МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
MATHEMATICAL MODELLING

УДК 004.032.26

Оригинальное эмпирическое исследование

https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-44-51

Применение нейронных сетей при решении эллиптических уравнений для областей сложной формы

А.В. Галабурдин

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

✉ Galaburdin@mail.ru

Аннотация

Введение. При построении моделей в различных областях науки и техники часто используют дифференциальные уравнения. В настоящее время при решении дифференциальных уравнений все чаще применяются нейронные сети. В данной работе предложен оригинальный метод построения нейронной сети для решения эллиптических дифференциальных уравнений. Этот метод применяется при решении краевых задач для областей сложной геометрической формы.

Материалы и методы. Предлагается метод построения нейронной сети, предназначенной для решения дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. Используя замену неизвестной функции, исходная задача сводится к уравнению Лапласа. Таким образом, рассматривались нелинейные дифференциальные уравнения. При построении нейронной сети в качестве активационных функций принимаются производные от сингулярных решений уравнения Лапласа. Сингулярные точки этих решений распределены по замкнутым кривым, охватывающим границу области. При настройке весов сети минимизировалась среднеквадратическая ошибка обучения.

Результаты исследования. Представлены результаты решения первой краевой задачи для различных областей сложной геометрической формы. Результаты представлены в виде таблиц, содержащих точные решения задачи и решения, полученные с помощью нейронной сети. Дано графическое представление точного решения и решение, полученное предложенным методом.

Обсуждение и заключение. Полученные результаты доказали эффективность предложенного метода построения нейронной сети при решении различных видов дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. Данный метод может эффективно применяться при решении других типов дифференциальных уравнений с частными производными.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных эллиптического типа, область сложной геометрической формы, нейронные сети

Для цитирования. Галабурдин А.В. Применение нейронных сетей при решении эллиптических уравнений для областей сложной формы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):44–51. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-44-51

Original Empirical Research

Application of Neural Networks for Solving Elliptic Equations in Domains with Complex Geometries

Alexander V. Galaburdin

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

✉ Galaburdin@mail.ru

Abstract

Introduction. Differential equations are often used in modelling across various fields of science and engineering. Recently, neural networks have been increasingly applied to solve differential equations. This paper proposes an original method for constructing a neural network to solve elliptic differential equations. The method is used for solving boundary value problems in domains with complex geometric shapes.

Materials and Methods. A method is proposed for constructing a neural network designed to solve partial differential equations of the elliptic type. By applying a transformation of the unknown function, the original problem is reduced to Laplace's equation. Thus, nonlinear differential equations were considered. In building the neural network, the activation functions are chosen as derivatives of singular solutions to Laplace's equation. The singular points of these solutions are distributed along closed curves encompassing the boundary of the domain. During the training process, the weights of the network are adjusted by minimizing the mean squared error.

Results. The paper presents the results of solving the first boundary value problem for various domains with complex geometries. The results are shown in tables containing both the exact solutions and the solutions obtained using the neural network. Graphical representations of the exact and the neural network-based solutions are also provided.

Discussion and Conclusion. The obtained results demonstrate the effectiveness of the proposed neural network construction method in solving various types of elliptic partial differential equations. The method can also be effectively applied to other types of partial differential equations.

Keywords: elliptic partial differential equations, domain with complex geometry, neural networks

For Citation. Galaburdin A.V. Application of Neural Networks for Solving Elliptic Equations in Domains with Complex Geometries. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):44–51. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-44-51

Введение. Дифференциальные уравнения играют важную роль при построении моделей в различных областях науки и техники. Традиционные аналитические и численные методы решения дифференциальных уравнений не всегда позволяют получить нужный результат. Поэтому в настоящее время при решении дифференциальных уравнений все чаще стали применять различные методы машинного обучения. Особенно часто исследователи применяют для этого искусственные нейронные сети.

Теоретическими основами метода нейронных сетей безусловно следует считать работы А.Н. Колмогорова [1]. Сейчас нейронные сети применяются при решении различных дифференциальных уравнений. В работе [2] представлен переход от нейросетевой архитектуры к обыкновенным дифференциальным уравнениям и задаче Коши.

Работы [3, 4] посвящены применению нейронных сетей к решению уравнения Лапласа. В статье [5] представлено применение методов глубокого обучения для решения уравнения Пуассона в двухмерной области. Широкое распространение при решении дифференциальных уравнений в частных производных получили радиально-базисные нейронные сети [6].

