МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
MATHEMATICAL MODELLING

CC BY

Check for updates

Оригинальное эмпирическое исследование

УДК 534.11

https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-34-43

Исследование влияния движения границ на колебательные и резонансные свойства механических систем переменной длины

А.Л. Семенов[1], В.Л. Литвинов[2], М.В. Шамолин[3]
[1, 3] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация
[2] Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация
shamolin@rambler.ru

Аннотация
Введение. Широкое распространение в технике объектов с движущимися границами обусловливает необходимость развития методов математического моделирования и создания алгоритмического программного обеспечения для соответствующего анализа. Настоящая работа представляет собой систематизированный обзор материалов, в которых исследуются колебательные и резонансные свойства механических систем с движущимися границами, таких как канаты подъемных устройств, гибкие передаточные механизмы, струны, стержни, балки переменной длины и т. д.
Материалы и методы. Сформулирована постановка и разработаны численные методы решения нелинейных задач, описывающих волновые процессы и резонансные свойства объектов с движущимися границами.
Результаты исследования. Проведен анализ отражения волн от движущихся границ, включая изменение их энергии и частоты. Показано, что энергия системы возрастает при движении границы навстречу волнам и убывает при совпадении направлений. Получены критерии, определяющие условия, при которых необходимо учитывать движение границ для корректного расчета амплитуд колебаний. Численные результаты демонстрируют влияние скорости движения границ и демпфирования на динамику системы.
Обсуждение и заключение. Результаты работы имеют практическое значение для проектирования и эксплуатации механических систем с переменной геометрией. Приведенные результаты позволяют на стадии проектирования предотвратить возможность возникновения колебаний большой амплитуды в механических объектах с движущимися границами. Данные задачи мало изучены и требуют дальнейшего исследования.

Ключевые слова: резонансные свойства, колебания систем с движущимися границами, волновые процессы, демпфирование, амплитуда колебаний

Для цитирования. Семенов А.Л., Литвинов В.Л., Шамолин М.В. Исследование влияния движения границ на колебательные и резонансные свойства механических систем переменной длины. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):34–43. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-34-43

Original Empirical Research

Study of the Influence of Boundary Motion on the Oscillatory and Resonance Properties of Mechanical Systems with Variable Length

Alexey L. Semenov[1], Vladimir L. Litvinov[2], Maxim V. Shamolin[3]
[1, 3] Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation
[2] Samara State Technical University, Samara, Russian Federation
shamolin@rambler.ru

Abstract
Introduction. The widespread use of technical systems with moving boundaries necessitates the development of mathematical modelling methods and algorithmic software for their analysis. This paper presents a systematic review

© Семенов А.Л., Литвинов В.Л., Шамолин М.В., 2025

of studies examining the oscillatory and resonance properties of mechanical systems with moving boundaries, such as hoisting cables, flexible transmission mechanisms, strings, rods, beams with variable length, and others.

Materials and Methods. A problem statement is formulated, and numerical methods are developed for solving nonlinear problems that describe wave processes and the resonance properties of systems with moving boundaries.

Results. An analysis is conducted on wave reflection from moving boundaries, including changes in their energy and frequency. It is shown that the energy of the system increases when the boundary moves toward the waves and decreases when moving in the same direction as the waves. Criteria are obtained to determine the conditions under which the boundary motion must be considered for accurate calculation of oscillation amplitudes. Numerical results demonstrate the influence of boundary speed and damping on the system dynamics.

Discussion and Conclusion. The findings have practical significance for the design and operation of mechanical systems with variable geometry. The results make it possible to prevent large-amplitude oscillations in mechanical objects with moving boundaries at the design stage. These problems have not been sufficiently studied and require further research.

Keywords: resonance properties, vibrations of systems with moving boundaries, wave processes, damping, vibration amplitude

For Citation. Semenov A.L., Litvinov V.L., Shamolin M.V. Study of the Influence of Boundary Motion on the Oscillatory and Resonance Properties of Mechanical Systems with Variable Length. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):34–43. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-34-43

Введение. В области динамики упругих систем особый практический интерес представляют задачи, связанные с колебаниями конструкций, геометрические параметры которых изменяются во времени. Типичными примерами таких систем служат канаты подъемных устройств [1–8], гибкие элементы передаточных механизмов [4, 6, 9], бурильные установки [10] и т. д. Многочисленные исследования в области динамики подъемных канатов выявили необходимость разработки новых подходов к анализу поведения одномерных объектов с переменными геометрическими характеристиками.

Аналогичные задачи с движущимися границами возникают и при решении уравнений теплопереноса, теплопроводности и диффузии (в частности, задача Стефана). Такие задачи рассмотрены в работах Л.А. Уваровой [11], В.А. Кудинова [12] и других авторов.

Исследованию смежного класса задач, посвященных построению двумерных и трехмерных математических моделей морских и прибрежных систем, мелководных водоемов, процессам волновой гидродинамики, гидрофизики, исследованию корректности постановок задач, описываемых уравнениями эллиптического типа, посвящены работы А.И. Сухинова и его учеников [13, 14]. Авторы рассматривают задачи построения и исследования двумерно-одномерных схем расщепления и методы решения сеточных задач диффузии-конвекции-реакции, а на их основе — экономичных параллельных алгоритмов.

