

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 519.6

Оригинальное эмпирическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-22-33>


Сравнение решений гидродинамической задачи в прямоугольной каверне методами торможения и разгона начального поля скорости

Н.К. Волосова¹ , К.А. Волосов² , А.К. Волосова² , М.И. Карлов³,
Д.Ф. Пастухов⁴ , Ю.Ф. Пастухов⁴

¹ Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Российская Федерация

² Российский университет транспорта, г. Москва, Российская Федерация

³ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
г. Долгопрудный, Российская Федерация

⁴ Полоцкий государственный университет им. Евфросинии Полоцкой, г. Новополоцк, Республика Беларусь

dmitrij.pastuhov@mail.ru

Аннотация

Введение. Исследуется численное решение двумерной гидродинамической задачи в прямоугольной каверне методом торможения и методом разгона начальных условий в переменных «функция тока — вихрь». Метод торможения применялся при числах Рейнольдса $Re \leq 3000$, а метод разгона при числах $Re = 8000$.

Материалы и методы. Для ускорения численного решения задачи с явной разностной схемой уравнения динамики вихря использовался метод торможения начальных условий и метод n -кратного расщепления явной разностной схемы ($n = 100$). Метод торможения начальных условий поля скорости по сравнению с методом разгона неподвижной жидкости позволил сократить время счета задачи в 57 раз. Метод расщепления использовал максимальный шаг времени, пропорциональный квадрату координатного шага, не нарушая при этом спектральной устойчивости явной схемы в уравнении вихря. Наибольшее время программа затратила на решение уравнения Пуассона с переменными «функция тока — вихрь». Используя замороженное поле скоростей и решая только динамическое уравнение вихря, было сокращено время счета в методе расщепления. Обратная матрица для решения уравнения Пуассона за конечное число элементарных операций вычислялась библиотекой Msimsl.

Результаты исследования. Численное решение задачи показало эквивалентность методов торможения и разгона начального поля скорости при небольших числах Рейнольдса (до 3000). Численно доказана эквивалентность решения гидродинамической задачи алгоритмом в переменных «функция тока — вихрь» и алгоритмом с неявным полилинейным рекуррентным методом в случае разгона начальных условий. Впервые предложено начальное горизонтальное поле скорости, гладкое во внутренних точках и состоящее из двух синусоид с неподвижным центром масс всей жидкости в прямоугольной каверне.

Обсуждение и заключение. Предложен алгоритм численного решения двухмерной гидродинамической задачи в прямоугольной каверне в переменных «функция тока — вихрь». Аппроксимация уравнений в системе (1) имеет шестой порядок погрешности во внутренних узлах и четвертый в граничных узлах. Впервые предложен метод торможения с начальным полем горизонтальной скорости посредством гладкого соединения двух синусоид. Предложенные алгоритмы позволяют более эффективно решать задачи гидродинамики с явной разностной схемой уравнения вихря.

Ключевые слова: гидродинамика, численные методы, уравнения в частных производных, начально-краевая задача, граничные условия, начальные условия

Для цитирования. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Сравнение решений гидродинамической задачи в прямоугольной каверне методами торможения и разгона начального поля скорости. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):22–33. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-22-33>

Comparison of Solutions to a Hydrodynamic Problem in a Rectangular Cavity Using Initial Velocity Field Damping and Acceleration Methods

Natalya K. Volosova¹ , Konstantin A. Volosov² , Aleksandra K. Volosova² , Mikhail I. Karlov³,
Dmitriy F. Pastukhov⁴ ✉, Yuriy F. Pastukhov⁴ 

¹ MGTU named after. N.E. Bauman, Moscow, Russian Federation

² Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation

³ Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russian Federation

⁴ Polotsk State University named after Euphrosyne of Polotsk, Novopolotsk, Republic of Belarus

✉ dmitrij.pastuhov@mail.ru

Abstract

Introduction. This study investigates the numerical solution of a two-dimensional hydrodynamic problem in a rectangular cavity using the method of initial velocity field damping and the method of accelerating the initial conditions in terms of stream function and vorticity variables. The damping method was applied at Reynolds numbers $Re \leq 3000$, and the acceleration method was used for $Re = 8000$.

Materials and Methods. To speed up the numerical solution of the problem using an explicit finite-difference scheme for the vorticity dynamics equation, the method of initial condition damping and the method of n -fold splitting of the explicit difference scheme (with $n = 100$) were used. Compared to the traditional method of accelerating from stationary fluid, the initial velocity field damping method reduced the computation time by a factor of 57. The splitting method used a maximum time step proportional to the square of the spatial step, while maintaining spectral stability of the explicit scheme in the vorticity equation. The majority of computation time was spent solving the Poisson equation in the “stream function — vorticity” variables. By freezing the velocity field and solving only the vorticity dynamics equation, computation time was further reduced in the splitting method. The inverse matrix for solving the Poisson equation using a finite number of elementary operations were computed using the Msimsl library.

Results. Numerical solutions demonstrated the equivalence of the damping and acceleration methods for the initial velocity field at low Reynolds numbers (up to 3000). The equivalence of solutions obtained using the “stream function — vorticity” algorithm and the implicit iterated polyneutic recurrent method for accelerated initial conditions was numerically confirmed. For the first time, an initial horizontal velocity field was proposed, smooth at internal points and composed of two sine waves, with a stationary center of mass for the fluid in the rectangular cavity.

Discussion and Conclusion. An algorithm for numerically solving a two-dimensional hydrodynamic problem in a rectangular cavity using “stream function — vorticity” variables is proposed. The approximation of the equations in system (1) has sixth-order accuracy at internal grid points and fourth-order accuracy at boundary points. A novel damping method is introduced using an initial horizontal velocity field formed by smoothly connecting two sine waves. The proposed algorithms enhance the efficiency of solving hydrodynamic problems using an explicit finite-difference scheme for the vorticity equation.

Keywords: hydrodynamics, numerical methods, partial differential equations, initial-boundary value problem, boundary conditions, initial conditions

For Citation. Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Karlov M.I., Pastukhov D.F., Pastukhov Yu.F. Comparison of Solutions to a Hydrodynamic Problem in a Rectangular Cavity Using Initial Velocity Field Damping and Acceleration Methods. *Computation Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):22–33. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-22-33>

Введение. В работе рассматривается двухмерная гидродинамическая задача в прямоугольной каверне с подвижной верхней крышкой в переменных «функция тока — вихрь» [1]. Поле скорости имеет две особые точки в верхних углах каверны по величине и по направлению, благодаря чему данная задача является полигоном апробации численных алгоритмов для решения различных задач гидродинамики [2]. Например, работы [3–5] связаны с точными решениями задач гидродинамики или их аппроксимацией с высокой степенью точности. Задачи с большими градиентами поля скорости в особых точках приведены в [6, 7], а задача с течением в вязких жидкостях — в [8, 9]. Некоторые методы постановки начальных и краевых условий рассмотрены в работах гидродинамики [10, 11]. Настоящая работа опирается на метод n -кратного расщепления уравнения вихря с явной разностной схемой ($n = 100$), описанный в статье [11] и использующий равномерную сетку $n_1 \times n_2 = 100 \times 100$.

Материалы и методы

Постановка задачи. Рассмотрим классическую гидродинамическую задачу в прямоугольной области (каверне) с системой уравнений в частных производных, начальными и краевыми условиями для физических полей [1] в переменных «функция тока — вихрь». Обозначим через $(u(x,y), v(x,y))$ вектор скорости жидкой частицы, причем на твердой границе, боковых и нижнем отрезках прямоугольной каверны скорость равна нулю (условие прилипания частиц жидкости). Также нормальная компонента скорости равна нулю на всей прямоугольной границе.

Начало системы координат расположим в нижнем левом углу прямоугольника, направим ось y вверх, ось x — вправо. Ширину прямоугольной каверны обозначим L , высоту — буквой H .

