

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELLING



УДК 519.6

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-39-51>


Оценка предельной скорости однонаправленного транспортного потока с высокой вычислительной эффективностью

И.А. Кутейников

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), г. Москва, Российская Федерация

✉ ivankuteynikov09@gmail.com

Аннотация

Введение. В современных условиях развития интеллектуальных транспортных систем (ITS) возникает актуальная задача точной оценки предельной скорости транспортного потока на магистрали. Несмотря на существующие решения данной проблемы, основанные на методах статистической механики и стохастических моделях, остаются пробелы в адаптации этих теорий для реальных сегментов дорог с ограниченной протяженностью. Традиционная формула термодинамического предела, используемая для расчета средней скорости транспортного потока, становится некорректной при малых значениях длины дорожной полосы, что ограничивает ее применимость в практических задачах мониторинга транспорта. Целью настоящего исследования является сравнительный анализ различных подходов к оценке средней предельной скорости транспортного потока.

Материалы и методы. Исследование проведено на основе метода статистической механики и стохастической модели на одномерной конечной решетке. Для анализа использовались численные эксперименты с различными значениями параметров (число клеток, плотность потока, вероятность движения).

Результаты исследования. Проведенное исследование показало значительные расхождения между результатами метода статистической механики и другими подходами при малых значениях длины дорожной полосы. Эффективность второго и третьего подходов была подтверждена для ограниченных сегментов дорог, где они демонстрируют большую точность и применимость.

Обсуждение и заключение. Результаты исследования имеют практическое значение для разработки интеллектуальных систем управления транспортными потоками, особенно на коротких участках дорог. Предложенные подходы могут быть успешно интегрированы в современные системы мониторинга для повышения их точности. Теоретическая значимость работы заключается в развитии методологии оценки транспортных потоков с учетом специфики реальных условий.

Ключевые слова: транспортные потоки, термодинамический предел, случайные процессы с запретами, асимптотическое поведение средней скорости, стационарные решения, вероятностная модель трафика, системы массового обслуживания

Для цитирования. Кутейников И.А. Оценка предельной скорости однонаправленного транспортного потока с высокой вычислительной эффективностью. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(1):39–51. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-39-51>

Original Theoretical Research

Estimation of the Unidirectional Traffic Flow Velocity Limit with High Computational Efficiency

Ivan A. Kuteynikov

Moscow Automobile and Road State Technical University (MADI), Moscow, Russian Federation

✉ ivankuteynikov09@gmail.com

Abstract

Introduction. In the modern development of intelligent transportation systems (ITS), an urgent task is the accurate estimation of the velocity limit of traffic flow on a highway. Despite existing solutions to this problem based on statistical

mechanics methods and stochastic models, gaps remain in adapting these theories to real road segments of limited length. The traditional thermodynamic limit formula, used to calculate the average velocity of traffic flow, becomes inaccurate for small road segment lengths, limiting its applicability in practical traffic monitoring tasks. The aim of this study is a comparative analysis of various approaches to estimating the average velocity limit of traffic flow.

Materials and Methods. The study was conducted using the method of statistical mechanics and a stochastic model on a one-dimensional finite lattice. Numerical experiments with various parameter values (number of cells, traffic density, and movement probability) were used for analysis.

Results. The study revealed significant discrepancies between the results obtained using the statistical mechanics method and other approaches when the road segment length was small. The efficiency of the second and third approaches was confirmed for limited road segments, where they demonstrated greater accuracy and applicability.

Discussion and Conclusion. The research results have practical significance for the development of intelligent traffic management systems, especially for short road segments. The proposed approaches can be successfully integrated into modern monitoring systems to improve their accuracy. The theoretical significance of this work lies in advancing the methodology for traffic flow estimation while accounting for the specific conditions of real-world environments.

Keywords: traffic flows, thermodynamic limit, exclusion processes, asymptotic behavior of average velocity, stationary solutions, probabilistic traffic model, queuing systems

For Citation. Kuteynikov I.A. Estimation of the unidirectional traffic flow velocity limit with high computational efficiency. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(1):39–51. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-39-51>

Введение. Сложность задачи моделирования транспортных потоков обусловлена необходимостью учета множества факторов, таких как поведение водителей, погодные условия, технические характеристики транспортных средств и инфраструктуры. Несмотря на значительный прогресс в разработке математических моделей транспортных потоков, существующие подходы часто сталкиваются с рядом ограничений, которые снижают их применимость в реальных условиях.

Математические модели на основе концепций физики традиционно используют описания физических сред с помощью методов механики твердого тела, гидродинамики и газодинамики. Эти подходы сводятся к системам дифференциальных уравнений, которые накладывают требования гладкости на решения. Например, уравнения Навье-Стокса в гидродинамике предполагают, что скорость и давление жидкости изменяются плавно, что позволяет описывать течение жидкости в широком диапазоне условий. Однако такие модели, основанные на дифференциальных уравнениях, часто оказываются недостаточно гибкими для описания сложных и нелинейных процессов, таких как транспортные потоки, где наблюдаются резкие скачки плотности и скорости.

Одним из основных свойств многих управляемых, взаимодействующих систем многих тел является возникновение ударов. Удар в системе классических текучих частиц означает внезапный переход от области низкой плотности к области высокой плотности. Хорошо известным примером шока является начало пробки на автострате (рис. 1), когда прибывающие автомобили (почти свободно текущие частицы в режиме низкой плотности) вынуждены очень быстро замедляться на коротком интервале и затем становятся частью высокоплотной перегруженной области. Примечательной особенностью таких толчков является их стабильность в течение длительных периодов времени, то есть они остаются локализованными на расстояниях, сравнимых с размерами частиц. В некотором смысле можно рассматривать толчки как солитоноподобные коллективные возмущения системы частиц.



Рис. 1. Иллюстрация негладкости (скачкообразности) плотности транспортного потока

Разница между потоком жидкости (или газа) и транспортным потоком слишком велика, чтобы использовать непрерывный подход и точность описания транспортного потока с помощью макроскопических моделей [1]. Неточности возникают в ситуациях, когда, например, очень мало транспортных средств в области, оказывающей влияние на движение транспортного средства, по сравнению с множеством частиц в задачах термодинамики. В отличие от математической физики, где молекулы подчиняются физическим законам, которые обычно просты и

неизменны, водители ведут себя различным образом и изменяют свое поведение, внося человеческий фактор. В то время как молекулы движутся хаотично, водители имеют сходные цели (одно и то же направление, близкие желаемые скорости) и обычно предпочитают не ускоряться и не замедляться часто, так что их поведение может быть более разнообразным, чем поведение частиц в жидкости или газе.

Для преодоления указанных проблем в настоящей работе предлагается провести оценку предельной скорости однонаправленного транспортного потока на базе разных подходов к моделированию.

Модель Лайтхилла-Уизема-Ричардса (LWR). Одним из популярных подходов к моделированию трафика с середины пятидесятих годов прошлого столетия является сетевая гидродинамическая модель и ее различные модификации, связанные с уподоблением потока автомобилей текущей жидкости. Модели на базе гидродинамической (Пэйна [2], Кернера-Конхойзера [3], Ава-Раскла [4], Занга [5]) учитывают дополнительные факторы, такие как поведение водителей, неоднородность потока, фазовые переходы и другие.

