

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 519.6

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-16-29>


Аппроксимация граничных условий второго и третьего рода в краевых задачах для уравнений конвекции-диффузии с приложением к экологической гидрофизике

А.И. Сухинов^{id}, В.В. Сидорякина^{id}✉

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

✉ cvv9@mail.ru

Аннотация

Введение. Рассматривается разностная схема, аппроксимирующая краевую задачу для уравнения параболического типа в трехмерной постановке с условиями на границе I–III рода. Данная статья является дополнением к предыдущим работам авторов, посвященным численному решению одной из актуальных задач гидрофизики зон морского мелководья — задаче переноса, осаждения (транспорта) и трансформации взвешенного вещества. Аппроксимация указанного класса задач внутри области приводит к схемам, сходящимся со скоростью $O(\tau + h^2)$, где $h^2 = h_x^2 + h_y^2 + h_z^2$, h_x, h_y, h_z и τ — шаги разностной сетки по пространственным координатам x, y, z и времени соответственно. При этом требует аккуратного рассмотрения случай граничных условий, поскольку при неудачной их аппроксимации может понизиться порядок аппроксимации разностной схемы в целом. Предложенные авторами методы аппроксимации граничных условий обеспечивают сходимость разностной схемы со скоростью $O(\tau + h^2)$.

Материалы и методы. В своих исследованиях авторами сделан акцент на аппроксимации граничных условий третьего рода (аппроксимация граничных условий второго рода рассматривается как их частный случай). Ориентиром служит аппроксимация указанных граничных условий по формуле центральных разностей с последующим дифференцированием обеих частей уравнений диффузии-конвекции и исключением из полученных выражений функций решения в фиктивных узлах расширенной сетки.

Результаты исследования. Построены аппроксимации граничных условий II–III рода для краевой задачи, описывающей транспорт частиц взвешенного вещества, обеспечивающие сходимость разностной схемы со скоростью $O(\tau + h^2)$.

Обсуждение. Работа может быть полезна в задачах диффузии-конвекции, где необходимо добиться численного решения с приемлемой точностью.

Заключение. Дальнейшие исследования авторов могут быть направлены на исследование построенных разностных схем с учетом физически мотивированных ограничений на шаг временной сетки τ и сеточное число Пекле.

Ключевые слова: прибрежные морские системы, задача диффузии-конвекции, разностная схема, граничные условия второго и третьего рода, погрешность аппроксимации

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–11–00295–П, <https://rscf.ru/project/22-11-00295/>

Для цитирования. Сухинов А.И., Сидорякина В.В. Аппроксимация граничных условий второго и третьего рода в краевых задачах для уравнений конвекции-диффузии с приложением к экологической гидрофизике. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(3):16–29. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-16-29>

Approximation of Boundary Conditions of the Second and Third Types in Convection–Diffusion Equations with Applications to Environmental Hydrophysics

Alexander I. Sukhinov , Valentina V. Sidoryakina  

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

 cvv9@mail.ru

Abstract

Introduction. A finite-difference scheme approximating a boundary value problem for a parabolic-type equation in a three-dimensional setting with boundary conditions of the first-third types is considered. This paper is a continuation of the authors' previous works devoted to the numerical solution of one of the pressing problems of hydrophysics in shallow marine zones — the problem of transport, deposition, and transformation of suspended matter. The approximation of this class of problems inside the domain leads to schemes converging at a rate of $O(\tau + h^2)$, where $h^2 = h_x^2 + h_y^2 + h_z^2$, h_x , h_y , h_z and τ are the steps of the difference grid along the spatial coordinates x , y , z and time, respectively. However, the case of boundary conditions requires careful treatment, since an inaccurate approximation may reduce the overall order of accuracy of the finite-difference scheme. The methods proposed by the authors for approximating boundary conditions ensure the convergence of the finite-difference scheme at the rate of $O(\tau + h^2)$.

Materials and Methods. The authors focused on approximating third-type boundary conditions (with second-type conditions considered as a particular case). The approach is based on the central difference approximation of boundary conditions on an extended grid and the elimination of suspended matter concentration values in ghost nodes (cells).

Results. Approximations of the second- and third-type boundary conditions were constructed for a boundary value problem describing suspended matter transport. These approximations guarantee convergence of the finite-difference scheme at the rate of $O(\tau + h^2)$.

Discussion. The study may be useful in convection–diffusion problems where achieving numerical solutions with acceptable accuracy is required.

Conclusion. Future research may focus on the analysis of the constructed finite-difference schemes under physically motivated constraints on the time step τ and the grid Peclet number.

Keywords: coastal marine systems, convection–diffusion problem, finite-difference scheme, second- and third-type boundary conditions, approximation error

Funding. The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 22–11–00295–II, <https://rscf.ru/en/project/22-11-00295/>

For Citation. Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V. Approximation of Boundary Conditions of the Second and Third Types in Convection–Diffusion Equations with Applications to Environmental Hydrophysics. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(3):16–29. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-16-29>

Введение. Рассматривается начально-краевая задача транспорта взвешенного вещества многофракционного состава, учитывающая три пространственные переменные, а также следующие физические параметры и процессы: адвективный перенос, обусловленный движением водной среды, микротурбулентную диффузию и гравитационное осаждение частиц взвеси, переход частиц крупных гранулометрических фракций в более мелкие (распад) и наоборот — агрегацию (слипание) частиц мелких гранулометрических фракций в более крупные [1–4]. Для непрерывной задачи выполнено преобразование правых частей уравнений диффузии — конвекции — реакции многофракционных взвесей на временной сетке «с запаздыванием». Для этого на временной сетке с шагом τ выполнено преобразование правых частей уравнений начально-краевой задачи транспорта взвесей: для функций — концентраций взвесей, входящих в правые части уравнений задачи и не относящихся к той фракции, для которой сформулирована начально-краевая задача для уравнения диффузии — конвекции — реакции, значения этих концентраций определяются на предыдущем временном слое. Такой подход позволяет упростить последующую численную реализацию каждого из уравнений диффузии — конвекции — реакции. В настоящей статье рассматривается разностная схема, аппроксимирующая краевую задачу для уравнения параболического типа в трехмерной постановке с условиями на границе I–III рода. Данная статья является дополнением к предыдущим работам авторов, посвященным численному решению одной из актуальных задач гидрофизики зон морского мелководья — задаче переноса, осаждения (транспорта) и трансформации взвешенного вещества. Как правило, аппроксимация указанного класса задач внутри области приводит к схемам, сходящимся со $O(\tau + h^2)$, где $h^2 = h_x^2 + h_y^2 + h_z^2$, h_x , h_y , h_z и τ — шаги разностной сетки по пространственным координатам и времени соответственно. При этом требует аккуратного рассмотрения случай граничных условий, поскольку при неудачной их аппроксимации может понизиться порядок аппроксимации разностной схемы в целом. Предложенные авторами методы аппроксимации граничных условий обеспечивают сходимость разностной схемы со скоростью $O(\tau + h^2)$.