В работах [7, 8] в качестве активационных используются радиально-базисные функции, параметры которых предлагается варьировать. В работах [9–11] нейронные сети с успехом применяются при решении краевых задач для уравнений Навье-Стокса. Хорошо зарекомендовали себя при решении уравнений частных производных физико-информированные нейронные сети [12], в частности, при решении задач классической механики [13]. В статье [14] для решения задачи тепломассопереноса применяется нейронная сеть персептронного типа.

Вышеупомянутые работы свидетельствуют о растущей популярности нейронных сетей при решении дифференциальных уравнений. Настоящее исследование посвящено рассмотрению краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных для областей сложной формы и является развитием подхода, изложенного в работах [15, 16].

Материалы и методы. Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения

$$U + b_1\partial_1 U + b_2\partial_2 U + cU = 0.$$

Представляя решение в виде $U = Ve^{(\lambda x+\alpha y)}$ и подбирая соответственно параметры λ и α, можно получить более простое уравнение

$$V + aV = 0.$$

Полученное уравнение решалось с помощью нейронной сети относительно функции V. Построенные нейронные сети для решения уравнения Лапласа можно применять при решении нелинейных эллиптических уравнений, после их соответствующего преобразования.

Рассмотрим, например, дифференциальное уравнение

$$U - 2((\partial_1 U)^2 + (\partial_2 U)^2)/(3V) = 0.$$

Исходное дифференциальное уравнение сводится к уравнению Лапласа введением новой неизвестной функции $V = U^{1/3}$.

При построении нейронной сети применялся метод, изложенный в работах [15, 16]. В основу этого метода положена формула, похожая на формулу Грина, в которой интегралы заменяются суммами:

$$V(x)=\sum_{k=1}^{N} w_k f(s_k) U(x,\sigma_k)+\sum_{k=1}^{N} v_k f(s_k) G(x,\tau_k),$$

где $f(s_k)$ — значение неизвестной функции u на границе области; $U(x, \sigma_k)$ и $G(x, \tau_k)$ — активационные функции; σ_k и τ_k — точки замкнутых кривых γ_1 и γ_2, охватывающих границу области γ; x — точка области G.

Требуя выполнения этого соотношения в каждой точке границы для всех функций обучающего множества и используя метод наименьших квадратов, можно получить систему уравнений для определения весов w_k и v_k.

Для того, чтобы улучшить обусловленность матрицы полученной системы уравнений, в качестве активационных функций брались функции

$$U(x,y,t,s)=\frac{\beta^5-10\beta^3\delta^2+5\beta\delta^4+\delta^5-10\delta^3\beta^2+5\delta\beta^4}{R^{10}},$$

$$G(x,y,t,s)=\frac{\beta^7-21\beta^5\delta^2+35\beta^3\delta^4-7\beta\delta^6}{R^{14}}n_x,$$

$$+\frac{\delta^7-21\beta^2\delta^5+35\delta^3\beta^4-7\beta^6\delta}{R^{14}}n_y,$$

$$\delta=x-t, \beta=y-s, R=\sqrt{\delta^2+\beta^2},$$

которые представляют собой производные от фундаментального решения уравнения Лапласа.

Это увеличивало сингулярность активационных функций. При этом точки σ_k и τ_k брались на контурах γ_1 и γ_2, которые получаются из граничного контура γ смещением каждой точки в направлении внешней нормали к границе области на расстояния ρ_1 и ρ_2 соответственно. В процессе обучения сети определяются веса и величины ρ_1 и ρ_2. При этом величины ρ_1 и ρ_2 определялись простым перебором.

В качестве обучающего множества применялось множество функций, являющихся решением уравнения Лапласа в полярной системе координат

$$r^k cos(karccos(\frac{x}{r}))+r^k sin(karccos(\frac{x}{r})),\ r=\sqrt{(x^2+y^2)},$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, M$.

Указанные функции задавались в различных системах координат, повернутых друг относительно друга на угол, кратный $2\pi/5$.

Результаты исследования. Предложенный метод применялся при решении задач для областей, граница γ которых задавалась в виде

$$\begin{cases} x=a\cos(t)+g\cos(\omega t), \\ y=a_1\sin(t)+g_1\sin(\omega t), \end{cases} \quad t\in[0,2\pi],$$

где $t\in[0,2\pi]$; a, a_1, g, g_1, ω — изменяемые параметры.