Результаты А.И. Сухинова, А.М. Атаян, А.В. Никитиной, А.Е. Чистякова, В.В. Сидорякиной [15] и других авторов являются основой для исследования задач прогнозирования неблагоприятных и опасных явлений, в т. ч. волновых процессов на границах в природных и техногенных системах; массопереноса вещества через подвижную границу, включая штормовые нагоны, затопление прибрежных территорий, образование зон гипоксии в морских и прибрежных системах на основе прецизионных моделей; дистанционного зондирования и искусственного интеллекта. В работах вышеперечисленных авторов исследованы вопросы существования и единственности решений линеаризованных начально-краевых задач для построенных моделей.

Задача о колебаниях систем с движущимися границами связана с получением решения систем дифференциальных уравнений в частных производных в переменных во времени областях, а также интегро-дифференциальных уравнений с изменяющимися во времени пределами интегрирования и ядрами, введением понятия «собственных чисел» и «собственных функций» для объектов переменной длины, построением общей схемы исследования краевых задач рассматриваемого класса, основанной на синтезе теории интегральных уравнений и асимптотических методов, решением характерных модельных краевых задач в области динамики подъемных канатов, балок, стержней и струн переменной длины, изучением их резонансных свойств. Такие задачи в настоящее время изучены недостаточно. Использование известных методов математической физики ограничено в основном классом задач с фиксированными границами.

Сложности, возникающие при постановке такого рода задач и получении их решений, объясняет тот факт, что до настоящего времени не существует достаточно общего подхода к анализу особенностей динамики таких систем. Полученные результаты ограничены качественным описанием динамических явлений, а вот получению количественных характеристик, которые могли бы иметь практическую ценность, в известных публикациях уделено недостаточное внимание.

Теоретическая значимость результатов настоящей работы заключается в разработке и исследовании новых математических моделей, описывающих колебания объектов с движущимися границами в форме дифференциальных уравнений в частных производных.

Практическая значимость заключается в обобщении методики моделирования и численного исследования резонансных свойств объектов, состояние которых описывается краевыми задачами с движущимися границами.

Возникновение колебаний большой амплитуды в указанных объектах часто бывает недопустимым, поэтому на первом плане здесь стоит анализ резонансных свойств.

С математической точки зрения подобные задачи требуют решения уравнений гиперболического типа в областях с изменяющимися границами. Существенные сложности, возникающие при описании таких систем, обусловливают преимущественное использование приближенных методов анализа. Среди аналитических подходов наибольшую эффективность демонстрируют методы, основанные на специальных преобразованиях переменных [16, 17], а также методы, использующие принцип суперпозиции встречных волновых процессов [18]. Отдельного внимания заслуживает подход [19], предполагающий применение комплекснозначных замен переменных, позволяющих свести исходную задачу к анализу уравнения Лапласа.

Однако возможности точных аналитических методов существенно ограничены [1–3, 20–21]. Среди приближенных методов особого внимания заслуживает метод Канторовича-Галеркина [10, 22], а также подход, основанный на построении решений интегро-дифференциальных уравнений [23]. В системах с движущимися границами наблюдается два вида резонансных явлений [4] — установившийся резонанс и прохождение через резонанс.

Если на систему с переменными во времени размерами действует сила, изменение которой согласовано с изменяющейся частотой собственных колебаний, то явление непрерывного увеличения амплитуды колебаний называется установившимся (обобщенным) резонансом. Прохождение через резонанс — явление резкого увеличения амплитуды в течение конечного промежутка времени, когда мгновенная частота одного из собственных колебаний проходит через значение возмущающей частоты.

Прохождение через резонанс происходит в течение ограниченного временного интервала и амплитуда колебаний в этом случае не достигает значений, характерных для установившегося резонанса. Однако, когда затухание велико, а скорость движения границ мала, указанные выше величины резонанса близки между собой. В такой ситуации для оценки амплитуды колебаний, возникающих при прохождении через резонанс, нет необходимости решать задачу с подвижными границами. Достаточно зафиксировать границы в резонансной точке и вычислить амплитуду установившихся колебаний, которая будет близка к максимальной амплитуде, наблюдаемой при прохождении через резонанс. Амплитуда колебаний при неподвижных границах выступает в качестве верхней границы для искомой величины.

В связи с этим возникает потребность в расширении круга задач, связанных с моделированием колебаний объектов, имеющих подвижные границы, а также разработкой новых методов их решения и создания соответствующих программных средств, которая и формулируется в виде основной цели настоящей работы. В работе исследованы закономерности отражения волн от движущихся границ в системах, колебания которых описываются волновым уравнением, а также особенности взаимодействия продольных волн с движущейся границей. Изучено влияние демпфирующих сил на амплитуду колебаний, возникающих в системах с движущимися границами при прохождении через резонанс. Получены неравенства, определяющие области, где необходимо учитывать движение границ. Данная работа представляет собой систематизированный обзор материалов, изложенных авторами в рамках докладов на научных конференциях [24–26], в которых исследуются колебательные и резонансные свойства механических систем с движущимися границами.

Материалы и методы

Исследование закономерностей отражения волн от движущихся границ. Пусть колебательные процессы системы описываются волновым уравнением:

$$U_{tt}(x,t) - a^2 U_{xx}(x,t) = 0. \tag{1}$$

Здесь $U(x,t)$ — функция продольного или поперечного смещения объекта от положения равновесия; t — время; x — пространственная координата.

