

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 519.6

Оригинальное эмпирическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-7-15>


Многостадийный сеточно-характеристический метод повышенного порядка точности для задач акустики

С. Ми¹ , В.И. Голубев^{1,2} ¹ Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный, Российская Федерация² Федеральное государственное автономное учреждение «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», г. Москва, Российская Федерация✉ xinawafe@gmail.com

Аннотация

Введение. Сейсмическая разведка является широко применяемой технологией поиска месторождений углеводородов. Важным этапом данного процесса является расчёт распространения сейсмических волн в геологической модели среды с заданными физическими характеристиками. Ввиду высокой вычислительной сложности задачи на практике активно используется акустическое приближение, позволяющее корректно описать распространение продольных волн. Наиболее часто для сейсмического моделирования используются конечно-разностные схемы на сдвинутых кубических расчётных сетках. Несмотря на простоту их реализации и высокую вычислительную эффективность, такие подходы демонстрируют недостаточную точность при моделировании сложных геологических структур, включая криволинейные границы раздела геологических слоёв. Перспективным направлением является разработка новых вычислительных методов высокого порядка точности на криволинейных расчётных сетках. В настоящей работе представлен устойчивый сеточно-характеристический метод пятого порядка аппроксимации, успешно применённый для решения задачи о распространении акустических волн в двумерной постановке.

Материалы и методы. Используется сеточно-характеристический метод с интерполяционным полиномом пятой степени, построенном на расширенном пространственном шаблоне. Выделен класс криволинейных сеток, позволяющий сохранить достигнутую при решении одномерной задачи точность расчёта. При этом с помощью метода многошагового расщепления удастся сохранить порядок схемы по времени и по пространству в многомерной постановке.

Результаты исследования. Представлены формулы вычислительного алгоритма, эмпирически подтверждено достижение заявленного порядка сходимости, рассчитаны волновые картины динамического процесса.

Обсуждение. Результаты расчётов демонстрируют меньшую численную диссипацию предложенного вычислительного алгоритма. Платой за это является значимое увеличение времени расчёта.

Заключение. Разработанный расчётный алгоритм обеспечивает высокую точность расчёта сейсмических фронтов, что критически важно в задачах сейсморазведки в слоистых геологических массивах.

Ключевые слова: сейсмическая разведка, сейсмические волны, математическое моделирование, криволинейные сетки, акустическая среда, сеточно-характеристический метод, операторное расщепление

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ по теме № FNEF–2024–0002 «Математическое моделирование многомасштабных динамических процессов и системы виртуального окружения» (1023032900401–5–1.2.1). Исследования Ми Синь были поддержаны Китайским советом по стипендиям.

Для цитирования. Ми С., Голубев В.И. Многостадийный сеточно-характеристический метод повышенного порядка точности для задач акустики. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(3):7–15. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-7-15>

Multistage Grid-Characteristic Method of Increased Order of Accuracy for Acoustic ProblemsXin Mi¹ , Vasily I. Golubev^{1,2} ¹ Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russian Federation² Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre “Kurchatov Institute”, Moscow, Russian Federation xinawafe@gmail.com**Abstract**

Introduction. Seismic exploration is a widely used technology for locating hydrocarbon deposits. An important stage of this process is the simulation of seismic wave propagation in a geological model of the medium with specified physical characteristics. Due to the high computational cost of this problem, the acoustic approximation is widely used in practice, allowing for the correct description of longitudinal wave propagation. The most common approach to seismic modeling is the use of finite-difference schemes on staggered Cartesian computational grids. Despite their simplicity of implementation and high computational efficiency, such methods exhibit insufficient accuracy when modelling complex geological structures, including curvilinear interfaces between geological layers. A promising direction is the development of new high-order computational methods on curvilinear computational grids. This paper presents a stable fifth-order grid-characteristic method successfully applied to solving the problem of acoustic wave propagation in the two-dimensional case.

Materials and Methods. The study employs a grid-characteristic method with a fifth-degree interpolation polynomial constructed on an extended spatial stencil. A class of curvilinear grids is identified that makes it possible to retain the accuracy achieved when solving a one-dimensional problem. Furthermore, the use of a multistage splitting method allows the preservation of the scheme's order in both time and space for multidimensional formulations.

Results. The formulas of the computational algorithm are presented, the achievement of the declared convergence order is empirically confirmed, and wavefield patterns of the dynamic process are calculated.