Материалы и методы. Будем полагать, что рассеянные в водной толще частицы взвешенного вещества разделены на R фракций. Осуществим постановку задачи для области $\bar{G}$

$$\bar{G} = \{0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq L_z\}.$$

В прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ рассмотрим трехмерное уравнение диффузии — конвекции — реакции осаждения с использованием кососимметрической формы представления оператора конвективного переноса [5–10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_r}{\partial t} + C_0 c_r &= D c_r + F_r, \quad r = 1, \dots, R, \quad (x, y, z) \in \bar{G}, \\ C_0 c_r &\equiv \frac{1}{2} \left[u \frac{\partial c_r}{\partial x} + v \frac{\partial c_r}{\partial y} + w \frac{\partial c_r}{\partial z} + w' \frac{\partial (u c_r)}{\partial x} + \frac{\partial (v c_r)}{\partial y} + \frac{\partial (w' c_r)}{\partial z} \right], \\ D c_r &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{hr} \frac{\partial c_r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{hr} \frac{\partial c_r}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{vr} \frac{\partial c_r}{\partial z} \right), \\ F_1 &= (\alpha_2 c_2 - \beta_1 c_1) + \gamma_1 c_1, \quad F_R = (\beta_{R-1} c_{R-1} - \alpha_R c_R) + \gamma_R c_R, \\ F_r &= (\beta_{r-1} c_{r-1} - \alpha_r c_r) + (\alpha_{r+1} c_{r+1} - \beta_r c_r) + \gamma_r c_r, \quad r = 2, \dots, R-1, \end{aligned} \quad (1)$$

где $c_r, c_r = c_r(x, y, z, t)$ — концентрация частиц в момент времени $t, t \in [0; T]$; u, v, w — компоненты вектора $\vec{U}$ скорости водной среды; $w', w'_r = w + w_{g,r}, w_{g,r}$ — гидравлическая крупность частиц; μ_{hr}, μ_{vr} — коэффициенты горизонтальной и вертикальной диффузии частиц; F_r — функция источника; α_r, β_r — коэффициенты, описывающие интенсивность превращения частиц одной фракции в другую, $\alpha_r \geq 0, \beta_r \geq 0$; γ_r — мощность внешнего источника частиц.

Уравнение (1) дополняется начальными условиями:

$$c_r(x, y, z, 0) = c_{r,0}(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \bar{G} \quad (2)$$

и граничными условиями:

– на боковых гранях параллелепипеда G :

$$c_r = c'_r, \quad \text{если } u_{\vec{n}} < 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial c_r}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \text{если } u_{\vec{n}} \geq 0 \quad (4)$$

($u_{\vec{n}}$ — проекция вектора скорости на внешнюю нормаль $\vec{n}$ к границе, c'_r — известные значения концентраций);

– на верхнем и нижнем основаниях параллелепипеда G , соответственно:

$$\frac{\partial c_r}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial c_r}{\partial z} = - \frac{w_{g,r}}{\mu_{v,r}} c_r. \quad (6)$$

В задаче (1)–(6) осуществим переход от z -координатной системы к θ -координатной системе, для которой используем декартову систему координат в горизонтальной плоскости, а в качестве вертикальной переменной — безразмерную переменную $\theta, \theta \in [0; 1]$.

При переходе к θ -координатной системе используем формулу:

$$\theta = \frac{z - \eta}{h}, \quad x_\theta = x, \quad y_\theta = y, \quad (7)$$

где h — глубина, η — высота относительно свободной поверхности.

Методами, изложенными в работе [11], выполним преобразование с «запаздыванием» на временной сетке $\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N_t, N_t \tau = T\}$. В результате получена цепочка начально-краевых задач, связанных по начальным и конечным данными на каждом шаге временной сетки.

Уравнение (1) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_r^n}{\partial t} + C_0 c_r^n &= D c_r^n + F_r^n, \quad t_{n-1} < t \leq t_n, \quad n = 1, 2, \dots, N_t, \\ C_0 c_r^n &\equiv \frac{1}{2} \left[u \frac{\partial c_r^n}{\partial x} + v \frac{\partial c_r^n}{\partial y} + w'_r \frac{1}{H} \frac{\partial c_r^n}{\partial \theta} + \frac{\partial (u c_r^n)}{\partial x} + \frac{\partial (v c_r^n)}{\partial y} + \frac{1}{H} \frac{\partial (w'_r c_r^n)}{\partial \theta} \right], \\ D c_r^n &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{hr} \frac{\partial c_r^n}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{hr} \frac{\partial c_r^n}{\partial y} \right) + \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu_{v,r} \frac{\partial c_r^n}{\partial \theta} \right), \\ F_1^n &= (\alpha_2 c_2^{n-1}(x, y, \theta, t_{n-1}) - \beta_1 c_1^n) + \gamma_1 c_1^n, \quad F_R^n = (\beta_{R-1} c_{R-1}^{n-1}(x, y, \theta, t_{n-1}) - \alpha_R c_R^n) + \gamma_R c_R^n, \\ F_r^n &= (\beta_{r-1} c_{r-1}^{n-1}(x, y, \theta, t_{n-1}) - \alpha_r c_r^n) + (\alpha_{r+1} c_{r+1}^{n-1}(x, y, \theta, t_{n-1}) - \beta_r c_r^n) + \gamma_r c_r^n, \quad r = 2, \dots, R-1. \end{aligned} \quad (8)$$

Начальные и граничные условия (2)–(6) соответствующим образом примут вид:

$$c_r^1(x, y, \theta, 0) = c_{r,0}(x, y, \theta, 0) \in \bar{G}, \quad (9)$$

$$c_r^n(x, y, \theta, t_{n-1}) = c_r^{n-1}(x, y, \theta, t_{n-1}), n = 2, \dots, N_t, (x, y, \theta) \in G, \quad (10)$$

$$c_r^n = c_r', \text{ если } u_n < 0,$$

$$\frac{\partial c_r^n}{\partial n} = 0, \text{ если } u_n \geq 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial c_r^n}{\partial \theta} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial c_r^n}{\partial \theta} = -\frac{w_{g,r}}{\mu_{v,r}} c_r^n. \quad (13)$$

Доказана сходимость решений преобразованной системы к решению исходной задачи в норме гильбертова пространства $L2(G)$ со скоростью $O(\tau)$ при $\tau \rightarrow 0$ [11].

Для расчета компонент вектора скорости движения водной среды использована трехмерная модель гидродинамического обтекания рельефа дна с учетом донного трения и подъема уровня [12–14].

Результаты исследования. Будем предполагать существование и непрерывность производных

$\frac{\partial^4 c_r^n}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 c_r^n}{\partial y^4}, \frac{\partial^4 c_r^n}{\partial \theta^4}, \frac{\partial^2 c_r^n}{\partial t^2}$, а также непрерывности частных производных второго порядка: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w_r'}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 \mu_{h,r}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \mu_{h,r}}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \mu_{v,r}}{\partial \theta^2}$. Дополнительно считаем, что существуют и непрерывны смешанные частные производные

функции c_r^n по переменным x, y, θ до пятого порядка включительно и по переменным x, y, θ, t до второго порядка включительно, а также смешанные частные производные функций $u^n, v^n, w_r'^n$ по переменным x, y, θ до второго порядка включительно.

Для аппроксимации задачи (8)–(13) используем сетки:

$$\omega = \omega_x \times \omega_y \times \omega_\theta \text{ и } \bar{\omega} = \bar{\omega}_x \times \bar{\omega}_y \times \bar{\omega}_\theta,$$

где

$$\begin{aligned} \omega_x &= \{x: x = ih_x; i = 1, \dots, N_x - 1; (N_x - 1)h_x \equiv L_x - h_x\}, \bar{\omega}_x = \{x: x = ih_x; i = 0, 1, \dots, N_x; N_x h_x \equiv L_x\}, \\ \omega_y &= \{y: y = jh_y; j = 1, \dots, N_y - 1; (N_y - 1)h_y \equiv L_y - h_y\}, \bar{\omega}_y = \{y: y = jh_y; j = 0, 1, \dots, N_y; N_y h_y \equiv L_y\}, \\ \omega_\theta &= \{\theta: \theta = kh_\theta; k = 1, \dots, N_\theta - 1; (N_\theta - 1)h_\theta \equiv 1 - h_\theta\}, \bar{\omega}_\theta = \{\theta: \theta = kh_\theta; k = 0, 1, \dots, N_\theta; N_\theta h_\theta \equiv 1\}. \end{aligned}$$