В работе 1955 года Лайтхилла и Уизема [6] и в работе 1956 Ричардса [7] зависимость функции от плотности была уподоблена течению жидкости с плотностью $\rho(x,t)$, равной числу машин на единицу длины дороги, и интенсивностью $q(x,t)$, равной количеству автомобилей, пересекающих сечение x , где $x \in G$. Учитывая закон сохранения массы, имеем сохранение числа машин на участке дороги в замкнутой системе. В случае открытой системы имеем $q_x + \rho_t = 0$ и $q_x + \rho_t = g(x,t)$. Функция $g(x,t)$ отражает интенсивность потока въезжающих/выезжающих транспортных средств. Скорость транспортного потока в точке x в момент времени t обозначается как $v(x,t)$, и в модели LWR предполагается, что скорость зависит только от плотности. Такая модель соответствовала реальным наблюдениям, особенно при низких интенсивностях потоков.

Таким образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v(\rho))}{\partial x} = 0, \\ v(t, \rho) = F(\rho) \end{cases}, \quad (1)$$

где $F(\rho)$ — невозрастающая функция, не обязательно выпуклая.

Эта модель математически аналогична уравнению движения сжимаемой жидкости, где плотность жидкости соответствует плотности транспортного потока, а поток частиц $\rho v(\rho)$ аналогичен потоку массопереноса в гидродинамике. Хотя модели гидродинамического типа широко используются для описания транспортных потоков, у них есть несколько ограничений, которые становятся видны при анализе реальных данных:

1. *Отсутствие учета дискретности транспортных средств.* Модели гидродинамического типа предполагают, что транспортный поток ведет себя как сплошная среда, тогда как в реальности транспортные средства представляют собой дискретные объекты. Это ограничивает модели в описании микроскопических явлений, таких как разрывы или скачки плотности, характерные для реальных дорожных условий.

2. *Неточное описание резких скачков плотности.* Уравнения моделей гидродинамического типа основаны на предположении о гладкости функции плотности, что делает невозможным моделирование дискретных или резких изменений, таких как внезапные пробки.

3. *Ограничения в моделировании сложного взаимодействия транспортных средств.* Модели предполагают, что скорость транспортного средства зависит только от локальной плотности, игнорируя такие факторы как индивидуальные особенности водителей, задержки восприятия и дальнедействующее взаимодействие.

4. *Ограниченная адаптивность к реальным условиям.* Модели не учитывают внешние воздействия, такие как погодные условия, аварии или переменные ограничения скорости.

5. *Невозможность описания фазовых переходов.* В реальных транспортных потоках наблюдаются фазовые переходы между разреженным движением, стабильным потоком и пробками. Эти явления трудно корректно описать в рамках моделей гидродинамического типа без дополнительных предположений или модификаций.

Модели газовой динамики. Исследователи в многочисленных работах пытались исправить недостатки гидродинамических моделей за счет введения в правой части дополнительных функций. Среди наиболее удачных моделей стоит отметить квазигазодинамическую модель (КГД модель), разработанную под руководством академика Б.Н. Четверушкина [8].

КГД модель транспортных потоков и ее численная реализация детально рассмотрена в [9]. Она основана на аналогиях между поведением транспортных средств и движением газа, что позволяет использовать подходы и методы газовой динамики. Основное преимущество модели состоит в том, что в транспортных потоках частицы (транспортные средства) обладают конечными размерами и движутся вдоль ограниченных дорожных полос, а в газах молекулы распределены в трёхмерном пространстве. В одномерном случае КГД-система уравнений для описания автотранспортных потоков выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau}{2} \frac{\partial(\rho V^2 + P)}{\partial x} \right) + F_\rho, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho V}{\partial t} + \frac{\partial \rho V^2}{\partial x} = f - \text{grad}P + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau}{2} \frac{\partial(\rho V^3 + PV)}{\partial x} \right) + F_V. \quad (3)$$

В данной модели второго порядка $\rho = \left[\frac{\text{авто}}{\text{км} \times \text{полоса}} \right]$ — плотность потока, $V = \left[\frac{\text{км}}{\text{час}} \right]$ — скорость автотранспорта, причем уравнение (2) определяет плотность потока, а уравнение (3) — его скорость.

Для случая низкой плотности, когда расстояния между транспортными средствами значительны и их взаимодействие минимально, можно использовать упрощенную модель, аналогичную несжимаемой жидкости. В этом случае плотность транспортного потока считается постоянной, а изменения происходят только в скорости и направлении потока. Однако такая постановка редко используется в транспортных моделях, так как плотность играет ключевую роль в формировании пробок и других явлений.

Связь микроскопических и макроскопических моделей. В более сложных микроскопических моделях, где частица соответствует транспортному средству, отношение числа частиц к числу ячеек на участке решетки является переменной величиной. Средняя скорость частиц и интенсивность потока также зависят от местоположения участка решетки. Локальное состояние участка можно охарактеризовать плотностью потока частиц и интенсивностью потока. При задании распределения значений одной из этих характеристик на решетке распределение значений других характеристик обычно исследуют с помощью имитационного моделирования.

В макроскопической модели автотранспортного потока соотношение между плотностью, скоростью и интенсивностью описывают с помощью дифференциальных уравнений в частных производных (уравнениях математической физики). Соотношение распределения этих характеристик и их динамика определяется этими дифференциальными уравнениями, которые при заданных краевых условиях обычно решаются с помощью численных методов.

Как микроскопические, так и макроскопические модели трафика сходны или полностью совпадают с соответствующими моделями статистической физики. В микроскопических моделях статистической физики частицы соответствуют молекулам или элементарным частицам, а в макроскопических моделях задаются распределения таких характеристик как давление, температура, скорость потока, плотность газа или жидкости.

Микроскопические модели транспортных потоков, описываемые случайными процессами разных типов [10], обладают преимуществами по сравнению с макроскопическими, поскольку позволяют учитывать индивидуальное поведение каждого транспортного средства, что особенно важно для анализа сложных ситуаций, таких как пробки, слияние потоков или их пересечение. Эти модели обеспечивают более детальное описание динамики движения на уровне отдельных объектов, что делает их полезными при разработке стратегий управления трафиком в реальном времени и создании интеллектуальных транспортных систем.

Вероятностная модель трафика на одномерной решетке. В настоящей работе рассматривается реализация микроскопической модели на одной полосе движения. Для получения стационарных решений будем исследовать ее на замкнутой кольцевой решетке.

Пусть на кольцевой решетке, содержащей N ячеек, находится $M < N$ частиц (рис. 2). Время дискретно. В каждый момент времени $t = 0, 1, 2, \dots$ каждая из частиц находится в одной из ячеек. В ячейке может одновременно находиться не более одной частицы. Ячейки имеют номера $0, 1, \dots, N-1$ и занумерованы в направлении движения частиц по модулю N .

