

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 519.63

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-7-21>


Разностная схема с улучшенной аппроксимацией на границе для уравнения теплопроводности с граничными условиями третьего рода

А.Е. Чистяков , И.Ю. Кузнецова

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

ikuznecova@donstu.ru

Аннотация

Введение. Построение разностных схем, их исследование и модификация с учетом специфики рассматриваемой задачи позволяет повысить точность моделирования сложных систем. При моделировании различных процессов, включая гидродинамические процессы в мелководных водоемах, было отмечено, что при решении задач с граничными условиями третьего рода теоретическая оценка порядка погрешности аппроксимации падает со второго порядка погрешности относительно пространственных шагов расчетной сетки до первого порядка, а, следовательно, падает и точность численного решения задачи. Настоящая работа посвящена актуальной проблеме исследования влияния аппроксимации граничных условий третьего рода на точность численного решения задачи теплопроводности, а также построению разностной схемы с улучшенной аппроксимацией граничных условий для уравнения теплопроводности с граничными условиями третьего рода и сравнению точности численных решений, полученных авторами, с известными решениями.

Материалы и методы. Рассматривается уравнение теплопроводности с граничными условиями третьего рода, для которого получено аналитическое решение. Проведена аппроксимация рассмотренной задачи и показано, что при стандартной аппроксимации задачи на границе расчетной области теоретическая оценка порядка погрешности аппроксимации дифференциального оператора второго порядка в уравнении диффузии составляет $O(h)$. Для повышения точности численного решения в случае граничных условий третьего рода специального вида предложена разностная схема, имеющая погрешность аппроксимации дифференциального оператора второго порядка $O(h^2)$, как во внутренних, так и в граничных узлах расчетной области.

Результаты исследования. На тестовых задачах проведено сравнение точности численных решений, полученных на основе предлагаемой схемы и схемы со стандартной аппроксимацией границы.

Обсуждение и заключение. Из проведенных численных экспериментов видно, что предложенная схема с улучшенной аппроксимацией на границе расчетной области для уравнения теплопроводности при граничных условиях третьего рода специального вида имеет эффективный порядок точности около 2, что соответствует полученной теоретической оценке. При этом стоит отметить, что разностная схема со стандартной аппроксимацией на границе расчетной области также имеет эффективный порядок точности, близкий к 2, несмотря на полученную теоретическую оценку порядка погрешности аппроксимации для граничных узлов. Важно отметить, что для предложенной схемы расчетная погрешность численного решения падает существенно быстрее, чем для решения на основе схемы со стандартной аппроксимацией на границе.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, граничные условия третьего рода, численное решение, погрешность аппроксимации

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–71–10102, <https://rscf.ru/project/22-71-10102/>

Для цитирования. Чистяков А.Е., Кузнецова И.Ю. Разностная схема с улучшенной аппроксимацией на границе для уравнения теплопроводности с граничными условиями третьего рода. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):7–21. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-7-21>

A Finite Difference Scheme with Improved Boundary Approximation for the Heat Conduction Equation with Third-Type Boundary Conditions

Alexander E. Chistyakov^{ID}, Inna Yu. Kuznetsova^{ID}✉

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

✉ ikuznecova@donstu.ru

Abstract

Introduction. The development, analysis, and modification of finite difference schemes tailored to the specific features of the considered problem can significantly enhance the accuracy of modeling complex systems. In simulations of various processes, including hydrodynamic phenomena in shallow water bodies, it has been observed that for problems with third-type (Robin) boundary conditions, the theoretical error order of spatial discretization drops from second-order to first-order accuracy, which in turn decreases the overall accuracy of the numerical solution. The present study addresses the relevant issue of how the approximation of third-type boundary conditions affects the accuracy of the numerical solution to the heat conduction problem. It also proposes a finite difference scheme with improved boundary approximation for the heat conduction equation with third-type boundary conditions and compares the accuracy of the numerical solutions obtained by the authors with known benchmark solutions.

Materials and Methods. The paper considers the one-dimensional heat conduction equation with third-type boundary conditions, for which an analytical solution is available. The problem is discretized, and it is shown that under standard boundary approximation, the theoretical order of approximation error for the second-order differential operator in the diffusion equation is $O(h)$. To improve the accuracy of the numerical solution under specific third-type boundary conditions, a finite difference scheme is proposed. This scheme achieves second-order accuracy $O(h^2)$, for the differential operator not only at interior nodes but also at the boundary nodes of the computational domain.

Results. Test problems were used to compare the accuracy of numerical solutions obtained using the proposed scheme and those based on the standard boundary approximation.

Discussion and Conclusion. Numerical experiments demonstrate that the proposed scheme with enhanced boundary approximation for the heat conduction equation under specific third-type boundary conditions exhibits an effective accuracy order close to 2, which corresponds to the theoretical prediction. It is noteworthy that the scheme with standard boundary approximation also demonstrates an effective accuracy order close to 2, despite the lower theoretical order of boundary approximation. Importantly, the numerical error of the proposed scheme decreases significantly faster compared to the scheme with standard boundary treatment.

Keywords: heat conduction equation, third-type boundary conditions, numerical solution, approximation error

Funding. This research was supported by the Russian Science Foundation, grant no. 22–71–10102, <https://rscf.ru/project/22-71-10102/>

For Citation. Chistyakov A.E., Kuznetsova I.Yu. A Finite Difference Scheme with Improved Boundary Approximation for the Heat Conduction Equation with Third-Type Boundary Conditions. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):7–21. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-7-21>

Введение. При описании широкого класса задач, связанных с моделированием пространственно-трехмерных диффузионных процессов, используется уравнение теплопроводности [1]. Уравнение диффузии представлено во многих работах, а его решение широко применяется на практике для описания многих физических процессов. В работах [2, 3] представлены подходы к получению аналитического решения. В работах [4, 5] рассмотрены подходы к численному решению уравнения теплопроводности в случае граничных условий первого и второго родов.

В случае проектирования сложных инженерных конструкций необходимо учитывать влияние температурных режимов окружающей среды. Зачастую при исследовании процессов распространения тепла в таких инженерных конструкциях рассматривается уравнение теплопроводности с граничными условиями третьего рода [6]. Поэтому целью данной работы является построение разностной схемы с улучшенной аппроксимацией граничных условий с экспериментальной оценкой предлагаемой схемы на тестовых задачах. Стоит отметить, что такой подход позволяет провести сравнение точности численных решений, полученных на основе различных разностных схем и при различных начальных или граничных условиях. В работах [7, 8] в качестве тестовой задачи использовалось уравнение Бюргерса, в работах [9, 10] — уравнение переноса, в работах [11, 12] — уравнение диффузии-конвекции.

Задачей повышения точности численного решения занимались многие выдающиеся российские и мировые ученые, среди которых прежде всего хочется выделить работы П.Н. Вабищевича [13, 14], в которых исследуются разностные схемы для численного решения уравнения параболического типа второго порядка со специальной формой несамосопряженного оператора задачи. Многие работы Б.Н. Четверушкина посвящены разработке, исследованию и подбору параметров разностных схем для решения прикладных задач с учетом архитектуры высокопроизводительных вычислительных систем [15, 16]. В работах В.Ф. Тишкина рассматриваются подходы

модификации разрывного метода Галеркина при моделировании процессов газо- и гидродинамики [17, 18]. В работе [19] для решения задачи гидродинамики рассмотрено использование регуляризированной разностной схемы, точность которой исследована в работе [20]. В работе [21] исследованы подходы к повышению порядка точности сеточно-характеристического метода для задач двумерной линейной упругости, а в [22] — в трехмерном случае. В работе [23] представлен подход к получению численного решения задачи тепломассопереноса двухфазных жидкостей. В работе [24] рассматривается подход к построению разностной схемы для задачи однофазной фильтрации с учетом наличия трещин в среде, в работе [25] рассмотрена двухфазная фильтрация в сложных средах.

