

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

## COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 519.6

Оригинальное эмпирическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-30-43>


### Моделирование циркуляции в аневризмах кровеносных сосудов

Н.К. Волосова<sup>1</sup> , К.А. Волосов<sup>2</sup> , А.К. Волосова<sup>2</sup> , М.И. Карлов<sup>3</sup>,  
Д.Ф. Пастухов<sup>4</sup> ✉, Ю.Ф. Пастухов<sup>4</sup> 

<sup>1</sup> Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup> Российский университет транспорта, г. Москва, Российская Федерация

<sup>3</sup> Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),  
г. Долгопрудный, Российская Федерация

<sup>4</sup> Полоцкий государственный университет им. Евфросинии Полоцкой, г. Новополоцк, Республика Беларусь

✉ [dmitrij.pastuhov@mail.ru](mailto:dmitrij.pastuhov@mail.ru)

#### Аннотация

**Введение.** Численно решается двумерная гидродинамическая задача в переменных «функция тока — вихрь» в открытой прямоугольной каверне, моделирующей течение крови в аневризме кровеносного сосуда. Предложены два алгоритма решения задачи для чисел Рейнольдса  $Re < 1$  и для чисел  $Re \geq 1$ .

**Материалы и методы.** Для ускорения численного решения задачи с явной разностной схемой уравнения динамики вихря использовался метод торможения начальных условий, метод  $n$ -кратного расщепления явной разностной схемы ( $n = 100, 200$ ) и наличие плоскости симметрии прямоугольной области каверны — аневризмы. В методе расщепления используется максимальный шаг времени, пропорциональный квадрату координатного шага без нарушения спектральной устойчивости явной схемы в уравнении вихря. На половине прямоугольной аневризмы рассматривались симметричные решения и применялась равномерная сетка  $100 \times 50$  с равным шагом  $h_1 = h_2 = 0,01$ . Обратная матрица для решения уравнения Пуассона в переменных «функция тока — вихрь» за конечное число элементарных операций вычислялась библиотекой Msimsl.

**Результаты исследования.** Численное решение задачи показало, что число и расположение областей циркуляции крови в аневризме при небольших числах Рейнольдса зависят от параметра отношения диаметра сосуда к диаметру аневризмы. Именно при небольшом значении этого параметра аневризму занимает один большой вихрь и сужает просвет сосуда в случае образования тромба внутри аневризмы. Сужение диаметра трубки тока крови внутри аневризмы достигает 34 %. Обнаружено, что формирование гидродинамической структуры в аневризме происходит за время, малое (0,002 %) по сравнению с периодом между пульсационными волнами (1с). Впервые предложено краевое условие с четвертым порядком погрешности для связи скорости, вихря и функции тока.

**Обсуждение.** Аппроксимация уравнений в системах (4) и (22) имеет шестой порядок погрешности во внутренних и четвертый в граничных узлах. Задача решена также для движения крови в артериях при больших числах Рейнольдса ( $Re = 1500$ ). Ее решение показывает, что в плоскости симметрии аневризмы образуется цепочка связанных вихрей с чередованием знака функции вихря и сносимых кровью вдоль кровеносного сосуда.

**Заключение.** Сформулированные в работе начально-краевые задачи (4), (22) позволяют качественно моделировать движение крови в аневризмах капилляров, артериол и артерий кровеносных сосудов при малых и больших скоростях, а также движение крови в элементах медицинского оборудования.

**Ключевые слова:** гидродинамика, численные методы, уравнения в частных производных, начально-краевая задача, аневризма

**Для цитирования.** Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Моделирование циркуляции в аневризмах кровеносных сосудов. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(3):30–43. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-30-43>

## Modelling Circulation in Blood Vessel Aneurysms

Natalya K. Volosova<sup>1</sup> , Konstantin A. Volosov<sup>2</sup> , Aleksandra K. Volosova<sup>2</sup> , Mikhail I. Karlov<sup>3</sup>,  
Dmitriy F. Pastukhov<sup>4</sup> ✉, Yuriy F. Pastukhov<sup>4</sup> 

<sup>1</sup> MGTU named after. N.E. Bauman, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup> Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation

<sup>3</sup> Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russian Federation

<sup>4</sup> Polotsk State University named after Euphrosyne of Polotsk, Novopolotsk, Republic of Belarus

✉ [dmitrij.pastuhov@mail.ru](mailto:dmitrij.pastuhov@mail.ru)

## Abstract

**Introduction.** A two-dimensional hydrodynamic problem in the “stream function–vorticity” variables is numerically solved in an open rectangular cavity simulating blood flow in a blood vessel aneurysm. Two solution algorithms are proposed for Reynolds numbers  $Re < 1$  and for  $Re \geq 1$ .