В гидродинамической задаче в закрытой каверне подвижная верхняя крышка перемещается вправо с постоянной скоростью $u_{\max}$. Обозначим характерные масштабы: длины L , времени $\frac{L}{u_{\max}}$, скорости $u_{\max}$, функции тока $Lu_{\max}$, вихря $\frac{u_{\max}}{L}$, числа Рейнольдса Re . Введем безразмерные переменные $\bar{x}$ — горизонтальная координата, $\bar{y}$ — вертикальная координата, $\bar{\psi}$, $\bar{w}$ — функции тока и вихря соответственно, $(\bar{u}, \bar{v})$ — вектор скорости, $\bar{t}$ — время, задав их формулами:

$$\begin{aligned} 0 \leq \bar{x} = \frac{x}{L} \leq 1, \quad 0 \leq \bar{y} = \frac{y}{L} \leq k = \frac{H}{L}, \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{\psi_{\max}}, \quad \psi_{\max} = Lu_{\max}, \\ \bar{u} = \frac{u}{u_{\max}}, \quad \bar{v} = \frac{v}{u_{\max}}, \quad \bar{w} = \frac{w}{w_{\max}}, \quad w_{\max} = \frac{u_{\max}}{L}, \\ \bar{t} = \frac{t}{T}, \quad T = \frac{L}{u_{\max}}, \quad Re = \frac{u_{\max} L}{\nu}. \end{aligned}$$

Запишем систему уравнений гидродинамики с безразмерными переменными и функциями [1, 5, 11]:

$$\begin{cases} \bar{\psi}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{\psi}_{\bar{y}\bar{y}} = -\bar{w}(\bar{x}, \bar{y}), \quad 0 < \bar{x} = \frac{x}{L} < 1, \quad 0 < \bar{y} < k_{\max}, \\ \bar{w} = \bar{v}_{\bar{x}} - \bar{u}_{\bar{y}}, \\ \bar{u} = \bar{\psi}_{\bar{y}}, \quad \bar{v} = -\bar{\psi}_{\bar{x}}, \\ \bar{w}_{\bar{t}} + \bar{u} \cdot \bar{w}_{\bar{x}} + \bar{v} \cdot \bar{w}_{\bar{y}} = \frac{1}{Re} (\bar{w}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{w}_{\bar{y}\bar{y}}), \quad 0 < \bar{t} = \frac{t}{T}, \\ \bar{\psi}|_{\Gamma} \equiv 0, \bar{v}|_{\Gamma} \equiv 0, \bar{u}|_{\Gamma_1} = 0, \bar{u}|_{\Gamma \setminus \Gamma_1} = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь Γ_1 — объединение боковых сторон и нижнего отрезка, $\Gamma \setminus \Gamma_1$ — верхний отрезок прямоугольника Γ . Первым в системе (1) следует уравнение Пуассона для функции тока и функции вихря. Двумерное уравнение Пуассона на прямоугольнике решается в матричном виде за конечное число арифметических действий с шестым порядком погрешности [5, 12]. Далее по тексту опустим черту сверху над безразмерными функциями, временем и координатами.

Вторая строка системы (1) — функция вихря, вычисляемая через координатные производные поля скорости. Третья строка — компоненты скорости — вычисляются как частные производные от функции тока. Четвертая строка — уравнение динамики вихря, которое в системе уравнений (1) единственное явно зависит от времени. Слева стоит полная (конвективная) производная по времени. На границе прямоугольника отсутствует вертикальная компонента скорости; горизонтальная компонента равна единице на верхнем отрезке и нулю на нижнем отрезке и боковых сторонах.

Кроме двух упомянутых особых точек поля скорости для тестирования алгоритма в методе торможения начального поля скорости использовалось сильно нестационарное и завихренное начальное поле скоростей. Оно по своим параметрам должно быть близко к стационарному полю скоростей, удовлетворять уравнению неразрывности стационарной жидкости и, как показывает численный эксперимент, быть непрерывно дифференцируемым во всех точках поля. Впервые в данной работе предложено начальное поле горизонтальной составляющей скорости на равномерной прямоугольной сетке по формуле (2) (профиль горизонтальной скорости шит на верхнем отрезке прямоугольной каверны из двух кубических полиномов):

$$\begin{aligned} u_-(x_n, y_m) &= -\frac{u_0(x_n)}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi y_m}{k_1}\right) = -\frac{u_0(x_n)}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{(1+\sqrt{2})\pi y_m}{k\sqrt{2}}\right), \quad 0 \leq y_m \leq \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}k, \\ u(x_n, y_m) &= \begin{cases} u_+(x_n, y_m) = u_0(x_n) \sin\left(\frac{\pi(y_m - k_1)}{2k_2}\right) = u_0(x_n) \sin\left(\frac{\pi\left(y_m - \frac{\sqrt{2}k}{1+\sqrt{2}}\right)}{\frac{k}{1+\sqrt{2}}}\right), & \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}k < y_m \leq k, \end{cases} \\ x_n &= nh_1, y_m = mh_2, h_1 = \frac{1}{n_1}, h_2 = \frac{k}{n_2}, k_1 = \frac{\sqrt{2}k}{1+\sqrt{2}}, k_2 = \frac{k}{1+\sqrt{2}}, k_1 + k_2 = k, k_1 = \sqrt{2}k_2, \\ n &= \overline{0, n_1}, m = \overline{0, n_2}, n_1 = n_2 = 100. \end{aligned} \quad (2)$$

В формуле (2) нижняя часть жидкости движется влево, верхняя ее часть — вправо, а горизонтальная компонента скорости ограничена $u_0(x_n)$, то есть единицей, профиль горизонтальной скорости непрерывен по переменной y : $u_-(x_n, 0) = u_-(x_n, k_1) = u_+(x_n, k_1) = 0, u_+(x_n, k) = u_0(x_n)$. В граничной точке графики синусоид касаются друг друга:

$$u_{-y}(x_n, k_1) = u_{+y}(x_n, k_1) \Leftrightarrow -\frac{u_0(x_n)}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{k_1} \cos\left(\frac{\pi k_1}{k_1}\right) = \frac{u_0(x_n)}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{k_1} = u_0(x_n) \frac{\pi}{2k_2} \cos\left(\frac{\pi(k_1 - k_1)}{2k_2}\right) = u_0(x_n) \frac{\pi}{2k_2} = u_0(x_n) \frac{\pi}{\sqrt{2}k_1}.$$

Интегрируя профиль (2) по переменной y от 0 до k при постоянной переменной x , получим, обозначая

$$\begin{aligned} \bar{y}|_0^1 &= \frac{y|_0^{k_1}}{k_1}, \bar{y}|_0^1 = \frac{(y - k_1)|_{k_1}^{k_1 + k_2}}{k_2} : \\ \int_0^k u(x, y) dy &= \int_0^{k_1} u_{-}(x, y) dy + \int_{k_1}^{k_1 + k_2} u_{+}(x, y) dy = u_0(x) \left(-\frac{k_1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \sin(\pi \bar{y}) d\bar{y} + k_2 \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2} \bar{y}\right) d\bar{y} \right) = \\ &= u_0(x) \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}\pi} \cos(\pi \bar{y}) \Big|_0^1 - \frac{2k_2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} \bar{y}\right) \Big|_0^1 \right) = u_0(x) \left(\frac{-2k_1}{\sqrt{2}\pi} + \frac{2k_2}{\pi} \right) = u_0(x) \left(\frac{-\sqrt{2}k_1}{\pi} + \frac{\sqrt{2}k_1}{\pi} \right) = 0. \end{aligned}$$

Последний интеграл показывает, что в начальный момент времени центр масс каждого достаточно тонкого элементарного вертикального столба жидкости покоится на оси x . Тогда по закону сохранения импульса центр масс всей жидкости не перемещается по оси x как в начальный, так и во все прочие моменты времени.