Построение разностных схем, их исследование и модификация существующих схем с учетом специфики рассматриваемой задачи позволяет повысить точность моделирования сложных систем [26]. При моделировании различных процессов, включая гидродинамические процессы в мелководных водоемах, было отмечено, что при решении задач с граничными условиями третьего рода теоретическая оценка порядка погрешности аппроксимации падает со второго порядка погрешности относительно пространственных шагов расчетной сетки до первого порядка, а, следовательно, падает и точность численного решения задачи. А.И. Сушинов [27] предложил подробнее исследовать аппроксимацию задачи с граничными условиями третьего рода. Таким образом, настоящая работа посвящена исследованию влияния аппроксимации граничных условий третьего рода на точность численного решения задачи теплопроводности, а также построению разностной схемы с улучшенной аппроксимацией граничных условий для уравнения теплопроводности с граничными условиями третьего рода и сравнению точности численных решений, полученных на основе предлагаемой схемы и схемы со стандартной аппроксимацией границы, на тестовых задачах.

Материалы и методы

1. Аналитическое решение уравнения теплопроводности

Рассмотрим однородное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad (1)$$

со следующим начальным

$$u(x, t)|_{t=0} = u_0(x) \quad (2)$$

и с граничными условиями третьего рода

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) - \alpha u(x, t) \right) \Big|_{x=0} = \beta, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) + \alpha u(x, t) \right) \Big|_{x=l} = -\beta. \quad (3)$$

Для нахождения аналитического решения поставленной задачи (1)–(3) введем замену $u(x, t) = v(x, t) - \beta/\alpha$, которая приводит к начально-краевой задаче с однородными граничными условиями третьего рода:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad v(x, t)|_{t=0} = u_0(x) + \frac{\beta}{\alpha}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} v(x, t) - \alpha v(x, t) \right) \Big|_{x=0} &= 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} v(x, t) + \alpha v(x, t) \right) \Big|_{x=l} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Решение задачи (4) будем искать в виде:

$$v(x, t) = X(x)T(t). \quad (5)$$

Тогда после подстановки (5) в дифференциальное уравнение (4) и разделения переменных получим:

$$\frac{1}{a} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2. \quad (6)$$

При этом граничные условия в (4) запишутся в виде:

$$(X'(0) - \alpha X(0))T(t) = 0, \quad (X'(l) + \alpha X(l))T(t) = 0. \quad (7)$$

Таким образом, с учетом (7) и из условия того, что $v(x, t) \neq 0$ приходим к задаче Штурма-Лиувилля для функции $X(x)$:

$$\begin{aligned} X'' + \lambda^2 X &= 0, \quad 0 < x < l, \\ X'(0) - \alpha X(0) &= 0, \quad X'(l) + \alpha X(l) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Общее решение задачи (8) имеет вид:

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x. \quad (9)$$

С учетом граничных условий в (8) и вида общего решения (9) собственные функции $X_k(x)$ запишутся в виде:

$$X_k(x) = \lambda_k \cos \lambda_k x + \alpha \sin \lambda_k x, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где $\lambda_k, k = 1, 2, \dots$ — собственные значения задачи (8), являющиеся положительными корнями уравнения

$$2 \operatorname{ctg} \lambda l = \frac{\lambda}{\alpha} - \frac{\alpha}{\lambda}. \quad (11)$$

Для функции $T(t)$ на основании (6) и при $\lambda = \lambda_k$ приходим к задаче:

$$T'(t) + a\lambda_k T(t) = 0,$$

общее решение которой запишется в виде:

$$T_k(t) = C_k \exp(-a\lambda_k^2 t), \quad k = 1, 2, \dots. \quad (12)$$

Тогда с учетом (5), (10) и (12) решение задачи (4) запишется в виде:

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k (\lambda_k \cos \lambda_k x + \alpha \sin \lambda_k x) \exp(-a\lambda_k^2 t), \quad (13)$$

где $\lambda_k, k = 1, 2, \dots$ — положительные корни уравнения (11).

Для нахождения коэффициентов C_k воспользуемся начальным условием задачи (4):

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k (\lambda_k \cos \lambda_k x + \alpha \sin \lambda_k x) = u_0(x) + \beta/\alpha,$$

то есть имеем разложение некоторой функции $f(x) = u_0(x) + \beta/\alpha$ для $0 \leq x \leq l$ в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля (8). Тогда при условии ортогональности собственных функций $X_k(x), k = 1, 2, \dots$ на рассматриваемом отрезке $0 \leq x \leq l$ имеем следующее выражение для коэффициентов C_k :

$$C_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_0^l f(x) (\lambda_k \cos \lambda_k x + \alpha \sin \lambda_k x) dx, \quad (14)$$

где $f(x) = u_0(x) + \beta/\alpha$,

$$\|X_k\|^2 = \int_0^l (\lambda_k \cos \lambda_k x + \alpha \sin \lambda_k x)^2 dx = \frac{\lambda_k^2 + \alpha^2}{2} + \frac{\lambda_k^2 - \alpha^2}{4\lambda_k} \sin 2\lambda_k l - \frac{\alpha}{2} \cos 2\lambda_k l + \frac{\alpha}{2}. \quad (15)$$

С учетом выполнения равенства (11) для $\lambda = \lambda_k, k = 1, 2, \dots$ и формул

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

выражение для квадрата нормы собственных функций $X_k(x)$ (15) запишется в виде:

$$\|X_k\|^2 = \frac{(\lambda_k^2 + \alpha^2)l + 2\alpha}{2}. \quad (16)$$

Таким образом, выражение (14) для коэффициентов $C_k, k = 1, 2, \dots$ может быть переписано в виде:

$$C_k = \frac{2}{(\lambda_k^2 + \alpha^2)l + 2\alpha} \int_0^l \left(u_0(x) - \frac{\beta}{\alpha} \right) (\lambda_k \cos \lambda_k x + \alpha \sin \lambda_k x) dx = C_k^{(1)} + C_k^{(2)}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} C_k^{(1)} &= \frac{2}{(\lambda_k^2 + \alpha^2)l + 2\alpha} \int_0^l u_0(x) (\lambda_k \cos \lambda_k x + \alpha \sin \lambda_k x) dx, \\ C_k^{(2)} &= \frac{2\beta}{(\lambda_k^2 + \alpha^2)\alpha l + 2\alpha^2} \int_0^l (\lambda_k \cos \lambda_k x + \alpha \sin \lambda_k x) dx = \frac{2\beta}{(\lambda_k^2 + \alpha^2)\alpha l + 2\alpha^2} \left(\sin \lambda_k l - \frac{\alpha}{\lambda_k} (\cos \lambda_k l - 1) \right) = \\ &= \frac{2\beta}{(\lambda_k^2 + \alpha^2)\alpha l + 2\alpha^2} \left(\frac{\alpha}{\lambda_k} + \sin \lambda_k l \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_k} \operatorname{ctg} \lambda_k l \right) \right) = \frac{2\beta}{(\lambda_k^2 + \alpha^2)\alpha l + 2\alpha^2} \left(\frac{\alpha}{\lambda_k} + \frac{\lambda_k^2 + \alpha^2}{2\lambda_k^2} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \lambda_k l}} \right) = \\ &= \frac{2\beta}{\lambda_k (\lambda_k^2 + \alpha^2)l + 2\lambda_k \alpha} (1 + (-1)^{k+1}), \end{aligned} \quad (18)$$

следовательно, при $k = 2n$ коэффициенты $C_k^{(2)} = 0$. Тогда выражение для коэффициентов $C_k^{(2)}$ запишется в виде:

$$C_{2n}^{(2)} = 0, \quad C_{2n+1}^{(2)} = \frac{4\beta}{\lambda_{2n+1} (\lambda_{2n+1}^2 + \alpha^2)l + 2\lambda_{2n+1} \alpha}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (19)$$

Тогда аналитическое решение исходной задачи (1)–(3) с учетом введенной замены и выражений (13), (18) и (19) можно записать в виде:

$$u(x, t) = -\frac{\beta}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k (\lambda_k \cos \lambda_k x + \alpha \sin \lambda_k x) \exp(-a \lambda_k^2 t), \quad (20)$$

где $C_k = C_k^{(1)} + C_k^{(2)}$, коэффициенты $C_k^{(1)}$ и $C_k^{(2)}$ определяются выражениями (18) и (19), соответственно, $\lambda_k, k = 1, 2, \dots$ — положительные корни уравнения (11).