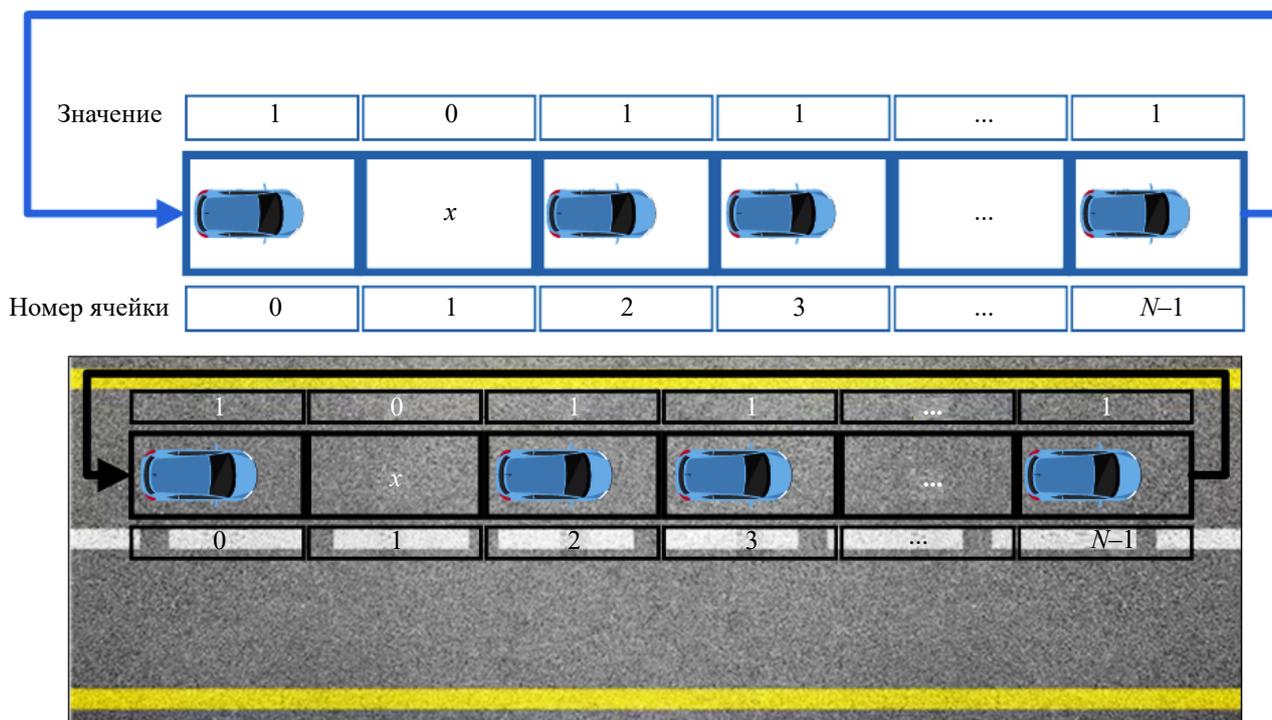


Рис. 2. Визуализация размещения ячеек на кольце

Если в момент времени $t = 0, 1, 2, \dots$ частица находится в ячейке i и ячейка $i + 1$ (сложение по модулю N) свободна, то в момент $t + 1$ частица будет с вероятностью $0 < p < 1$ находиться в ячейке $i + 1$ и с вероятностью $1 - p$ частица остается на месте. Если ячейка $i + 1$ занята, то частица не может переместиться.

Введем понятие пространства состояний кольцевой решетки $S = \{s_0, s_1, \dots, s_{C_N^M - 1}\}$, где общее количество возможных состояний C_N^M — число сочетаний из N элементов по M . Каждое состояние s_j , $j = 0, 1, \dots, C_N^M - 1$ можно представить вектором длины $N(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{N-1})$, где элемент $x_i = 1$ если ячейка i занята и $x_i = 0$, если

ячейка i свободна. При этом $\sum_{i=0}^{N-1} x_i = M$.

Матрица переходов P имеет размер $C_N^M \times C_N^M$.

Рассмотрим пример для $N = 4, M = 2$.

Состояния системы:

$$S = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}.$$

Рассмотрим начальное состояние $s_0 = (1, 1, 0, 0)$. Возможные переходы:

- $(1, 1, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 0, 0)$ с вероятностью $1 - p$;
- $(1, 1, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 1, 0)$ с вероятностью p .

Рассмотрим начальное состояние $s_1 = (1, 0, 1, 0)$. Возможные переходы:

- $(1, 0, 1, 0) \rightarrow (1, 0, 1, 0)$ с вероятностью $(1 - p)^2$;
- $(1, 0, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 1, 0)$ с вероятностью $p(1 - p)$;
- $(1, 0, 1, 0) \rightarrow (1, 0, 0, 1)$ с вероятностью $(1 - p)p$;
- $(1, 0, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 0, 1)$ с вероятностью p^2 .

Рассмотрим начальное состояние $s_2 = (1, 0, 0, 1)$. Возможные переходы:

- $(1, 0, 0, 1) \rightarrow (1, 0, 0, 1)$ с вероятностью $1 - p$;
- $(1, 0, 0, 1) \rightarrow (0, 1, 0, 1)$ с вероятностью p .

Рассмотрим начальное состояние $s_3 = (0, 1, 1, 0)$. Возможные переходы:

- $(0, 1, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 1, 0)$ с вероятностью $1 - p$;
- $(0, 1, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 0, 1)$ с вероятностью p .

Рассмотрим начальное состояние $s_4 = (0, 1, 0, 1)$. Возможные переходы:

- $(0, 1, 0, 1) \rightarrow (0, 1, 0, 1)$ с вероятностью $(1 - p)^2$;
- $(0, 1, 0, 1) \rightarrow (0, 0, 1, 1)$ с вероятностью $p(1 - p)$;
- $(0, 1, 0, 1) \rightarrow (1, 1, 0, 0)$ с вероятностью $(1 - p)p$;
- $(0, 1, 0, 1) \rightarrow (1, 0, 1, 0)$ с вероятностью p^2 .

Рассмотрим начальное состояние $s_5 = (0, 0, 1, 1)$. Возможные переходы:

- $(0, 0, 1, 1) \rightarrow (0, 0, 1, 1)$ с вероятностью $1 - p$;
- $(0, 0, 1, 1) \rightarrow (1, 0, 1, 0)$ с вероятностью p .

Таким образом, для $N = 4, M = 2$ получится матрица $P_{6 \times 6}$:

$$P_{6 \times 6} = \begin{matrix} & s_0 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ \begin{matrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-p)^2 & p(1-p) & (1-p)p & p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & p & 0 \\ (1-p)p & p^2 & 0 & 0 & (1-p)^2 & p(1-p) \\ 0 & p & 0 & 0 & 0 & 1-p \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Пусть π_i — стационарная вероятность состояния s_i ; p_{ij} — вероятность перехода из состояния s_i в состояние s_j , $i, j = 0, 1, \dots, C_N^M - 1$.

Стационарные вероятности состояний удовлетворяют системе уравнений

$$\pi_i \sum_{j=0}^{C_N^M - 1} p_{ij} = \sum_{j=0}^{C_N^M - 1} \pi_j p_{ji}, \quad i, j = 0, \dots, C_N^M - 1, \tag{4}$$

$$\sum_{i=0}^{C_N^M - 1} \pi_i = 1. \tag{5}$$

Пусть $k(s_i)$ — число «кластеров», имеющих в состоянии цепи s_i . Под кластером понимается группа соседних ячеек, занятых частицами, отделенная от других кластеров свободными ячейками. Если цепь находится в состоянии s_i , то число частиц, которые могут переместиться, равно числу кластеров $k(s_i)$, $0 \leq k(s_i) \leq M$. Существует $2^{k(i)}$ состояний, в которые цепь может перейти из состояния s_i . Пусть система из состояния s_i может попасть за один шаг времени в состояние s_j , $1 < j < C_N^M - 1$ путем перемещения $l(s_i, s_j)$ частиц $0 \leq l(s_i, s_j) \leq k(s_i)$.