В работе [15] получена разностная схема, аппроксимирующая задачу (8)–(13) во внутренних узлах сетки со вторым порядком точности по пространственным переменным и первым — по временной переменной. Разностная схема, аппроксимирующая уравнение (8), запишется в виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^{n-1}(x_i, y_j, \theta_k)}{\tau} + C\bar{c}_r^n = D\bar{c}_r^n + \bar{F}_r^n, r = 1, 2, 3, (x_i, y_j, \theta_k) \in \omega, t_n \in \bar{\omega}_\tau, \\ &C\bar{c}_r^n = \frac{1}{2h_x} [u^n(x_i + 0,5h_x, y_j, \theta_k) \bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, \theta_k) - u^n(x_i - 0,5h_x, y_j, \theta_k) \bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, \theta_k)] + \\ &+ \frac{1}{2h_y} [v^n(x_i, y_j + 0,5h_y, \theta_k) \bar{c}_r^n(x_i, y_j + h_y, \theta_k) - v^n(x_i, y_j - 0,5h_y, \theta_k) \bar{c}_r^n(x_i, y_j - h_y, \theta_k)] + \\ &+ \frac{1}{2H(x, y)h_\theta} [w_r'^n(x_i, y_j, \theta_k + 0,5h_\theta) \bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k + h_\theta) - w_r'^n(x_i, y_j, \theta_k - 0,5h_\theta) \bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k - h_\theta)], \\ &D\bar{c}_r^n = \frac{1}{h_x^2} [\mu_{h,r}(x_i + 0,5h_x, y_j, \theta_k) (\bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k)) - \mu_{h,r}(x_i - 0,5h_x, y_j, \theta_k) \cdot \\ &\cdot (\bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, \theta_k))] + \frac{1}{h_y^2} [\mu_{h,r}(x_i, y_j + 0,5h_y, \theta_k) (\bar{c}_r^n(x_i, y_j + h_y, \theta_k) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k)) - \\ &- \mu_{h,r}(x_i, y_j - 0,5h_y, \theta_k) (\bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j - h_y, \theta_k))] + \frac{1}{H^2(x_i, y_j)h_\theta^2} [\mu_{v,r}(x_i, y_j, \theta_k + 0,5h_\theta) \cdot \\ &\cdot (\bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k + h_\theta) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k)) - \mu_{v,r}(x_i, y_j, \theta_k - 0,5h_\theta) (\bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k - h_\theta))], \\ &\bar{F}_1^n = (\alpha_2 \bar{c}_2^{n-1}(x, y, \theta, t_{n-1}) - \beta_1 \bar{c}_1^n) + \gamma_1^n \bar{c}_1^n; \bar{F}_R^n = (\beta_{R-1} \bar{c}_{R-1}^{n-1}(x, y, \theta, t_{n-1}) - \alpha_R \bar{c}_R^n) + \gamma_R^n \bar{c}_R^n; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\bar{F}_r^n = (\beta_{r-1} \bar{c}_{r-1}^{n-1}(x, y, \theta, t_{n-1}) - \alpha_r \bar{c}_r^n) + (\alpha_{r+1} \bar{c}_{r+1}^{n-1}(x, y, \theta, t_{n-1}) - \beta_r \bar{c}_r^n) + \gamma_r^n \bar{c}_r^n, \quad r = 2, \dots, R-1.$$

$$\bar{F}_3^n = (\beta_2 \bar{c}_2^{n-1}(x, y, \theta, t_{n-1}) - \alpha_3 \bar{c}_3^n) + \gamma_3^n \bar{c}_3^n, \quad (x_i, y_j, \theta_k) \in \omega, \quad t_n \in \bar{\omega}_\tau.$$

Здесь и далее черта над c_r^n и F_r^n означает их принадлежность классу сеточных функций.

Нетрудно убедиться, что для погрешности аппроксимации $\psi^n(x_i, y_j, \theta_k)$ полученной разностной схемы в узлах сетки $\bar{\omega}_\tau \times \omega$ выполнено соотношение:

$$\psi^n(x_i, y_j, \theta_k) = O(\tau + h^2), \quad n = 0, 1, \dots, N_t,$$

Отметим, что начальное условие (9) задаётся на сетке $\bar{\omega}_\tau \times \omega$ точно.

Перейдем к построению разностной схемы второго порядка точности для задачи транспорта взвешенного вещества в граничных узлах.

Будем считать, что выполнены условия:

$$k_{11} \leq \frac{h_x}{h_y} \leq k_{12}, \quad k_{21} \leq \frac{h_0}{h_x} \leq k_{22}, \quad k_{31} \leq \frac{h_0}{h_y} \leq k_{32}, \quad (15)$$

где $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}, k_{31}, k_{32}$ — некоторые положительные константы.

Для аппроксимации граничных условий введём расширенную сетку:

$$\bar{\omega}^+ = \{(x_i, y_j, \theta_k), i = -1, 0, \dots, N_x + 1, j = -1, 0, \dots, N_y + 1, k = -1, 0, \dots, N_\theta + 1, x_i = ih_x; y_j = jh_y; \theta_k = kh_\theta, \\ N_x h_x = L_x; N_y h_y = L_y; N_\theta h_\theta = 1\}.$$

Для узлов сетки $\bar{\omega}^+ \setminus \bar{\omega}$ значения компонент вектора скорости предполагается равным нулю:

$$\bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k) = 0, \quad \text{если } (x_i, y_j, \theta_k) \in \bar{\omega}^+ \setminus \bar{\omega}. \quad (16)$$

Кроме того, будем считать известными значения компонент вектора скоростей водной среды и гидравлической крупности частиц взвеси в узлах сетки $\bar{\omega}^+ \setminus \bar{\omega}$ с дробными значениями индексов: $u^n(-0,5h_x, y_j, \theta_k)$, $u^n(L_x + 0,5h_x, y_j, \theta_k)$, $v^n(x_i, -0,5h_y, \theta_k)$, $v^n(x_i, L_y + 0,5h_y, \theta_k)$ и $w_r^n(x_i, y_j, -0,5h_\theta)$, $w_r^n(x_i, y_j, 1 + 0,5h_\theta)$.

Граничные условия (10) аппроксимируются следующим образом:

$$\begin{cases} \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k) = c'_r, & \text{если } u^n(0,5h_x, y_j, \theta_k) + u^n(-0,5h_x, y_j, \theta_k) > 0, \\ \bar{c}_r^n(L_x, y_j, \theta_k) = c'_r, & \text{если } u^n(L_x - 0,5h_x, y_j, \theta_k) + u^n(L_x + 0,5h_x, y_j, \theta_k) < 0, \end{cases} \quad (x_i, y_j, \theta_k) \in \bar{\omega}^+, \quad (17)$$

$$\begin{cases} \bar{c}_r^n(x_i, 0, \theta_k) = c'_r, & \text{если } v^n(x_i, 0,5h_y, \theta_k) + v^n(x_i, -0,5h_y, \theta_k) > 0, \\ \bar{c}_r^n(x_i, L_y, \theta_k) = c'_r, & \text{если } v^n(x_i, L_y - 0,5h_y, \theta_k) + v^n(x_i, L_y + 0,5h_y, \theta_k) < 0, \end{cases} \quad (x_i, y_j, \theta_k) \in \bar{\omega}^+. \quad (18)$$

Построение разностных схем для граничных условий (11)–(13) проведем на примере условия третьего рода — условия (13). Поскольку граничные условия (11) и (12) (условия второго рода) представляют частный случай условия (13), то построение разностных схем здесь можно будет провести с помощью аналогичных рассуждений.