Профиль горизонтальной компоненты (3) скорости на верхнем отрезке каверны ($y = k = 1$) имел вид симметричной гладкой и непрерывной равнобокой криволинейной трапеции без особых точек поля скорости:

$$u(x, k) \equiv u_0(x) = \begin{cases} 3z^2 - 2z^3, z = \frac{x}{\tau} \in [0, 1], 0 \leq x \leq \tau, \tau = \frac{n_0}{n_1} = \frac{1}{10}, \\ 1, \tau \leq x \leq 1 - \tau, \\ 3z^2 - 2z^3, z = \frac{1-x}{\tau} \in [0, 1], 1 - \tau \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (3)$$

Отметим, что $u(0) = u'(0) = (6z - 6z^2)_{z=0} = 0, u(1) = 1, u'(1) = (6z - 6z^2)_{z=1} = 0$, то есть в 2-х точках сопряжения $x = \tau, x = 1 - \tau$ профиль горизонтальной компоненты скорости на верхнем отрезке прямоугольной каверны является гладким.

Вертикальная компонента скорости частиц жидкости в начальный момент согласно уравнению неразрывности вычислялась по формуле трапеций $m = \overline{1, n_2 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1}$:

$$v(x_n, y_m) = -h_2 \left(\frac{u_x(x_n, y_m)}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} u_x(x_n, y_i) \right) = -h_2 \left(\frac{u(x_{n+1}, y_m) - u(x_{n-1}, y_m)}{4h_1} + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{u(x_{n+1}, y_i) - u(x_{n-1}, y_i)}{2h_1} \right). \quad (4)$$

Согласно алгоритму [1] первым в системе уравнений (1) решается уравнение Пуассона за конечное число элементарных операций [5], при этом аппроксимируем уравнение Пуассона с шестым порядком погрешности во всех внутренних точках.

Для аппроксимации оператора Лапласа разложим в ряд Тейлора узловые значения функции тока $\psi(x, y)$ в узлах, окружающих центральный узел, на прямоугольном шаблоне из девяти узлов. С учетом симметрии частные производные нечетного порядка функции тока отсутствуют. При разложении в ряд Тейлора учтем также уравнение Пуассона:

$$\Delta \psi = \psi_{xx} + \psi_{yy} = f(x, y) = -w \Leftrightarrow \psi_{xx}|_{(x_i, y_j)} + \psi_{yy}|_{(x_i, y_j)} = f(x_i, y_j) = f_{i,j}, i = \overline{1, n_2 - 1}, j = \overline{1, n_1 - 1}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= \frac{1}{h^2} (C_0 \psi_{0,0} + C_1 (\psi_{-1,0} + \psi_{0,-1} + \psi_{1,0} + \psi_{0,1}) + C_2 (\psi_{-1,-1} + \psi_{1,-1} + \psi_{-1,1} + \psi_{1,1})) = \frac{1}{h^2} (\psi_{0,0} (C_0 + 4C_1 + 4C_2) + \\ &+ C_1 (h^2 (\psi_{xx} + \psi_{yy}) + \frac{h^4}{12} (\psi_x^{(4)} + \psi_y^{(4)}) + \frac{h^6}{360} (\psi_x^{(6)} + \psi_y^{(6)}) + O(h^8)) + \\ &+ C_2 (2h^2 (\psi_{xx} + \psi_{yy}) + \frac{h^4}{6} (\psi_x^{(4)} + \psi_y^{(4)} + 6\psi_{xy}^{(4)}) + \frac{h^6}{180} (\psi_x^{(6)} + \psi_y^{(6)} + 15(\psi_{xxxx}^{(6)} + \psi_{xyyy}^{(6)})) + O(h^8))) = \\ &= \frac{\psi_{0,0} (C_0 + 4C_1 + 4C_2)}{h^2} + (C_1 + 2C_2) (\psi_{xx} + \psi_{yy}) + \frac{h^2}{12} ((\psi_x^{(4)} + \psi_y^{(4)}) C_1 + 2C_2 (\psi_x^{(4)} + \psi_y^{(4)} + 6\psi_{xy}^{(4)})) + \\ &+ h^4 \left((\psi_x^{(6)} + \psi_y^{(6)}) \frac{C_1}{360} + (\psi_x^{(6)} + \psi_y^{(6)} + 15(\psi_{xxxx}^{(6)} + \psi_{xyyy}^{(6)})) \frac{C_2}{180} \right) + O(h^6) = \Delta \psi = \psi_{xx} + \psi_{yy}. \end{aligned} \quad (6)$$

Используя уравнение (5) для уравнения (6), а также ограниченность решения в каждом узле прямоугольной сетки получим, что

$$\begin{cases} C_0 + 4C_1 + 4C_2 = 0, \\ C_1 + 2C_2 = 1. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\Delta f = \Delta (\psi_{xx} + \psi_{yy}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\psi_{xx} + \psi_{yy}) = \psi_x^{(4)} + \psi_y^{(4)} + 2\psi_{xy}^{(4)} = f_{xx} + f_{yy},$$

$$\Delta^2 f = \Delta(\psi_x^{(4)} + \psi_y^{(4)} + 2\psi_{xy}^{(4)}) = \psi_x^{(6)} + \psi_y^{(6)} + 3(\psi_{xxxx}^{(6)} + \psi_{xyyy}^{(6)}), f_{xx}^{(4)} = (\psi_{xx}^{(4)} + \psi_{yy}^{(4)})_{xy} = \psi_{xyyy}^{(6)} + \psi_{yxxx}^{(6)}.$$

С учетом последних преобразований преобразуем формулу (6):

$$\Delta\psi = \psi_{xx} + \psi_{yy} + \frac{h^2}{12}((\psi_x^{(4)} + \psi_y^{(4)})(C_1 + 2C_2) + 12C_2\psi_{xy}^{(4)}) + \\ + h^4\left((\psi_x^{(6)} + \psi_y^{(6)})\frac{C_1}{360} + (\psi_x^{(6)} + \psi_y^{(6)} + 15(\psi_{xxxx}^{(6)} + \psi_{xyyy}^{(6)}))\frac{C_2}{180}\right) + O(h^6).$$

Потребуем, чтобы множитель при $\frac{h^2}{12}$ стал оператором Δf от функции f , откуда имеем:

$$12C_2 = 2,$$

$$\begin{cases} C_0 + 4C_1 + 4C_2 = 0 \\ C_1 + 2C_2 = 1 \\ 12C_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow C_2 = \frac{1}{6}, C_1 = 1 - 2C_2 = \frac{2}{3}, C_0 = -4C_1 - 4C_2 = -\frac{10}{3},$$

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= f + \frac{h^2}{12}\Delta f + \frac{h^4}{360}(C_1 + 2C_2)(\psi_x^{(6)} + \psi_y^{(6)}) + \frac{h^4(\psi_{xxxx}^{(6)} + \psi_{xyyy}^{(6)})}{72} + O(h^6) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{h^2}\left(-\frac{10}{3}\psi_{0,0} + \frac{2}{3}(\psi_{-1,0} + \psi_{0,-1} + \psi_{1,0} + \psi_{0,1}) + \frac{1}{6}(\psi_{-1,-1} + \psi_{1,-1} + \psi_{-1,1} + \psi_{1,1})\right) = \\ &= f + \frac{h^2}{12}\Delta f + \frac{h^4}{360}(\psi_x^{(6)} + \psi_y^{(6)} + 3(\psi_{xxxx}^{(6)} + \psi_{xyyy}^{(6)})) + (\psi_{xxxx}^{(6)} + \psi_{xyyy}^{(6)})\left(\frac{5}{360} - \frac{1}{120}\right) + O(h^6) = \\ &= f + \frac{h^2}{12}\Delta f + \frac{h^4}{360}\Delta^2 f + \frac{h^4 f_{xy}^{(4)}}{180} + O(h^6) = f + \frac{h^2}{12}(f_{xx} + f_{yy}) + \frac{h^4}{360}(f_x^{(4)} + f_y^{(4)}) + \frac{h^4 f_{xy}^{(4)}}{90} + O(h^6). \end{aligned} \quad (7)$$

Чтобы использовать уравнение Пуассона (7) для функции тока в системе уравнений (1) с точностью $O(h^6)$ необходимо, чтобы $f = -w$, производные f_{xx}, f_{yy} были представлены с точностью $O(h^4)$, а $f_x^{(4)}, f_y^{(4)}, f_{xy}^{(4)}$ — с точностью $O(h^2)$.