**Materials and Methods.** To accelerate the numerical solution with an explicit finite-difference scheme for the vorticity dynamics equation, the initial condition damping method, the  $n$ -fold splitting method of the explicit finite-difference scheme ( $n = 100, 200$ ), and the symmetry plane of the rectangular cavity–aneurysm were employed. In the splitting method, the maximum time step proportional to the square of the spatial step was used without violating the spectral stability of the explicit scheme in the vorticity equation. On half of the rectangular aneurysm, symmetric solutions were considered with a uniform  $100 \times 50$  grid and equal steps  $h_1 = h_2 = 0.01$ . The inverse matrix for solving the Poisson equation in the “stream function–vorticity” variables with a finite number of elementary operations was computed using the MSIMSL library.

**Results.** The numerical solution showed that the number and location of circulation regions in the aneurysm at small Reynolds numbers depend on the ratio of the vessel diameter to the aneurysm diameter. At small values of this parameter, the aneurysm contains a single large vortex that narrows the vessel lumen in the case of thrombus formation inside the aneurysm. The narrowing of the blood flow tube inside the aneurysm reaches 34%. It was found that the formation of the hydrodynamic structure in the aneurysm occurs in a time negligible (0.002%) compared to the period between pulsation waves (1 s). For the first time, a boundary condition with fourth-order accuracy was proposed to relate velocity, vorticity, and stream function.

**Discussion.** The approximation of the equations in systems (4) and (22) has sixth-order accuracy at interior nodes and fourth-order accuracy at boundary nodes. The problem was also solved for blood motion in arteries at high Reynolds numbers ( $Re = 1500$ ). The solution shows that in the aneurysm symmetry plane a chain of connected vortices is formed with alternating signs of vorticity, carried by the blood flow along the vessel.

**Conclusion.** The initial–boundary value problems (4), (22) formulated in this work make it possible to qualitatively model blood flow in aneurysms of capillaries, arterioles, and arteries at low and high velocities, as well as blood motion in elements of medical equipment.

**Keywords:** hydrodynamics, numerical methods, partial differential equations, initial–boundary value problem, aneurysm

**For Citation.** Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Karlov M.I., Pastukhov D.F., Pastukhov Yu.F. Modelling Circulation in Blood Vessel Aneurysms. *Computation Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(3):30–43. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-30-43>

**Введение.** В работе моделируется двумерная гидродинамическая задача движения крови в открытой прямоугольной каверне в переменных «функция тока — вихрь» [1]. Поле скорости имеет четыре угловые особые точки в отрезках входа и выхода потока в каверну — аневризму, так как линии тока в этих точках могут претерпевать излом под углом 90 градусов. В связи с этим в данных точках появляются высокие градиенты скорости, а точки являются источниками вихрей при высокой скорости движения крови. Данная работа использует метод торможения начального поля скорости, описанного в работе [2]. Работы [3–7], [8] связаны с решением двумерных гидродинамических задач или с их аппроксимацией с высокой степенью точности. Работа [7] связана с задачей движения крови и ее свертыванием в кровеносных сосудах. В настоящей работе используется метод  $n$ -кратного расщепления уравнения вихря ( $n = 100, 200$ ) с явной разностной схемой, описанный в [9], а из-за симметрии прямоугольной каверны (аневризмы) можно вдвое ускорить решение задачи, используя только половину прямоугольника.

## Материалы и методы

**Постановка задачи.** В двумерной задаче рассматривается течение жидкости (крови) в прямоугольной каверне-аневризме, определяющей геометрию задачи. Поэтому удобно выбрать прямоугольную систему координат с равномерной сеткой  $n_1 \times n_2 = 100 \times 100$ .

Получим формулу Пуазейля для профиля скорости  $u(y)$  плоского потока жидкости между двумя параллельными прямоугольными пластинами. На рис. 1 центр прямоугольной системы координат совпадает с центром симметрии жидкого параллелепипеда со сторонами  $2y \cdot l \cdot b$ , ребро длиной  $b$  перпендикулярно плоскости рисунка. На левую и правую грани действует давление  $p_1, p_2$  соответственно, величина давления постоянна вдоль оси  $u$  и

меняется в направлении оси  $x$ . Разность сил давлений равна  $\Delta F_p = (p_1 - p_2)2yb = \frac{p_1 - p_2}{l} 2ybl = \frac{\Delta p}{\Delta x} 2ybl$ . Разность сил  $\Delta F_p$  уравновешивается силой вязкого трения, действующей на нижнюю и верхнюю грани бруска.