Во всех случаях количество функций в обучающем множестве принималось равным $M = 75$, количество нейронов сети $N = 100$.

Задача 1. В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\Delta U-\partial_1 U+5\partial_2 U+6{,}5U=0.$$

Вводится новая неизвестная функция V, удовлетворяющая уравнению Лапласа:

$$U=Ve^{(0{,}5x-2{,}5y)}.$$

Рассматривалась первая краевая задача. На рис. 1 представлена область, граница которой соответствует $a = 1{,}15$, $g = 1{,}15$, $a_1 = 0{,}07$, $g_1= –0{,}03$, $\omega = 9$.

Точки области, в которых вычисляются точные значения решения задачи и значения, полученные при помощи нейронной сети, обозначены на чертеже звездочками.

Точки области, в которых вычисляются точные значения решения задачи и значения, полученные при помощи нейронной сети, обозначены на чертеже звездочками. В таблице 1 представлены результаты расчетов, соответствующие решению

$$U=xye^{(0{,}5x-2{,}5y)}.$$

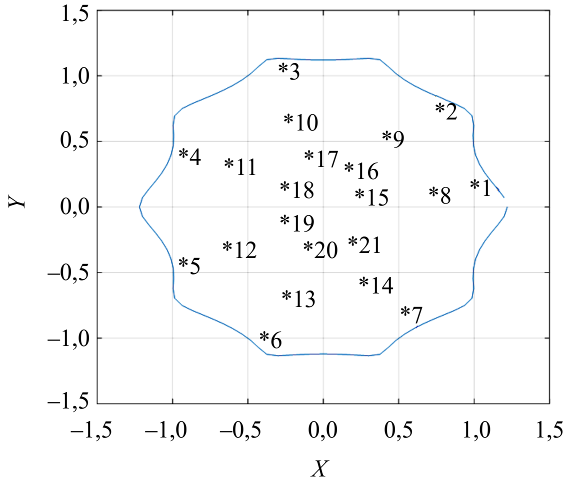

Рис. 1. Форма области задачи 1

Таблица 1

Результаты расчетов для задачи 1

Номер точки	1	2	3	4	5	6	7
Точное решение	0,1158	0,2214	0,1055	0,0241	–0,0142	–0,0473	–0,0835
Решение НС	0,1148	0,2216	0,1054	0,0240	–0,0142	–0,0473	–0,0838
Номер точки	8	9	10	11	12	13	14
Точное решение	0,0385	0,1092	0,0769	0,0244	–0,0157	0,0457	–0,0629
Решение НС	0,0382	0,1090	0,0768	0,0243	–0,0158	0,0458	–0,0630
Номер точки	15	16	17	18	19	20	21
Точное решение	0,0051	0,0213	0,0222	0,0098	–0,0069	–0,0175	–0,0188
Решение НС	0,0047	0,0210	0,0220	0,0096	–0,0071	–0,0177	–0,0190

Задача 2. Рассматривалось дифференциальное уравнение

$$\Delta U + 5\partial_1 U + 3\partial_2 U + 8{,}5U = 0.$$

Введение неизвестной функции V:

$$U = Ve^{-(2{,}5x+1{,}5y)}$$

позволяет свести исходное дифференциальное уравнение к уравнению Лапласа относительно функции V. Форма рассматриваемой при этом области определялась значениями параметров $a = 1{,}1$, $g = 1{,}1$, $a1 = 0{,}05$, $g1 = 0{,}1$, $\omega = 4$ (рис. 2). Рассматривалась первая краевая задача. В таблице 2 представлены результаты расчетов и точное решение дифференциального уравнения