Методом неопределенных коэффициентов [12] были получены формулы для внутренних узлов функции f с индексами $n = 2, n_1 - 2, m = 2, n_2 - 2$:

$$\begin{cases} f_{xx} + f_{yy} = \frac{1}{h^2}\left(-5f_{0,0} + \frac{4}{3}(f_{-1,0} + f_{0,-1} + f_{1,0} + f_{0,1}) - \frac{1}{12}(f_{-2,0} + f_{0,-2} + f_{2,0} + f_{0,2})\right) + O(h^4), \\ f_x^{(4)} + f_y^{(4)} = \frac{1}{h^4}(12f_{0,0} - 4(f_{-1,0} + f_{0,-1} + f_{1,0} + f_{0,1}) + f_{-2,0} + f_{0,-2} + f_{2,0} + f_{0,2}) + O(h^2), \\ f_{xy}^{(4)} = \frac{1}{h^4}(4f_{0,0} - 2(f_{-1,0} + f_{0,-1} + f_{1,0} + f_{0,1}) + f_{-1,-1} + f_{1,-1} + f_{-1,1} + f_{1,1}) + O(h^2). \end{cases} \quad (8)$$

Таким образом, формулы (7), (8) совместно аппроксимируют уравнение Пуассона для функции тока и функции вихря в (1) с шестым порядком погрешности во внутренних узлах прямоугольника.

В работе [5] описан алгоритм для матричного метода решения разностного уравнения Пуассона (7) за конечное число элементарных арифметических операций методом векторной прогонки.

Рассмотрим разностное уравнение (9):

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2}\left(-\frac{10}{3}\psi_{m,n} + \frac{2}{3}(\psi_{m-1,n} + \psi_{m+1,n} + \psi_{m,n-1} + \psi_{m,n+1}) + \frac{1}{6}(\psi_{m-1,n-1} + \psi_{m+1,n-1} + \psi_{m-1,n+1} + \psi_{m+1,n+1})\right) = f_{m,n} + \frac{h^2}{12}(f_{xx} + f_{yy}) + \\ + h^4\left(\frac{1}{360}(f_x^{(4)} + f_y^{(4)}) + \frac{1}{90}f_{xy}^{(4)}\right) + O(h^6) \equiv F_{m,n}, \quad n = \overline{1, n_1 - 1}, m = \overline{1, n_2 - 1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Определим квадратные матрицы A, B размерности $(n_1 - 1) \times (n_1 - 1)$:

$$a_{m,n} = \begin{cases} -\frac{10}{3}, m = n; m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1}, \\ \frac{2}{3}, m = n + 1 \vee m = n - 1, \\ 0, m \geq n + 2 \vee m \leq n - 2, \end{cases} \quad b_{m,n} = \begin{cases} \frac{2}{3}, m = n; m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1}, \\ \frac{1}{6}, m = n + 1 \vee m = n - 1, \\ 0, m \geq n + 2 \vee m \leq n - 2. \end{cases} \quad (10)$$

Запишем кратко [5] матричный алгоритм решения разностного уравнения (9):

1. По формуле

$$F^T_{m,n} = f_{m,n}h^2 + \frac{h^4}{12}(f_{xx} + f_{yy}) + h^6\left(\frac{1}{360}(f_x^{(4)} + f_y^{(4)}) + \frac{1}{90}f_{xy}^{(4)}\right) + O(h^8) \Big|_{x=x_n, y=y_m}$$

вычислить правую часть уравнения Пуассона во всех внутренних узлах равномерной сетки прямоугольника ($m = 1, \dots, n_2 - 1; n = 1, \dots, n_1 - 1$).

2. Модифицировать правые части системы уравнений (11) по формулам (12), (13) в узлах прямоугольного контура, соседнего с граничным контуром, то есть найти $\overline{F_{m,n}}$ по величинам $F_{m,n}$ пункта 1:

$$\begin{cases} A\psi_1^T + B\psi_2^T = \overline{F_1^T}, \\ B\psi_{m-1}^T + A\psi_m^T + B\psi_{m+1}^T = \overline{F_m^T}, m = \overline{2, n_2 - 2}, \\ B\psi_{n_2-2}^T + A\psi_{n_2-1}^T = \overline{F_{n_2-1}^T}. \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} -\frac{10}{3}\psi_{1,n_1-1} + \frac{2}{3}(\psi_{2,n_1-1} + \psi_{1,n_1-2} + \psi_{1,n_1} + \psi_{0,n_1-1}) + \frac{1}{6}(\psi_{2,n_1-2} + \psi_{0,n_1-2} + \psi_{2,n_1} + \psi_{0,n_1}) = F_{1,n_1-1}, \\ \overline{F_{1,n_1-1}} \equiv F_{1,n_1-1} - \frac{2}{3}(\psi_{1,n_1} + \psi_{0,n_1-1}) - \frac{1}{6}(\psi_{0,n_1-2} + \psi_{2,n_1} + \psi_{0,n_1}), \\ -\frac{10}{3}\psi_{n_2-1,1} + \frac{2}{3}(\psi_{n_2-2,1} + \psi_{n_2-1,2} + \psi_{n_2-1,0} + \psi_{n_2,1}) + \frac{1}{6}(\psi_{n_2-2,2} + \psi_{n_2,2} + \psi_{n_2-2,0} + \psi_{n_2,0}) = F_{n_2-1,1}, \\ \overline{F_{n_2-1,1}} \equiv F_{n_2-1,1} - \frac{2}{3}(\psi_{n_2-1,0} + \psi_{n_2,1}) - \frac{1}{6}(\psi_{n_2,2} + \psi_{n_2-2,0} + \psi_{n_2,0}), \\ -\frac{10}{3}\psi_{n_2-1,n_1-1} + \frac{2}{3}(\psi_{n_2-2,n_1-1} + \psi_{n_2-1,n_1-2} + \psi_{n_2-1,n_1} + \psi_{n_2,n_1-1}) + \frac{1}{6}(\psi_{n_2-2,n_1-2} + \psi_{n_2,n_1-2} + \psi_{n_2-2,n_1} + \psi_{n_2,n_1}) = F_{n_2-1,n_1-1}, \\ \overline{F_{n_2-1,n_1-1}} \equiv F_{n_2-1,n_1-1} - \frac{2}{3}(\psi_{n_2-1,n_1} + \psi_{n_2,n_1-1}) - \frac{1}{6}(\psi_{n_2,n_1-2} + \psi_{n_2-2,n_1} + \psi_{n_2,n_1}), \\ -\frac{10}{3}\psi_{1,1} + \frac{2}{3}(\psi_{2,1} + \psi_{1,2} + \psi_{1,0} + \psi_{0,1}) + \frac{1}{6}(\psi_{2,2} + \psi_{0,2} + \psi_{2,0} + \psi_{0,0}) = F_{1,1}, \\ \overline{F_{1,1}} \equiv F_{1,1} - \frac{2}{3}(\psi_{1,0} + \psi_{0,1}) - \frac{1}{6}(\psi_{0,2} + \psi_{2,0} + \psi_{0,0}). \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} -\frac{10}{3}\psi_{1,n} + \frac{2}{3}(\psi_{1,n-1} + \psi_{2,n} + \psi_{1,n+1} + \psi_{0,n}) + \frac{1}{6}(\psi_{2,n-1} + \psi_{2,n+1} + \psi_{0,n-1} + \psi_{0,n+1}) = F_{1,n}, n = \overline{2, n_1 - 2}, \\ \overline{F_{1,n}} = F_{1,n} - \frac{2}{3}\psi_{0,n} - \frac{1}{6}(\psi_{0,n-1} + \psi_{0,n+1}), n = \overline{2, n_1 - 2}, \\ -\frac{10}{3}\psi_{n_2-1,n} + \frac{2}{3}(\psi_{n_2-1,n-1} + \psi_{n_2-2,n} + \psi_{n_2-1,n+1} + \psi_{n_2,n}) + \frac{1}{6}(\psi_{n_2-2,n-1} + \psi_{n_2-2,n+1} + \psi_{n_2,n-1} + \psi_{n_2,n+1}) = F_{n_2-1,n}, n = \overline{2, n_1 - 2}, \\ \overline{F_{n_2-1,n}} = F_{n_2-1,n} - \frac{2}{3}\psi_{n_2,n} - \frac{1}{6}(\psi_{n_2,n-1} + \psi_{n_2,n+1}), n = \overline{2, n_1 - 2}, \\ -\frac{10}{3}\psi_{m,1} + \frac{2}{3}(\psi_{m-1,1} + \psi_{m,2} + \psi_{m+1,1} + \psi_{m,0}) + \frac{1}{6}(\psi_{m-1,2} + \psi_{m+1,2} + \psi_{m-1,0} + \psi_{m+1,0}) = F_{m,1}, m = \overline{2, n_2 - 2}, \\ \overline{F_{m,1}} = F_{m,1} - \frac{2}{3}\psi_{m,0} - \frac{1}{6}(\psi_{m-1,0} + \psi_{m+1,0}), m = \overline{2, n_2 - 2}, \\ -\frac{10}{3}\psi_{m,n_1-1} + \frac{2}{3}(\psi_{m-1,n_1-1} + \psi_{m,n_1-2} + \psi_{m+1,n_1-1} + \psi_{m,n_1}) + \frac{1}{6}(\psi_{m-1,n_1-2} + \psi_{m+1,n_1-2} + \psi_{m-1,n_1} + \psi_{m+1,n_1}) = F_{m,n_1-1}, m = \overline{2, n_2 - 2}, \\ \overline{F_{m,n_1-1}} = F_{m,n_1-1} - \frac{2}{3}\psi_{m,n_1} - \frac{1}{6}(\psi_{m-1,n_1} + \psi_{m+1,n_1}), m = \overline{2, n_2 - 2}, \\ \overline{F_{m,n}} = F_{m,n}, \forall m \in \overline{2, n_2 - 2}, n \in \overline{2, n_1 - 2}. \end{cases} \quad (13)$$