Тогда

$$p_{ij} = p^{l(s_i, s_j)} (1-p)^{k(s_i) - l(s_i, s_j)}, \quad l(s_i, s_i) = 0. \quad (6)$$

Вероятность того, что на данном шаге система останется в состоянии s_i , равна вероятности того, что из $k(s_i)$ частиц ни одна не переместится, $p_{ij} = (1-p)^{k(s_i)}$, откуда

$$\sum_{j=0, j \neq i}^{C_N^M - 1} p_{ij} = 1 - (1-p)^{k(s_i)}. \quad (7)$$

Обозначим через $S(k, N, M)$ число состояний с $0 \leq k \leq M$ кластерами при числе ячеек N и числе частиц M .

Лемма 1. Имеет место равенство

$$S(k, N, M) = v = \begin{cases} \frac{N}{k} C_{M-1}^{k-1} C_{N-M-1}^{k-1}, & k \leq \min(M, N-M), \\ 0, & k > \min(M, N-M). \end{cases} \quad (8)$$

Доказательство. Пусть $R(k, M)$ — число способов с учетом порядка представления числа M в виде суммы k натуральных слагаемых ($k \leq \min(M, N-M)$). Это число равно числу способов из $M-1$ элементов выбрать $k-1$ элементов:

$$R(k, M) = C_{M-1}^{k-1}. \quad (9)$$

Найдем число $A(k, N, M)$ состояний множества A , которые содержат k кластеров и при которых ячейка 1 свободна, а ячейка 2 занята. Это число равно произведению числа способов распределить M частиц между k кластерами $R(k, M)$, умноженному на число способов выбрать длины $(k-1)$ промежутков (это число равно $R(k, N-M)$). Таким образом, если $k \leq \min(M, N-M)$:

$$A(k, N, M) = R(k, M) R(k, N-M). \quad (10)$$

Из (9)–(10) следует, что

$$A(k, N, M) = C_{M-1}^{k-1} C_{N-M-1}^{k-1}. \quad (11)$$

Пусть $a = (i_1, \dots, i_N)$ — произвольное состояние из множества A . Обозначим через $b(a, d)$ состояние, ставящееся в соответствие состоянию a при повороте на d ячеек, а именно $b(a, d) = (i_{N-d+1}, i_{N-d+2}, \dots, i_N, i_1, \dots, i_{N-d})$. Любое состояние с k кластерами совпадает с $b(a, d)$ при k различных упорядоченных парах (a, d) , где a — некоторый элемент множества A , а d — одно из чисел $0, 1, \dots, N-1$. Всего существует $N \cdot A(k, N, M)$ таких различных пар. Таким образом,

$$S(k, N, M) = \frac{N}{k} A(k, N, M). \quad (12)$$

Из (11), (12) следует (9). Лемма доказана.

Теорема 1. Система (4)–(5) имеет решение

$$\pi_i = \frac{C}{(1-p)^{k(s_i)-1}}, \quad i = 0, \dots, C_N^M - 1, \quad (13)$$

где константа

$$C = \left(\sum_{k=1}^{\min(M, N-M)} \frac{N}{k} \cdot C_{M-1}^{k-1} C_{N-M-1}^{k-1} \frac{1}{(1-p)^{k-1}} \right)^{-1}. \quad (14)$$

Доказательство. Перепишем (4) в виде

$$\sum_{j=0}^{C_N^M - 1} \pi_i p_{ij} = \sum_{j=0}^{C_N^M - 1} \pi_j p_{ji}, \quad i, j = 0, \dots, C_N^M - 1. \quad (15)$$

Пусть $F(s_i)$ — множество состояний, в которые можно попасть из состояния s_i за один шаг; $F(s_i, l)$ — подмножество множества $F(s_i)$ состояний, содержащее состояния, в которые можно попасть из состояния s_i посредством перехода l частиц; $B(s_i)$ — подмножество состояний $B(s_i)$, из которых можно попасть в состояние s_i за один шаг; $B(s_i, l)$ — подмножество $B(s_i)$, содержащее состояния, из которых можно попасть в состояние s_i посредством перехода l частиц.

Имеем

$$p_{ij} = \begin{cases} 0, & j \notin F(s_i), i, j = 0, \dots, C_N^M - 1, \\ p^l (1-p)^{k(s_i)-l}, & j \in F(s_i, l), i, j = 0, \dots, C_N^M - 1, l = 1, \dots, k(s_i), \end{cases} \quad (16)$$

$$p_{ji} = \begin{cases} 0, & j \notin B(s_i), i, j = 0, \dots, C_N^M - 1, \\ p^l (1-p)^{k(s_j)-l}, & j \in B(s_i, l), i, j = 0, \dots, C_N^M - 1, l = 1, \dots, k(s_j). \end{cases} \quad (17)$$

Учитывая (16), (17), перепишем (15) в виде:

$$\sum_{l=1}^{k(s_i)} \text{card}F(s_i, l) \pi_l p^l (1-p)^{k(s_i)-l} = \sum_{l=1}^{k(s_i)} \sum_{j \in B(s_i, l)} \text{card}B(s_i, l) \pi_j p^l (1-p)^{k(s_i)-l}, i = 0, \dots, C_N^M - 1, \quad (18)$$

где через card обозначается число элементов множества A .

Подставляя (13) в (18), перепишем (18) в виде

$$\sum_{l=1}^{k(s_i)} \text{card}F(s_i, l) p^l (1-p)^{1-l} = \sum_{l=1}^{k(s_i)} \text{card}B(s_i, l) p^l (1-p)^{1-l}. \quad (19)$$

В силу симметрии $\text{card}B(s_i, l) = \text{card}F(s_i, l), l = 1, \dots, k(s_i), i = 0, \dots, C_N^M - 1$.

Таким образом, решение (13) удовлетворяет системе (19), а, следовательно, и системе (4)–(5). Формула (14) для вычисления константы C следует из (6), (13) и леммы 1. Теорема 1 доказана.

Оценка средней скорости на базе статистической механики. В [11] выдвинута гипотеза, что для средней скорости частиц верна формула

$$v = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\rho p(1-\rho)}}{2\rho}, \quad (20)$$

где $\rho = M / N$ — плотность потока частиц.

В работе [12] показано, что для конечных систем (конечное N) корреляции между машинами и их взаимное влияние на движение не могут быть полностью учтены в формуле (20). Это связано с тем, что в конечных системах существует ограниченное количество машин и их движение может быть более сложным из-за взаимодействий.

В пределе при $N \rightarrow \infty$ (термодинамический предел) система становится бесконечно большой и корреляции между машинами становятся локальными. В этом случае формула (20) становится точной, так как влияние граничных условий и конечности системы исчезает.

В [13] представлено строгое доказательство формулы для средней скорости v в модели на основе асимметричных процессов с запретами (Asymmetric Simple Exclusion Process — ASEP) на кольце. Это доказательство основано на использовании рекурсивных формул для функции распределения и гипергеометрических функций, что позволяет получить точное выражение для средней скорости v в зависимости от плотности ρ и вероятности p .

Отметим, что для создания интеллектуальных транспортных систем (ИТС) важны именно короткие участки магистрали, так как мониторинг транспортных потоков с помощью камер, размещаемых на мачтах освещения или светофорах, имеет ограниченную область захвата полосы.