$$U = e^{-x} chye^{-(2{,}5x+1{,}5y)}.$$

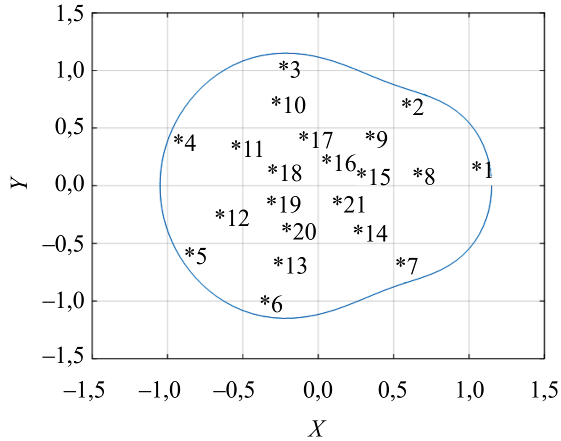

Рис. 2. Форма области задачи 2

Таблица 2

Результаты расчетов для задачи 2

Номер точки	1	2	3	4	5	6	7
Точное решение	0,0198	0,0143	0,0245	0,0622	0,1929	1,4682	9,0855
Решение НС	0,0198	0,0143	0,0245	0,0622	0,1928	1,4640	9,0885
Номер точки	8	9	10	11	12	13	14
Точное решение	0,0818	0,0700	0,1163	0,2289	0,4502	1,4325	3,9076
Решение НС	0,0817	0,0700	0,1162	0,2288	0,4499	1,4320	3,9104
Номер точки	15	16	17	18	19	20	21
Точное решение	0,3377	0,3321	0,4896	0,6716	0,7856	1,1957	1,6099
Решение НС	0,3377	0,3320	0,4896	0,6716	0,7857	1,1959	1,6104

Задача 3. Рассматривалось дифференциальное уравнение

$$\Delta U - \frac{2((\partial_1 U)^2 + (\partial_1 U)^2)}{3V} = 0,$$

которое введением новой неизвестной функции $V = U^{1/3}$ сводилось к уравнению Лапласа. Рассматривалась первая краевая задача. Форма рассматриваемой при этом области определялась значениями параметров $a = 1{,}1$, $g = 1{,}1$, $a_1 = 0{,}07$, $g_1 = 0{,}07$, $\omega = 9$ (рис. 3).

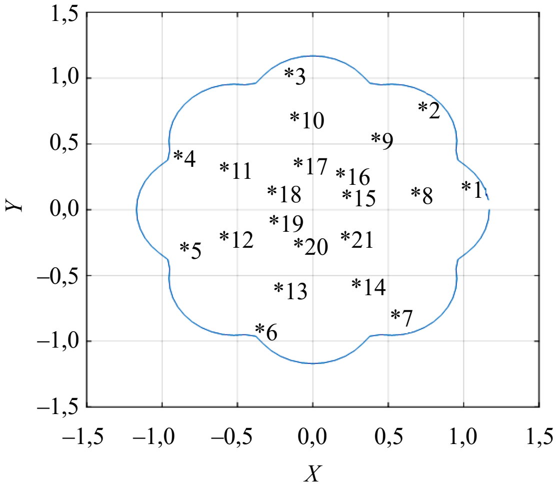

Рис. 3. Форма области задачи 3

В таблице 3 представлены результаты расчетов и точное решение дифференциального уравнения

$$U = (xy + 2{,}5x + y)^3.$$

Таблица 3

Результаты расчетов для задачи 2

Номер точки	1	2	3	4	5	6	7
Точное решение	24,613	28,736	32,687	7,2807	0,0363	–2,0562	10,894
Решение НС	24,613	28,878	32,610	7,3419	0,0380	–2,0870	10,834
Номер точки	8	9	10	11	12	13	14
Точное решение	5,7339	5,9627	6,3055	1,4899	0,0169	0,2857	–2,0582
Решение НС	5,7405	5,9727	6,3164	1,4937	0,0169	0,2865	–2,0625
Номер точки	15	16	17	18	19	20	21
Точное решение	0,3331	0,3060	0,2982	0,0754	0,0017	–0,0088	–0,0950
Решение НС	0,3328	0,3058	0,2982	0,0753	0,0017	–0,0089	–0,0957

На рис. 4 и рис. 5 представлены графические решения, полученные при помощи нейронной сети, а также точное решение задачи 3.