3. Найти матричные коэффициенты прогонки вперед по формулам (14), (15) $m = \overline{1, n_2 - 2}$:

$$\lambda_1 = -A^{-1}B, v_1 = A^{-1}\overline{F_1^T}, \quad (14)$$

$$\lambda_m = -(B\lambda_{m-1} + A)^{-1}B, v_m = (B\lambda_{m-1} + A)^{-1}(\overline{F_m^T} - Bv_{m-1}), m = \overline{2, n_2 - 2}. \quad (15)$$

4. Найти вектор-строку $\psi_{n_2-1}^T$ по формуле (16):

$$\psi_{n_2-1}^T = (B\lambda_{n_2-2} + A)^{-1}(\overline{F_{n_2-1}^T} - Bv_{n_2-2}). \quad (16)$$

5. Найти остальные строки матрицы-решения ψ_m^T по формулам (17):

$$m = \overline{n_2 - 2, 1} \quad \psi_m^T = \lambda_m \psi_{m+1}^T + v_m, m = \overline{n_2 - 2, 1}, v_{n_2-1} = \psi_{n_2-1}^T. \quad (17)$$

Матричный алгоритм прогонки (9)–(17) сохраняет шестой порядок погрешности согласно формулам (7), (8) для уравнения Пуассона.

Второе и третье уравнения системы (1) $\bar{w} = \bar{v}_x - \bar{u}_y$, $\bar{u} = \bar{\psi}_y$, $\bar{v} = -\bar{\psi}_x$ линейны относительно первых частных производных, которые можно вычислять независимо. Приведем квадратурные формулы первой производной с различными центрами шаблона.

Например, для уравнения $\bar{u} = \bar{\psi}_y$ получим:

$$\begin{cases} u_{(i,j)} = \frac{1}{h} \left(\frac{3}{4}(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) - \frac{3}{20}(\psi_{i+2,j} - \psi_{i-2,j}) + \frac{1}{60}(\psi_{i+3,j} - \psi_{i-3,j}) \right) + O(h^6), i = \overline{3, n_2 - 3}, j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ u_{(1,j)} = \frac{1}{h} \left(-\frac{\psi_{0,j}}{5} - \frac{13}{12}\psi_{1,j} + 2\psi_{2,j} - \psi_{3,j} + \frac{\psi_{4,j}}{3} - \frac{\psi_{5,j}}{20} \right) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ u_{(2,j)} = \frac{1}{12h} (8(\psi_{3,j} - \psi_{1,j}) - (\psi_{4,j} - \psi_{0,j})) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ u_{(n_2-1,j)} = -\frac{1}{h} \left(-\frac{\psi_{n_2,j}}{5} - \frac{13}{12}\psi_{n_2-1,j} + 2\psi_{n_2-2,j} - \psi_{n_2-3,j} + \frac{\psi_{n_2-4,j}}{3} - \frac{\psi_{n_2-5,j}}{20} \right) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ u_{(n_2-2,j)} = -\frac{1}{12h} (8(\psi_{n_2-3,j} - \psi_{n_2-1,j}) - (\psi_{n_2-4,j} - \psi_{n_2,j})) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}. \end{cases} \quad (18)$$

Аналогичные формулы можно записать для уравнений $\bar{v} = -\bar{\psi}_x$, $\bar{w} = \bar{v}_x - \bar{u}_y$. Рассмотрим уравнение динамики вихря в системе уравнений (1). Для ускорения численного решения задачи (1) использовался метод расщепления [11].

Аналитически метод n -кратного расщепления уравнения вихря для временного интервала $\tau_0 \cdot n$ можно записать в виде:

$$\frac{w^{k+i+1} - w^{k+i}}{\tau_0} + u^k \cdot w_x^{k+i} + v^k \cdot w_y^{k+i} = \frac{1}{\text{Re}} (w_{xx}^{k+i} + w_{yy}^{k+i}), i = \overline{0, n-1}. \quad (19)$$

Система рекуррентных уравнений (19) для вихря с замороженным полем скорости $(u^k(x, y), v^k(x, y)), i = \overline{0, n-1}, k = \text{const}, k = 1, 2, \dots$ состоит из n промежуточных шагов $i = \overline{0, n-1}$, верхний индекс i указывает номер промежуточного слоя времени в уравнении вихря (19), индекс k — номер кратного слоя времени в системе (19) (если k ратно n). Поля скорости и функции тока постоянны в уравнениях (19) при значениях $k = \text{const}$ и изменении индекса $i = \overline{0, n-1}$. В данной системе уравнений изменяется только поле вихря $w^{k+i}, i = \overline{0, n-1}$. Поле скорости скачком изменяется в системах (1), (19), когда временной индекс функции вихря увеличивается на n от k до $k + n$ в системе уравнений (19).

Идея расщепления системы уравнений (19) заключается в уменьшении накопления ошибки округления и времени вычислений при ее решении. Дифференциальные операторы по координате в (19) аппроксимированы во внутренних узлах с точностью $O(h^6)$, как и все уравнения системы (1), граничные условия с точностью $O(h^4)$, а по времени с точностью $O(\tau)$.

Таким образом, за время $\tau_0 \cdot n$, решая n раз уравнение (19), получим скачок по времени $\tau_0 \cdot n$ (в n раз больший, чем последовательное решение системы уравнений (1)) и уменьшим ошибку округления, не решая другие уравнения системы (1) внутри системы (19).

Уравнение (19) линейно относительно координатных производных $w_x^i, w_y^i, w_{xx}^i, w_{yy}^i$. В работе [11] показано, что для спектральной устойчивости уравнения динамики вихря (19) достаточно выбрать соотношение временного и пространственного шагов в виде неравенства $\tau_0 \leq \frac{3}{16} h^2 \text{Re}$. Именно такой максимальный временной шаг задавался авторами в программе.