Оценка средней скорости на базе стохастической модели. Так как в реальных условиях задача анализа трафика осуществляется на конечных участках магистрали для оценки средней скорости можно применять формулы на основе теории вероятностей.

Пусть $H(t)$ — среднее суммарное число перемещений частиц на отрезке времени $(0, t)$. Как следует из эргодической теоремы теории марковских процессов, предел

$$v = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{Mt} \quad (21)$$

существует и не зависит от начальной конфигурации частиц. Значение v называется скоростью частицы.

Тогда количество движения рассматриваемой системы за один шаг равно:

$$Q = \sum_{i=0}^{C_N^M - 1} \pi_i k(s_i) p. \quad (22)$$

В [14] для оценки средней скорости частиц получена следующая явная формула:

$$v = \frac{N}{M} \sum_{k=1}^{\min(M, N-M)} \frac{C}{(1-p)^{k-1}} \cdot C_{M-1}^{k-1} C_{N-M-1}^{k-1} \cdot p, \quad (23)$$

$$C = \left(\sum_{k=1}^{\min(M, N-M)} \frac{N}{k} \cdot C_{M-1}^{k-1} C_{N-M-1}^{k-1} \frac{1}{(1-p)^{k-1}} \right)^{-1},$$

где C_N^M — число сочетаний из N элементов по M .

Формула следует из утверждения Теоремы 1, Леммы 1 и формулы (22). В [15] дан другой вывод формулы (23).

Оценка средней скорости на базе систем массового обслуживания. Научным коллективом под руководством доктора технических наук Яшиной М.В., куда входит автор статьи, было обнаружено, что для вычисления средней скорости может применяться формула на базе систем массового обслуживания, представленная в [16].

Средняя скорость равна пределу отношения рекурсивных процедур

$$v = \frac{r_2(N-M, M)}{r_1(N-M, M)}, \quad (24)$$

где $q = 1 - p$, а $r_1(N-M, M)$ и $r_2(N-M, M)$ рекурсивные процедуры:

$$r_1(1, M) = \frac{M}{p}, \quad M \geq 1, \quad (25)$$

$$r_1(N-M, 1) = \left(\frac{q}{p}\right)^{N-M} \frac{1}{q}, \quad N-M \geq 1, \quad (26)$$

$$r_2(2, M) = \frac{q+M-1}{p}, \quad M \geq 1, \quad (27)$$

$$r_1(N-M, M) = r_1(N-M, M-1) + \frac{q}{p} r_2(N-M-1, M) + r_1(N-M-1, M-1), \quad N-M \geq 2, \quad M \geq 2, \quad (28)$$

$$r_2(N-M, M) = r_1(N-M-1, M-1) + \frac{q}{p} r_2(N-M-1, M), \quad N-M \geq 3, \quad M \geq 1. \quad (29)$$

Сравнение оценок средней скорости предложенных методов. Сравним зависимости оценки средней скорости от плотности для разных значениях вероятности для формул (20), (23) и (24) (рис. 3).

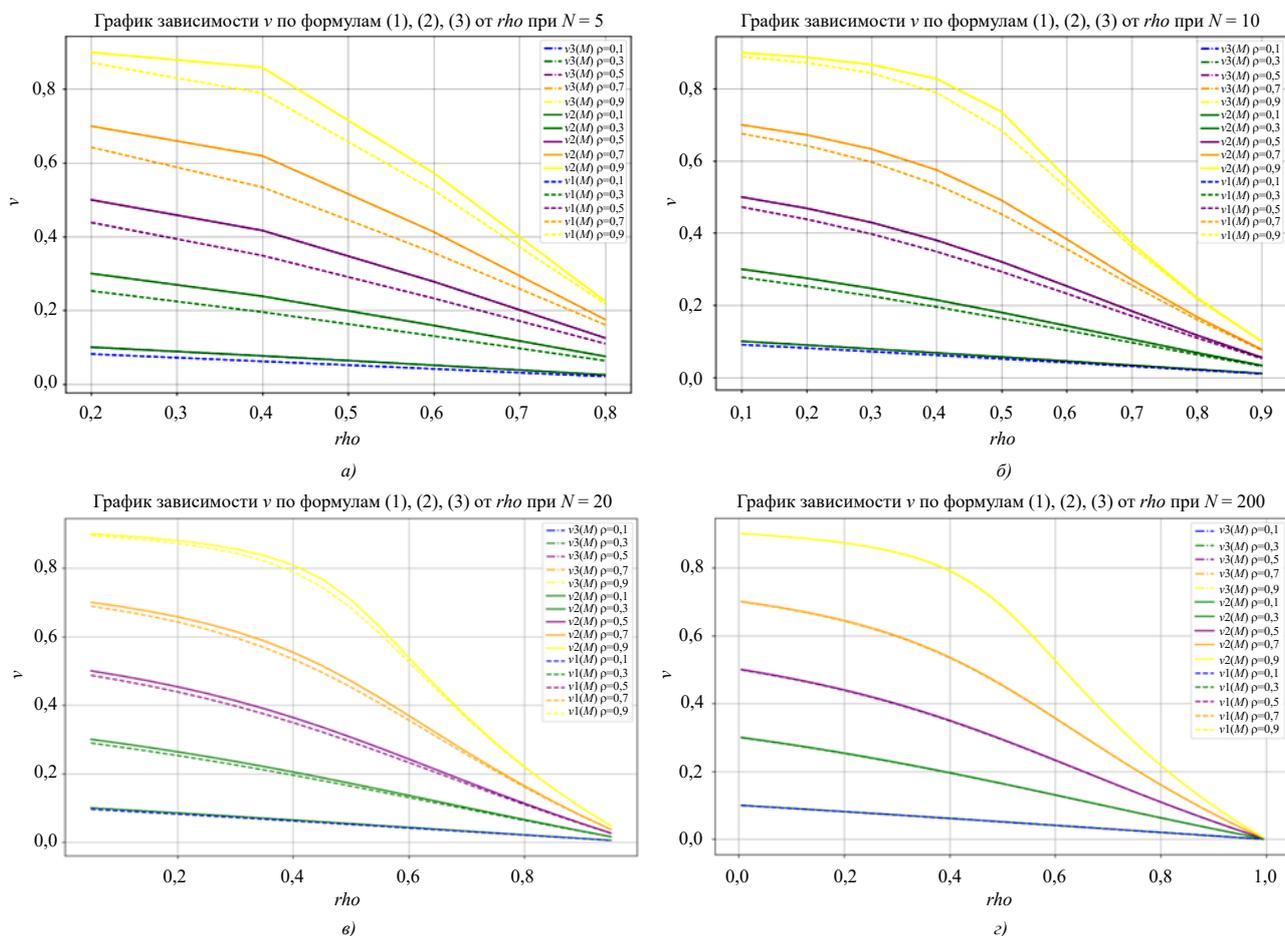


Рис. 3. Оценка средней скорости по формулам (20), (23) и (24) для а — $N = 5$; б — $N = 10$; в — $N = 20$; г — $N = 200$

Оценка средней скорости v по формулам (23) и (24) дает одинаковое значение, поэтому графики накладываются друг на друга. Из графиков видно, что для небольших N значения средней скорости v по формуле (20) отличается от значений по формулам (23), (24). При росте N разница между значениями уменьшается.