В случае решения неоднородного аналога уравнения теплопроводности (1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T \quad (21)$$

с начальными и граничными условиями (2)–(3) решение будем искать в виде $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) - \beta/\alpha$, где $v(x, t)$ — решение задачи (4), определяемое формулой (13) с коэффициентами (18)–(19), а $w(x, t)$ — решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad w(x, t)|_{t=0} = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} w(x, t) - \alpha w(x, t) \right) \Big|_{x=0} &= 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} w(x, t) + \alpha w(x, t) \right) \Big|_{x=l} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Функцию $w(x, t)$ ищем в виде разложения по собственным функциям соответствующей однородной задачи Штурма-Лиувилля:

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(w)}(t) (\lambda_k \cos \lambda_k x + \alpha \sin \lambda_k x). \quad (23)$$

Также разложим функцию $f(x, t)$ на рассматриваемом отрезке $0 \leq x \leq l$:

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(f)}(t) (\lambda_k \cos \lambda_k x + \alpha \sin \lambda_k x), \quad (24)$$

где

$$C_k^{(f)}(t) = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_0^l f(x, t) (\lambda_k \cos \lambda_k x + \alpha \sin \lambda_k x) dx, \quad (25)$$

где $\|X_k\|^2$ определяется по формуле (16).

При подстановке (23) и (24) в (22) получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left((C_k^{(w)}(t))' + a \lambda_k^2 C_k^{(w)}(t) \right) (\lambda_k \cos \lambda_k x + \alpha \sin \lambda_k x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(f)}(t) (\lambda_k \cos \lambda_k x + \alpha \sin \lambda_k x). \quad (26)$$

В силу полноты ортогональной системы собственных функций $X_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, равенство (26) выполняется в случае:

$$(C_k^{(w)}(t))' + a \lambda_k^2 C_k^{(w)}(t) = C_k^{(f)}(t). \quad (27)$$

При этом с учетом (23) и однородности начальных условий в (22) имеем

$$C_k^{(w)}(0) = 0. \quad (28)$$

Таким образом, получили задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (27) с начальным условием (28). Решение данной задачи может быть найдено, например, методом Лагранжа вариации произвольной постоянной:

$$C_k^{(w)}(t) = \int_0^t C_k^{(f)}(\tau) \exp(a \lambda_k^2 (\tau - t)) d\tau, \quad (29)$$

где $C_k^{(f)}(\tau)$ определяются на основании (25).

Таким образом, решение неоднородного уравнения теплопроводности (21) с граничными условиями третьего рода (3) может быть записано в виде:

$$u(x, t) = -\frac{\beta}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k (\lambda_k \cos \lambda_k x + \alpha \sin \lambda_k x) \exp(-a \lambda_k^2 t) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(w)}(t) (\lambda_k \cos \lambda_k x + \alpha \sin \lambda_k x), \quad (30)$$

где $C_k = C_k^{(1)} + C_k^{(2)}$, коэффициенты $C_k^{(1)}$, $C_k^{(2)}$ и $C_k^{(w)}(t)$ определяются выражениями (18), (19) и (29), соответственно, а $\lambda_k, k = 1, 2, \dots$ — положительные корни уравнения (11).

2. Аппроксимация дифференциального оператора второго порядка в уравнении диффузии

Рассмотрим аппроксимацию неоднородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad (31)$$

со следующим начальным

$$u(x, t)|_{t=0} = u_0(x) \quad (32)$$

и с граничными условиями третьего рода

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) - \alpha u(x, t) \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) + \alpha u(x, t) \right) \Big|_{x=l} = 0. \quad (33)$$

Для нахождения численного решения задачи (31)–(33) покроем расчетную область равномерной расчетной сеткой $\bar{\omega} = \bar{\omega}_t \times \bar{\omega}_h$, где

$$\bar{\omega}_t = \{t^n = n\tau, \quad n = \overline{0..N_t}, \quad N_t \tau = T\}, \quad \bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = \overline{0..N_x}, \quad N_x h = l\}, \quad (34)$$

где τ — размер шага по временной переменной; N_t — количество узлов расчетной сетки по временной переменной; h — размер шага по пространственной координате; N_x — количество узлов по пространственной координате.

Аналитическое решение задачи (31)–(33) согласно (30) можно записать в виде:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_k^{(1)} \exp(-a\lambda_k^2 t) + C_k^{(w)}(t) \right) (\lambda_k \cos \lambda_k x + \alpha \sin \lambda_k x), \quad (35)$$

где коэффициенты $C_k^{(1)}$ и $C_k^{(w)}(t)$ определяются выражениями (18) и (29), соответственно, а $\lambda_k, k = 1, 2, \dots$ — положительные корни уравнения (11).

Для упрощения дальнейших выкладок введем следующее обозначение:

$$C_k^{(u)}(t) = C_k^{(1)} \exp(-a\lambda_k^2 t) + C_k^{(w)}(t). \quad (36)$$

Запишем аппроксимацию уравнения (31) во внутренних узлах расчетной сетки (34):

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = a \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + f_i^n, \quad (37)$$

где $u_{i\pm 1}^n = u(t^n, x_{i\pm 1})$, $u_i^n = u(t^n, x_i)$.

Тогда с учетом (24), (35) и (36) аппроксимация (37) может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^{N-1} (C_k^{(u)}(t^{n+1}) - C_k^{(u)}(t^n)) (\lambda_k \cos \lambda_k x + \alpha \sin \lambda_k x) = \\ & = \frac{a}{h^2} \sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n) (\lambda_k \cos(\lambda_k(x_i + h)) + \alpha \sin(\lambda_k(x_i + h)) - 2\lambda_k \cos \lambda_k x_i - 2\alpha \sin \lambda_k x_i + \\ & + \lambda_k \cos(\lambda_k(x_i - h)) + \alpha \sin(\lambda_k(x_i - h))) + \sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(f)}(t^n) (\lambda_k \cos \lambda_k x_i + \alpha \sin \lambda_k x_i). \end{aligned} \quad (38)$$

С учетом преобразований

$$\begin{aligned} \lambda_k \cos(\lambda_k(x_i + h)) + \lambda_k \cos(\lambda_k(x_i - h)) &= 2\lambda_k \cos \lambda_k x_i \cos \lambda_k h, \\ \alpha \sin(\lambda_k(x_i + h)) + \alpha \sin(\lambda_k(x_i - h)) &= 2\alpha \sin \lambda_k x_i \cos \lambda_k h, \end{aligned}$$

выражение (38) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^{N-1} (C_k^{(u)}(t^{n+1}) - C_k^{(u)}(t^n)) (\lambda_k \cos \lambda_k x + \alpha \sin \lambda_k x) &= a \frac{2}{h^2} \sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n) (\cos \lambda_k h - 1) (\lambda_k \cos \lambda_k x_i + \alpha \sin \lambda_k x_i) + \\ &+ \sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(f)}(t^n) (\lambda_k \cos \lambda_k x_i + \alpha \sin \lambda_k x_i). \end{aligned}$$

С учетом ортогональности базисных функций $X_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, определяемых (10), последнее выражение может быть записано в виде:

$$\frac{C_k^{(u)}(t^{n+1}) - C_k^{(u)}(t^n)}{\tau} = a \frac{2(\cos \lambda_k h - 1)}{h^2} C_k^{(u)}(t^n) + C_k^{(f)}(t^n). \quad (39)$$

Найдем вторую производную по пространственной переменной функции $u(x, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(u)}(t) (\lambda_k \cos \lambda_k x + \alpha \sin \lambda_k x) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(u)}(t) (-\lambda_k^2 \sin \lambda_k x + \alpha \lambda_k \cos \lambda_k x) \right) = \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 C_k^{(u)}(t) (\lambda_k \cos \lambda_k x + \alpha \sin \lambda_k x). \end{aligned} \quad (40)$$

Из формул (39) и (40) следует, что при аппроксимации задачи (31)–(33) на расчетной сетке (34) схемой (37) полученное решение для каждой гармоники отличается от реальных значений на величину $\alpha^* = 1 - 2(1 - \cos \lambda_k h) / (\lambda_k h)^2$.

Рассмотрим отдельно полученную величину α^* :

$$\alpha^* = 1 - \frac{2(1 - \cos \lambda_k h)}{(\lambda_k h)^2} = 1 - \frac{2 \left(\frac{(\lambda_k h)^2}{2} - \frac{(\lambda_k h)^4}{24} + O(h^6) \right)}{(\lambda_k h)^2} = \frac{(\lambda_k h)^2}{12} + O(h^4). \quad (41)$$

Из (41) можно сделать вывод, что при аппроксимации по пространственной переменной на основе схемы (37) численное решение во внутренних узлах сетки (34) отличается от реальных значений на $O(h^2)$.