Для первых частных производных уравнения (19) использовались формулы аппроксимации, например, для w_y (формулы для производной w_x аналогичны):

$$\begin{cases} w_{y(i,j)} = \frac{1}{h} \left(\frac{3}{4}(w_{i+1,j} - w_{i-1,j}) - \frac{3}{20}(w_{i+2,j} - w_{i-2,j}) + \frac{1}{60}(w_{i+3,j} - w_{i-3,j}) \right) + O(h^6), i = \overline{3, n_2 - 3}, j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{y(1,j)} = \frac{1}{h} \left(-\frac{w_{0,j}}{5} - \frac{13}{12}w_{1,j} + 2w_{2,j} - w_{3,j} + \frac{w_{4,j}}{3} - \frac{w_{5,j}}{20} \right) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{y(2,j)} = \frac{1}{12h} (8(w_{3,j} - w_{1,j}) - (w_{4,j} - w_{0,j})) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{y(n_2-1,j)} = -\frac{1}{h} \left(-\frac{w_{n_2,j}}{5} - \frac{13}{12}w_{n_2-1,j} + 2w_{n_2-2,j} - w_{n_2-3,j} + \frac{w_{n_2-4,j}}{3} - \frac{w_{n_2-5,j}}{20} \right) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{y(n_2-2,j)} = -\frac{1}{12h} (8(w_{n_2-3,j} - w_{n_2-1,j}) - (w_{n_2-4,j} - w_{n_2,j})) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}. \end{cases} \quad (20)$$

Вторые частные производные w_{yy} в (19) имеют вид:

$$\begin{cases} w_{yy(i,j)} = \frac{1}{h^2} \left(-\frac{49}{18} w_{i,j} + \frac{3}{2} (w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - \frac{3}{20} (w_{i+2,j} + w_{i-2,j}) + \frac{1}{90} (w_{i+3,j} + w_{i-3,j}) \right) + O(h^6), i = \overline{3, n_2 - 3}, j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{yy(1,j)} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{137}{180} w_{0,j} - \frac{49}{60} w_{1,j} - \frac{17}{12} w_{2,j} + \frac{47}{18} w_{3,j} - \frac{19}{12} w_{4,j} + \frac{31}{60} w_{5,j} - \frac{13}{180} w_{6,j} \right) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{yy(2,j)} = \frac{1}{h^2} \left(-\frac{5}{2} w_{2,j} + \frac{4}{3} (w_{1,j} + w_{3,j}) - \frac{1}{12} (w_{0,j} + w_{4,j}) \right) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{yy(n_2-1,j)} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{137}{180} w_{n_2,j} - \frac{49}{60} w_{n_2-1,j} - \frac{17}{12} w_{n_2-2,j} + \frac{47}{18} w_{n_2-3,j} - \frac{19}{12} w_{n_2-4,j} + \frac{31}{60} w_{n_2-5,j} - \frac{13}{180} w_{n_2-6,j} \right) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{yy(n_2-2,j)} = \frac{1}{h^2} \left(-\frac{5}{2} w_{n_2-2,j} + \frac{4}{3} (w_{n_2-1,j} + w_{n_2-3,j}) - \frac{1}{12} (w_{n_2,j} + w_{n_2-4,j}) \right) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}. \end{cases} \quad (20)$$

Аналогичные формулам (20) записываются формулы для производной w_{xx} .

Согласно алгоритму А. Salih [1] предварительно необходимо обновить значения функции вихря w на границе прямоугольника и только потом решать уравнение вихря (19) во внутренних точках каверны.

Разложим в ряд Тейлора функцию тока в первом координатном узле на расстоянии h от левой стенки вдоль оси x , которая нормальна к левой стенке:

$$\psi_1 = \psi_0 + \psi_x h + \psi_{xx} \frac{h^2}{2} + \psi_{xxx} \frac{h^3}{6} + \psi_{xxxx} \frac{h^4}{24} + \psi_{xxxxx} \frac{h^5}{120} + O(h^6). \quad (21)$$

Из уравнения $\bar{u} = \bar{\psi}_y = 0$ следует, что на боковых стенках функция тока не меняется, а из уравнения $\bar{v} = -\bar{\psi}_x = 0$ следует, что функция тока не меняется на нижнем и верхнем отрезке каверны, поэтому на четырех сторонах прямоугольной каверны положим функцию тока равной нулю.

Учтем, что на левой стенке каверны $\psi_0 = 0, \psi_x = -v, \psi_{xx} = -w$ и перепишем (21):

$$\psi_1 = -vh - w \frac{h^2}{2} + \psi_{xxx} \frac{h^3}{6} + \psi_{xxxx} \frac{h^4}{24} + \psi_{xxxxx} \frac{h^5}{120} + O(h^6) \Leftrightarrow w = -\frac{2}{h} v - \frac{2\psi_1}{h^2} + \psi_{xxx} \frac{h}{3} + \psi_{xxxx} \frac{h^2}{12} + \psi_{xxxxx} \frac{h^3}{60} + O(h^4). \quad (22)$$

Из уравнения (22) видно, что достаточно аппроксимировать производные для функции тока $\psi_{xxx}, \psi_{xxxx}, \psi_{xxxxx}$ на левой границе соответственно с 3-м, 2-м, 1-м порядками погрешности. Уравнение (22) имеет инвариантный вид, так как порядок производной и степень шага h имеют одинаковую четность. Например, для ψ_{xxxxx} , h^3 имеем пятый и третий порядок соответственно, поэтому произведение разностного оператора ψ_{xxxxx} на h^3 не изменит знак и имеет одинаковый вид относительно правой и левой стенки.

В программе использовалась следующая аппроксимация производных для формулы (22) (в каждой формуле (23) индекс j меняется в пределах $j = \overline{1, n_1 - 1}$):

$$\begin{cases} w_{y(0,j)}^{(3)} h = \frac{1}{h^2} \left(-\frac{49}{8} w_{0,j} + 29 w_{1,j} - \frac{461}{8} w_{2,j} + 62 w_{3,j} - \frac{307}{8} w_{4,j} + 13 w_{5,j} - \frac{15}{8} w_{6,j} \right) + O(h^4), \\ w_{y(0,j)}^{(4)} h^2 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{35}{6} w_{0,j} - 31 w_{1,j} + \frac{137}{2} w_{2,j} - \frac{242}{3} w_{3,j} + \frac{107}{2} w_{4,j} - 19 w_{5,j} + \frac{17}{6} w_{6,j} \right) + O(h^4), \\ w_{y(0,j)}^{(5)} h^3 = \frac{1}{h^2} \left(-\frac{7}{2} w_{0,j} + 20 w_{1,j} - \frac{95}{2} w_{2,j} + 60 w_{3,j} - \frac{85}{2} w_{4,j} + 16 w_{5,j} - \frac{5}{2} w_{6,j} \right) + O(h^4), \\ w_{y(n_2,j)}^{(3)} h = \frac{1}{h^2} \left(-\frac{49}{8} w_{n_2,j} + 29 w_{n_2-1,j} - \frac{461}{8} w_{n_2-2,j} + 62 w_{n_2-3,j} - \frac{307}{8} w_{n_2-4,j} + 13 w_{n_2-5,j} - \frac{15}{8} w_{n_2-6,j} \right) + O(h^4), \\ w_{y(n_2,j)}^{(4)} h^2 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{35}{6} w_{n_2,j} - 31 w_{n_2-1,j} + \frac{137}{2} w_{n_2-2,j} - \frac{242}{3} w_{n_2-3,j} + \frac{107}{2} w_{n_2-4,j} - 19 w_{n_2-5,j} + \frac{17}{6} w_{n_2-6,j} \right) + O(h^4), \\ w_{y(n_2,j)}^{(5)} h^3 = \frac{1}{h^2} \left(-\frac{7}{2} w_{n_2,j} + 20 w_{n_2-1,j} - \frac{95}{2} w_{n_2-2,j} + 60 w_{n_2-3,j} - \frac{85}{2} w_{n_2-4,j} + 16 w_{n_2-5,j} - \frac{5}{2} w_{n_2-6,j} \right) + O(h^4). \end{cases} \quad (23)$$

В работе [1] А. Salih указывает, что устойчивость численного решения задачи (1) зависит от порядка аппроксимации краевых значений функции вихря в уравнении, аналогичном уравнению (23). Например, он утверждает, что аппроксимация граничных условий вихря с первым порядком более устойчива, чем аппроксимация со вторым порядком. Используя метод расщепления уравнения вихря (19) явной разностной схемы авторами не было замечено влияния порядка аппроксимации краевых условий вихря на устойчивость задачи даже при аппроксимации с четвертым порядком. Устойчивость решения общей задачи (1) зависела только от числа Рейнольдса Re и от выбора начальных условий.