При $\theta_k = 1$ граничное условие (13) равносильно следующему:

$$\frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} = - \frac{w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} c_r^n(x_i, y_j, 1). \quad (19)$$

На сетке $\bar{\omega}^+$ узлы $(x_i, y_j, 1)$ являются внутренними.

Разностная схема в узлах $(x_i, y_j, 1)$ сетки $\bar{\omega}^+$ запишется в виде:

$$\frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1) - \bar{c}_r^{n-1}(x_i, y_j, 1)}{\tau} + C \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1) = D \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1) + F_r^n(x_i, y_j, 1), \quad n = 1, \dots, N_t. \quad (20)$$

В своих рассуждениях ориентируемся на аппроксимацию рассматриваемого граничного условия по формуле центральных разностей и исключение из полученного выражения и уравнения (20) значений функции $\bar{c}_r^n$ в фиктивном узле $(x_i, y_j, 1 + h_\theta)$.

В уравнении (20) функции $\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_\theta)$ будут входить в слагаемые:

$$\frac{1}{2H(x_i, y_j)h_\theta} [w_r^n(x_i, y_j, 1 + 0,5h_\theta) \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_\theta) - w_r^n(x_i, y_j, 1 - 0,5h_\theta) \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_\theta)], \\ \frac{1}{H^2(x_i, y_j)h_\theta^2} [\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 + 0,5h_\theta) (\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_\theta) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)) - \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 - 0,5h_\theta) \cdot$$

$$\cdot (\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0))],$$

которые мы обозначим как $C_0 \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)$ и $D_0 \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)$ соответственно.

В силу того, что на рассматриваемой границе $w|_{(x,y,1)} \equiv 0$, соотношение для $C_0 \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)$ может быть приведено к виду:

$$\frac{w_{g,r}}{2H(x_i, y_j)h_0} [\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0)].$$

Условие (19) запишем в виде:

$$\frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0)}{2h_0} = -\frac{2w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 + 0,5h_0) + \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 - 0,5h_0)} \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1) \quad (21)$$

и из него получим:

$$\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0) = \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0) - \frac{4w_{g,r}h_0}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 + 0,5h_0) + \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 - 0,5h_0)} \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1).$$

Для компактного изложения дальнейших рассуждений обозначим:

$$\varepsilon_r = \frac{2w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 + 0,5h_0) + \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 - 0,5h_0)}$$

и тогда

$$\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0) = \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0) - 2h_0 \varepsilon_r \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1). \quad (22)$$

Подставляя, полученное по формуле (22) значение $\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0)$ в выражение для $C_0 \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)$, получим аппроксимацию:

$$C_0 \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1) \equiv -\frac{w_{g,r} \varepsilon_r}{H(x_i, y_j)} \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1). \quad (23)$$

Как видно из равенства (23) $C_0 \bar{c}_r^n$ в узлах $(x_i, y_j, 1)$ рассчитывается точно.

Предварительные выкладки показали, что если воспользоваться равенством (22) для аппроксимации $D_0 \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)$, то будем иметь первый порядок погрешности по θ . Для аппроксимации данного оператора со вторым порядком по θ авторами будет предложен иной подход.

Разложив функции $c_r^n(x_i, y_j, 1 \pm h_0)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(x_i, y_j, 1)$, найдем выражение для левой части равенства (21):

$$\frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0)}{2h_0} = \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} + \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^3} \frac{h_0^2}{6} + O(h_0^4).$$

Последнее выражение с учётом условия (19) может быть преобразовано к виду:

$$\frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0)}{2h_0} = -\frac{w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} c_r^n(x_i, y_j, 1) + \frac{h_0^2}{6} \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^3} + O(h_0^4). \quad (24)$$

С помощью равенства (24) найдем значение функции $\bar{c}_r^n$ в фиктивном узле $(x_i, y_j, 1 + h_0)$:

$$\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0) = \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0) - 2h_0 \varepsilon_r c_r^n(x_i, y_j, 1) + \frac{h_0^3}{3} \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^3} + O(h_0^5). \quad (25)$$

Используя равенство (25), составим выражение для $D_0 \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)$:

$$D_0 \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1) \equiv \frac{1}{H^2(x_i, y_j)h_0^2} [(\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 + 0,5h_0) + \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 - 0,5h_0))(\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)) - \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 + 0,5h_0) \left(2h_0 \varepsilon_r c_r^n(x_i, y_j, 1) - \frac{h_0^3}{3} \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^3} \right)].$$

Очевидно, что для достижения цели достаточно аппроксимировать производную $\frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^3}$ с первым порядком по θ . Построим аппроксимацию этой производной с заданной точностью.

Обе части уравнения (8) продифференцируем по переменной θ и из полученного равенства выразим производную $\frac{\partial^3 c_r^n}{\partial \theta^3}$. Далее перейдем к пределу при $\theta \rightarrow 1$ и, учитывая условие (36), найдем:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^3} &= \frac{H^2(x_i, y_j)}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} \left[\frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial t \partial \theta} - \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1) \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2 \partial \theta} - \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1) \cdot \right. \\
 &\cdot \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y^2 \partial \theta} + \left(u^n(x_i, y_j, 1) - \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta} + \left(v^n(x_i, y_j, 1) - \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial y} \right) \cdot \\
 &\cdot \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y \partial \theta} + \frac{1}{H(x_i, y_j)} \left(w_{g,r} - \frac{2}{H(x_i, y_j)} \frac{\partial \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} \right) \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^2} - \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} \cdot \\
 &\cdot \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2} - \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial u^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta} \right) \cdot \\
 &\cdot \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x} + \left(\frac{\partial v^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial y \partial \theta} \right) \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 v^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y \partial \theta} - \right. \\
 &\left. - \frac{w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} \frac{\partial u^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x} - \frac{w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} \frac{\partial v^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y} + \frac{2w_{g,r}}{H^2(x_i, y_j) \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} \frac{\partial^2 \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^2} \right) \cdot c_r^n(x_i, y_j, 1) - \frac{\partial F_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} \left. \right].
 \end{aligned} \quad (26)$$

Очевидным образом, здесь выполнено:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_1^n}{\partial \theta} &= \left(-\alpha_2 \frac{w_{g,2}}{\mu_{v,2}(x_i, y_j, 1)} c_2^{n-1}(x_i, y_j, 1, t_{n-1}) + \beta_1 \frac{w_{g,1}}{\mu_{v,1}(x_i, y_j, 1)} c_1^n \right) + \gamma_1^n \frac{w_{g,1}}{\mu_{v,1}(x_i, y_j, 1)} c_1^n, \\
 F_R^n &= \left(-\beta_{R-1} \frac{w_{g,R-1}}{\mu_{v,R-1}(x_i, y_j, 1)} c_{R-1}^{n-1}(x_i, y_j, 1, t_{n-1}) + \alpha_R \frac{w_{g,R}}{\mu_{v,R}(x_i, y_j, 1)} c_R^n \right) - \gamma_R^n \frac{w_{g,R}}{\mu_{v,R}(x_i, y_j, 1)} c_R^n, \\
 \frac{\partial F_r^n}{\partial \theta} &= \left(-\beta_1 \frac{w_{g,r-1}}{\mu_{v,r-1}(x_i, y_j, 1)} c_{r-1}^{n-1}(x_i, y_j, 1, t_{n-1}) + \alpha_r \frac{w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} c_r^n \right) + \\
 &+ \left(-\alpha_{r+1} \frac{w_{g,r+1}}{\mu_{v,r+1}(x_i, y_j, 1)} c_{r+1}^{n-1}(x_i, y_j, 1, t_{n-1}) + \beta_r \frac{w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} c_r^n \right) - \gamma_r^n \frac{w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} c_r^n.
 \end{aligned}$$