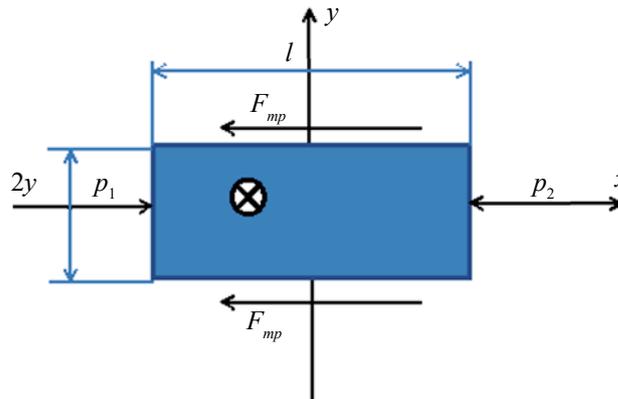


Рис. 1. Иллюстрация формулы Пуазейля для плоского потока жидкости

Разность сил составляет

$$\Delta F_p = \frac{\Delta p}{\Delta x} 2ybl = 2F_{mp} = 2bl\mu \frac{du}{dy} \Leftrightarrow \frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} y \Leftrightarrow u(y) = C_1 y^2 + C_2, C_1 = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} = const.$$

Обозначим полуширину плоского канала для движения жидкости  $\Delta$ , скорость жидкости на плоскости симметрии  $u_{max}$  и определим неизвестные константы  $C_1, C_2$  из условия прилипания жидкости к твердым прямоугольным пластинам:

$$u(\Delta) = 0 \Leftrightarrow C_1 \Delta^2 + C_2 = 0, u(0) = C_2 = u_{max}, C_1 = -\frac{C_2}{\Delta^2} = -\frac{u_{max}}{\Delta^2}, u(y) = u_{max} \left( 1 - \frac{y^2}{\Delta^2} \right). \quad (1)$$

Аневризма представляет собой небольшой участок кровеносного сосуда, диаметр которого обычно превышает в 2 раза диаметр основного сосуда. Длина аневризмы  $L$  обычно сопоставима с ее диаметром  $2H$ ,  $H$  — полуширина аневризмы. Для упрощения задачи в прямоугольной системе координат предположим, что в бесконечной прямоугольной области между верхней и нижней пластинами формируется плоский поток жидкости с профилем скорости (1). Прямоугольную каверну с входом и выходом назовем открытой.

Для простоты решения также предположим, что профиль скорости (1) сохраняется при входе потока в прямоугольную аневризму и при выходе из нее в узкой симметричной полосе относительно плоскости  $Oxz$  шириной  $2\Delta = 2d$ . Для ускорения численного решения задачи благодаря симметрии рассмотрим половину аневризмы и две половины прямоугольного канала, подводящих и выводящих жидкость из аневризмы. Согласно принципу симметрии, ищем решения, в которых на оси симметрии скорость частиц жидкости направлена вдоль оси симметрии в каждой точке оси, скорость может изменяться численно, оставаясь неизменной по направлению. На рис. 2 начало координатной системы совпадает с нижним левым углом аневризмы, ось  $x$  направлена вправо, а ось  $y$  — вверх. Обозначим через  $(u(x,y), v(x,y))$  вектор скорости жидкой частицы, причем на твердой границе, то есть на нижнем отрезке и нижней части боковых отрезков высотой  $H-d$  прямоугольной каверны скорость равна нулю (условие прилипания частиц жидкости), поэтому функцию тока на указанной границе можно положить равной нулю. Также нормальная компонента скорости равна нулю на верхнем отрезке прямоугольной каверны  $v(x,H) = 0, 0 \leq x \leq L$ .

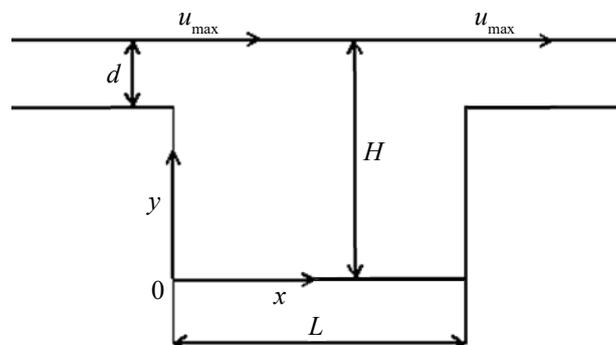


Рис. 2. Геометрия области для численно решаемой задачи

Необходимо изменить краевые условия для скорости и функции тока в постановке классической гидродинамической задачи в переменных «функция тока — вихрь» для прямоугольной каверны, рассмотренной в работах [1, 2].