Discussion. The results demonstrate lower numerical dissipation of the proposed computational algorithm. The trade-off for this improvement is a significant increase in computation time.

Conclusion. The developed computational algorithm ensures high accuracy in calculating seismic fronts, which is critically important for seismic exploration tasks in layered geological massifs.

Keywords: seismic exploration, seismic waves, mathematical modelling, curvilinear grids, acoustic medium, grid-characteristic method, operator splitting

Funding. The work was carried out within the framework of the state task of the NRC “Kurchatov Institute” — SRISA on the topic No. FNEF–2024–0002 “Mathematical modeling of multi-scale dynamic processes and virtual environment systems” (1023032900401–5–1.2.1). Mi Xin's research work was supported by a scholarship from the China Scholarship Council.

For Citation. Mi X., Golubev V.I. Multistage Grid-Characteristic Method of High Order of Accuracy for Acoustic Problems. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(3):7–15. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-7-15>

Введение. Компьютерный расчёт волновых полей в неоднородных средах широко применяется при проведении геофизических исследований и играет ключевую роль в решении задач миграции и инверсии данных сейсмической разведки [1, 2]. Множество различных численных методов, применимых для решения динамической задачи деформирования геологических сред, было разработано различными научными группами: метод конечных разностей [3], метод конечных элементов [4], разрывный метод Галёркина [5], метод спектральных элементов [6]. Среди них метод конечных разностей остаётся наиболее часто используемым на практике благодаря простоте реализации и высокой вычислительной эффективности.

В настоящее время активно развивается сеточно-характеристический метод [7], который используется в настоящей работе. В последние годы велась активная разработка модификаций сеточно-характеристического метода на различных типах расчетных сеток: неструктурированных тетраэдральных [8, 9], декартовых [10–13], криволинейных структурированных [14], Химерных наложенных [15–17] для решения практических задач сейсмической разведки [8, 10, 11, 15, 16], сейсмостойкости [12, 14], неразрушающего контроля композиционных материалов [18], расчета вибраций железнодорожных путей [13, 17].

В процессе морской сейморазведки сейсмические волны распространяются как в акустической среде (водный слой), так и в упругой среде (морское дно и подстилающий геологический массив). В случае, если граница раздела сред является криволинейной, метод конечных разностей сталкивается со значительными трудностями при попытке корректного расчёта времени пробега отражённых от дна волн [19]. Одним из возможных способов повышения точности задания геометрии границы является уменьшение шага сетки, однако это приводит к значительному увеличению вычислительной сложности задачи [20]. С целью достижения компромисса между ростом вычислительных затрат и снижением точности моделирования возможно комбинирование метода конечных

разностей с техникой координатных преобразований [21]. Этот подход основан на отображении криволинейной расчётной сетки, совпадающей с границей слоёв, в вычислительно удобную ортогональную сетку с помощью достаточно гладкого преобразования координат.

В данной работе рассматривается задача распространения сейсмических волн в акустической среде, содержащей криволинейные границы раздела слоёв. Использование обратного преобразования из криволинейных в декартовы координаты позволяет для выделенного класса расчётных сеток применить сеточно-характеристический метод повышенного порядка точности на расширенном пространственном шаблоне. Для устранения эффекта снижения порядка аппроксимации двумерной расчётной сетки по времени за счёт использования покоординатного расщепления применяется метод многошагового операторного расщепления [22]. Проведённые вычислительные эксперименты подтверждают высокую точность расчётов и устойчивость схемы при выполнении стандартного условия Куранта.

Материалы и методы. Динамическое поведение однородной акустической среды при малых деформациях и в отсутствии действия внешних объёмных сил описывается гиперболической системой уравнений вида:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla p = \vec{0}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \nabla \cdot \vec{v} = 0. \end{cases}$$

Здесь используются следующие обозначения: ρ — плотность среды; c — скорость распространения акустических волн; $p(x, y, z, t)$ — акустическое давление; $\vec{v}(x, y, z, t) = (u, v, w)^T$ — вектор скорости в рассматриваемой точке акустической среды. В двумерной постановке задачи все искомые функции не зависят от третьей пространственной переменной: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \vec{0}$, $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$. Пусть исходно область интегрирования покрыта некоторой криволинейной структурной расчётной сеткой так, что возможно достаточно гладкое её отображение на равномерную квадратную расчётную область (рис. 1). Пусть связь между исходными декартовыми координатами x и y и трансформированными координатами ξ и η задаётся аналитически в явном виде:

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta), \\ y = y(\xi, \eta). \end{cases}$$

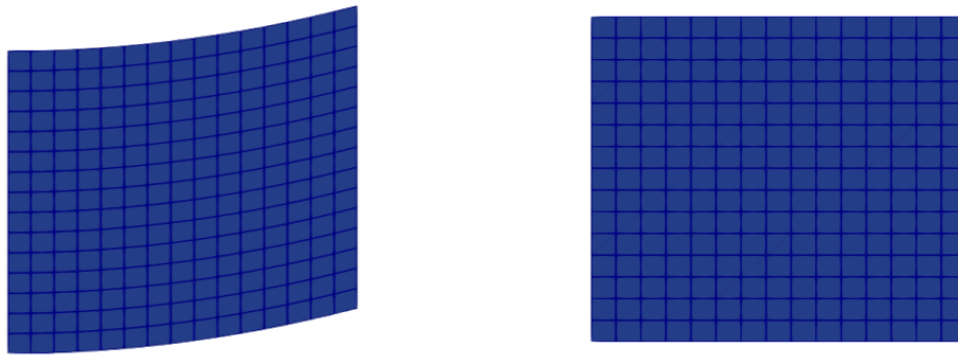


Рис. 1. Исходная криволинейная расчётная сетка (x, y) (слева) и трансформированная квадратная сетка (ξ, η) (справа)

Путём перехода в исходной системе уравнений к новым координатам получим, что

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \frac{1}{|J|} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right] + \rho c^2 \frac{1}{|J|} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right] = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{1}{|J|} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{1}{|J|} \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = 0,$$

где введено новое обозначение $|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}$ — Якобиан перехода.

Данная система уравнений может быть переписана в канонической форме:

$$\vec{q}_t + A_\xi \vec{q}_\xi + A_\eta \vec{q}_\eta = 0.$$

Здесь введены следующие дополнительные обозначения:

$$\vec{q} = (p, u, v)^T,$$

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & \rho c^2 \frac{1}{|J|} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\rho c^2 \frac{1}{|J|} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{1}{\rho} \frac{1}{|J|} \frac{\partial y}{\partial \eta} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{1}{|J|} \frac{\partial x}{\partial \eta} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_\eta = \begin{pmatrix} 0 & -\rho c^2 \frac{1}{|J|} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \rho c^2 \frac{1}{|J|} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{1}{|J|} \frac{\partial y}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{1}{|J|} \frac{\partial x}{\partial \xi} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для построения численного решения данной двумерной системы уравнений можно применить метод расщепления по пространственным направлениям, тем самым сводя задачу к последовательному решению двух одномерных задач:

$$\vec{q}_t + A_\xi \vec{q}_\xi = 0,$$

$$\vec{q}_t + A_\eta \vec{q}_\eta = 0.$$

При этом решение первой системы уравнений является начальным условием для решения второй системы уравнений. Отметим, что данная процедура позволяет построить сходящийся вычислительный алгоритм, обладающий, однако, в общем случае лишь первым порядком аппроксимации по времени. Это обусловлено непостоянностью операторов, связанных с матрицами A_ξ и A_η .

Отметим, что каждая из одномерных систем с матрицей A_j ($j = \xi, \eta$) является гиперболической и может быть представлена в следующем виде:

$$A_j = \Omega_j^{-1} \Lambda_j \Omega_j,$$

$$\Lambda_\xi = \frac{1}{|J|} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2} (c, -c, 0),$$

$$\Lambda_\eta = \frac{1}{|J|} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} (c, -c, 0).$$

Решение одномерной гиперболической системы с постоянными коэффициентами можно свести к решению задачи пространственной интерполяции переходом в инварианты Римана по формуле:

$$\vec{\omega} = \Omega_j \vec{q}.$$

Для наглядности рассмотрим процедуру построения решения задачи вдоль направления ξ . Выполняя левое умножение системы уравнений на матрицу Ω_ξ и подставляя выше полученные выражения в исходную систему уравнений, в условиях независимости Ω_ξ от ξ получаем, что

$$\vec{\omega}_t + \Lambda_\xi \vec{\omega}_\xi = 0.$$

Для каждого уравнения из данной системы одномерных независимых уравнений переноса с постоянными коэффициентами по их характеристическим свойствам значение на следующем временном слое в точности определяется следующим выражением:

$$\vec{\omega}(\xi_m, t^n + \tau) = \vec{\omega}(\xi_m - \Lambda_\xi \tau, t^n).$$

