in coastal zone. *Trends in the Analysis and Design of Marine Structures*. 2019. P. 597–603. <https://doi.org/10.1201/9780429298875>

15. Sukhinov A., Chistyakov A., Sidoryakina V. Investigation of nonlinear 2D bottom transportation dynamics in coastal zone on optimal curvilinear boundary adaptive grids. *MATEC Web of Conferences*. 2017;132:04003. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201713204003>

Об авторе:

Валентина Владимировна Сидорякина, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1); доцент кафедры математики и физики Таганрогского института имени А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ) (347936, Российская Федерация, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), [ORCID](#), [SPIN-код](#), [ResearcherID](#), [MathSciNet](#), [ScopusID](#), cvv9@mail.ru

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

About the Author:

Valentina V. Sidoryakina, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics and Computer Science, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation); Associate Professor of the Department of Mathematics and Physics, Taganrog Institute named after A.P. Chekhov (branch) of RSUE (RINH) (48, Initiativnaya str., Taganrog, 347936, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), [ResearcherID](#), [MathSciNet](#), [ScopusID](#), cvv9@mail.ru

Conflict of Interest Statement: the author do not have any conflict of interest.

Author has read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 31.01.2025

Поступила после рецензирования / Reviewed 21.02.2025

Принята к публикации / Accepted 03.03.2025