На рис. 4 представлена зависимость средней скорости v , вычисляемой по формулам (20), (23) и (24) от вероятности $p \in [0,01, 0,99]$ и количества частиц $M \in [1, N-1]$.

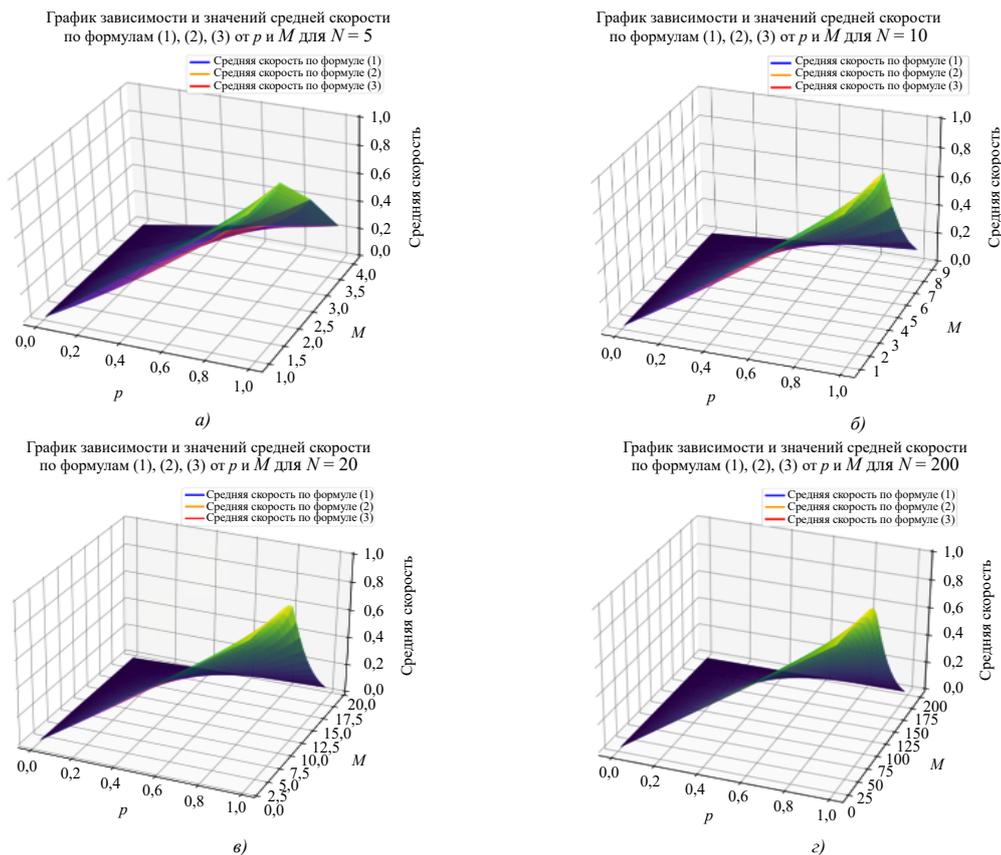


Рис. 4. Зависимость средней скорости v , вычисляемой по формулам (20), (23) и (24), от вероятности $p \in [0,01, 0,99]$ и количества частиц $M \in [1, N-1]$ для a — $N = 5$; $б$ — $N = 10$; $в$ — $N = 20$; $г$ — $N = 200$

Из графиков можно оценить характер изменения средней скорости v , вычисляемой по формулам (20), (23) и (24) от вероятности $p \in [0,01, 0,99]$ и количества частиц $M \in [1, N-1]$.

На рис. 5. представлена разница значений средней скорости v , вычисляемой по формулам (20) и (23) от вероятности $p \in [0,01, 0,99]$ и количества частиц $M \in [1, N-1]$. Формула (24) не рассматривается, так как ее значения совпадают со значениями средней скорости, вычисляемой по формуле (23).

Из графиков виден характер роста погрешности в двух направлениях — при вероятности p приближающейся к 0,5, и низкой плотности частиц p , а также при плотности частиц p приближающейся к 1, и плотности частиц p , приближающейся к 0,5. При небольших N погрешность находится в пределах сотых долей, в то время как при увеличении N падает до тысячных.

Сравнение оценки средней скорости с компьютерной симуляцией. Для численной оценки значений средней скорости, вычисляемых по формулам (20), (23), (24), была реализована компьютерная симуляция, моделирующая движения частиц по замкнутой решетке. Пользователем задается число ячеек N число частиц M , которое равномерно распределяется по всем ячейкам, вероятность перемещения частицы p на следующей итерации при условии, что следующая ячейка пуста и количество итераций t , а также количество запусков симуляции T .

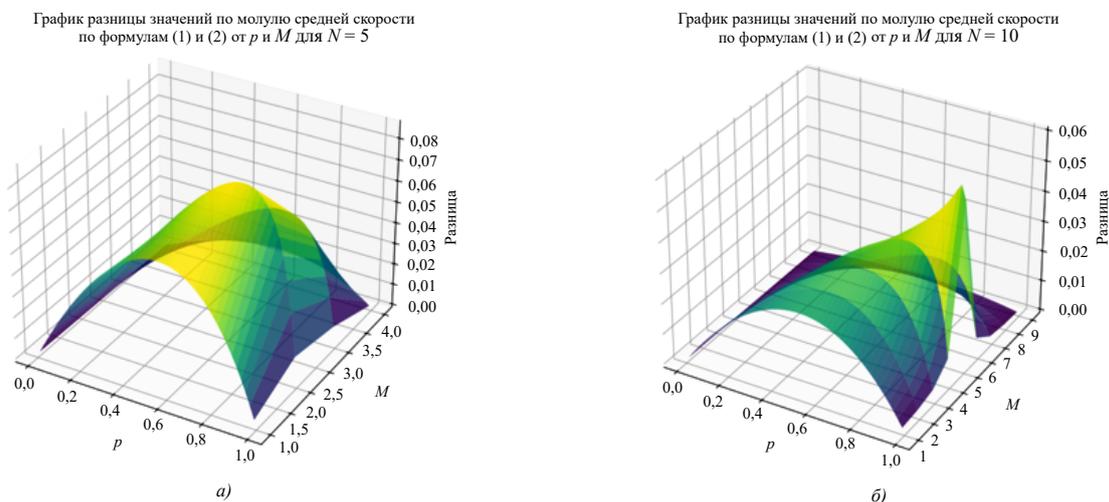


График разницы значений по модулю средней скорости по формулам (1) и (2) от p и M для $N = 20$

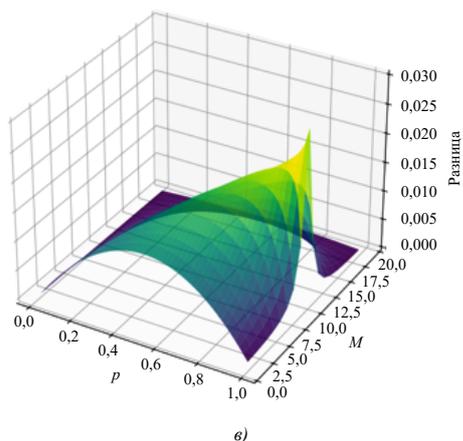


График разницы значений по модулю средней скорости по формулам (1) и (2) от p и M для $N = 200$

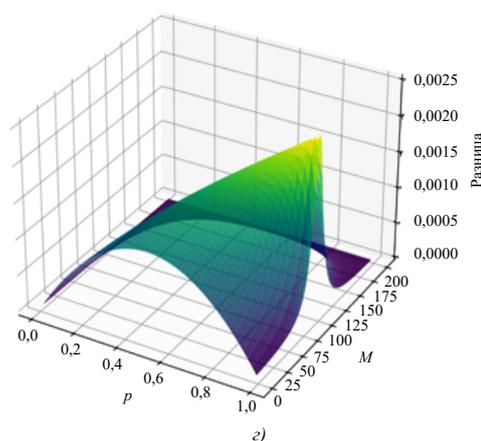


Рис. 5. Разница значений средней скорости v , вычисляемой по формулам (20) и (23),

от вероятности $p \in [0,01, 0,99]$ и количества частиц $M \in [1, N-1]$ для a — $N = 10$, b — $N = 10$, e — $N = 20$, z — $N = 200$

На каждой итерации считается мгновенная скорость v_{cur} как количество частиц, совершивших перемещение, к общему числу частиц и средняя скорость v_{avg} как сумма всех мгновенных скоростей на количество итераций.