Для удобства восприятия текста читателем, аппроксимацию выражения в прямых скобках из правой части выражения (26) проведем для каждого слагаемого отдельно. Изначально отметим, что для коэффициента $\frac{H^2(x_i, y_j)}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)}$, стоящего перед данной скобкой, используем выражение:

$$\frac{H^2(x_i, y_j)}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} = \frac{2H^2(x_i, y_j)}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 + 0.5h_0) + \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 - 0.5h_0)}. \quad (27)$$

Рассмотрим производную $\frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial t \partial \theta}$. Для неё имеем:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial t \partial \theta} &= \frac{1}{2h_0} \left(\frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0, t_n + \tau) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0, t_n - \tau)}{2\tau} - \right. \\
 &\left. - \frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0, t_n + \tau) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0, t_n - \tau)}{2\tau} + O(\tau^2) \right) + O(h_0^2) = \\
 &= \frac{1}{2\tau} \left(\frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0, t_n + \tau) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0, t_n + \tau)}{2h_0} - \right. \\
 &\left. - \frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0, t_n - \tau) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0, t_n - \tau)}{2h_0} \right) + \frac{1}{2h_0} O(\tau^2) + O(h_0^2).
 \end{aligned} \quad (28)$$

Используя равенство (28), могут быть записаны соотношения:

$$\begin{aligned}
 \frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0, t_n \pm \tau) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0, t_n \pm \tau)}{2h_0} &= \\
 &= -\frac{w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n \pm \tau) + \frac{h_0^2}{6} \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n \pm \tau)}{\partial \theta^3} + O(h_0^4).
 \end{aligned} \quad (29)$$

С помощью равенства (29) преобразуем равенство (28):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 c_r^n}{\partial t \partial \theta} = & -\frac{w_{g,r}}{2\tau\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)}(c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n + \tau) - c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n - \tau)) + \\ & + \frac{h_0^2}{12\tau} \left(\frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n + \tau)}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n - \tau)}{\partial \theta^3} \right) + \frac{1}{2h_0} O(\tau^2) + O(h_0^2). \end{aligned} \quad (30)$$

Для выражения $\frac{w_{g,r}}{2\tau\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)}(c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n + \tau) - c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n - \tau))$ имеем:

$$\frac{w_{g,r}}{2\tau\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)}(c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n + \tau) - c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n - \tau)) = \frac{w_{g,r}}{2\tau\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n)}{\partial t} + O(\tau^2). \quad (31)$$

С учетом (31) преобразуем выражение (30). Получим:

$$\frac{\partial^2 c_r^n}{\partial t \partial \theta} = -\varepsilon_r \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n)}{\partial t} + \frac{1}{2\tau} \frac{h_0^2}{6} \left(\frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n + \tau)}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n - \tau)}{\partial \theta^3} \right) + \frac{1}{2h_0} O(\tau^2) + O(h_0^2 + \tau^2).$$

Далее, введя обозначение $\varphi(x_i, y_j, 1, t_n \pm \tau) = \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n \pm \tau)}{\partial \theta^3}$, последнее равенство запишем в виде:

$$\frac{\partial^2 c_r^n}{\partial t \partial \theta} = -\varepsilon_r \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n)}{\partial t} + \frac{h_0^2}{6} \left(\frac{\varphi(x_i, y_j, 1, t_n + \tau) - \varphi(x_i, y_j, 1, t_n - \tau)}{2\tau} \right) + \frac{1}{2h_0} O(\tau^2) + O(h_0^2 + \tau^2).$$

Откуда следует

$$\frac{\partial^2 c_r^n}{\partial t \partial \theta} = -\varepsilon_r \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n)}{\partial t} + \frac{h_0^2}{6} \left(\frac{\partial \varphi(x_i, y_j, 1, t_n)}{\partial t} + O(\tau^2) \right) + \frac{1}{2h_0} O(\tau^2) + O(h_0^2 + \tau^2).$$

В соответствии с условием Куранта величина τ ограничена и можно считать выполнимым равенство: $\frac{1}{2h_0} O(\tau^2) = O(h_0)$. С учётом сказанного, имеем:

$$\frac{\partial^2 c_r^n}{\partial t \partial \theta} = -\varepsilon_r \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n)}{\partial t} + \frac{h_0^2}{6} \frac{\partial \varphi(x_i, y_j, 1, t_n)}{\partial t} + O(h_0 + \tau^2).$$

Учитывая последнее соотношение при ограниченности производной $\frac{\partial \varphi(x_i, y_j, 1, t_n \pm \tau)}{\partial t} = \frac{\partial^4 c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n \pm \tau)}{\partial t \partial x^3}$, можем записать:

$$\frac{\partial^2 c_r^n}{\partial t \partial \theta} = -\varepsilon_r \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n)}{\partial t} + O(h_0 + \tau^2). \quad (32)$$

Далее рассмотрим производную $\frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2 \partial \theta}$.

С учетом неравенства $k_{21} \leq \frac{h_0}{h_x} \leq k_{22}$ из (16), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2 \partial \theta} &= \frac{1}{2h_0} \left(\frac{\partial^2 \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1+h_0)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1-h_0)}{\partial x^2} \right) + O(h_0^2) = \\ &= \frac{1}{2h_0} \left(\frac{\bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, 1+h_0) - 2\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1+h_0) + \bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1+h_0)}{h_x^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, 1-h_0) - 2\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1-h_0) + \bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1-h_0)}{h_x^2} + O(h_x^2) \right) + O(h_0^2) = \\ &= \frac{1}{h_x^2} \left(\frac{\bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, 1+h_0) - \bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, 1-h_0)}{2h_0} - 2 \frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1+h_0) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1-h_0)}{2h_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1+h_0) - \bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1-h_0)}{2h_0} \right) + \frac{1}{2h_0} O(h_x^2) + O(h_0^2) = \\ &= \frac{1}{h_x^2} \left(\frac{\bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, 1+h_0) - \bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, 1-h_0)}{2h_0} - 2 \frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1+h_0) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1-h_0)}{2h_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1+h_0) - \bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1-h_0)}{2h_0} \right) + \frac{1}{2h_0} O(h_x^2) + O(h_0^2) = \end{aligned} \quad (33)$$

$$+ \frac{\bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1 + h_0) - \bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1 - h_0)}{2h_0} \Big) + O(h_0^2 + h_x).$$

На основе равенства (24), может быть записано соотношение:

$$\frac{\bar{c}_r^n(x_i \pm h_x, y_j, 1 + h_0) - \bar{c}_r^n(x_i \pm h_x, y_j, 1 - h_0)}{2h_0} = -\varepsilon_r c_r^n(x_i \pm h_x, y_j, 1) + \frac{h_0^2}{6} \frac{\partial^3 c_r^n(x_i \pm h_x, y_j, 1)}{\partial \theta^3} + O(h_0^4). \quad (34)$$

Используя равенства (34), преобразуем соотношение (33) к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2 \partial \theta} &= -\frac{\varepsilon_r}{h_x^2} (c_r^n(x_i + h_x, y_j, 1) - 2c_r^n(x_i, y_j, 1) + c_r^n(x_i - h_x, y_j, 1)) + \\ &+ \frac{h_0^2}{6h_x^2} \left(\frac{\partial^3 c_r^n(x_i + h_x, y_j, 1)}{\partial \theta^3} - 2 \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^3 c_r^n(x_i - h_x, y_j, 1)}{\partial \theta^3} \right) + O(h_0^2 + h_x). \end{aligned} \quad (35)$$

Используя равенство:

$$\frac{1}{h_x^2} (c_r^n(x_i + h_x, y_j, 1) - 2c_r^n(x_i, y_j, 1) + c_r^n(x_i - h_x, y_j, 1)) = \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2} + O(h_x^2),$$