Перепишем формулу для скорости (1) с учетом переноса начала координат на рис. 2:

$$y = \bar{y} + H, u(\bar{y}) = u(y - H) = u_{\max} \left( 1 - \frac{(y - H)^2}{\Delta^2} \right), y \in [H - \Delta, H]. \quad (2)$$

Интегрируя формулу (2) по переменной  $y$  с учетом уравнения  $u = \psi_y$ , получим зависимость функции тока в зазорах на боковых стенках каверны:

$$\psi(y) = u_{\max} \left( y - \frac{(y - H)^3}{3\Delta^2} \right) + C_0, \psi(H - \Delta) = 0 \Leftrightarrow C_0 = -u_{\max} \left( H - \frac{2}{3}\Delta \right), \quad (3)$$

$$\psi(0, y) = \psi(L, y) = \begin{cases} 0, y \in [0, H - \Delta], \\ u_{\max} \left( y + \frac{2}{3}\Delta - H - \frac{(y - H)^3}{3\Delta^2} \right), y \in [H - \Delta, H]. \end{cases}$$

Как и в работе [2] обозначаем длину  $L$ , время  $\frac{L}{u_{\max}}$ , скорость  $u_{\max}$ , функции тока  $Lu_{\max}$ , вихря  $\frac{u_{\max}}{L}$ , числа Рейнольдса  $Re$ . Обозначим безразмерные переменные:  $\bar{x}$  — горизонтальная координата,  $\bar{y}$  — вертикальная координата,  $\bar{\psi}, \bar{w}$  — функции тока и вихря соответственно,  $(\bar{u}, \bar{v})$  — вектор скорости,  $\bar{t}$  — время, задав их формулами:

$$0 \leq \bar{x} = \frac{x}{L} \leq 1, \quad 0 \leq \bar{y} = \frac{y}{L} \leq k = \frac{H}{L}, \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{\psi_{\max}}, \quad \psi_{\max} = Lu_{\max},$$

$$\bar{u} = \frac{u}{u_{\max}}, \quad \bar{v} = \frac{v}{u_{\max}}, \quad \bar{w} = \frac{w}{w_{\max}}, \quad w_{\max} = \frac{u_{\max}}{L},$$

$$\bar{t} = \frac{t}{T}, \quad T = \frac{L}{u_{\max}}, \quad Re = \frac{u_{\max} L}{\nu}.$$

Кинематическая вязкость крови равна  $\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{3,5 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}}{1050 \text{ кг} / \text{м}^3} = 3,33(3) \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ .

Система уравнений гидродинамики с безразмерными переменными и функциями с учетом работ [1, 2] в открытой каверне с большими числами  $Re$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{\psi}_{\bar{y}\bar{y}} = -\bar{w}(\bar{x}, \bar{y}), \quad 0 < \bar{x} = \frac{x}{L} < 1, \quad 0 < \bar{y} < k_{\max}, \\ \bar{w} = \bar{v}_{\bar{x}} - \bar{u}_{\bar{y}}, \\ \bar{u} = \bar{\psi}_{\bar{y}}; \bar{v} = -\bar{\psi}_{\bar{x}}, \\ \bar{w}_{\bar{t}} + \bar{u} \cdot \bar{w}_{\bar{x}} + \bar{v} \cdot \bar{w}_{\bar{y}} = \frac{1}{Re} (\bar{w}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{w}_{\bar{y}\bar{y}}), \quad 0 < \bar{t} = \frac{t}{T}, \\ \bar{\psi}|_{r_1} = 0, \bar{v}|_r = 0, \bar{u}|_{r_1} = 0, \bar{v}|_{r_2} = 0, \\ \psi(0, y) = \psi(L, y) = \begin{cases} 0, y \in [0, H - \Delta], \\ u_{\max} L \left( \frac{y}{L} + \frac{2\Delta}{3L} - \frac{H}{L} - \frac{(y/L - H/L)^3}{3(\Delta/L)^2} \right), y \in [H - \Delta, H], \\ \frac{2}{3} u_{\max} \Delta, y = H, \end{cases} \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\bar{u}(0, y) = \bar{u}(L, y) = \frac{u(y)}{u_{\max}} = \begin{cases} 0, y \in [0, H - \Delta], \\ \left( 1 - \frac{(y - H)^2}{\Delta^2} \right), y \in [H - \Delta, H], \end{cases}$$