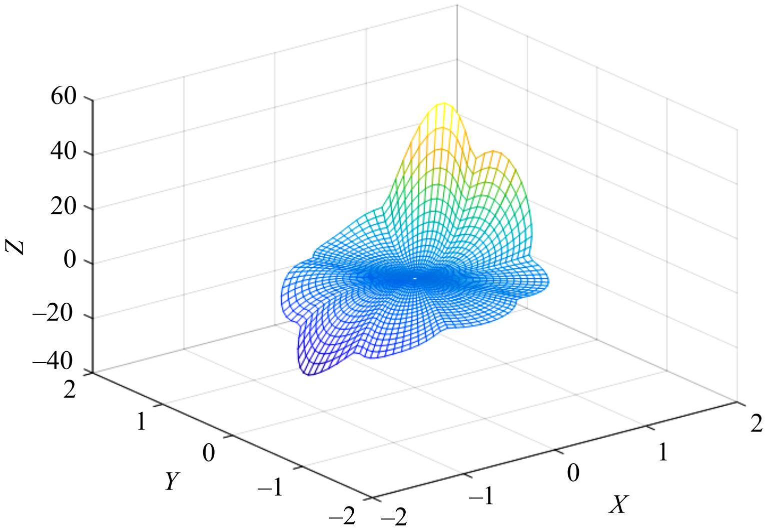

Рис. 4. Решение задачи 3, полученное нейронной сетью

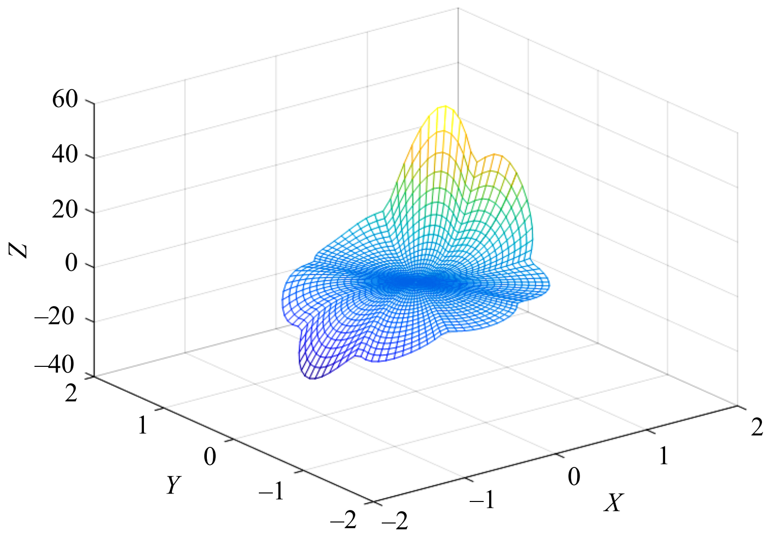

Рис. 5. Точное решение задачи 3

Обсуждение и заключение. Представленные результаты еще раз доказали эффективность метода построения нейронной сети для решения краевых задач для областей сложной формы для различных видов дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. Данный метод может эффективно обрабатывать все типы дифференциальных уравнений с частными производными. Дальнейшие развитие метода будет идти в направлении расширения классов решаемых задач и совершенствования методов обучения.

Список литературы / References

1. Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения. *Доклады Академии наук СССР*. 1957;114(5):953–956.

Kolmogorov A.N. On the representation of continuous functions of several variables in the form of superpositions of continuous functions of one variable and addition. *Reports of the USSR Academy of Sciences*. 1957;114(5):953–956. (In Russ.)

2. Маргасов О.А. О нейронных обыкновенных дифференциальных уравнениях и их вероятностном расширении. *Известия Коми научного центра УрО РАН. Серия «Физико-математические науки»*. 2021;6(52):14–19. https://doi.org/10.19110/1994-5655-2021-6-14-19

Margasov O.A. On neural ordinary differential equations and their probabilistic extension. *Izvestiya of the Komi Science Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences"*. 2021;6(52):14–19. https://doi.org/10.19110/1994-5655-2021-6-14-19 (In Russ.)

3. Варшавчик Е.А., Галяутдинова А.Р., Седова Ю.С., Тархов Д.А. Решение дифференциальных уравнений в частных производных для областей с постоянными границами. В: *Труды 3-й Всероссийской научно-практической конференции «Искусственный интеллект в решении актуальных социальных и экономических проблем XXI века»*. Пермь: издательство Пермского государственного национального исследовательского университета; 2018. С. 294.

Varshavchik E.A., Galyautdinova A.R., Sedova Yu.S., Tarkhov D.A. Solution of partial differential equations for domains with constant boundaries. *Artificial intelligence in solving current social and economic problems of the 21st century: collection of articles. Art. based on materials from the Third All-Russian. scientific-practical conf.* Perm, May 14–18, 2018. Perm. state national research univ.; 2018. 294 p. (In Russ.)