Аналогично формуле (22) для вихря на нижней (верхней стенке) имеем

$$w = \frac{2}{h} u - \frac{2\psi_1}{h^2} + \psi_{yyy} \frac{h}{3} + \psi_{yyyy} \frac{h^2}{12} + \psi_{yyyyy} \frac{h^3}{60} + O(h^4). \quad (24)$$

Профиль начальной горизонтальной компоненты скорости (2), (3) и вертикальной компоненты (4) относится к методу торможения и устойчив при числе Рейнольдса $Re \leq 3000$. Метод разгона предполагает неподвижную начальную жидкость в каверне и впервые предложен А.А. Фоминым и Л.Н. Фоминой в работе [2]. Верхняя крышка каверны, медленно разгоняясь из неподвижного состояния, увлекает за собой жидкость в закрытой каверне. В работе [2] Фомины предложили вычислять зависимость скорости верхней крышки от времени согласно формуле

$$v(x,k)=0, u(x,k)=\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}(2t/t_1-1)\right)+1\right), & 0 \leq t \leq t_1, \\ 1, & t > t_1. \end{cases}$$

В данной работе с методом разгона использовалась аналогичная формула

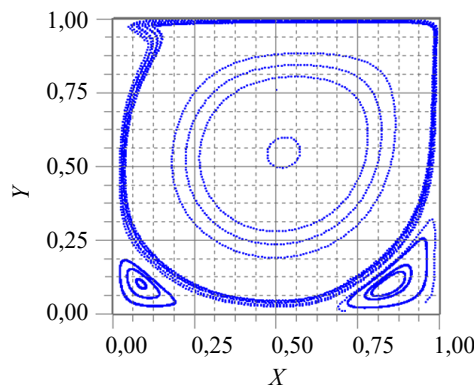
$$v(x,k)=0, u(x,k)=\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi t}{2t_1}\right), & 0 \leq t \leq t_1, \\ 1, & t > t_1. \end{cases} \quad (25)$$

```

horosho!                24045 u  2.398584847328107E-003
-0.117589460964839
uu      24045   1.26213918814584   -0.407936688073471
vv      24045   0.241397444300959   -0.663734592934930
ww      24045   104.601518805320    -103.604719388108
wwi0=    94 j0=    100
wwi1=   100 j1=     9

```

a)



б)

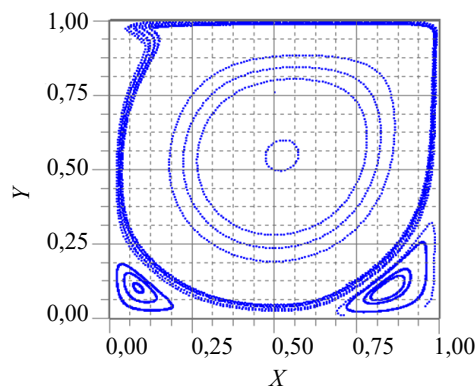
Рис. 1. Результаты решения: а — $Re = 2000$, метод торможения, нижняя граница функции тока (первое число), границы горизонтальной и вертикальной компонент скорости, функции вихря в момент $t = 24000$;
б — предельное поле линий тока в методе торможения $Re = 2000$, $n_1 \times n_2 = 100 \times 100$

```

-0.117589460964840
uu      1260159   1.26213918814584   -0.407936688073472
vv      1260159   0.241397444300959   -0.663734592934934
ww      1260159   104.601518805320    -103.604719388108
wwi0=    94 j0=    100
wwi1=   100 j1=     9

```

a)



б)

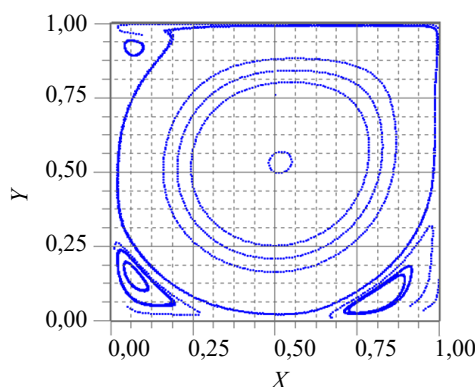
Рис. 2. Результаты решения: а — $Re = 2000$, метод разгона, нижняя граница функции тока (первое число), границы горизонтальной и вертикальной компонент скорости, функции вихря в момент $t = 1260000$;
б — предельное поле линий тока в методе разгона $Re = 2000$, $n_1 \times n_2 = 100 \times 100$

Сравнивая интервалы изменения величин функции тока, поля горизонтальной и вертикальной скорости, функции вихря на рис. 1 и рис. 2 видим, что они совпадают с точностью до 16 значащих цифр. Следовательно, совпадают поля линий тока на рис. 1 и рис. 2.

Таким образом, методы разгона и торможения начального поля скорости (2), (3), (4) эквивалентны для чисел Рейнольдса $Re \leq 3000$. Однако время установления стационарных полей в методе торможения в десятки раз (в 57 раз) меньше, чем время решения задачи (1) в методе разгона.

```
-9.807891140697904E-002
uu      1044968      1.0000000000000000      -0.362267751647030
vv      1044968      0.222611083056212      -0.543539677038107
ww      1044968      120.628076257385      -133.907927009122
wwi0=      89 j0=      100
wwi1=      100 j1=      9
```

a)



б)

Рис. 3. Результаты решения: а — $Re = 8000$, метод разгона, нижняя граница функции тока (первое число), границы горизонтальной и вертикальной компонент скорости, функции вихря в момент $t = 1044000$; б — предельное поле линий тока в методе разгона $Re = 8000$, $n_1 \times n_2 = 100 \times 100$

Поле линий тока на рис. 3б имеет 3 вихря второго порядка, расположенных в углах каверны и полностью совпадает с полем линий тока в работе [13, с. 22] при $Re = 8000$. Из рис. 1, 2, 3 видно, что максимальные по модулю значения функции вихря образуются в узлах на верхней и правой стенке каверны недалеко от точек сопряжения профиля скорости, либо вблизи особых точек скорости в верхних углах каверны [14].

Обсуждение и заключение. Предложен алгоритм численного решения двумерной гидродинамической задачи в прямоугольной каверне в переменных «функция тока — вихрь». Аппроксимация уравнений в системе (1) имеет шестой порядок погрешности во внутренних узлах и четвертый в граничных узлах. Впервые предложен метод торможения с начальным полем горизонтальной скорости посредством гладкого соединения двух синусоид. Начальные условия в методе торможения допускают числа Рейнольдса $Re \leq 3000$. Численно показана эквивалентность решений методом разгона и методом торможения начальных условий с совпадением конечных полей функции тока, поля горизонтальной и вертикальной компонент скорости и поля вихря с точностью до 15 значащих цифр. Численно решена задача в переменных «функция тока — вихрь» с числом $Re = 8000$. При этом ее решение и структура основного и вторичных вихрей качественно совпадает с работами других авторов.