$$\bar{\psi}(0, \bar{y}) = \bar{\psi}(L, \bar{y}) = \frac{\psi(0, y)}{\psi_{\max}} = \begin{cases} 0, y \in [0, H - \Delta], \\ \left( \bar{y} + \frac{2}{3}\Delta/L - H/L - \frac{(\bar{y} - H/L)^3}{3(\Delta/L)^2} \right), \bar{y} \in [(H - \Delta)/L, H/L], \\ \frac{2}{3}\Delta, \bar{y} = H/L. \end{cases}$$

Здесь  $\Gamma_1$  — объединение нижней части боковых сторон и нижнего отрезка,  $\Gamma_2$  — верхний отрезок прямоугольника  $\Gamma$ . Первым в системе (1) следует уравнение Пуассона для функции тока и функции вихря. Двумерное уравнение Пуассона на прямоугольнике решается в матричном виде за конечное число арифметических действий с шестым порядком погрешности [2]. Далее по тексту опустим черту сверху над безразмерными функциями, временем и координатами, за исключением формул (24).

Вторая строка системы (1) — функция вихря, вычисляемая через координатные производные поля скорости. Третья строка — компоненты скорости — вычисляются как частные производные от функции тока. Четвертая строка — уравнение динамики вихря, которое в системе уравнений (1) единственное явно зависит от времени. Слева стоит полная (конвективная) производная по времени. На границе прямоугольника равна нулю вертикальная компонента скорости, горизонтальная компонента пока не задана на верхнем отрезке и равна нулю на нижнем отрезке, на боковых сторонах описывается формулой (1).

Методом неопределенных коэффициентов [10] зададим скорость на верхнем отрезке квадратурной формулой (5.1) с десятым порядком погрешности в задачах (4) ( $Re = 1500$ ) и в задаче (22) ( $Re = 0,75$ ). Формула (5.1) используется только в задаче (4):

$$u(n_2, j) = \psi_y(n_2, j) = \frac{1}{(-h_2)} \left( -\frac{83711}{27720} \psi_{n_2, j} + 11 \psi_{n_2-1, j} - \frac{55}{2} \psi_{n_2-2, j} + 55 \psi_{n_2-3, j} - \frac{165}{2} \psi_{n_2-4, j} + \frac{462}{5} \psi_{n_2-5, j} - 77 \psi_{n_2-6, j} + \frac{330}{7} \psi_{n_2-7, j} - \frac{165}{8} \psi_{n_2-8, j} + \frac{55}{9} \psi_{n_2-9, j} - \frac{11}{10} \psi_{n_2-10, j} + \frac{1}{11} \psi_{n_2-11, j} \right) + O(h^{10}), j = \overline{1, n_1 - 1}, \quad (5.1)$$

$$u(n_2, j) = \frac{1}{(-h_2)} \left( -\frac{137}{60} \psi_{n_2, j} + 5 \psi_{n_2-1, j} - 5 \psi_{n_2-2, j} + \frac{10}{3} \psi_{n_2-3, j} - \frac{5}{4} \psi_{n_2-4, j} + \frac{1}{5} \psi_{n_2-5, j} \right) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}. \quad (5.2)$$

Аналогично работе [2] выберем ненулевое и непрерывное начальное поле скоростей в центральной части каверны:

$$\bar{u}(x_m, y_n) = \begin{cases} 0, y_m \in [0, H - \Delta], \\ \left( 1 - \frac{(y_m - H)^2}{\Delta^2} \right), y_m \in [H - \Delta, H], y_m = mh_2, m = \overline{0, n_2}, x_n = nh_1, n = \overline{0, n_1} \end{cases} \quad (6)$$

$$\bar{v}(x_m, y_n) = 0, y_m = mh_2, m = \overline{0, n_2}, x_n = nh_1, n = \overline{0, n_1}.$$

В новой гидродинамической задаче для открытой прямоугольной каверны в переменных «функция тока — вихрь», в которой скорость на верхнем отрезке каверны вычисляется формулами (5), укажем последовательность вычислений, так как она значительно отличается от описанного в работе [1] алгоритма:

1 шаг: задать краевые условия на границе прямоугольной каверны для функции тока, вертикальной компоненты скорости, которые неизменны;

2 шаг: модифицировать правую часть уравнения Пуассона для функции вихря согласно формулам (12), (13);

3 шаг: решить уравнение Пуассона (7)–(11), то есть найти значения функции тока во внутренних точках прямоугольной сетки;

4 шаг: по формулам (5) вычислить скорость на верхнем отрезке каверны;

5 шаг: вычислить новое поле скорости (18) на внутренних узлах сетки;

6 шаг: найти новые граничные значения вихря с помощью формул (24);

7 шаг: найти новые значения вихря уравнением (19) на внутренних узлах.