При вычислении правой части данного равенства используется процедура интерполяции многочленами заданной степени на фиксированном пространственном шаблоне. В данной работе используется сеточно-характеристическая схема пятого порядка аппроксимации, построенная на семиточечном шаблоне с использованием ин-

терполяционного многочлена пятого порядка [23]. Далее искомую вектор-функцию $\vec{q} = (p, u, v)^T$, на следующем временном слое можно рассчитать по формуле (в силу невырожденности преобразования):

$$\vec{q} = \Omega_{\xi}^{-1} \vec{\omega}.$$

Отметим, что структура матрицы Ω_j из собственных векторов может быть записана компактно в тензорном виде. Введём следующие обозначения для направлений, соответствующих осям ξ , η :

$$n_0^r = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} \end{pmatrix},$$

$$n_1^r = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix}.$$

Тогда переход в инварианты Римана имеет вид:

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2} n_0^r \cdot \vec{v} \pm \frac{p}{2\rho c}, \text{ for } \xi,$$

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2} n_1^r \cdot \vec{v} \pm \frac{p}{2\rho c}, \text{ for } \eta.$$

Как было отмечено ранее, использование данного метода расщепления снижает порядок аппроксимации двумерной схемы по времени. Для решения данной проблемы в настоящей работе используется многошаговое операторное расщепление, основанное на применении дробных шагов по времени [24]. В общем виде данный расчётный алгоритм для каждого шага по времени может быть представлен следующим образом:

for i in $1, \dots, s$:

 рассчитываем шаг вдоль ξ : $\text{step } \xi(\alpha_i^{\xi} \tau)$,

 рассчитываем шаг вдоль η : $\text{step } \eta(\alpha_i^{\eta} \tau)$.

Коэффициенты $\alpha_i^j, i \in (1, 2, \dots, s), j \in (\xi, \eta)$, задающие величины дробных шагов по времени, однозначно определяют схему многошагового расщепления. При этом отметим, что возможно построение неединственной схемы заданного порядка аппроксимации с заданным числом стадий. В настоящей работе использовалась схема многошагового расщепления 5-го порядка с 7 стадиями [24]. Её коэффициенты представлены в таблице 1.

Таблица 1

Коэффициенты используемой схемы многошагового расщепления 5-го порядка

i	α_i^{ξ}	α_i^{η}
1	0,475018345144539497	-0,402020995028838599
2	0,021856594741098449	0,345821780864741783
3	-0,334948298035883491	0,400962967485371350
4	0,512638174652696736	0,980926531879316517
5	-0,011978701020553904	-1,362064898669775624
6	-0,032120004263046859	0,923805029000837468
7	0,369533888781149572	0,112569584468347105

Результаты исследования. Построенная двумерная сеточно-характеристическая схема была применена для моделирования процесса распространения плоской P -волны. Рассматривалась постановка задачи, характерная для области сейсмической разведки в субгоризонтальном слоистом геологическом массиве. Расчётная область покрывалась криволинейной расчётной сеткой, задаваемой следующим координатным преобразованием:

$$\begin{cases} x = \xi, \\ y = \eta + \gamma \xi^2, \end{cases}$$

где $\gamma = 5 \cdot 10^{-4}$.

Преимуществом данного способа параметризации является независимость собственных векторов и собственных значений задачи для шагов вдоль (ξ, η) от переменных (ξ, η) соответственно. Это позволяет вносить матрицу Ω_j под

знак дифференцирования по координате и строить точное решение одномерной задачи. Исходная область интереса в декартовых координатах занимала квадрат со стороной 600 м. Акустические характеристики среды: плотность $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, скорость распространения продольной волны $c = 2000 \text{ m/s}$. Начальное возмущение задавалось на расстоянии 400 м от нижней границы направленным вертикально вниз. Рассчитывалось 50 мс физического времени. Шаг по времени выбирался из условия устойчивости Куранта для промежуточного шага вычислительного алгоритма, соответствующего максимальному по модулю коэффициенту α_s^n .

Для подтверждения достижения заявленного повышенного порядка сходимости данной схемой авторами была проведена серия расчётов на последовательно измельчающихся криволинейных расчётных сетках. Результаты эмпирической оценки порядка сходимости по нормам L_1 и L_∞ представлены в таблице 2.