4. Тюрин К.А., Брагунец В.В., Светлов Д.Д. Решение дифференциального уравнения Лапласа с помощью модифицированной нейронной сети. *Молодой ученый*. 2019;27(265):10–12.

Tyurin K.A., Bragunets V.V., Svetlov D.D. Solution of the Laplace differential equation using a modified neural network. *Young Scientist*. 2019;27(265):10–12. (In Russ.)

5. Епифанов А.А. Применение методов глубокого обучения для решения дифференциальных уравнений в частных производных. *Успехи кибернетики*. 2020;1(4):22–28. https://doi.org/10.51790/2712-9942-2020-1-4-3

Epifanov A.A. Application of deep learning methods for solving partial differential equations. *Advances in cybernetics*. 2020;1(4):22–28. https://doi.org/10.51790/2712-9942-2020-1-4-3 (In Russ.)

6. Коваленко А.Н., Черноморец А.А., Петина М.А. О применении нейронных сетей для решения дифференциальных уравнений в частных производных. *Научные ведомости. Серия Экономика. Информатика*. 2017;9(258):103–110.

Kovalenko A.N., Chernomorets A.A., Petina M.A. On the use of neural networks for solving partial differential equations. *Scientific bulletin. The Economics series. Computer science*. 2017;9(258):103–110. (In Russ.)

7. Kansa E.J. *Motivation for using radial basis functions to solve PDEs*. URL: http://uahtitan.uah.edu/kansaweb.html (дата обращения: 13.04.2025)

8. Kansa E.J. Multiquadrics. A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. II. Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Comput. Math. Appl*. 1990;19(89):147–161.

9. Almajid M. Abu-Alsaud M. Prediction of porous media fluid flow using physics informed neural networks. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 2021;208:109205. https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.109205

10. Eivazi H.,Tahani M., Schlatter P., Vinuesa R. Physics-informed neural networks for solving Reynolds-averaged Navier-Stokes equations. *Physics of Fluids*. 2022;34(7):075117. https://doi.org/10.1063/5.0095270

11. Chen J., Viquerat J., Hachem E. *U-net Architectures for Fast Prediction of Incompressible Laminar Flows*. URL: https://arxiv.org/pdf/1910.13532.pdf (дата обращения: 13.04.2025)

12. Raissia M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*. 2019;378:686–707.

13. Зрелова Д.П., Ульянов С.В. Модели физически информированных осведомленных классических Лагранжевых Гамильтоновых нейронных сетей в глубоком обучении. *Современные информационные технологии и ИТ-образование*. 2022;18(2):310–325. https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.310-325

Zrelova D.P., Ulyanov S.V. Models of physically informed aware classical Lagrangian Hamiltonian neural networks in deep learning. *Modern information technologies and IT education*. 2022;18(2):310–325. https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.310-325 (In Russ.)

14. Cai S., Wang Z., Wang S., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks for heat transfer problems. *Journal of Heat Transfer.* 2021;143(6):60–80. https://doi.org/10.1115/1.4050542

15. Галабурдин А.В. Применение нейронных сетей для решения задачи Дирихле для областей сложной формы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):68–79. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-68-79

Galaburdin A.V. Application of neural networks to solve the Dirichlet problem for areas of complex shape. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):68–79. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-68-79 (In Russ.)

16. Галабурдин А.В. Применение нейронных сетей для решения нелинейных краевых задач для областей сложной формы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):35–42. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-35-42

Galaburdin A.V. Application of neural networks to solve nonlinear boundary value problems for areas of complex shape. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):35–42. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-35-42 (In Russ.)

Об авторе:
Александр Васильевич Галабурдин, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), ORCID, SPIN-код, Galaburdin@mail.ru

Конфликт интересов: **автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.**

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

About the Author:
Alexander V. Galaburdin, Cand. Sci. (Phys. – math.), Associate Professor at the Department Mathematics and informatics, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostovon-Don, 344003, Russian Federation), ORCID, SPIN-code, Galaburdin@mail.ru

Conflict of Interest Statement: **the author declares no conflict of interest.**

The author has read and approved the final version of manuscript.

Поступила в редакцию / Received 19.05.2025
Поступила после рецензирования / Reviewed 11.06.2025
Принята к публикации / Accepted 25.06.2025