Колеблющийся объект (струна, стержень) с одной стороны не ограничен, вторая граница движется по закону $x = l(t)$. На движущуюся границу падает синусоидальная волна $g(x + at)$ где

$$g(z) = A\sin(wz + \gamma), \tag{2}$$

а от границы отражается волна $q(x - at)$.

Ставится задача о нахождении изменения энергии отраженной волны по сравнению с падающей при равномерном и периодическом движении границы. Решение уравнения (1) записывается в виде:

$$U(x,t) = g(x + at) + q(x - at). \tag{3}$$

Энергия участка объекта ($x \in [a;b]$) находится по формуле:

$$W = \frac{1}{2}\rho\int_a^b (a^2 U_x^2(x,t) + U_t^2(x,t))dx, \tag{4}$$

где ρ — линейная плотность массы объекта.

После подстановки в (4) выражения (3) получим:

$$W = \frac{1}{2}\rho a^2 \int_a^b ((g'(x + at))^2 + (q'(x - at))^2)dx.$$

Таким образом, энергия системы состоит из двух частей, то есть из энергии падающей волны и энергии отраженной волны:

$$W_{пад.} = \frac{1}{2}\rho a^2 \int_a^b (g'(x+at))^2 dx, \tag{5}$$

$$W_{отр.} = \frac{1}{2}\rho a^2 \int_a^b (q'(x-at))^2 dx. \tag{6}$$

Будем использовать также безразмерную характеристику

$$W_0 = \frac{W_{отр.}}{W_{пад.}} \tag{7}$$

и безразмерные переменные:

$$U(x,t) = AY(\xi,\tau),\ \ \tau = wat,\ \ \xi = wx,\ \ p = wz,\ \ q(z) = AQ(p),\ \ g(z) = AG(p).$$

При этом выражения (1)–(3), (5), (6) примут следующий вид:

$$Y_{\tau\tau}(\xi,\tau) - Y_{\xi\xi}(\xi,\tau) = 0, \tag{8}$$

$$G(p) = \sin(p+\gamma), \tag{9}$$

$$Y(\xi,\tau) = G(\xi+\tau) + Q(\xi-\tau), \tag{10}$$

$$W_{пад.} = C\int_{a_0}^{b_0} (G'(\xi+\tau))^2 d\xi,\ \ W_{отр.} = C\int_{a_0}^{b_0} (Q'(\xi-\tau))^2 d\xi,$$

где $C = \frac{1}{2}\rho a^2 A^2 w,\ \ a_0 = wa,\ \ b_0 = wb.$

Рассмотрим граничное условие на движущейся границе вида

$$U(l(t),t) = 0 \tag{11}$$

при равномерном движении границы $l(t)=Vt$.

В безразмерных переменных граничное условие будет иметь вид:

$$Y(L(\tau),\tau) = 0, \tag{12}$$

где

$$L(\tau) = \alpha\tau,\ \ \alpha = V/a\ \ (\alpha < 1). \tag{13}$$

Подставим решение (10) в граничное условие (12). В результате получим:

$$G(L(\tau)+\tau) + Q(L(\tau)-\tau) = 0. \tag{14}$$

Обозначим $P = (L(\tau) - \tau)$ и найдем отсюда τ: $\tau = \varphi(P)$:

Выразим: $L(\tau)+\tau = P + 2\varphi(P)$. При законе движения границы $\varphi(P) = \frac{z}{\alpha - 1}$ уравнение (14) примет вид: $Q(P) = -G\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}P\right).$

С учетом того, что падающая волна определяется выражением (9), для отраженной волны получим:

$$Q(P) = -\sin\left(-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}P + \gamma\right). \tag{15}$$

Анализ решения (15) показывает, что амплитуда при отражении от движущейся границы не изменяется, а частота изменяется согласно эффекту Доплера в $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$ раз. При движении границы навстречу волне ($\alpha > 0$) частота увеличивается, а при движении сонаправленно волне ($\alpha < 0$) — уменьшается.

Найдем изменение энергии одной падающей волны при отражении.

Длина падающей волны (9) равна 2π, а длина отраженной — $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}2\pi,$
поэтому

$$W_{пад.} = C\int_0^{2\pi} \cos^2(P+\gamma)dP = C\pi, \tag{16}$$

$$W_{отр.} = C\int_0^{2\pi\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \cos^2\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}P+\gamma\right)dP = C\pi\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right),$$

$$W_0 = \frac{W_{отр.}}{W_{пад.}} = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}.$$

Энергия системы увеличивается при движении границы навстречу волнам и убывает при сонаправленном движении.

Рассмотрим периодическое движение границы

$$l(t) = B\sin(\omega t). \tag{17}$$

Согласуем движение границы с набегающими волнами таким образом, чтобы за время набегания одной волны ($T = 2\pi/wa$) граница совершала целое число колебаний n. При этом

$$\omega = wan. \tag{18}$$

Выражение (17) в безразмерных переменных $L(\tau) = wl(t), \tau = wat,\ \xi = wx$ с учетом (18) будет иметь вид:

$$L(\tau) = \beta\sin(n\tau), \tag{19}$$

где $\beta = Bw$.