По завершению всех запусков считается средняя скорость v как сумма всех средних скоростей в конце каждого запуска симуляции к количеству запусков симуляции. Подсчет средних скоростей проводился при $t = 2000$, $T = 10$.

В таблицах 1–4 приводятся результаты вычислений средней скорости по формулам (20) и (23) (формула (24) не указывается, так как значения, вычисляемые с помощью нее идентичны формуле (23)), а также по результатам компьютерной симуляции (sim) для разного числа ячеек N .

Таблица 1

Средняя скорость для $N = 5$

p/ρ	$\rho = 0,3$			$\rho = 0,5$			$\rho = 0,7$			$\rho = 0,9$		
	(20)	(23)	sim									
$p = 0,1$	0,081	0,100	0,101	0,062	0,076	0,074	0,041	0,051	0,050	0,020	0,025	0,025
$p = 0,3$	0,253	0,300	0,302	0,195	0,238	0,237	0,130	0,159	0,159	0,063	0,075	0,074
$p = 0,5$	0,438	0,500	0,500	0,349	0,417	0,418	0,232	0,278	0,275	0,110	0,125	0,125
$p = 0,7$	0,643	0,700	0,700	0,534	0,619	0,622	0,356	0,413	0,415	0,161	0,175	0,173
$p = 0,9$	0,872	0,900	0,896	0,789	0,859	0,862	0,526	0,573	0,572	0,218	0,225	0,225

Таблица 2

Средняя скорость для $N = 10$

p/ρ	$\rho = 0,1$			$\rho = 0,3$			$\rho = 0,5$			$\rho = 0,7$			$\rho = 0,9$		
	(20)	(23)	sim												
$p = 0,1$	0,091	0,100	0,100	0,072	0,079	0,079	0,051	0,057	0,057	0,031	0,034	0,034	0,010	0,011	0,011
$p = 0,3$	0,278	0,300	0,299	0,225	0,247	0,243	0,163	0,180	0,182	0,097	0,106	0,104	0,031	0,033	0,032
$p = 0,5$	0,472	0,500	0,503	0,397	0,429	0,429	0,293	0,320	0,320	0,170	0,184	0,183	0,052	0,056	0,055
$p = 0,7$	0,676	0,700	0,705	0,597	0,633	0,632	0,452	0,491	0,490	0,256	0,271	0,269	0,075	0,078	0,078
$p = 0,9$	0,889	0,900	0,897	0,843	0,867	0,866	0,684	0,736	0,734	0,361	0,372	0,371	0,099	0,100	0,100

Таблица 3

Средняя скорость для $N = 20$

p/ρ	$\rho = 0,1$			$\rho = 0,3$			$\rho = 0,5$			$\rho = 0,7$			$\rho = 0,9$		
	(20)	(23)	sim												
$p = 0,1$	0,091	0,095	0,093	0,072	0,075	0,075	0,051	0,054	0,053	0,031	0,032	0,031	0,010	0,011	0,010
$p = 0,3$	0,278	0,289	0,285	0,225	0,235	0,232	0,163	0,171	0,171	0,097	0,101	0,101	0,031	0,032	0,031

p/ρ	$\rho = 0,1$			$\rho = 0,3$			$\rho = 0,5$			$\rho = 0,7$			$\rho = 0,9$		
	(20)	(23)	sim												
$p = 0,5$	0,472	0,486	0,478	0,397	0,413	0,411	0,293	0,306	0,305	0,170	0,177	0,179	0,052	0,054	0,054
$p = 0,7$	0,676	0,688	0,691	0,597	0,615	0,615	0,452	0,471	0,472	0,256	0,264	0,263	0,075	0,076	0,076
$p = 0,9$	0,889	0,895	0,892	0,843	0,856	0,855	0,684	0,708	0,706	0,361	0,367	0,366	0,099	0,099	0,099

Таблица 4

Средняя скорость для $N = 200$

p/ρ	$\rho = 0,1$			$\rho = 0,3$			$\rho = 0,5$			$\rho = 0,7$			$\rho = 0,9$		
	(20)	(23)	sim												
$p = 0,1$	0,091	0,091	0,091	0,072	0,072	0,070	0,051	0,052	0,051	0,031	0,031	0,030	0,010	0,010	0,010
$p = 0,3$	0,278	0,279	0,279	0,225	0,226	0,225	0,163	0,164	0,163	0,097	0,097	0,096	0,031	0,031	0,031
$p = 0,5$	0,472	0,474	0,474	0,397	0,399	0,399	0,293	0,294	0,294	0,170	0,171	0,170	0,052	0,053	0,052
$p = 0,7$	0,676	0,677	0,674	0,597	0,599	0,598	0,452	0,454	0,453	0,256	0,257	0,256	0,075	0,075	0,074
$p = 0,9$	0,889	0,890	0,887	0,843	0,845	0,842	0,684	0,686	0,685	0,361	0,362	0,361	0,099	0,099	0,074

По таблицам видно, что значение средней скорости, вычисляемое по формулам (23), (24), ближе к результатам симуляции для небольших N . В целом погрешность между результатами для формул (20) и (23)–(24) полностью коррелирует с результатами, отображенными на рис. 5. Полученные результаты также совпадают с результатами сравнения формул (20) и (23) в [17, 18]. В том числе можно сделать вывод, что с ростом N результаты вычислений по формуле (20) все больше приближаются к результатам, полученным по формулам (23), (24) и компьютерному моделированию.

Оценка вычислительной сложности формул вычисления средней скорости. Проведем оценку вычислительной сложности формул вычисления средней скорости по формуле (20). Так как формула (20) не содержит циклов или рекурсий, и её вычисление зависит только от базовых операций и констант, то её вычислительная сложность является константной — $O(1)$.

Проведем оценку вычислительной сложности формул вычисления средней скорости по формуле (23). Сумма проходит по всем значениям k от 1 до $\min(M, N - M)$. Пусть $K = \min(M, N - M)$. Тогда сумма имеет K членов.

При вычислении каждого члена суммы нужно вычислить C_{M-1}^{k-1} , что требует $O(k)$ операций, и C_{N-M-1}^{k-1} , что требует также $O(k)$ операций. Вычисление оставшихся значений и умножение всех этих значений друг на друга — $O(1)$ операций. Таким образом, общая вычислительная сложность для одного члена суммы — $O(k)$. Поскольку сумма имеет K членов, общая сложность вычисления всей суммы — $O(\sum_{k=1}^K k) = O(K^2)$.