Таблица 2

Исследование порядка сходимости построенной схемы.
Задача с вертикальной P -волной

h	Error in L_1	Error in L_∞	Order in L_1	Order in L_∞
2,000	2,6081E+09	9,0030E+05	—	—
1,000	1,0736E+09	3,6153E+05	1,281	1,316
0,500	1,1051E+08	4,3919E+04	3,280	3,041
0,250	4,3173E+06	1,6748E+02	4,678	4,713
0,125	1,3778E+05	5,3186E+01	4,970	4,977

Был выполнен расчет с применением стандартного метода расщепления по пространственным направлениям. Результаты представлены в таблице 3.

Таблица 3

Исследование порядка сходимости схемы со стандартным расщеплением.
Задача с вертикальной P -волной

h	Error in L_1	Error in L_∞	Order in L_1	Order in L_∞
2,000	1,7314E+09	5,9920E+05	—	—
1,000	4,3286E+08	1,6200E+05	2,000	1,887
0,500	3,5098E+07	1,9527E+04	3,624	3,052
0,250	5,6940E+06	3,8921E+03	2,624	2,327
0,125	1,3951E+06	9,6667E+02	2,029	2,009

Отметим, что распространение фронта волны вдоль одной из линий расчётной сетки, как это происходило в представленном выше тесте, не является существенным требованием для сохранения схемой порядка сходимости. В описанных выше условиях была решена задача о распространении P -волны под фиксированным углом $\beta = -5^\circ$ к вертикальной оси. Результаты эмпирической оценки порядка сходимости по двум нормам представлены в таблице 4.

Таблица 4

Исследование порядка сходимости построенной схемы.
Задача с наклонной P -волной

h	Error in L_1	Error in L_∞	Order in L_1	Order in L_∞
2,000	2,1279E+09	8,9108E+05	—	—
1,000	8,7694E+08	3,5489E+05	1,279	1,328
0,500	8,8829E+07	4,2314E+04	3,303	3,068
0,250	3,4498E+06	1,6029E+03	4,686	4,722
0,125	1,1013E+05	5,0870E+01	4,969	4,978

Был выполнен расчет с применением стандартного метода расщепления по пространственным направлениям. Результаты представлены в таблице 5.

Исследование порядка сходимости схемы со стандартным расщеплением.
Задача с наклонной P -волной

h	Error in L_1	Error in L_∞	Order in L_1	Order in L_∞
2,000	1,4481E+09	5,9613E+05	—	—
1,000	3,6522E+08	1,6221E+05	1,987	1,878
0,500	3,6355E+07	2,4925E+04	3,329	2,702
0,250	7,3132E+06	5,4214E+03	2,314	2,201
0,125	1,8012E+06	1,3417E+03	2,022	2,015

Наибольший интерес представляет расчёт процесса распространения сейсмических волн в массиве, состоящем из геологических слоёв, обладающих различными механическими характеристиками (песчаники, глины, карбонаты). Для тестирования возможности применения разработанной численной схемы для решения данного типа задач был проведён следующий вычислительный эксперимент. Рассматривались три расчётные сетки, покрывающие три геологических слоя, занимающих физическую область размерами 90×150 м. Расчётная сетка в средней области задавалась криволинейной с параметром $\gamma = 5 \cdot 10^{-4}$. Это привело к формированию криволинейной верхней и нижней границ. Расчётные сетки в верхней и нижней областях задавались с постепенно изменяющимся параметром γ так, что верхняя граница верхней сетки и нижняя граница нижней сетки оставались горизонтальными. Выполнялся тест на отсутствие значимых отражений от «виртуальных» геологических границ, обусловленных только лишь делением всей расчётной сетки на три подобласти. Для этого в каждом из слоёв использовались одинаковые параметры среды.

В качестве источника сейсмического сигнала была задана плоская P -волна на расстоянии 20 м от верхней границы верхней подобласти, распространяющаяся вниз. Шаг сетки по пространству составлял 0,5 м, шаг по времени 100 мкс, что удовлетворяет условию устойчивости Куранта. Пространственные распределения давления во всей расчётной области в фиксированный момент времени $T = 50$ мс, полученные с использованием сеточно-характеристической схемы третьего порядка аппроксимации и стандартного расщепления, а также с использованием описанной в работе сеточно-характеристической схемы пятого порядка аппроксимации и многошагового расщепления представлены на рис. 2. Видно более точное сохранение амплитуды исходной волны и отсутствие значимых отражений.