При дозвуковом движении границы $(|L'(\tau)| < 1)$ должно выполняться условие $\beta n < 1$. Подставив (19) в граничное условие (15) для отраженной волны, получим:

$$Q(P) = -\sin(P + 2\varphi(P) + \gamma). \tag{20}$$

Функция $\varphi(P)$ задается неявно и определяется из уравнения:

$$\beta\sin(n\varphi(P)) - \varphi(P) = P. \tag{21}$$

Для нахождения энергии отраженной волны найдем из (21) $\varphi'(P)$ и из (20) $Q'(P)$:

$$\varphi'(P) = 1/(\beta n\cos(\varphi(P)) - 1), \tag{22}$$

$$Q'(P) = -(1 + 2\varphi'(P))\cos(P + 2\varphi(P) + \gamma). \tag{23}$$

Энергия падающей волны определяется выражением (16).

С учетом (22), (23) для энергии отраженной волны получим:

$$W_{отр.} = C\int_0^{2\pi}\left(\frac{\beta n\cos\varphi + 1}{\beta n\cos\varphi - 1}\cos(P + 2\varphi(P) + \gamma)\right)^2 dP. \tag{24}$$

Результаты исследования. Проанализируем с помощью разработанного программного комплекса [27] выражение (24) на максимум в зависимости от β и γ при различных значениях n.

В результате численного решения установлено, что при любых значениях β максимум энергии отраженной волны достигается при $n = 2$ при $\gamma = \pi / 2$. Для других значениях n максимум достигается при $\gamma = 0$. Причем также установлено, что функция $W_0(\gamma)$ периодическая с периодом π при любых значениях n.

Зависимость W_0 от β и γ при $n = 2$, приведена в таблице 1.

Таблица 1

Зависимость W_0 от β и γ при $n = 2$

γ \ β	0,000	0,045	0,090	0,135	0,180	0,225	0,270	0,315	0,360	0,405
0,00	1,000	0,955	0,989	1,096	1,280	1,559	1,973	2,608	3,658	5,661
0,31	1,000	0,969	1,015	1,132	1,325	1,615	2,043	2,695	3,764	5,773
0,63	1,000	1,008	1,082	1,224	1,443	1,762	2,226	2,924	4,047	6,089
0,94	1,000	1,055	1,165	1,338	1,588	1,943	2,453	3,208	4,398	6,488
1,26	1,000	1,093	1,232	1,430	1,706	2,090	2,636	3,438	4,683	6,818
1,57	1,000	1,108	1,258	1,465	1,750	2,146	2,706	3,526	4,794	6,952
1,88	1,000	1,093	1,232	1,430	1,706	2,090	2,637	3,439	4,688	6,840
2,20	1,000	1,055	1,165	1,338	1,588	1,944	2,453	3,210	4,405	6,524
2,51	1,000	1,008	1,082	1,224	1,443	1,762	2,227	2,926	4,054	6,125
2,83	1,000	0,969	1,015	1,132	1,325	1,616	2,044	2,696	3,769	5,795
3,13	1,000	0,955	0,989	1,096	1,280	1,559	1,973	2,608	3,658	5,661

Особенности взаимодействия продольных волн с движущейся границей. Рассмотрим процесс распространения продольных волн в полуограниченном стержне, левая граница которого продвигается между двумя роликами, вращающимися с окружной скоростью v и движущимися вдоль оси x с той же скоростью.

До настоящего времени при постановке подобных задач тем фактом, что сквозь границу проходят деформированные участки стержня, пренебрегалось и граничное условие при отсутствии проскальзывания записывалось в виде

$$U_t(l(t), t) = 0;\ l(t) = \nu t.$$

В случаях, если деформации велики, это может привести к существенным погрешностям.

Пусть $U(x,t)$ — продольное смещение сечения стержня с координатой x в момент времени t удовлетворяет волновому уравнению (1). Если учесть деформации, то граничное условие останется тем же

$$U_t(l(t),t) = 0, \tag{25}$$

но закон движения границы будет взаимосвязан с $U(x,t)$ соотношением

$$l'(t) = \nu / (1 + U_x(l(t),t)). \tag{26}$$

Зависимость закона движения границ от колебательного процесса делает задачу нелинейной. Задачи такого типа в настоящее время мало исследованы. Впервые подобная задача была рассмотрена в работе [21].

Исследуем влияние величины деформации и скорости движения границы на процесс отражения гармонической волны

$$\varphi(x + at) = A\sin\omega(x + at) \tag{27}$$

от движущейся границы.