Рассмотрим аппроксимацию функции $u(x, t)$ по пространственной переменной в граничных узлах пространственной сетки (34). Аппроксимацию выполним на основе интегро-интерполяционного метода (метода баланса). Не теряя общности, рассмотрим аппроксимацию функции $u(x, t)$ по пространственной переменной на левой границе расчетной сетки ($x = 0$):

$$\begin{aligned} 2 \frac{u_1^n - u_0^n}{h^2} - 2 \frac{\alpha u_0^n}{h} &= 2 \sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n) \frac{\lambda_k \cos \lambda_k h + \alpha \sin \lambda_k h - \lambda_k}{h^2} - 2 \sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n) \frac{\alpha \lambda_k}{h} = \\ &= 2 \sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n) \frac{\lambda_k (\cos \lambda_k h - 1) + \alpha (\sin \lambda_k h - \lambda_k h)}{h^2} = \frac{2 \lambda_k}{h^2} \sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n) \left(1 - \frac{(\lambda_k h)^2}{2} + \frac{(\lambda_k h)^4}{24} + O(h^6) - 1 \right) + \\ &+ \frac{2 \alpha}{h^2} \sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n) \left(\lambda_k h - \frac{(\lambda_k h)^3}{6} + \frac{(\lambda_k h)^5}{120} + O(h^7) - \lambda_k h \right) = \sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n) \left(-\lambda_k^3 + \lambda_k^3 \frac{\alpha h}{3} + O(h^2) \right). \end{aligned} \quad (42)$$

Для повышения порядка погрешности аппроксимации функции $u(x, t)$ по пространственной переменной в граничных узлах сетки (34) рассмотрим следующую аппроксимацию:

$$\begin{aligned} 2 \frac{u_1^n - u_0^n}{h^2} - 2 \alpha \frac{\gamma_1 u_0^n + \gamma_2 u_1^n}{h} &= 2 \sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n) \frac{\lambda_k \cos \lambda_k h + \alpha \sin \lambda_k h - \lambda_k}{h^2} - 2 \alpha \sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n) \frac{\gamma_1 \lambda_k + \gamma_2 \lambda_k \cos \lambda_k h + \gamma_2 \alpha \sin \lambda_k h}{h} = \\ &= \frac{2}{h^2} \sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n) (1 - \gamma_2 \alpha h) (\lambda_k \cos \lambda_k h + \alpha \sin \lambda_k h) - \frac{2}{h^2} \sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n) \lambda_k (1 + \gamma_1 \alpha h) = \\ &= \frac{2}{h^2} (1 - \gamma_2 \alpha h) \sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n) \left(\lambda_k - \frac{\lambda_k^3 h^2}{2} + \frac{\lambda_k^5 h^4}{24} + \alpha \lambda_k h - \alpha \frac{\lambda_k^3 h^3}{6} + \alpha \frac{\lambda_k^5 h^5}{120} + O(h^6) \right) - \\ &- \frac{2}{h^2} (1 + \gamma_1 \alpha h) \sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n) \lambda_k = \frac{2 \alpha}{h} (\gamma_2 + 1 - \gamma_2 \alpha h - \gamma_1) \sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n) \lambda_k - \sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n) \lambda_k^3 + \\ &+ \frac{2}{h^2} \left(\gamma_2 \alpha \frac{h^3}{2} - \alpha \frac{h^3}{6} + \gamma_2 \alpha^2 \frac{h^4}{6} \right) \sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n) \lambda_k^3 + \frac{h^2}{12} \sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n) \lambda_k^5 + O(h^3). \end{aligned} \quad (43)$$

Коэффициенты γ_1 и γ_2 в (43) найдем как решение системы

$$\begin{cases} \gamma_2 + 1 - \gamma_2 \alpha h - \gamma_1 = 0, \\ \gamma_2 - \frac{1}{3} + \gamma_2 \alpha \frac{h}{3} = 0, \end{cases}$$

из которой получим значения коэффициентов $\gamma_1 = 2/(3 + \alpha h)$ и $\gamma_2 = 1/(3 + \alpha h)$.

Таким образом, получаем следующую аппроксимацию функции $u(x, t)$ по пространственной переменной в граничных узлах сетки (34):

$$2 \frac{u_1^n - u_0^n}{h^2} - \frac{4 \alpha}{h(3 + \alpha h)} u_0^n - \frac{2 \alpha}{h(3 + \alpha h)} u_1^n = \sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n) \left(-\lambda_k^3 + \frac{\lambda_k^5 h^2}{12} + O(h^3) \right). \quad (44)$$

Результаты исследования. Сравним вычислительную точность аппроксимаций (42) и (44) по пространственной переменной при решении тестовых задач. Рассмотрим три тестовые задачи, первая из которых представляет собой задачу на установление с постоянной правой частью. Вторая задача также является задачей на установление

с правой частью, представляющей собой гармоническую функцию, соответствующую собственному значению λ_k . В третьей задаче решается уравнение теплопроводности, правая часть которого задается ступенчатой функцией.

Тестовая задача 1. Найдем решение следующей задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2, \quad 0 < x < 2, \quad (45)$$

со следующим начальным

$$u(x, t)|_{t=0} = 0 \quad (46)$$

и с граничными условиями третьего рода

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) - 2u(x, t) \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) + 2u(x, t) \right) \Big|_{x=2} = 0. \quad (47)$$

Задача (45)–(47) решается на установление.

Аналитическое решение задачи (45)–(47) на установление может быть записано в следующем виде: $u(x, t) = -x^2 + 2x + 1$.

На рис. 1 представлено аналитическое решение задачи (45)–(47), а также численные решения тестовой задачи 1, полученные на основе разностной схемы первого порядка аппроксимации по пространству (42) и на основе разностной схемы второго порядка аппроксимации по пространству (44) для различных размеров шага по пространственной переменной.

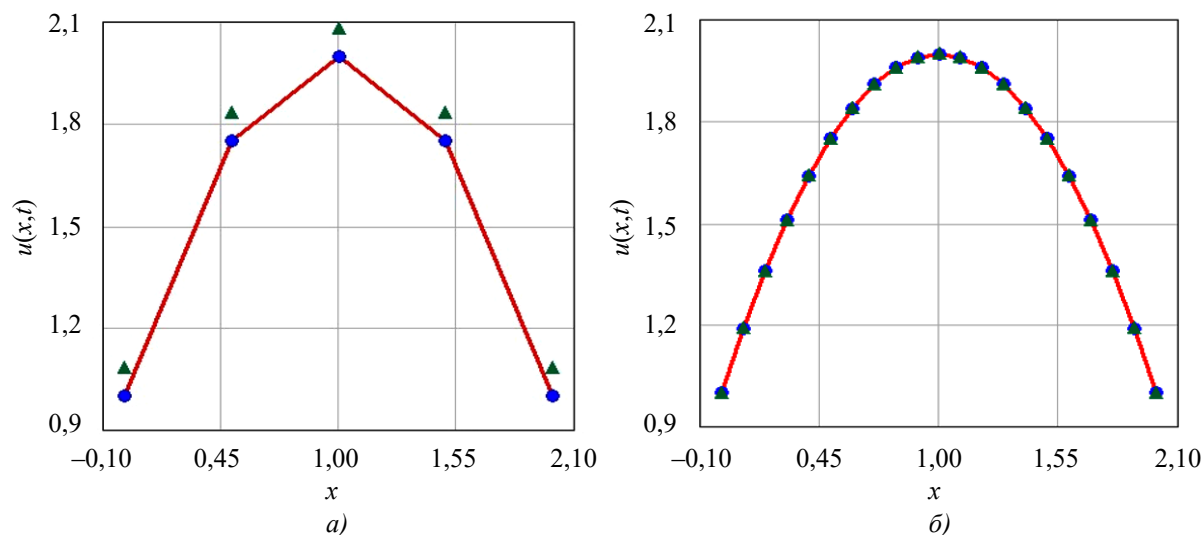


Рис. 1. Результаты решения тестовой задачи 1:

красная линия — точное решение; синие точки — численное решение на основе схемы первого порядка аппроксимации по пространству (42); зеленые треугольники — численное решение на основе схемы второго порядка аппроксимации по пространству (44);
а — шаг по пространству $h = 0,5$; б — шаг по пространству $h = 0,1$

Помимо погрешности аппроксимации рассчитаем эффективный порядок точности схемы [28]:

$$p^{eff} = \log_r \frac{|R_N|}{|R_{rN}|}, \quad (48)$$

где R_N — погрешность численного решения на сетке с шагом h , R_{rN} — погрешность численного решения на сетке с шагом h/r .