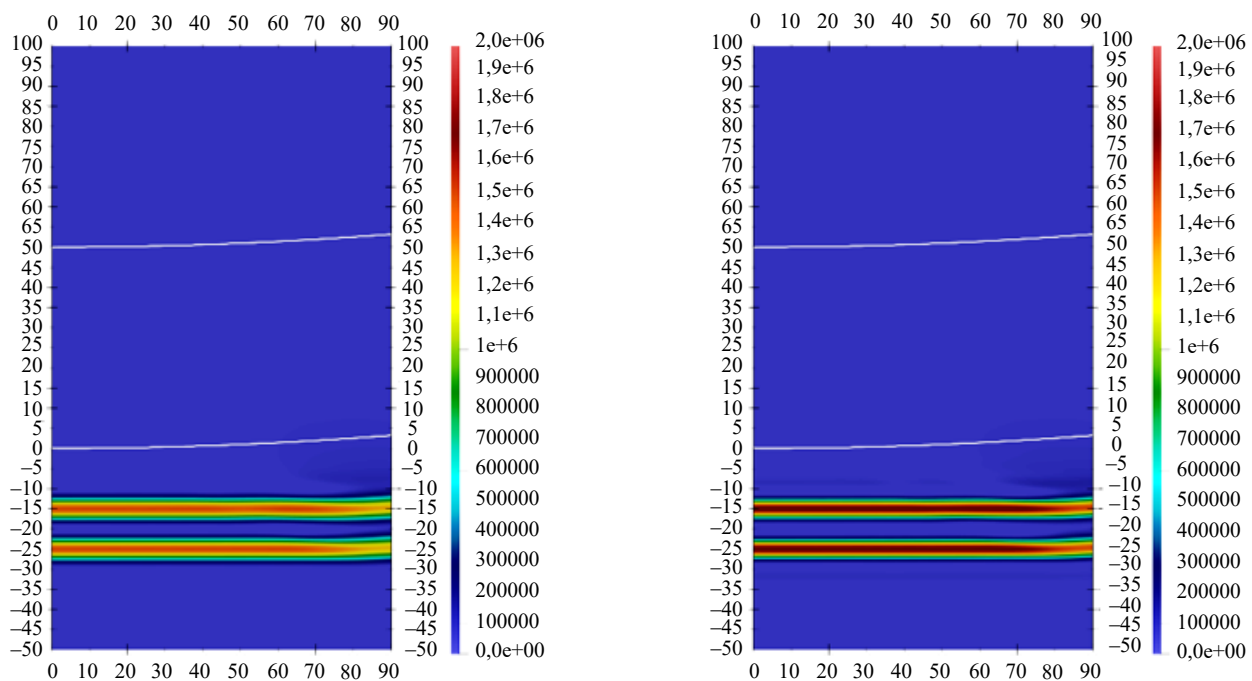


Рис. 2. Акустическое поле в трёхслойной среде.

Использованы: одномерная схема третьего порядка аппроксимации и обычное пространственное расщепление (слева); предложенная в настоящей работе схема (справа)

Обсуждение. В данной работе представлена новая двумерная сеточно-характеристическая схема на криволинейных структурных расчётных сетках. Она основана на применении метода многошагового расщепления для сохране-

ния повышенного порядка аппроксимации по времени и использует свойства гиперболической системы уравнений для сведения решения одномерной гиперболической задачи к процедуре пространственной полиномиальной интерполяции на фиксированном семиточечном шаблоне. Систематически исследовано поведение полученного численного решения задачи о распространении плоской волны в расчётной области, покрытой криволинейной сеткой специального вида. Показано достижение заявленного 5-го порядка сходимости как по координате, так и по времени. Отметим, что в случае невозможности аналитического вычисления Якобиана перехода между расчётными сетками или зависимости операторов одномерных задач от координат возможно применение некоторых модификаций метода. Во-первых, Якобиан перехода может быть рассчитан с заданной степенью точности конечно-разностным методом. Во-вторых, зависимость одномерных операторов от координат может быть учтена использованием соответствующих решателей повышенного порядка аппроксимации для одномерной гиперболической задачи.

В работе продемонстрирована возможность применения построенного расчётного алгоритма для моделирования процесса сейсмической разведки в слоистом геологическом массиве с криволинейными границами. Для описания горизонтальности дневной поверхности использована расчётная сетка, постепенно выравнивающаяся при удалении от границы раздела сред. Проведённое сравнение полученных акустических волновых полей с другой расчётной схемой показало возможность повышения точности сохранения амплитуд распространяющихся волн совместно с отсутствием значимых численных артефактов на контактных границах.