Введем в задачу (1), (25)–(27) безразмерные переменные:

$$U(x,t) = AV(\xi,\tau),\ l(t) = L(\tau)/\omega,$$

$$\xi = \omega x,\ \tau = a\omega t,\ \varphi(x + at) = Ag(\xi + \tau).$$

В результате получим:

$$V_{\tau\tau}(\xi,\tau) - V_{\xi\xi}(\xi,\tau) = 0,\ V_\tau(L(\tau),\tau) = 0,$$

$$L'(\tau) = \varepsilon / (1 + \alpha V_\xi(L(\tau),\tau)),\ g(\xi + \tau) = \sin(\xi + \tau),\ \varepsilon = \nu / a,\ \alpha = A\omega.$$

Решение будем искать в виде:

$$V(\xi,\tau) = \sin(\xi + \tau) + G(\xi - \tau).$$

В результате, для нахождения функций G и L получим систему:

$$L'(\tau) = \varepsilon / (1 + 2\alpha\cos(L(\tau) + \tau)),\ G'(L(\tau) - \tau) = \cos(L(\tau) + \tau).$$

Из второго уравнения системы следует, что амплитуда волн деформации не изменяется. Сравнение решения системы (система решалась численно с помощью разработанного программного комплекса [27]) с решением, не учитывающим изменения $L(\tau)$ за счет деформации, а именно:

$$L(\tau) = \varepsilon\tau,\ G'(z) = \cos((\varepsilon + 1)z / (\varepsilon - 1)),\ z = \tau(\varepsilon - 1),$$

показывает, что между решениями происходит постоянный по времени сдвиг фаз. Длина волн в первом случае меньше. Сдвиг фаз в единицу времени в зависимости от ε и α приведен в таблице 2.

Таблица 2

Сдвиг фаз в единицу времени в зависимости от ε и α

ε \ α	0,1	0,2	0,3	0,4
0,1	0,004	0,008	0,034	0,109
0,3	0,019	0,045	0,120	–
0,5	0,032	0,077	–	–
0,7	0,057	–	–	–

В некоторые моменты времени граница может двигаться быстрее скорости звука $(L'(\tau) > 1)$. При этом поставленная задача некорректна. Неравенство $\varepsilon + 2\alpha < 1$ задает допустимую область. В ячейках таблицы, где неравенство не выполняется, сделан прочерк.

Анализ влияния движения границ при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием. Для ответа на вопрос о том, в каких случаях необходимо учитывать движение границ, рассмотрим прохождение через резонанс в системе с демпфированием.

В работах [10, 28] рассмотрены резонансные свойства двух систем переменной длины с учётом действия демпфирующих сил. Выражения для амплитуды колебаний, полученные там, имеют вид:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\varepsilon\tau)e^{-2\alpha_0(\varepsilon_1\tau)\tau}\{[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta)e^{\alpha_0(\varepsilon_1\zeta)\zeta}\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta]^2 + [\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta)e^{\alpha_0(\varepsilon_1\zeta)\zeta}\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta]^2\}, \tag{28}$$

где $\alpha_0(\varepsilon_1\tau), E_n(\varepsilon\tau), F_n(\varepsilon\zeta), \Phi_n(\zeta)$ — некоторые функции.

Опуская некоторые математические выкладки, получим выражение для (28) в виде:

$$A_{0n}^2(\tau_1,\tau_2) = A^2\frac{2}{|\nu|}A_n^2(z_1,z_2),$$

где

$$A_n^2(z_1,z_2)=e^{-2\alpha Z_2}[I_s^2(z_1,z_2)+I_c^2(z_1,z_2)], \tag{29}$$

$$I_s(z_1,z_2)=\int_{z_1}^{z_2} e^{\alpha z}\sin(\pm z^2)dz,\ \ I_c(z_1,z_2)=\int_{z_1}^{z_2} e^{\alpha z}\cos(\pm z^2)dz, \tag{30}$$

$$\alpha=\alpha_0\sqrt{2/|\nu|},\ z_i=(\nu\tau_i+\omega_0)/\sqrt{2|\nu|},\ i=\overline{1,2}.$$

Здесь v — параметр, характеризующий скорость прохождения через резонанс; α_0 — коэффициент, характеризующий затухание в системе; A — постоянная величина; τ_1,τ_2 — границы резонансной области.

Исследуем выражение (29) на максимум в окрестности точки $z_0 = 0$.

В результате численного решения (29) с помощью разработанного программного комплекса [27], была получена таблица 3.

Таблица 3

Результаты численного решения выражения (29) на максимум

α	0,00	0,10	0,30	0,50	0,70	1,00	1,30	2,00	3,00	7,00
z_1	–1,56	–1,54	–1,49	–1,49	–1,48	–1,48	–1,47	–1,46	–1,35	–1,29
z_2	1,56	1,45	1,30	1,25	1,20	1,15	1,10	1,00	0,70	0,40
$A_n(\alpha)$	2,37	2,06	1,60	1,29	1,07	0,84	0,68	0,47	0,33	0,144

Максимальная амплитуда колебаний, возникающих при остановке границ в резонансной точке, определяется выражением (28) при $v = 0$. Производя вычисления, получим:

$$A_{0n}^{\max}=A/\alpha_0. \tag{31}$$

При $v \neq 0$ амплитуда определяется выражением:

$$A_{0n}=A\sqrt{\frac{2}{|\nu|}}A_n\left(\alpha_0\sqrt{\frac{2}{|\nu|}}\right), \tag{32}$$

где A_n находится из таблицы 3.

Учёт движения границ следует производить, если относительная погрешность амплитуды

$$\Delta=\frac{A_{0n}^{\max}-A_{0n}}{A_{0n}} \tag{33}$$

велика.