Список литературы / References

1. Salih A. *Streamfunction — Vorticity Formulation*. Department of Aerospace Engineering Indian Institute of Space Science and Technology, Thiruvananthapuram; 2013:10 p.
2. Фомин А.А., Фомина Л.Н. Неявный итерационный полилинейный рекуррентный метод в применении к решению задач динамики несжимаемой жидкости. *Компьютерные исследования и моделирование*. 2015;7(1):35–50. Fomin A.A., Fomina L.N. The implicit iterated polynetic recurrent method in application to solving the problems of the dynamics of inconsistent fluid. *Computation research and modelling*. 2015;7(1): 35–50. (In Russ.)
3. Петров А.Г. Высокоточные численные схемы решения плоских краевых задач для полигармонического уравнения и их применение к задачам гидродинамики. *Прикладная математика и механика*. 2023;87(3):343–368. <https://doi.org/10.31857/S0032823523030128>
4. Петров А.Г. High-precision numerical schemes for solving plane boundary value problems for a polyharmonic equation and their application to problems of hydrodynamics. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2023;87(3):343–368 (In Russ.) <https://doi.org/10.31857/S0032823523030128>
5. Сухинов А.И., Колгунова О.В., Гирмай М.З., Нахом О.С. Двумерная гидродинамическая модель прибрежных систем, учитывающая испарение. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):9–21. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-9-21>

Sukhinov A.I., Kolgunova O.V., Girmay M.Z., Nakhom O.S. A two-dimensional hydrodynamic model of coastal systems, taking into account evaporation. *Computation Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):9–21. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-9-21>

5. Волосов Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Басараб М.А. *Сборник статей по гидродинамике, 2-е издание*. Москва: Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II; 2023. 231 с.

Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Pastukhov D.F., Pastukhov Yu.F., Basarab M.A. *Collection of articles on hydrodynamics. 2nd edition*. Moscow: Moscow State Transport University of Emperor Nicholas II; 2023. 231 p. (In Russ.)

6. Ершова Т.Я. Краевая задача для дифференциального уравнения третьего порядка с сильным пограничным слоем. *Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика*. 2020;1:30–39. <https://doi.org/10.3103/S0278641920010057>

Ershova T.Ya. Boundary value problem for a third-order differential equation with a strong boundary layer. *Bulletin of Moscow University. Episode 15: Computational mathematics and cybernetics*. 2020;1:30–39. (In Russ.) <https://doi.org/10.3103/S0278641920010057>

7. Ситникова М.А., Скульский О.И. Течение моментной анизотропной жидкости в тонких слоях. *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2015;28(1):56–62.

Sitnikova M.A., Skulsky O.I. Flow of momentary anisotropic fluid in thin layers. *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2015;28(1): 56–62. (In Russ.)

8. Волосов К.А., Вдовина Е.К., Пугина Л.В. Моделирование «пульсирующих» режимов динамики свёртывания крови. *Математическое моделирование*. 2014;26(12):14–32.

Volosov K.A., Vdovina E.K., Pugina L.V. Modeling of “pulsatile” modes of blood coagulation dynamics. *Math modeling*. 2014;26(12):14–32. (In Russ.)

9. Бузмакова, М.М., Гилев В.Г., Русаков С.В. Экспериментальное исследование реокинетики эпоксидного связующего, модифицированного фуллеренами C60. *Вестник Пермского университета. Физика*. 2019;2:35–40. <https://doi.org/10.17072/1994-3598-2019-2-35-40>

Buzmakova M.M., Gilev V.G., Rusakov S.V. Experimental study of the rheokinetics of an epoxy binder modified with C60 fullerenes. *Bulletin of Perm University. Physics*. 2019;2:35–40. (In Russ.) <https://doi.org/10.17072/1994-3598-2019-2-35-40>

10. Сидорякина В.В., Соломаха Д.А. Симметризованные варианты методов Зейделя и верхней релаксации решения двумерных разностных задач эллиптического типа. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):12–19. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-12-19>

Sidoryakina V.V., Solomaha D.A. Symmetrized versions of the Seidel and upper relaxation methods for solving two-dimensional difference problems of elliptic. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):12–19. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-12-19>

11. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. N-кратное расщепление явной разностной схемы для уравнения вихря в вязкой несжимаемой жидкости. *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2023;63(4):12–21. <https://doi.org/10.17072/1993-0550-2023-4-12-21>

Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Karlov M.I., Pastukhov D.F., Pastukhov Yu.F. The N-fold distribution of the obvious variable scheme for the equalization of the vortex in the viscous incompatible fluid. *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2023;63(4):12–21. (In Russ.) <https://doi.org/10.17072/1993-0550-2023-4-12-21>

12. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы: учебное пособие для студентов физико-математических специальностей высших учебных заведений*. Москва: Бином. Лаборатория знаний; 2011. 636 с.

Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Numerical methods: a textbook for students of physics and mathematics specialties of higher educational institutions*. Moscow: Binom. lab. Knowledge; 2011. 636 p. (In Russ.)

13. Kuhlmann H.C., Romano F. The Lid-Driven cavity. In book: Gelfgat A. (ed.) *Computational Modelling of Bifurcations and Instabilities in Fluid Dynamics. Computational Methods in Applied Sciences*. Springer, Cham. 2018;50:233–309. https://doi.org/10.1007/978-3-319-91494-7_8

14. Сперанская А.А. *Пограничные слои в геофизической гидродинамике*: диссертация доктора физико-математических наук. Москва; 1982. 345 с.

Speranskaya A.A. *Border layers in geophysical hydrodynamics*: dissertation Doctor of Physical and Mathematical Sciences. Moscow; 1982. 345 p. (In Russ.)

Об авторах:

Наталья Константиновна Волосова, аспирант Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана (105005, Российская Федерация, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, стр. 1), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9151-1000), navalosova@yandex.ru

Константин Александрович Волосов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Российская Федерация, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9151-1000), [SPIN-код](https://spina.org.ru), konstantinvolosov@yandex.ru

Александра Константиновна Волосова, кандидат физико-математических наук, начальник аналитического отдела ООО «Трамплин» Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Российская Федерация, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9), [ORCID](#), [SPIN-код](#), alya01@yandex.ru

Михаил Иванович Карлов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Московского физико-технического института (141701, ГСП-4, Российская Федерация, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9), [ORCID](#), karlov.mipt@gmail.com

Дмитрий Феликсович Пастухов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), [ORCID](#), [SPIN-код](#), dmitrij.pastuhov@mail.ru

Юрий Феликсович Пастухов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), [ORCID](#), [SPIN-код](#), pulsar1900@mail.ru

Заявленный вклад авторов:

Н.К. Волосова: постановка задачи; написание черновика рукописи; формулировка идей исследования, целей и задач.

К.А. Волосов: научное руководство; разработка методологии.

А.К. Волосова: перевод; изучение истории задачи; поиск литературы.

М.И. Карлов: формальный анализ.

Д.Ф. Пастухов: визуализация; валидация; разработка программного обеспечения.

Ю.Ф. Пастухов: тестирование существующих компонентов кода.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Natalya K. Volosova, Post-graduate Student of Bauman Moscow State Technical University (2nd Baumanskaya St. 5–1, Moscow, 105005, Russian Federation), [ORCID](#), navalosova@yandex.ru

Konstantin A. Volosov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics of the Russian University of Transport (Obraztsova St. 9–9, Moscow, GSP-4, 127994, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), konstantinvolosov@yandex.ru

Aleksandra K. Volosova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Chief Analytical Department “Tramplin” LLC, Russian University of Transport (Obraztsova St. 9–9, Moscow, GSP-4, 127994, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), alya01@yandex.ru

Mikhail I. Karlov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (9, Institutsky Lane, GSP-4, Dolgoprudny, 141701, Russian Federation), [SPIN-code](#), karlov.mipt@gmail.com

Dmitriy F. Pastukhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (Blokhin St. 29, Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), [ORCID](#), [SPIN-code](#), dmitrij.pastuhov@mail.ru

Yuriy F. Pastukhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (Blokhin St. 29, Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), [ORCID](#), [SPIN-code](#), pulsar1900@mail.ru

Contributions of the authors:

N.K. Volosova: setting the task; writing a draft of the manuscript; formulation of research ideas, goals and objectives.

K.A. Volosov: scientific guidance; methodology development.

A.K. Volosova: translation; study of the history of the task; literature.

M.I. Karlov: formal analysis.

D.F. Pastukhov: visualization; validation; software.

Yu.F. Pastukhov: testing of existing code components.

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 12.02.2025

Поступила после рецензирования / Revised 19.03.2025

Принята к публикации / Accepted 28.04.2025