Заключение. Представляется возможным применение описанного подхода для решения практических задач сейсмической разведки. Перспективными направлениями дальнейших исследований являются:

1. Обобщение расчётного алгоритма на более сложные модели геологических сред: упругие, упругопластические, упруговязкопластические модели;
2. Обобщение расчётного алгоритма на трёхмерные постановки задач с целью повышения его универсальности и инженерной применимости.

Список литературы / References

1. Kallivokas L.F., Fathi A., Kucukcoban S., Stokoe II K.H., Bielak J., Ghattas O. Site characterization using full waveform inversion. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2013;47:62–82. <http://dx.doi.org/10.1016/j.soildyn.2012.12.012>
2. Yun Zhao, Xiaotao Wen, Chunlan Xie, Bo Li, Chenlong Li, Xiao Pan, et al. Simultaneous seismic inversion of effective stress parameter, fluid bulk modulus, and fracture density in TTI media. *Petroleum Science*. 2025. <https://doi.org/10.1016/j.petsci.2025.04.002>.
3. Самарский А.А., Николаев Е.С. *Методы решения сеточных уравнений*. Москва: Наука; 1978. 592 с. Samarskiy A.A., Nikolaev E.S. *Methods for solving grid equations*. Moscow: Nauka; 1978. 592 p. (In Russ.)
4. Matzen R. An efficient finite element time-domain formulation for the elastic second-order wave equation: A non-split complex frequency shifted convolutional PML. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2011;88(10):951–973. <https://doi.org/10.1002/nme.3205>
5. Antonietti P.F., Mazziari I., Migliorini F. A discontinuous Galerkin time integration scheme for second order differential equations with applications to seismic wave propagation problems. *Computers & Mathematics with Applications*. 2023;134:87–100. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2112.01792>
6. Komatitsch D., Tromp J. Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation. *Geophysical Journal International*. 1999;139(3):806–822. <https://doi.org/10.1046/J.1365-246X.1999.00967.X>.
7. Магомедов К.М., Холодов А.С. *Сеточно-характеристические численные методы: учебник для вузов*. 2-е изд., испр. и доп. Москва: Юрайт; 2025. 313 с. Magomedov K.M., Kholodov A.S. *Grid-characteristic numerical methods: textbook for universities*. 2nd ed., rev. and add. Moscow: Yurait Publishing House; 2025. 313 p. (In Russ.)
8. Petrov I.B., Favorskaya A.V., Muratov M.V., Biryukov V.A., Sannikov A.V. Grid-characteristic method on unstructured tetrahedral grids. *Doklady Mathematics*. 2014;90:781–783. <https://doi.org/10.1134/S1064562414070254>
9. Favorskaya A.V., Petrov I.B. A study of high-order grid-characteristic methods on unstructured grids. *Numerical Analysis and Applications*. 2016;9:171–178. <https://doi.org/10.1134/S1995423916020087>
10. Favorskaya A.V., Zhdanov M.S., Khokhlov N.I., Petrov I.B. Modelling the wave phenomena in acoustic and elastic media with sharp variations of physical properties using the grid-characteristic method. *Geophysical Prospecting*. 2018;66(8):1485–1502. <https://doi.org/10.1111/1365-2478.12639>
11. Favorskaya A.V., Petrov I.B. The use of full-wave numerical simulation for the investigation of fractured zones. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2019;11:518–530. <https://link.springer.com/article/10.1134/S2070048219040069>
12. Favorskaya A.V., Petrov I.B. Inverse Problem of Determining the Strength Characteristics of Multi-Story Buildings on Piles. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2025;46(1):202–213. <https://doi.org/10.1134/S1995080224608555>
13. Kozhemyachenko A.A., Petrov I.B., Favorskaya A.V., Khokhlov N.I. Boundary conditions for modeling the impact of wheels on railway track. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2020;60:1539–1554. <https://link.springer.com/article/10.1134/S0965542520090110>
14. Favorskaya A.V., Khokhlov N.I., Petrov I.B. Grid-characteristic method on joint structured regular and curved grids for modeling coupled elastic and acoustic wave phenomena in objects of complex shape. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2020;41:512–525. <https://doi.org/10.1134/S1995080220040083>