В таблице 1 представлены сведения о расчетной погрешности численного решения тестовой задачи 1 на основе схем (42) и (44) для различных размеров шага по пространству. Значение погрешности измерялось в норме сеточного пространства $\Psi^n = \sum_{i=1}^N |u(x_i, t^n) - u_i^n| \cdot h$, где $u(x_i, t^n)$ — аналитическое решение, u_i^n — численное решение.

На основании данных таблицы 1 можно заключить, что предложенная схема (44) с улучшенной аппроксимацией на границе расчетной области для уравнения теплопроводности при граничных условиях третьего рода (33) имеет эффективный порядок точности, равный 2, что соответствует полученной теоретической оценке.

Таблица 1

Расчетные значения погрешности численного решения тестовой задачи 1 для различных размеров шага по пространственной переменной

	Значение погрешности численного решения			
	$h = 1,00$	$h = 0,50$	$h = 0,25$	$h = 0,10$
Разностная схема со стандартной аппроксимацией границ (42)	0,000	0,000	0,000	$3,286 \times 10^{-15}$
Разностная схема с улучшенной аппроксимацией границ (44)	1,000	0,208	0,047	0,007
Эффективный порядок точности схемы (44)	–	2,263	2,152	2,075

Тестовая задача 2. Найдем решение следующей задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + X_k, \quad 0 < x < 5, \quad (49)$$

со следующим начальным

$$u(x, t)|_{t=0} = 0 \quad (50)$$

и с граничными условиями третьего рода

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) - 0,1u(x, t) \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) + 0,1u(x, t) \right) \Big|_{x=5} = 0, \quad (51)$$

где X_k — собственная функция, соответствующая собственному значению λ_k , которое находится из уравнения (11). Задача (49)–(51) решается на установление.

Аналитическое решение задачи (49)–(51) на установление может быть записано в следующем виде:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \lambda_k^2}} \sin \left(\lambda_k x + \arccos \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \lambda_k^2}} \right) \right).$$

По условию задачи (49)–(51) $\alpha = 0,1$. Найдем λ_k .

Рассмотрим алгоритм численного решения уравнения (11) для определения собственных значений λ_k . Пусть нам требуется найти корни нелинейного уравнения $f(\lambda) = 0$, где $f(\lambda) = 2 \operatorname{ctg} \lambda l - \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\alpha}{\lambda}$.

Шаг 1. Введем две вспомогательные функции: $f_1(\lambda) = 2 \operatorname{ctg} \lambda l$ и $f_2(\lambda) = \frac{\lambda}{\alpha} - \frac{\alpha}{\lambda}$.

Шаг 2. Зададим количество итераций K , оно же количество собственных значений, которое мы хотим найти.

Шаг 3. Для каждого собственного значения λ_k определим нулевое приближение как значение следующего выражения:

$$w_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l} - \frac{1}{l} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \cdot f_2 \left(\frac{(2k+1)\pi}{2l} \right) \right),$$

где k — номер итерации или индекс соответствующего собственного значения λ_k .

Шаг 4. На каждой итерации воспользуемся методом Ньютона для нахождения решения нелинейного уравнения $f(\lambda) = 0$. Для этого определим функцию

$$g(\lambda) = f'(\lambda) = -\frac{2l}{\sin^2(\lambda l)} - \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Шаг 5. В качестве начального приближения x_0 возьмем соответствующий номеру итерации w_k .

Шаг 6. Находим значение $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/g(x_i)$.

Шаг 7. Если $|x_{i+1} - x_i| > \varepsilon$, где ε — наперед заданное малое значение погрешности, возвращаемся на Шаг 6.

Шаг 8. Найденное значение λ_k определяем равным x_{i+1} .

Шаг 9. Если $k < K$, то переходим на Шаг 4. Иначе завершаем алгоритм расчета собственных значений λ_k .

На рис. 2 приведены результаты работы описанного выше алгоритма. Точками на рисунке отмечены λ_k , соответствующие решению уравнения $f(\lambda) = 0$.

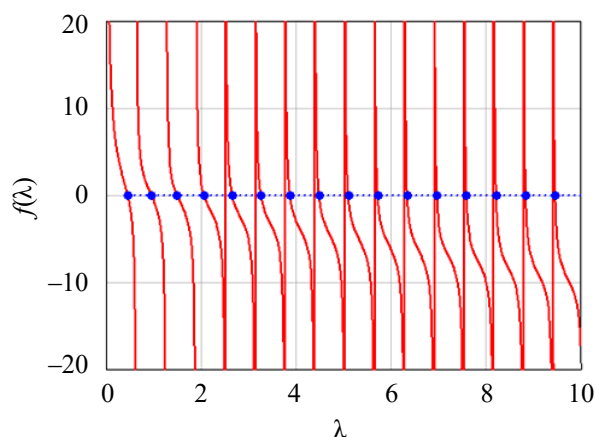


Рис. 2. Результаты работы алгоритма нахождения собственных значений λ_k : красная линия — график функции $f(\lambda)$; синие точки — найденные значения λ_k , соответствующие решению уравнения $f(\lambda) = 0$

На рис. 3 представлено аналитическое решение задачи (49)–(51), а также численные решения тестовой задачи 2, полученные на основе разностной схемы первого порядка аппроксимации по пространству (42) и на основе разностной схемы второго порядка аппроксимации по пространству (44) для различных размеров шага по пространственной переменной. Собственное значение взято для $k = 4$ и равно $\lambda_4 \approx 2,529$.

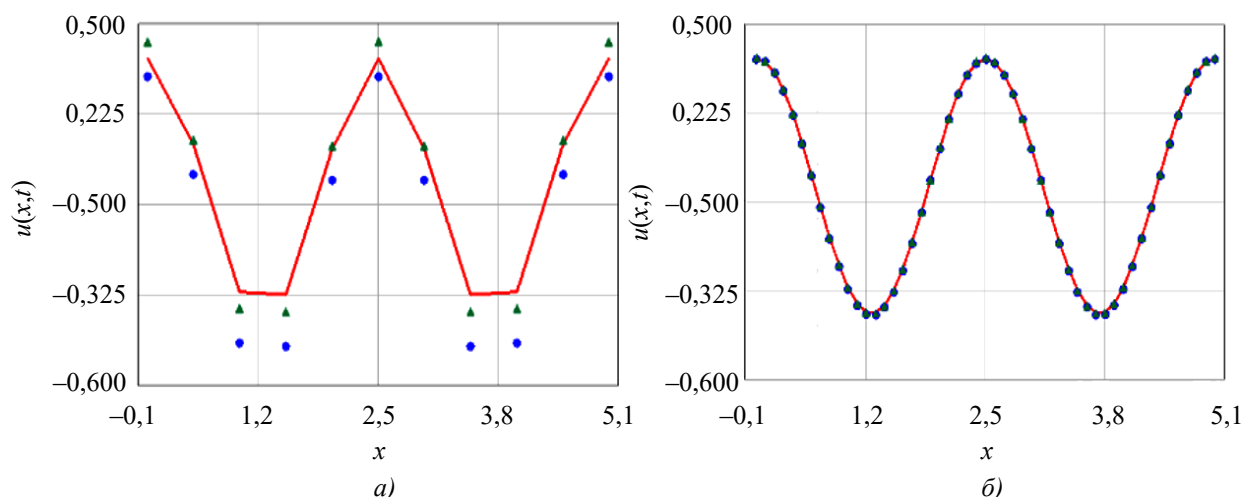


Рис. 3. Результаты решения тестовой задачи 2 при $k = 4$:

красная линия — точное решение; синие точки — численное решение на основе схемы первого порядка аппроксимации по пространству (42); зеленые треугольники — численное решение на основе схемы второго порядка аппроксимации по пространству (44); а — шаг по пространству $h = 0,5$; б — шаг по пространству $h = 0,1$

В таблице 2 представлены сведения о расчетной погрешности численного решения тестовой задачи 2 на основе схем (42) и (44) для различных размеров шага по пространству.