выражение (35) запишем следующим образом:

$$\frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2 \partial \theta} = -\varepsilon_r \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2} + \frac{h_0^2}{6h_x^2} \left(\frac{\partial^3 c_r^n(x_i + h_x, y_j, 1)}{\partial \theta^3} - 2 \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^3 c_r^n(x_i - h_x, y_j, 1)}{\partial \theta^3} \right) + O(h_0^2 + h_x).$$

Пусть $\varphi(x_i \pm h_x, y_j, 1) = \frac{\partial^3 c_r^n(x_i \pm h_x, y_j, 1)}{\partial \theta^3}$, $\varphi(x_i, y_j, 1) = \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^3}$. Тогда последнее равенство может быть записано в виде:

$$\frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2 \partial \theta} = -\varepsilon_r \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2} + \frac{h_0^2}{6} \left(\frac{\varphi(x_i + h_x, y_j, 1) - 2\varphi(x_i, y_j, 1) + \varphi(x_i - h_x, y_j, 1)}{h_x^2} \right) + O(h_0^2 + h_x). \quad (36)$$

Последнее равенство можно преобразовать к виду:

$$\frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2 \partial \theta} = -\varepsilon_r \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2} + \frac{h_0^2}{6} \left(\frac{\partial^2 \varphi(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2} + O(h_x^2) \right) + O(h_0^2 + h_x).$$

Учитывая последнее соотношение, при ограниченности производной $\frac{\partial^2 \varphi(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2} = \frac{\partial^5 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2 \partial \theta^3}$, для слагаемого $\mu_{h,r}(x_i, y_j, 1) \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2 \partial \theta}$ из правой части равенства (26), можем записать:

$$\mu_{h,r}(x_i, y_j, 1) \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2 \partial \theta} = -\varepsilon_r \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1) \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2} + O(h_0). \quad (37)$$

Проводя аналогичные рассуждения для производной $\frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta^2}$, получаем:

$$\mu_{h,r}(x_i, y_j, 1) \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y^2 \partial \theta} = -\varepsilon_r \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1) \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y^2} + O(h_0). \quad (38)$$

Обратимся к смешанной производной $\frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta}$. Придерживаемся представленной ранее логики рассуждений. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta} &= \frac{1}{2h_0} \left(\frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0)}{\partial x} - \frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0)}{\partial x} \right) + O(h_0^2) = \frac{1}{2h_0} \cdot \\ &\cdot \left(\frac{\bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, 1 + h_0) - \bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1 + h_0)}{2h_x} - \frac{\bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, 1 - h_0) - \bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1 - h_0)}{2h_x} + \right. \\ &\left. + O(h_x^2) \right) + O(h_0^2) = \frac{1}{2h_x} \left(\frac{\bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, 1 + h_0) - \bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, 1 - h_0)}{2h_0} - \right. \end{aligned} \quad (39)$$

$$-\frac{\bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1 + h_0) - \bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1 - h_0)}{2h_0} \Bigg) + \frac{1}{2h_0} O(h_x^2) + O(h_0^2).$$

На основе равенства (39) может быть записано соотношение:

$$\frac{\bar{c}_r^n(x_i \pm h_x, y_j, 1 + h_0) - \bar{c}_r^n(x_i \pm h_x, y_j, 1 - h_0)}{2h_0} = -\varepsilon_r c_r^n(x_i \pm h_x, y_j, 1) + \frac{h_0^2}{6} \frac{\partial^3 c_r^n(x_i \pm h_x, y_j, 1)}{\partial \theta^3} + O(h_0^4). \quad (40)$$

Используя равенства (40), преобразуем соотношение (39) к виду:

$$\frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta} = -\frac{\varepsilon_r}{2h_x} (c_r^n(x_i + h_x, y_j, 1) - c_r^n(x_i - h_x, y_j, 1)) + \frac{h_0^2}{12h_x} \left(\frac{\partial^3 c_r^n(x_i + h_x, y_j, 1)}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^3 c_r^n(x_i - h_x, y_j, 1)}{\partial \theta^3} \right) + O(h_0^2 + h_x). \quad (41)$$

Поскольку имеет место равенство

$$\frac{1}{2h_x} (c_r^n(x_i + h_x, y_j, 1) - c_r^n(x_i - h_x, y_j, 1)) = \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x} + O(h_x^2),$$

выражение (41) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta} = -\varepsilon_r \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x} + \frac{h_0^2}{12h_x} \left(\frac{\partial^3 c_r^n(x_i + h_x, y_j, 1)}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^3 c_r^n(x_i - h_x, y_j, 1)}{\partial \theta^3} \right) + O(h_0^2 + h_x).$$

Пусть $\varphi(x_i \pm h_x, y_j, 1) = \frac{\partial^3 c_r^n(x_i \pm h_x, y_j, 1)}{\partial \theta^3}$, $\varphi(x_i, y_j, 1) = \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^3}$. Тогда последнее равенство может быть записано в виде:

$$\frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta} = -\varepsilon_r \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x} + \frac{h_0^2}{6} \left(\frac{\varphi(x_i + h_x, y_j, 1) - \varphi(x_i - h_x, y_j, 1)}{2h_x} \right) + O(h_0^2 + h_x). \quad (42)$$

Последнее выражение можно преобразовать к виду:

$$\frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta} = -\varepsilon_r \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x} + \frac{h_0^2}{6} \left(\frac{\partial \varphi(x_i, y_j, 1)}{\partial x} + O(h_x^2) \right) + O(h_0^2 + h_x).$$

Учитывая последнее соотношение, при ограниченности производной $\frac{\partial \varphi(x_i, y_j, 1)}{\partial x} = \frac{\partial^4 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta^3}$, для слагаемого $\left(u^n(x_i, y_j, 1) - \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta}$ из правой части равенства (26), можем записать:

$$\left(u^n(x_i, y_j, 1) - \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta} = -\varepsilon_r \left(u^n(x_i, y_j, 1) - \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial x} \right) \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x} + O(h_0). \quad (43)$$

Проводя аналогичные рассуждения для производной $\frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y \partial \theta}$ относительно слагаемого $\left(v^n(x_i, y_j, 1) - \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y \partial \theta}$ из правой части равенства (26), можем получить соотношение:

$$\left(v^n(x_i, y_j, 1) - \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y \partial \theta} = -\varepsilon_r \left(v^n(x_i, y_j, 1) - \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial y} \right) \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y} + O(h_0). \quad (44)$$

Обратимся к производной $\frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^2}$. Имеем:

$$\frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^2} = \frac{1}{2h_0} \left(\frac{\partial \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0)}{\partial \theta} - \frac{\partial \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0)}{\partial \theta} \right) + O(h_0^2). \quad (45)$$

Используя выражение (25), в котором определяется значение функции $\bar{c}_r^n$ в фиктивном узле $(x_i, y_j, 1 + h_0)$, находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0)}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0) + 2h_0 \varepsilon_r c_r^n(x_i, y_j, 1) - \frac{h_0^3}{3} \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^3} + O(h_0^5) \right) = \\ &= \frac{\partial \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0)}{\partial \theta} + 2h_0 \varepsilon_r \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} - \frac{h_0^3}{3} \frac{\partial^4 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^4} + O(h_0^4). \end{aligned}$$

С учетом последнего равенства, приводим равенство (45) к виду:

$$\frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^2} = -\varepsilon_r \frac{\partial \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} + O(h_0). \quad (46)$$