Используя данные таблицы, нетрудно установить, что погрешность Δ превышает значение 0,05 при

$$\alpha_0\sqrt{\frac{2}{|\nu|}}<2{,}164. \tag{34}$$

Неравенство (34) определяет область в пространстве параметров α_0, v, где необходимо учитывать движение границ. Подставляя v в (34) и произведя преобразования, получим следующее неравенство, ограничивающее область, где необходимо учитывать движение границ:

$$\Delta_A>3{,}8\sqrt{\gamma\Delta_\ell},$$

где $\Delta_A=2\pi\alpha_0/\omega_0$ — относительное изменение амплитуды за одно свободное колебание; $\Delta_\ell=2\pi|\upsilon|/\omega_0\ell_0$ — относительное изменение длины за одно свободное колебание.

Обсуждение и заключение. Исследованы закономерности отражения волн от движущихся границ в системах, колебания которых описываются волновым уравнением. Получено выражение изменения энергии отраженной волны по сравнению с падающей при равномерном и периодическом движении границы. Установлено, что энергия системы увеличивается при движении границы навстречу волнам и убывает при сонаправленном движении.

Проанализировано распространение продольных волн в стержне с движущейся границей. При этом учёт деформаций делает задачу нелинейной. Показано, что амплитуда волн деформации остаётся неизменной, несмотря на влияние скорости движения границы и величины деформации. Исследовано воздействие демпфирующих сил на амплитуду колебаний, возникающих при прохождении через резонанс. Получены критерии в виде неравенств, которые определяют области, где требуется учитывать движение границ.

Прикладная ценность результатов работы заключается в возможности использования их для решения широкого круга технических проблем [29–33]: анализе продольных и изгибных колебаний валов, балок и стержней с подвижными закреплениями; оценке надежности работы канатов в грузоподъемных установках и динамической устойчивости нитей, волокон и тесемочных передач; анализе колебаний лент в лентопротяжных механизмах, ленточных пилах, гибких звеньях передач с гибкой связью; исследовании колебаний проволоки при изготовлении оболочек вращения намоткой; управлении технологией изготовления кабелей, проката; оценке надежности работы железнодорожной контактной сети и т. д.

Данные задачи мало изучены и требуют дальнейшего исследования. Приведенные результаты позволяют на стадии проектирования предотвратить возможность возникновения колебаний большой амплитуды в механических объектах с движущимися границами [34–37].

Список литературы / References

1. Колосов Л.В., Жигула Т.И. Продольно-поперечные колебания струны каната подъемной установки. *Известия вузов. Горный журнал*. 1981;3:83–86.

Kolosov L.V., Zhygula T.I. Longitudinal and transverse vibrations of the rope string of the lifting installation. *Minerals and Mining Engineering*. 1981;3:83–86. (In Russ.)

2. Zhu W.D., Chen Y. Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control. *J. Vibr. Acoust.* 2006;1:66–78.

3. Shi Y., Wu L., Wang Y. Nonlinear analysis of natural frequencies of a cable system. *J. Vibr. Eng.* 2006;2:173–178.

4. Горошко О.А., Савин Г.Н. *Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины*. Киев: Наукова думка; 1971. 290 с.

Goroshko O.A., Savin G.N. *Introduction to the mechanics of deformable one-dimensional bodies of variable length*. Kiev, Nauk. dumka; 1971. 290 p. (In Russ.)

5. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении. *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*. 2017;19(4):161–165.

Anisimov V.N., Litvinov V.L. Transverse vibrations of a rope moving longitudinally. *Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*. 2017;19(4):161–165. (In Russ.)

6. Савин Г.Н., Горошко О.А. *Динамика нити переменной длины*. Киев: Наукова думка; 1962. 332 с.

Savin G.N., Goroshko O.A. *The dynamics of the thread of variable length*. Kiev, Nauk. dumka; 1962. 332 p. (In Russ.)

7. Liu Z., Chen G. Analysis of plane nonlinear free vibrations of a load-bearing rope taking into account the influence of bending stiffness. *J. Vibr. Eng*. 2007;1:57–60.

8. Palm J., Paredes G.M., Eskilsson C., Pinto F. Simulation of mooring cable dynamics using a discontinuous Galerkin method. In *International Conference on Computational Methods in Marine Engineering*, 2013.

9. Литвинов В.Л. Исследование свободных колебаний механических объектов с движущимися границами при помощи асимптотического метода. *Журнал Средневолжского математического общества*. 2014;16(1):83–88.

Litvinov V.L. Investigation of free oscillations of mechanical objects with moving boundaries using the asymptotic method. *Middle Volga Mathematical Society Journal*. 2014;16(1):83–88. (In Russ.)

10. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. *Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами*. Самара: Самарский государственный технический университет; 2017. 149 с.

Anisimov V.N., Litvinov V.L. *Mathematical modeling and investigation of vibrations of one-dimensional mechanical systems with moving boundaries*. Samara, Samar. gos. tekhn. univ., 2017; 149 p. (In Russ.)

11. Уварова Л.А., Федянин В.К. Математическая модель теплопереноса в существенно нелинейных сопряженных средах. *Математическое моделирование*. 1990;2(6):40–54.

Uvarova L.A., Fedyanin V.K. Mathematical model of heat transfer in substantially nonlinear coupled media. *Matem. modelirovanie*. 1990;2(6):40–54. (In Russ.)

12. Кудинов В.А., Кудинов И.В. *Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности.* Москва: Книжный дом «Либроком»; 2012. 280 с.