Таблица 2

Расчетные значения погрешности численного решения тестовой задачи 2 для различных размеров шага по пространственной переменной

	Значение погрешности численного решения			
	$h = 1,00$	$h = 0,50$	$h = 0,25$	$h = 0,10$
Разностная схема (42)	2,916	0,581	0,136	0,021
Эффективный порядок точности схемы (42)	—	2,327	2,094	2,028
Разностная схема с улучшенной аппроксимацией границ (44)	1,126	0,206	0,047	$6,964 \times 10^{-3}$
Эффективный порядок точности схемы (44)	—	2,455	2,133	2,080

Из данных табл. 2 видно, что предложенная схема (44) с улучшенной аппроксимацией на границе расчетной области для уравнения теплопроводности при граничных условиях третьего рода (33) имеет эффективный порядок точности, равный 2, что соответствует полученной теоретической оценке. Разностная схема (42) со стандартной аппроксимацией на границе расчетной области также имеет эффективный порядок точности, близкий к 2, несмотря на полученную теоретическую оценку порядка погрешности аппроксимации для граничных узлов. При этом стоит отметить, что предложенная схема (44) позволяет уменьшить погрешность численного решения примерно в 2,5–3 раза в зависимости от размера шага по пространству: с уменьшением размера шага разница между схемой (42) и (44) возрастает.

Тестовая задача 3. Найдем решение следующей задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \theta(x-1) + \theta(x-3), \quad 0 < x < 5, \quad 0 < T < 10 \quad (52)$$

со следующим начальным

$$u(x, t)|_{t=0} = 0 \quad (53)$$

и с граничными условиями третьего рода

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) - u(x, t) \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) + u(x, t) \right) \Big|_{x=5} = 0, \quad (54)$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда.

Согласно (30) аналитическое решение задачи (52)–(54) может быть записано в следующем виде:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(w)}(t) (\lambda_k \cos \lambda_k x + \alpha \sin \lambda_k x),$$

где $C_k^{(w)}(t)$ определяется на основании (29), при этом с учетом вида правой части (52)

$$C_k^{(f)}(t) = C_k^{(f)} = -\frac{2}{5(\lambda_k^2 + 1) + 2} \int_1^3 (\lambda_k \cos \lambda_k x + \alpha \sin \lambda_k x) dx = \frac{2}{5(\lambda_k^2 + 1) + 2} \left(\frac{1}{\lambda_k} (\cos 3\lambda_k - \cos \lambda_k) + \sin \lambda_k - \sin 3\lambda_k \right). \quad (55)$$

С учетом (29) и (55) получаем следующий вид точного решения задачи (52)–(54):

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda_k^2 t) - 1}{\lambda_k^2} C_k^{(f)} (\lambda_k \cos \lambda_k x + \alpha \sin \lambda_k x).$$

Собственные значения λ_k находятся на основе описанного в тестовой задаче 2 алгоритма.

На рис. 4 а представлено численное решение тестовой задачи 3, полученное на основе разностной схемы с улучшенной аппроксимацией на границе (44) для размера шага по пространству $h = 0,5$. При расчетах бралось 1000 собственных значений λ_k . При этом визуально разницы между численными решениями на основе разностных схем (42) и (44) не наблюдалось.

На рис. 4 б представлена разность численного решения и аналитического решения, рассчитанного на основании формулы (56) при k от 1 до 1000.

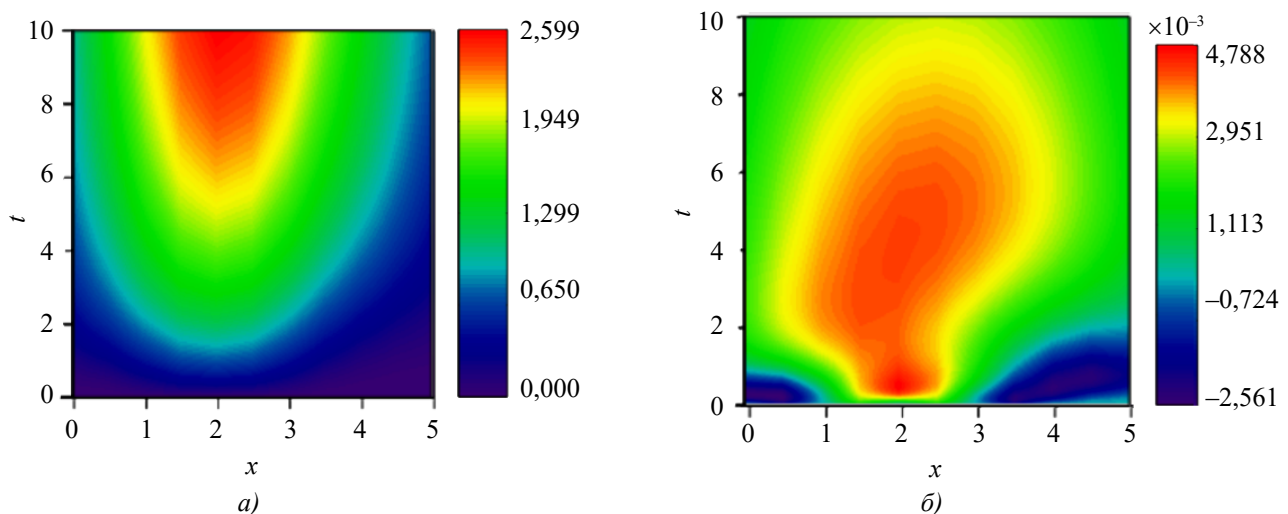


Рис. 4. Результаты решения тестовой задачи 3 при учете 1000 и шагах расчетной сетки по времени $\tau = 0,001$ и по пространству $h = 0,5$: а — численное решение на основе схемы второго порядка аппроксимации по пространству (42); б — разность аналитического решения и численного решения на основе (44)

На рис. 5 представлено аналитическое решение задачи (52)–(54) в фиксированный момент времени $t = 2$, а также численные решения тестовой задачи 3, полученные на основе разностной схемы первого порядка аппроксимации по пространству (42) и на основе разностной схемы второго порядка аппроксимации по пространству (44) для различных размеров шага по пространственной переменной. При расчетах учитывалась сумма первых 1000 собственных значений λ_k .

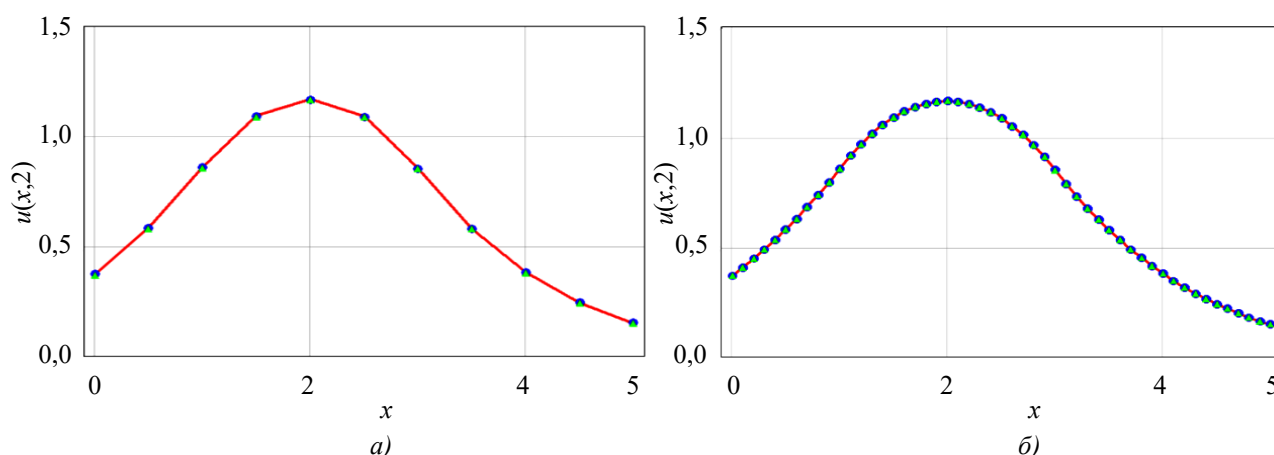


Рис. 5. Результаты решения тестовой задачи 3 при $t = 2$:

красная линия — аналитическое решение; синие точки — численное решение на основе схемы первого порядка аппроксимации по пространству (42); зеленые треугольники — численное решение на основе схемы второго порядка аппроксимации по пространству (44); a — шаг по пространству $h = 0,5$; b — шаг по пространству $h = 0,1$

В таблице 3 представлены сведения о расчетной погрешности численного решения тестовой задачи 3 на основе схем (42) и (44) для различных размеров шага по пространству.