Нетрудно получить следующие аппроксимации с точностью $O(h_x)$ и $O(h_y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2} &\cong \frac{1}{h_0 h_x^2} (\mu_{h,r}(x_i, y_j, 0, 5h_0) - \mu_{v,r}(x_i, y_j, -0, 5h_0)) \cdot \\ &\cdot (\bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, 1) - 2\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1) + \bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1)), \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y^2} &\cong \frac{1}{h_0 h_y^2} (\mu_{h,r}(x_i, y_j, 0, 5h_0) - \mu_{v,r}(x_i, y_j, -0, 5h_0)) \cdot \\ &\cdot (\bar{c}_r^n(x_i, y_j + h_y, 1) - 2\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1) + \bar{c}_r^n(x_i, y_j - h_y, 1)), \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta} \right) \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x} &\cong \frac{1}{2h_x} \left[\frac{1}{h_0} (u^n(x_i, y_j, 1 + 0, 5h_0) - u^n(x_i, y_j, 1 - 0, 5h_0)) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{h_x h_0} (\mu_{v,r}(x_i + 0, 5h_x, y_j, 1 + 0, 5h_0) - \mu_{v,r}(x_i - 0, 5h_x, y_j, 1 + 0, 5h_0)) - \right. \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} &\left. - \mu_{v,r}(x_i + 0, 5h_x, y_j, 1 - 0, 5h_0) + \mu_{v,r}(x_i - 0, 5h_x, y_j, 1 - 0, 5h_0) \right] (\bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, 1) - \bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1)), \\ \left(\frac{\partial v^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial y \partial \theta} \right) \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y} &\cong \frac{1}{2h_y} \left[\frac{1}{h_0} (v^n(x_i, y_j, 1 + 0, 5h_0) - v^n(x_i, y_j, 1 - 0, 5h_0)) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{h_y h_0} (\mu_{v,r}(x_i, y_j + 0, 5h_y, 1 + 0, 5h_0) - \mu_{v,r}(x_i, y_j - 0, 5h_y, 1 + 0, 5h_0)) - \right. \end{aligned} \quad (50)$$

$$\left. - \mu_{v,r}(x_i, y_j + 0, 5h_y, 1 - 0, 5h_0) + \mu_{v,r}(x_i, y_j - 0, 5h_y, 1 - 0, 5h_0) \right] (\bar{c}_r^n(x_i, y_j + h_y, 1) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j - h_y, 1)).$$

При аппроксимации $c_r^n(x_i, y_j, 1)$ заменяем её на сеточный аналог $\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)$.

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta} c_r^n(x_i, y_j, 1) &\cong \frac{1}{h_0} \left(\frac{u^n(x_i + 0, 5h_x, y_j, 1 + 0, 5h_0) - u^n(x_i - 0, 5h_x, y_j, 1 + 0, 5h_0)}{h_x} - \right. \\ &\left. - \frac{u^n(x_i + 0, 5h_x, y_j, 1 - 0, 5h_0) - u^n(x_i - 0, 5h_x, y_j, 1 - 0, 5h_0)}{h_x} \right) \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1), \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y \partial \theta} c_r^n(x_i, y_j, 1) &\cong \frac{1}{h_0} \left(\frac{v^n(x_i, y_j + 0, 5h_y, 1 + 0, 5h_0) - v^n(x_i, y_j - 0, 5h_y, 1 + 0, 5h_0)}{h_y} - \right. \\ &\left. - \frac{v^n(x_i, y_j + 0, 5h_y, 1 - 0, 5h_0) - v^n(x_i, y_j - 0, 5h_y, 1 - 0, 5h_0)}{h_y} \right) \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1), \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \frac{w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} \frac{\partial u^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x} c_r^n(x_i, y_j, 1) &\cong \frac{2w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 + 0, 5h_0) + \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 - 0, 5h_0)} \cdot \\ &\cdot \left(\frac{u^n(x_i + 0, 5h_x, y_j, 1) - u^n(x_i - 0, 5h_x, y_j, 1)}{h_x} \right) \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1), \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \frac{w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} \frac{\partial v^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y} c_r^n(x_i, y_j, 1) &\cong \frac{2w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 + 0, 5h_0) + \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 - 0, 5h_0)} \cdot \\ &\cdot \left(\frac{v^n(x_i, y_j + 0, 5h_y, 1) - v^n(x_i, y_j - 0, 5h_y, 1)}{h_y} \right) \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1), \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \frac{2w_{g,r}}{H^2(x_i, y_j) \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} \frac{\partial^2 \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^2} c_r^n(x_i, y_j, 1) &\cong \frac{2w_{g,r}}{H^2(x_i, y_j) (\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 + 0, 5h_0) + \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 - 0, 5h_0))} \cdot \\ &\cdot \frac{1}{h_0^2} (\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 + 0, 5h_0) - 2\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1) + \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 - 0, 5h_0)) \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1). \end{aligned} \quad (55)$$

В результате подстановки в равенство (26) аппроксимаций, выполненных выражениями (32), (37), (38), (43)–(55) с погрешностью $O(h_0)$ (или выше) и перегруппировки слагаемых, получаем:

$$\frac{\partial^3 \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^3} = \vartheta_1 + O(h_0), \quad (56)$$

где

$$\begin{aligned} \vartheta_1 = & \vartheta_{10} (\vartheta_{11} \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0) + \vartheta_{12} \bar{c}_r^n(x_i, y_j + h_y, 1) + \vartheta_{13} \bar{c}_r^n(x_i, y_j - h_y, 1) + \vartheta_{14} \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0) + \\ & + \vartheta_{15} \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0) + \vartheta_{16} \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)). \end{aligned}$$

После подстановки полученных представлений для коэффициентов ϑ_i , $i = 1 \dots, 6$ в формулу аппроксимации, приведенную выше, можно получить итоговую аппроксимацию граничного условия третьего рода, которая здесь не приводится ввиду ее громоздкости.

Используя равенство (56) для $D_0 \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)$, можем составить выражение:

$$\begin{aligned} D_0 \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1) \cong & \frac{1}{H^2(x_i, y_j) h_0^2} \left[(\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 + 0,5h_0) + \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 - 0,5h_0)) \cdot \right. \\ & \left. \cdot (\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)) - \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 + 0,5h_0) \left(2h_0 \varepsilon_r c_r^n(x_i, y_j, 1) - \frac{h_0^3}{3} \vartheta_1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (57)$$

Погрешность аппроксимации схемы (57) в граничных узлах сетки $\bar{\omega}^+$ при $\theta_k = 1$ равна $O(\tau + h_0^2)$.

Обсуждение. В работе рассмотрены вопросы, связанные с разностной аппроксимацией пространственно-трехмерной задачи транспорта многофракционного взвешенного вещества. При аппроксимации этой задачи возникают определенные трудности из-за необходимости обеспечить требуемый порядок аппроксимации вплоть до границы. Предложены методы аппроксимации задачи со вторым порядком точности по пространственным переменным и первым — по временной переменной. Требуется особое внимание исследования, связанные с аппроксимацией граничных условий второго и третьего рода. Для этих целей авторами предложены методы, базирующиеся на аппроксимациях граничных условий по формуле центральных разностей разностей с последующим дифференцированием обеих частей уравнений диффузии-конвекции и исключением из полученных выражений функций решения в фиктивных узлах расширенной сетки.

Заключение. Дальнейшие исследования авторов могут быть направлены на исследование построенных разностных схем с учетом физически мотивированных ограничений на шаг временной сетки τ и сеточное число Пекле.