Kudinov V.A., Kudinov I.V. *Methods for solving parabolic and hyperbolic heat conduction equations.* Moscow, Knizhniy dom “Librokom”, 2012; 280 p. (In Russ.)

13. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Никитина А.В., Атаян А.М., Литвинов В.Н. Метод решения сеточных уравнений для задач гидродинамики в плоских областях. *Математическое моделирование*. 2023;35(3):35–58. https://doi.org/10.20948/mm-2023-03-03

Sikhinov A.I., Chistyakov A.E., Nikitina A.V., Atayan A.M., Litvinov V.N. A Method for Solving Grid Equations for Hydrodynamic Problems in Flat Areas. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2023;15(5):35–58. https://doi.org/10.20948/mm-2023-03-03

14. Sukhinov A., Sidoryakina V. Two-dimensional-one-dimensional alternating direction schemes for coastal systems convection-diffusion problems. *Mathematics*. 2021;9(24):3267. https://doi.org/10.3390/math9243267

15. Атаян А.М., Никитина А.В., Сухинов А.И., Чистяков А.Е. Математическое моделирование опасных явлений природного характера в мелководном водоеме. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2022;62(2):269–286. https://doi.org/10.31857/S0044466921120048

Atayan A.M., Nikitina A.V., Sukhinov A.I., Chistyakov A.E. Mathematical Modeling of Hazardous Natural Phenomena in a Shallow Basin. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2022;61(2):269–286. https://doi.org/10.1134/S0965542521120034

16. Весницкий А.И. *Волны в системах с движущимися границами и нагрузками*. Москва: Физматлит; 2001. 320 с.

Vesnitskii A.I. *Waves in systems with moving boundaries and loads*. Moscow, Fizmatlit, 2001; 320 p. (In Russ.)

17. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В. Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки»*. 2012;3(28):145–151.

Anisimov V.N., Litvinov V.L., Korpen I.V. A method for obtaining an analytical solution to the wave equation describing the oscillations of systems with moving boundaries. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2012;3(28):145–151. (In Russ.)

18. Весницкий А.И. Обратная задача для одномерного резонатора, изменяющего во времени свои размеры. *Известия вузов. Радиофизика*. 1971;10:1538–1542.

Vesnitskii A.I. The inverse problem is for a one-dimensional resonator that changes its size over time. *Izvestiya vuzov. Radiophysics*. 1971;10:1538–1542. (In Russ.)

19. Барсуков К.А., Григорян Г.А. К теории волновода с подвижными границами. *Известия вузов. Радиофизика*. 1976;2:280–285.

Barsukov K.A., Grigorian G.A. Towards the theory of a waveguide with movable boundaries. *Izvestiya vuzov. Radiophysics*. 1976;2:280–285. (In Russ.)

20. Wang L., Zhao Y. Multiple internal resonances and non-planar dynamics of shallow suspended cables to the harmonic excitations. *Journal of Sound and Vibration*. 2009;1–2:1–14.

21. Самарин Ю.П. Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в одномерном пространстве. *Прикладная математика и механика*. 1964;26(3):77–80.

Samarin Yu.P. On a nonlinear problem for the wave equation in one-dimensional space. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1964;26(3):77–80. (In Russ.)

22. Анисимов В.Н., Корпен И.В., Литвинов В.Л. Применение метода Канторовича-Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2018;2:70–77.

Anisimov V.N., Korpen I.V., Litvinov V.L. Application of the Kantorovich-Galerkin Method for Solving Boundary Value Problems with Conditions on Moving Borders. *Mechanics of Solids*. 2018;53(2):177–183.

23. Литвинов В.Л., Литвинова К.В. Приближенный метод решения краевых задач с подвижными границами путем сведения к интегро-дифференциальным уравнениям. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2022;62(6):977–986.

Litvinov V.L., Litvinova K.V. An Approximate Method for Solving Boundary Value Problems with Moving Boundaries by Reduction to Integro-Differential Equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2022;62(6):945–954.

24. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Исследование закономерностей отражения волн от движущихся границ. В: *Труды шестой Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи»*. Самара: издательство СамГТУ; 2009. С. 39–43.

Litvinov V.L., Anisimov V.N. Investigation of patterns of reflection of waves from moving boundaries. *Proceedings of the Sixth All-Russian Scientific Conference (June 1–4, 2009). Math. modeling and boundary value problems*. Samara, SamGTU, 2009; 39–43. (In Russ.)

25. Литвинов В.Л. Исследование взаимодействия продольных волн с движущейся границей. В: *Сборник статей III Всероссийской конференции-семинара «Научно-техническое творчество: проблемы и перспективы»*. Самара: издательство СамГТУ; 2008. С. 31–36.

Litvinov V.L. Investigation of the interaction of longitudinal waves with a moving boundary. *Scientific and technical creativity: problems and prospects. Collection of articles of the III All-Russian conference-seminar*. Samara, 2008; 31–36. (In Russ.)

26. Литвинов В.Л. Учет влияния демпфирующих сил на резонансные свойства струны с движущейся границей. В: *Сборник статей V Юбилейной Всероссийской конференции-семинара «Научно-техническое творчество: проблемы и перспективы»*. Самара: издательство СамГТУ; 2010. С. 79–80.