Таблица 3

Расчетные значения погрешности численного решения тестовой задачи 3 при $t = 2$ для различных размеров шага по пространственной переменной

	Значение погрешности численного решения			
	$h = 1,00$	$h = 0,50$	$h = 0,25$	$h = 0,10$
Решение на основе схемы первого порядка аппроксимации по пространству (42)	0,0503	0,0102	0,002	$2,6797 \times 10^{-4}$
Эффективный порядок точности схемы (42)	—	2,3010	2,231	2,2860
Решение на основе схемы второго порядка аппроксимации по пространству (44)	0,0530	0,0130	$2,914 \times 10^{-3}$	$2,0397 \times 10^{-4}$
Эффективный порядок точности схемы (44)	—	2,0570	2,132	2,9020

Из данных таблицы 3 (по аналогии с тестовой задачей 2) видно, что предложенная схема (44) с улучшенной аппроксимацией на границе расчетной области для уравнения теплопроводности при граничных условиях третьего рода (33) имеет эффективный порядок точности, равный 2, что соответствует полученной теоретической оценке. Разностная схема (42) со стандартной аппроксимацией на границе расчетной области также имеет эффективный порядок точности, близкий к 2, несмотря на полученную теоретическую оценку порядка погрешности аппроксимации для граничных узлов. При этом для предложенной схемы (44) погрешность численного решения падает существенно быстрее, чем для решения на основе схемы (42).

Обсуждение и заключение. В работе рассмотрено уравнение теплопроводности с граничными условиями третьего рода, для которого получен вид точного решения. Проведена аппроксимация рассмотренной задачи и показано, что при стандартной аппроксимации задачи на границе расчетной области теоретическая оценка порядка погрешности аппроксимации дифференциального оператора второго порядка в уравнении диффузии составляет $O(h)$. Таким образом, на основании полученной оценки можно говорить о том, что для рассмотренного уравнения теплопроводности в случае граничных условий третьего рода задача аппроксимируется с первым порядком. Для повышения точности численного решения предложена разностная схема, имеющая погрешность аппроксимации дифференциального оператора второго порядка $O(h^2)$, как во внутренних, так и в граничных узлах расчетной области. Данная схема применима в случае граничных условий третьего рода специального вида.

Из численных экспериментов видно, что предложенная схема с улучшенной аппроксимацией на границе расчетной области для уравнения теплопроводности при граничных условиях третьего рода специального вида имеет эффективный порядок точности около 2, что соответствует полученной теоретической оценке. При этом стоит отметить, что разностная схема со стандартной аппроксимацией на границе расчетной области также имеет эффективный порядок точности, близкий к 2, несмотря на полученную теоретическую оценку порядка погрешности аппроксимации для граничных узлов. Обнаруженная разница между теоретической оценкой погрешности аппроксимации и полученной вычислительной точностью требует дальнейшего исследования. Важно отметить, что для предложенной схемы расчетная погрешность численного решения падает существенно быстрее, чем для решения на основе схемы со стандартной аппроксимацией на границе.

Список литературы / References

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. 7-е изд. Москва: Наука; 2004. 798 с.
Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Equations of mathematical physics*. 7th ed. Moscow: Nauka; 2004. 798 p. (In Russ.)
2. Cannon J.R. *The one-dimensional heat equation (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 23)*. Cambridge: Addison-Wesley Publishing Company/Cambridge University Press; 1984. XXV + 483 p.
3. Evans L.C. *Partial differential equations*. American Mathematical Society; 1998. 662 p.
4. Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы*. Москва: Наука; 1989. 432 с.
Samarskii A.A., Gulín A.V. *Numerical methods*. Moscow: Nauka; 1989. 432 p. (In Russ.)
5. Crank J., Nicolson P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1947;43(1):50–67.
<https://doi.org/10.1017/S0305004100023197>
6. Сметанников О.Ю. Оптимизация остаточного прогиба круглой пластинки из стеклующегося полимера при неравномерном охлаждении. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2010;3(1):81–92.
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2010.3.1.9>
Smetannikov O.Y. (2010). Optimization of the residual bending flexure of round polymer plate with glass transition at non-uniform cooling. *Computational Continuum Mechanics*. 2010;3(1):81–92.
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2010.3.1.9> (In Russ.)
7. Гужев Д.С., Калиткин Н.Н. Уравнение Бюргерса — тест для численных методов. *Математическое моделирование*. 1995;7(4):99–127.
Guzhev D.S., Kalitkin N.N. Burgers equation as a test for numerical methods. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 1995;7(4):99–127. (In Russ.)
8. Марков В.В., Утесин В.Н. Разностная схема численного решения уравнения Бюргерса. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2020;60(12):2050–2054. <https://doi.org/10.31857/S0044466920120108>
Markov V.V., Utesinov V.N. Difference scheme for the numerical solution of the Burgers equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2020;60(12):1985–1989. <https://doi.org/10.1134/S0965542520120106> (In Russ.)
9. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О точности разностных схем при расчете централизованных волн разрежения. *Математическое моделирование*. 2023;35(7):83–96. <https://doi.org/10.20948/mm-2023-07-06>
Kovyorkina O.A., Ostapenko V.V. On the accuracy of finite-difference schemes in calculations of centered rarefaction waves. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2023;15(Suppl. 1):S54–S63. <https://doi.org/10.1134/S2070048223070104>
10. Аристова Е.Н., Рогов Б.В., Чикиткин А.В. Оптимальная монотонизация высокоточной бикомпактной схемы для нестационарного многомерного уравнения переноса. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2016;56(6):973–988. <https://doi.org/10.7868/S004446691606003X>
Aristova E.N., Rogov B.V., Chikitkin A.V. Optimal monotoneization of a high-order accurate bicomcompact scheme for the nonstationary multidimensional transport equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2016;56(6):962–976. <https://doi.org/10.1134/S0965542516060038> (In Russ.)
11. Сухинов А.И., Кузнецова И.Ю., Чистяков А.Е., Проценко Е.А., Белова Ю.В. Исследование точности и применимости разностной схемы для решения задачи диффузии-конвекции при больших сеточных числах Пекле. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2020;13(4):437–448. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.4.34>
Sukhinov A.I., Kuznetsova I.Yu., Chistyakov A.E., Protsenko E.A., Belova Yu.V. Studying the accuracy and applicability of the finite difference scheme for solving the diffusion–convection problem at large grid Péclet numbers. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2021;62:1255–1266. <https://doi.org/10.1134/S002189442107018X> (In Russ.)
12. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Сидорякина В.В., Кузнецова И.Ю., Атаян А.М. Использование параллельных вычислений для оценки процесса переноса загрязняющих веществ в мелководных водоемах. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2024;24(2):298–315.
<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-298-315>
Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Sidoryakina V.V., Kuznetsova I.Yu., Atayan A.M. Using parallel computing to evaluate the transport of pollutants in shallow waters. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2024;24(2):298–315. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-298-315> (In Russ.)