Общая вычислительная сложность формулы (23) определяется сложностью вычисления нормировочного коэффициента C и выражения для v . Поскольку оба эти вычисления имеют сложность $O(K^2)$, общая сложность также равна $O(K^2)$, где $K = \min(M, N - M)$.

Проведем оценку вычислительной сложности формул вычисления средней скорости по формуле (24). Обе функции r_1 и r_2 зависят от двух параметров: $N - M$ и M . Таким образом, общее количество уникальных состояний (или узлов в дереве рекурсии) равно числу возможных комбинаций $(M, N - M)$, где $N - M$ может принимать значения от 1 до $N - 1$, а M может принимать значения от 1 до $\min(M, N - M)$. Следовательно, общее число состояний — $O(N^2)$.

Глубина рекурсии для каждой функции определяется максимальным значением $N - M$ или M . В худшем случае глубина рекурсии равна $O(N)$. На каждом уровне рекурсии выполняются простые арифметические операции, которые требуют $O(1)$ операций. Таким образом, общее количество операций пропорционально количеству уникальных состояний.

Учитывая вышеуказанные факторы, общая вычислительная сложность формулы (24) составляет $O(N^2)$. Это связано с тем, что каждое состояние $(M, N - M)$ вычисляется ровно один раз, а общее число состояний равно $O(N^2)$. Таким образом, формула (20) — самая оптимальная с точки зрения вычислительной сложности. Формулы (23) и (24) обладают идентичной вычислительной сложностью.

Обсуждение и заключение. В работе представлена оценка предельной скорости однонаправленного транспортного потока с высокой вычислительной эффективностью. В качестве выводов можно выделить следующее:

1. Для небольших значений N , наиболее соответствующим реальным участкам трассы, захватываемым с помощью камер, для оценки средней скорости v наиболее подходят формулы (23) и (24), дающие эквивалентный результат, приближенный к результатам компьютерной симуляции.

2. Для оценки средней скорости v при больших N с помощью компьютерных вычислений для формулы (23) накладывается ограничение на потребляемую память ввиду необходимости подсчета больших факториалов. При $N < 310$ на используемой ЭВМ происходило переполнение памяти для $\rho \approx \frac{1}{2}$. Для таких случаев можно использовать формулу (24).

3. Для оценки средней скорости v при больших N с помощью компьютерных вычислений для формулы (24) накладывается ограничение на максимальную глубину рекурсии для значений r_1 и r_2 , из-за чего даже при вычислении с использованием методов динамического программирования может потребоваться больше времени, чем для вычислений по формуле (23), и может происходить переполнение стека вызовов.

4. Из полученных результатов очевидно, что при росте N оценка средней скорости по формуле (20) будет приближаться к значениям, вычисляемым по формулам (23), (24), требуя при этом существенно меньше вычислительных ресурсов. Таким образом, формула (23), давая эквивалентный формуле (24) результат при $N \rightarrow \infty$, может найти свое применение в задачах, связанных с системами массового обслуживания.

Список литературы / References

1. Femke van Wageningen-Kessels et al. Genealogy of traffic flow models. *EURO Journal on Transportation and Logistics*. 2015;4(4):445–473.
2. Payne H. Models of freeway traffic and control. In: Bekey, G.A. (ed.) *Mathematical Models of Public Systems*. Simulation Council, La Jolla, CA. 1971;1:51–61.
3. Kerner B., Konhäuser P. Structure and parameters of clusters in traffic flow. *Physical Review E*. 1994;50:54–83.
4. Aw A., Rascle M. Resurrection of “second order models” of traffic flow. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2000;60:916–938.
5. Zhang H.M. A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior. *Transportation Research. B*. 2002;36(3):275–290.
6. Lighthill M.J., Whitham G.B. On kinematic waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads. *Proceedings of the royal society of London. series a. mathematical and physical sciences*. 1955; 229(1178):317–345.
7. Richards P.I. Shock waves on the highway. *Operations research*. 1956;4(1):42–51.
8. Четверушкин Б.Н. *Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений*. Москва: МАКС Пресс; 2004. 328 с.
9. Четверушкин, В.Н. *Kinetic schemes and quasi-gasdynamic system of equations*. Moscow: MAKS Press; 2004. 328 p.
9. Трапезникова М.А., Чечина А.А., Чурбанова Н.Г. Моделирование движения автомобильного транспорта с использованием макро- и микроскопических моделей. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):60–72. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-60-72>
- Трапезникова М.А., Чечина А.А., Чурбанова Н.Г. Simulation of Vehicular Traffic using Macro- and Microscopic Models. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):60–72. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-60-72>
10. Yashina M, Tatashev A. Traffic model based on synchronous and asynchronous exclusion processes. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2020;43(14):8136–8146.
11. Schadschneider A., Schreckenberg M. Cellular automation models and traffic flow. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 1993;26(15):L679.
12. Schreckenberg M. et al. Discrete stochastic models for traffic flow. *Physical Review E*. 1995;51(4):2939.
13. Kanai M., Nishinari K., Tokihiro T. Exact solution and asymptotic behavior of the asymmetric simple exclusion process on a ring. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 2006;39(29):9071.
14. Buslaev A.P., Tatashev A.G. Particles flow on the regular polygon. *Journal of Concrete and Applicable Mathematics*. 2011;9(4):290–303.
15. Buslaev A.P., Tatashev A.G. Monotonic random walk on a one-dimensional lattice. *Journal of Concrete & Applicable Mathematics*. 2012;10:71–79.
16. Daduna H. *Queueing Networks with Discrete Time Scale: Explicit Expressions for the Steady State Behavior of Discrete Time Stochastic Networks*. Springer. 2003; 2046.
17. Яшина М.В., Таташев А.Г. *Сети Буслаева: динамические системы потоков частиц на регулярных сетях с конфликтными точками*. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований; 2023. 216 с.
- Yashina M.V., Tatashev A.G. *Buslaev networks: dynamical systems of particle flow on regular networks with conflict points*. IKI Publishing House. 2023. (In Russ.)
18. Бугаев А.С., Булаев А.П., Козлов В.В., Таташев А.Г., Яшина М.В. Моделирование трафика: монотонное случайное блуждание по сети. *Математическое моделирование*. 2013;25(8):3–21.
- Bugaev A.S., Buslaev A.P., Kozlov V.V., Tatashev A.G., Yashina M.V. Modelling of traffic: monotonic random walk through the network. *Mathematical Modelling*. 2013;25(8):3–21. (In Russ.)

Об авторе:

Иван Алексеевич Кутейников, старший преподаватель кафедры инженерии и математики прикладных систем искусственного интеллекта Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета (МАДИ) (125319, Российская Федерация, г. Москва, Ленинградский пр-т, 64), [ORCID](#), [SPIN-код](#), ivankuteynikov09@gmail.com

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

About the Author:

Ivan A. Kuteynikov, Senior Lecturer, Department of Engineering and Mathematics of Applied Systems of Artificial Intelligence, Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI) (64, Leningradsky Ave., Moscow, 125319, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), ivankuteynikov09@gmail.com

Conflict of Interest Statement: the author do not have any conflict of interest.

Author has read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 21.01.2025

Поступила после рецензирования / Reviewed 20.02.2025

Принята к публикации / Accepted 28.02.2025