27. Литвинов В.Л. *Автоматизированный программный комплекс для исследования колебаний и резонансных явлений в механических системах с движущимися границами «TB-Analysis-7»*. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ, № 2025613649. 2025. 17 с.

Litvinov V.L. Certificate of state registration of a computer program. *Automated software package for the study of vibrations and resonant phenomena in mechanical systems with moving boundaries* "*TB-Analysis-7*" No. 2025613649, published on Feb. 13, 2025 (In Russ.)

28. Литвинов В.Л. Вариационная постановка задачи о колебаниях балки с подвижной подпружиненной опорой. *Теоретическая и математическая физика.* 2023;215(2):709–715. https://doi.org/10.1134/S0040577923050094

Litvinov V.L. Variational formulation of the problem on vibrations of a beam with a moving spring-loaded support. *Theoretical and Mathematical Physics*. 2023; 215(2):709–715. https://doi.org/10.1134/S0040577923050094

29. Литвинов В.Л., Литвинова К.В. Об одном обратном методе решения задач о колебаниях механических систем с движущимися границами. *Вестник Московского Университета. Серия 1: Математика. Механика*. 2024;3:53–59. https://doi.org/10.3103/S0027133024700122

Litvinov V.L., Litvinova K.V. An Inverse Method for Solving Problems about Oscillations of Mechanical Systems with Moving Boundaries. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2024;3:53–59. https://doi.org/10.3103/S0027133024700122

30. Sandilo S.H., Horssen W.T. van. On variable length induced vibrations of a vertical string. *Journal of Sound and Vibration*. 2014;333:2432–2449.

31. Zhang W., Tang Y. Global dynamics of the cable under combined parametrical and external excitations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2002;37:505–526.

32. Faravelli L., Fuggini C., Ubertini F. Toward a hybrid control solution for cable dynamics: Theoretical prediction and experimental validation. *Struct. Control Health Monit*. 2010;17:386–403.

33. Лежнева А.А. Свободные изгибные колебания балки переменной длины. *Ученые записки*. 1966;156:143–150.

Lezhneva A.A. Free bending vibrations of a beam of variable length. *Scientific notes*. Perm, Perm. Univ., 1966; 156:143–150. (In Russ.)

34. Selivanova N.Yu., Shamolin M.V. Local solvability of a one-phase problem with free boundary. *Journal of Mathematical Sciences*. 2013;189(2):274–283.

35. Selivanova N.Yu., Shamolin M.V. Studying the interphase zone in a certain singular-limit problem. *Journal of Mathematical Sciences*. 2013;189(2):284–293.

36. Selivanova N.Yu., Shamolin M.V. Local solvability of the Capillary problem. *Journal of Mathematical Sciences*. 2013;189(2):294–300.

37. Selivanova N.Yu., Shamolin M.V. Quasi-stationary Stefan problem with values on the front depending on its geometry. *Journal of Mathematical Sciences*. 2013;189(2):301–310.

Об авторах:

Алексей Львович Семенов, академик РАН, академик РАО, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (119991, Российская Федерация, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы), ORCID, SPIN-код, alsemno@ya.ru

Владислав Львович Литвинов, кандидат технических наук, заведующий кафедрой общетеоретических дисциплин (высшей математики) Самарского государственного технического университета (443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244), ORCID, SPIN-код, vladlitvinov@rambler.ru

Максим Владимирович Шамолин, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории общей механики НИИ механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (119991, Российская Федерация, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы), ORCID, SPIN-код, shamolin@rambler.ru

Заявленный вклад авторов:

А.Л. Семенов: общее научное руководство; разработка методологии; визуализация; валидация.

В.Л. Литвинов: постановка задачи; формулировка идей исследования, целей и задач; разработка программного обеспечения.

М.В. Шамолин: разработка методологии; перевод; изучение истории задачи; поиск литературы; визуализация; валидация.

Конфликт интересов: ***авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.***

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Aleksey L. Semenov, Academician of the Russian Academy of Sciences, Academician of the Russian Academy of Education, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Mathematical Logic and Theory of Algorithms, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University (119991, Russian Federation, GSP-1, Moscow, Leninskie Gory), ORCID, SPIN-code, alsemno@ya.ru

Vladislav L. Litvinov, Candidate of Technical Sciences, Head of the Department of General Theoretical Disciplines (Higher Mathematics), Samara State Technical University (443100, Russian Federation, Samara, Molodogvardeyskaya St., 244), ORCID, SPIN-code, vladlitvinov@rambler.ru

Maksim V. Shamolin, Corresponding Member of RAS, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Leading Researcher at the Laboratory of General Mechanics, Research Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University (119991, Russian Federation, GSP-1, Moscow, Leninskie Gory), ORCID, SPIN-code, shamolin@rambler.ru

Contributions of the authors:

A. L. Semenov: General scientific supervision; methodology development; visualization; validation.

V. L. Litvinov: Problem statement; formulation of research ideas, aims and objectives; software development.

M.V. Shamolin: Methodology development; translation; study of the problem's history; literature review; visualization; validation.

Conflict of Interest Statement: **the authors declare no conflict of interest.**

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 30.03.2025
Поступила после рецензирования / Revised 25.04.2025
Принята к публикации / Accepted 20.05.2025