Список литературы / References

1. Сушинов А.И., Чистяков А.Е., Бондаренко Ю.С. Оценка погрешности решения уравнения на основе схем с весами. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2011;8(121):6–13.
Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Bondarenko Yu.S. Error estimation of the solution to the equation based on weighted schemes. *Izvestiya YUFU. Technical Sciences*. 2011;8(121):6–13. (In Russ.)
2. Сушинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Построение дискретной двумерной математической модели транспорта наносов. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2011;8(121):32–44.
Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A. Construction of a discrete two-dimensional mathematical model of sediment transport. *Izvestiya YUFU. Technical Sciences*. 2011;8(121):32–44. (In Russ.)
3. Сушинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А., Сидорякина В.В., Проценко С.В. Параллельные алгоритмы решения задачи динамики изменения рельефа дна в прибрежных системах. *Вычислительные методы и программирование*. 2020;21(3):196–206. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v21r318>
Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A., Sidorakina V.V., Protsenko S.V. Parallel algorithms for solving the problem of dynamics of bottom relief changes in coastal systems. *Computational Methods and Programming*. 2020;21(3):196–206. (In Russ.) <https://doi.org/10.26089/NumMet.v21r318>
4. Сушинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А., Сидорякина В.В., Проценко С.В. Комплекс объединенных моделей транспорта наносов и взвесей с учетом трехмерных гидродинамических процессов в прибрежной зоне. *Математическое моделирование*. 2020;32(2):3–23. <https://doi.org/10.20948/mm-2020-02-01>
Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A., Sidorakina V.V., Protsenko S.V. A complex of combined models for sediment and suspension transport considering three-dimensional hydrodynamic processes in the coastal zone. *Mathematical Modelling*. 2020;32(2):3–23. (In Russ.) <https://doi.org/10.20948/mm-2020-02-01>
5. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko S.V., Sidoryakina V.V. Coupled 3D wave and 2D bottom deposit transportation models for the prediction of harmful phenomena in coastal zone. In: *Trends in the Analysis and Design of Marine Structures — Proceedings of the 7th International Conference on Marine Structures, MARSTRUCT 2019*. 2019. P. 597–603. <https://doi.org/10.1201/9780429298875-68>
6. Сушинов А.И., Сидорякина В.В. Построение и исследование корректности математической модели транспорта и осаждения взвесей с учетом изменений рельефа дна. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2018;2(2):76–90. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2018-2-76-90>

Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V. Development and analysis of the correctness of a mathematical model for the transport and sedimentation of suspensions, taking into account changes in bottom relief. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2018;2(2):76–90. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2018-2-76-90>

7. Sukhinov A.I., Sukhinov A.A., Sidoryakina V.V. Uniqueness of solving the problem of transport and sedimentation of multicomponent suspensions in coastal systems. In: *Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems*. Bristol, 2020;1479:012081. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012081>

8. Сухинов А.И., Сидорякина В.В. Построение и исследование корректности математической модели транспорта и осаждения взвесей с учетом изменения рельефа дна. *Вестник Донского государственного технического университета*. 2018;18(4):350–361. <https://doi.org/10.23947/1992-5980-2018-18-4-350-361>

Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V. Development and correctness analysis of the mathematical model of transport and suspension sedimentation depending on bottom relief variation. *Vestnik of Don State Technical University*. 2018;18(4):350–361. <https://doi.org/10.23947/1992-5980-2018-18-4-350-361>

9. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Сидорякина В.В., Проценко С.В., Атаян А.М. Локально-двумерные схемы расщепления для параллельного решения трехмерной задачи транспорта взвешенного вещества. *Математическая физика и компьютерное моделирование*. 2021;24(2):38–53. <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2021.2.4>

Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Sidoryakina V.V., Protsenko S.V., Atayan A.M. Locally two-dimensional splitting schemes for parallel solving of the three-dimensional problem of suspended substance transport. *Mathematical Physics and Computer Simulation*. 2021;24(2):38–53. (In Russ.) <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2021.2.4>

10. Попов И.В. Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для нелинейного уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости. *Препринты Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН*. 2017;68:1–22. <https://doi.org/10.20948/prepr-2017-68>

Popov I.V. Construction of a difference scheme of increased order of approximation for a nonlinear transport equation using adaptive artificial viscosity. *Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences*. 2017;68:1–22. (In Russ.) <https://doi.org/10.20948/prepr-2017-68>

11. Сидорякина В.В., Сухинов А.И. Построение и исследование близости решений в L2 двух краевых задач для модели переноса многокомпонентных взвесей в прибрежных системах. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2023;63(10):1721–1732. <https://doi.org/10.1134/S0965542523100111>

Sidoryakina V.V., Sukhinov A.I. Construction and analysis of the proximity of solutions in L2 for two boundary problems in the model of multicomponent suspension transport in coastal systems. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2023;63(10):1721–1732. (In Russ.) <https://doi.org/10.1134/S0965542523100111>

12. Литвинов В.Н., Чистяков А.Е., Никитина А.В., Атаян А.М., Кузнецова И.Ю. Математическое моделирование гидродинамических процессов Азовского моря на многопроцессорной вычислительной системе. *Компьютерные исследования и моделирование*. 2024;16(3):647–672. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2024-16-3-647-672>

Litvinov V.N., Chistyakov A.E., Nikitina A.V., Atayan A.M., Kuznetsova I.Yu. Mathematical modeling of hydrodynamics problems of the Azov Sea on a multiprocessor computer system. *Computer Research and Modelling*. 2024;16(3):647–672. (In Russ.) <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2024-16-3-647-672>

13. Chistyakov A.E., Nikitina A.V., Kuznetsova I.Yu., Rakhimbaeva E.O., Porksheyan M.V. Investigation of the approximation error of the difference scheme for the mathematical model of hydrodynamics. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023;44(5):1839–1846. (In Russ.) <https://doi.org/10.1134/S1995080223050128>

14. Сидорякина В.В., Проценко С.В. Применение различных типов аппроксимаций турбулентного обмена для анализа гидродинамического воздействия волн на дно водохранилища. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2021;5(2):80–87. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2021-1-2-80-87>

Sidoryakina V.V., Protsenko S.V. Various approximations of vertical turbulent exchange parameterization for the analysis of the waves hydrodynamic impact on the bottom of the reservoir. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2021;5(2):80–87. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2021-1-2-80-87>

15. Сидорякина В.В. Построение разностных схем второго порядка точности для задач диффузии-конвекции мультифракционных взвесей в прибрежных морских системах. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(3):43–59. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-3-43-59>

Sidoryakina V.V. Construction of Second-Order Finite Difference Schemes for Diffusion-Convection Problems of Multifractional Suspensions in Coastal Marine Systems. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(3):43–59. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-3-43-59>

Об авторах:

Александр Иванович Сухинов, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, директор НИИ Математического моделирования и прогнозирования сложных систем Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID](#), [SPIN-код](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [MathSciNet](#), sukhinov@gmail.com

Валентина Владимировна Сидорякина, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедры математики и информатики Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID](#), [SPIN-код](#), [ResearcherID](#), [MathSciNet](#), [ScopusID](#), cvv9@mail.ru

Заявленный вклад авторов:

А.И. Сушинов: общее научное руководство; постановка задачи; формулировка идей исследования, целей и задач; разработка методологии.

В.В. Сидорякина: получение расчетных формул; формулировка достигнутых результатов и описание их значимости.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Alexander I. Sukhinov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Director of the Research Institute of Mathematical Modeling and Forecasting of Complex Systems, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [MathSciNet](#), sukhinov@gmail.com

Valentina V. Sidoryakina, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), [ResearcherID](#), [MathSciNet](#), [ScopusID](#), cvv9@mail.ru

Contributions of the authors:

A.I. Sukhinov: general scientific guidance; problem statement; formulation of research ideas, goals and objectives; development of methodology.

V.V. Sidoryakina: obtaining calculation formulas; formulation of achieved results and description of their significance.

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 07.08.2025

Поступила после рецензирования / Revised 09.09.2025

Принята к публикации / Accepted 22.09.2025