13. Афанасьева Н.М., Вабищевич П.Н. Устойчивые разностные схемы для некоторых параболических уравнений. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2014;54(7):1186–1193. <https://doi.org/10.7868/S0044466914040036>
- Afanas'eva N.M., Vabishchevich P.N. Stable difference schemes for certain parabolic equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2014;54:1159–1166. <https://doi.org/10.1134/S0965542514040034> (In Russ.)
14. Вабищевич П.Н. Монотонные схемы для задач конвекции-диффузии с конвективным переносом в различной форме. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2021;61(1):95–107. <https://doi.org/10.31857/S0044466920120157>
- Vabishchevich P.N. Monotone schemes for convection–diffusion problems with convective transport in different forms. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2021;61(1):90–102. <https://doi.org/10.1134/S0965542520120155> (In Russ.)
15. Четверушкин Б.Н., Гулин А.В. Explicit schemes and numerical simulation using ultrahigh-performance computer systems. *Doklady Mathematics*. 2012;86(2):681–683. <https://doi.org/10.1134/S1064562412050213>
16. Четверушкин Б.Н., Ольховская О.Г., Гасилов В.А. Явная схема для решения нелинейного уравнения теплопроводности. *Математическое моделирование*. 2022;34(12):3–19. <https://doi.org/10.20948/mm-2022-12-01>
- Chetverushkin B.N., Olkhovskaya O.G., Gasilov V.A. An explicit difference scheme for a nonlinear heat conduction equation. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2023;15(3):529–538. <https://doi.org/10.1134/S2070048223030031> (In Russ.)
17. Криксин Ю.А., Тишкин В.Ф. Энтропийная регуляризация разрывного метода Галеркина для двумерных уравнений Эйлера в триангулированных областях. *Математическое моделирование*. 2023;35(3):3–19. <https://doi.org/10.20948/mm-2024-04-05>
- Kriksin Y.A., Tishkin V.F. Entropic regularization of the discontinuous Galerkin method for two-dimensional euler equations in triangulated domains. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2023;15(5):781–791. <https://doi.org/10.1134/S2070048223050058> (In Russ.)
18. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф. О точности разрывного метода Галеркина при расчете газодинамических ударных волн. *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*. 2023;510(1):43–51. <https://doi.org/10.31857/S268695432360009X>
- Ladonkina M.E., Neklyudova O.A., Ostapenko V.V., Tishkin V.F. On the accuracy of discontinuous Galerkin method calculating gas-dynamic shock waves. *Doklady Mathematics*. 2023;107(2):120–125. <https://doi.org/10.1134/S1064562423700746> (In Russ.)
19. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Кузнецова И.Ю., Атаян А.М., Никитина А.В. Регуляризованная разностная схема для решения задач гидродинамики. *Математическое моделирование*. 2022;34(2):85–100. <https://doi.org/10.20948/mm-2022-02-07>
- Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Kuznetsova I.Yu., Atayan A.M., Nikitina A.V. Regularized difference scheme for solving hydrodynamic problems. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2022;14:745–754. <https://doi.org/10.1134/S2070048222050155> (In Russ.)
20. Chistyakov A.E., Nikitina, A.V., Kuznetsova I.Yu., Rakhimbaeva E.O., Porksheyana M.V. Investigation of the approximation error of the difference scheme for the mathematical model of hydrodynamics. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023;44(5):1839–1846. <https://doi.org/10.1134/S1995080223050128>
21. Голубев В.И., Шевченко А.В., Петров И.Б. Повышение порядка точности сеточно-характеристического метода для задач двумерной линейной упругости с помощью схем операторного расщепления. *Компьютерные исследования и моделирование*. 2022;14(4):899–910. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2022-14-4-899-910>
- Golubev V.I., Shevchenko A.V., Petrov I.B. Raising convergence order of grid-characteristic schemes for 2D linear elasticity problems using operator splitting. *Computer Research and Modeling*. 2022;14(4):899–910. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2022-14-4-899-910> (In Russ.)
22. Васюков А.В., Петров И.Б. Повышение порядка аппроксимации расчетов волновых процессов в композитном образце при использовании неструктурированной расчетной сетки. *Прикладная механика и техническая физика*. 2024;65(3):152–160. <https://doi.org/10.15372/PMTF202315400>
- Vasyukov A.V., Petrov I.B. Increase in approximation order of calculations of wave processes in a composite sample when using an unstructured computational grid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2024;65(3):528–535. <https://doi.org/10.1134/S0021894424030143> (In Russ.)
23. Bobreneva Yu.O., Poveshchenko Yu., Podryga V.O., Polyakov S.V., Uzyunbaev R.M., Rahimly P.I. et al. One approach to numerical modeling of the heat and mass transfers of two-phase fluids in fractured-porous reservoirs. *Mathematics*. 2023;11(18):3991. <https://doi.org/10.3390/math11183991>
24. Васильев В.И., Васильева М.В., Гладких В.С., Ильин В.П., Никифоров Д.Я., Первозкин Д.В. и др. Численное решение задачи фильтрации в трещиноватой среде с использованием декомпозиции областей. *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2018;21(4):15–27. <https://doi.org/10.17377/sibjim.2018.21.402>
- Vasil'ev V.I., Vasil'eva M.V., Gladkikh V.S., Il'in V.P., Nikiforov D.Ya., Perevozkin D.V. et al. Numerical solution of a fluid filtration problem in a fractured medium by using the domain decomposition method. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2018;12(4):785–796. <https://doi.org/10.1134/S199047891804018X> (In Russ.)

25. Узянбаев Р.М., Бобренева Ю.О., Повешченко Ю.А., Подрыга В.О., Поляков С.В., Губайдуллин И.М. Численное моделирование пьезопроводных процессов в двумерной постановке для коллектора трещиновато-порового типа. *Препринты Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН*. 2024;35:1–17. <https://doi.org/10.20948/prepr-2024-35>

Uzyanbaev R.M., Bobrenova Yu.O., Poveshchenko Yu.A., Podryga V.O., Polyakov S.V., Gubaydullin I.M. Numerical modeling of piezoconductive processes in a two-dimensional formulation for a fractured-pore type reservoir. *Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences*. 2024;035:1–17. <https://doi.org/10.20948/prepr-2024-35> (In Russ.)

26. Литвинов В.Н., Чистяков А.Е., Никитина А.В., Атаян А.М., Кузнецова И.Ю. Математическое моделирование гидродинамических процессов Азовского моря на многопроцессорной вычислительной системе. *Компьютерные исследования и моделирование*. 2024;16(3):647–672. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2024-16-3-647-672>

Litvinov V.N., Chistyakov A.E., Nikitina A.V., Atayan A.M., Kuznetsova I.Yu. Mathematical modeling of hydrodynamics problems of the Azov Sea on a multiprocessor computer system. *Computer Research and Modeling*. 2024;16(3):647–672. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2024-16-3-647-672> (In Russ.)

27. Сухинов А.И., Кузнецова И.Ю. Математическая модель транспорта трехкомпонентной взвеси. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):39–48. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-39-48>

Sukhinov A.I., Kuznetsova I.Yu. Mathematical model of three-component suspension transport. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):39–48. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-39-48> (In Russ.)

28. Попов И.В. Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для нелинейного уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости. *Препринты Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН*. 2017;68:1–22. <https://doi.org/10.20948/prepr-2017-68>

Popov I.V. Construction of a difference scheme of increased order of approximation for a nonlinear transport equation using adaptive artificial viscosity. *Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences*. 2017;68:1–22. <https://doi.org/10.20948/prepr-2017-68> (In Russ.)

Об авторах:

Александр Евгеньевич Чистяков, профессор кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID](#), [ScopusID](#), [SPIN-код](#), cheese_05@mail.ru

Инна Юрьевна Кузнецова, старший преподаватель кафедры математики и информатики Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID](#), [ScopusID](#), [SPIN-код](#), ikuznecova@donstu.ru

Заявленный вклад авторов:

А.Е. Чистяков: постановка задачи; алгоритм определения собственных значений; численные эксперименты.

И.Ю. Кузнецова: получение аналитического решения задачи; получение разностной схемы с улучшенной аппроксимацией на границе для уравнения теплопроводности с граничными условиями третьего рода, численные эксперименты.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Alexander E. Chistyakov, Professor at the Department of Software for Computer Engineering and Automated Systems, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, Russian Federation, 344003), [ORCID](#), [ScopusID](#), [SPIN-code](#), cheese_05@mail.ru

Inna Yu. Kuznetsova, Senior Lecturer at the Department of Mathematics and Informatics, Don State Technical University (344003, Russian Federation, Rostov-on-Don, Gagarin Square, 1), [ORCID](#), [ScopusID](#), [SPIN-code](#), ikuznecova@donstu.ru

Contributions of the authors:

A.E. Chistyakov: problem statement; eigenvalue determination algorithm; numerical experiments.

I.Yu. Kuznetsova: derivation of the analytical solution; development of the difference scheme with improved boundary approximation for the heat conduction equation with third-kind boundary conditions; numerical experiments.

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 27.02.2025

Поступила после рецензирования / Revised 19.03.2025

Принята к публикации / Accepted 22.04.2025