15. Khokhlov N., Favorskaya A., Stetsyuk V., Mitskovets I. Grid-characteristic method using Chimera meshes for simulation of elastic waves scattering on geological fractured zones. *Journal of Computational Physics*. 2021;446:110637. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110637>
16. Khokhlov N.I., Favorskaya A., Furgailo V. Grid-characteristic method on overlapping curvilinear meshes for modeling elastic waves scattering on geological fractures. *Minerals*. 2022;12(12):1597. <https://doi.org/10.3390/min12121597>
17. Pesnya E., Kozhemyachenko A.A., Favorskaya A.V. Vibration Analysis of Frost Heaving of the Ice Lens Type on Railways by a Grid-Characteristic Method. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2025;46(1):317–325. <https://doi.org/10.1134/S1995080224608270>
18. Petrov I., Vasyukov A., Beklemysheva K., Ermakov A., Favorskaya A. Numerical modeling of non-destructive testing of composites. *Procedia Computer Science*. 2016;96:930–938. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2016.08.272>
19. Yao Gang, da Silva N.V., Debens H.A., Wu Di. Accurate seabed modeling using finite difference methods. *Computational Geosciences*. 2018;22:469–84. <https://doi.org/10.1007/s10596-017-9705-5>
20. van Vossen R., Robertsson J.O., Chapman C.H. Finite-difference modeling of wave propagation in a fluid-solid configuration. *Geophysics*. 2002;67(2):618–24. <https://doi.org/10.1190/1.1468623>
21. Sun Yaochong, Zhang Wei, Xu Jiankuan, Chen Xiaofei. Numerical simulation of 2-D seismic wave propagation in the presence of a topographic fluid–solid interface at the sea bottom by the curvilinear grid finite-difference method. *Geophysical Journal International*. 2017;210(3):1721–1738. <https://doi.org/10.1093/gji/ggx257>
22. Golubev V.I., Shevchenko A.V., Petrov I.B. Raising convergence order of grid-characteristic schemes for 2D linear elasticity problems using operator splitting. *Computer Research and Modeling*. 2022;14(4):899–910. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2022-14-4-899-910>
23. Mi Xin, Golubev V. Two-Dimensional Grid-Characteristic Schemes for Acoustic Wave Simulations. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2025;46:283–291. <https://doi.org/10.1134/S199508022460852X>
24. Auzinger W., Hofstätter H., Ketcheson D., Koch O. Practical splitting methods for the adaptive integration of nonlinear evolution equations. Part I: Construction of optimized schemes and pairs of schemes. *BIT. Numerical Mathematics*. 2017;57:55–74. <https://doi.org/10.1007/s10543-016-0626-9>

Об авторах:

Синь Ми, аспирант кафедры информатики и вычислительной математики Московского физико-технического института (141701, Российская Федерация, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9145-0001), xinawafe@gmail.com

Василий Иванович Голубев, профессор кафедры информатики и вычислительной математики Московского физико-технического института (141701, Российская Федерация, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9145-0001), [SPIN-код](https://spiner.ru/0000-0001-9145-0001), [ScopusID](https://scopusid.com/0000-0001-9145-0001), golubev.vi@mipt.ru

Заявленный вклад авторов:

Синь Ми: проведение расчетов; формулирование выводов; подготовка текста; оформление научной статьи; работа с источниками; оформление графических материалов.

В.И. Голубев: формирование основной концепции; цели и задачи исследования; анализ результатов исследований; корректировка выводов; доработка текста.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Xin Mi, PhD Student at the Department of Computer Science and Computational Mathematics of the Moscow Institute of Physics and Technology (9, Institutskii lane, Dolgoprudny, 141701, Russian Federation), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9145-0001), xinawafe@gmail.com

Vasily I. Golubev, Professor at the Department of Computer Science and Computational Mathematics of the Moscow Institute of Physics and Technology (9, Institutskii lane, Dolgoprudny, 141701, Russian Federation), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9145-0001), [SPIN-code](https://spiner.ru/0000-0001-9145-0001), [ScopusID](https://scopusid.com/0000-0001-9145-0001), golubev.vi@mipt.ru

Contributions of the authors:

M Xin: making calculations; drawing conclusions; text preparation; working with sources; making graphic materials.

Golubev V.I.: basic concept formulation; research objectives and tasks computational analysis; conclusions correction; text revision.

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 27.06.2025

Поступила после рецензирования / Revised 24.07.2025

Принята к публикации / Accepted 15.08.2025