После седьмого шага перейти к первому шагу в цикле.

Остановимся на каждом шаге подробнее. Согласно работе [1] первым в системе уравнений (1) решается уравнение Пуассона за конечное число элементарных операций [2] и аппроксимацией с шестым порядком погрешности во внутренних точках

$$\Delta \psi = \psi_{xx} + \psi_{yy} = f(x, y) = -w \Leftrightarrow \frac{1}{h^2} \left( -\frac{10}{3} \psi_{0,0} + \frac{2}{3} (\psi_{-1,0} + \psi_{0,-1} + \psi_{1,0} + \psi_{0,1}) + \frac{1}{6} (\psi_{-1,-1} + \psi_{1,-1} + \psi_{-1,1} + \psi_{1,1}) \right) = f + \frac{h^2}{12} (f_{xx} + f_{yy}) + \frac{h^4}{360} (f_x^{(4)} + f_y^{(4)}) + \frac{h^4}{90} f_{xyyy}^{(4)} + O(h^6). \quad (7)$$

Для решения уравнения Пуассона (7) с функцией тока в системе уравнений (4) с точностью  $O(h^6)$  положим  $f = -w$ , производные  $f_{xx}, f_{yy}$  представим с точностью  $O(h^4)$ , а  $f_x^{(4)}, f_y^{(4)}, f_{xyyy}^{(4)}$  — с точностью  $O(h^2)$ .

В работах [2, 10] методом неопределенных коэффициентов были получены формулы для внутренних узлов функции  $f$  с индексами  $n = \overline{2, n_1 - 2}, m = \overline{2, n_2 - 2}$ :

$$\begin{cases} f_{xx} + f_{yy} = \frac{1}{h^2} \left( -5f_{0,0} + \frac{4}{3}(f_{-1,0} + f_{0,-1} + f_{1,0} + f_{0,1}) - \frac{1}{12}(f_{-2,0} + f_{0,-2} + f_{2,0} + f_{0,2}) \right) + O(h^4), \\ f_x^{(4)} + f_y^{(4)} = \frac{1}{h^4} (12f_{0,0} - 4(f_{-1,0} + f_{0,-1} + f_{1,0} + f_{0,1}) + f_{-2,0} + f_{0,-2} + f_{2,0} + f_{0,2}) + O(h^2), \\ f_{xyyy}^{(4)} = \frac{1}{h^4} (4f_{0,0} - 2(f_{-1,0} + f_{0,-1} + f_{1,0} + f_{0,1}) + f_{-1,-1} + f_{-1,1} + f_{1,-1} + f_{1,1}) + O(h^2). \end{cases} \quad (8)$$

Таким образом, формулы (7), (8) совместно аппроксимируют уравнение Пуассона в задачах (4), (22) с точностью  $O(h^6)$  во внутренних узлах.

В работе [2] описан матричный метод решения разностного уравнения Пуассона (7) за конечное число арифметических операций методом векторной прогонки. Запишем разностное уравнение (9):

$$\frac{1}{h^2} \left( \frac{-10}{3} \psi_{m,n} + \frac{2}{3} (\psi_{m-1,n} + \psi_{m+1,n} + \psi_{m,n-1} + \psi_{m,n+1}) + \frac{1}{6} (\psi_{m-1,n-1} + \psi_{m+1,n-1} + \psi_{m-1,n+1} + \psi_{m+1,n+1}) \right) = f_{m,n} + \frac{h^2}{12} (f_{xx} + f_{yy}) + h^4 \left( \frac{1}{360} (f_x^{(4)} + f_y^{(4)}) + \frac{1}{90} f_{xyxy}^{(4)} \right) + O(h^6) \equiv F_{m,n}, \quad n = \overline{1, n_1 - 1}, m = \overline{1, n_2 - 1}. \quad (9)$$

Определим квадратные матрицы  $A, B$  размерности  $(n_1 - 1) \times (n_1 - 1)$ :

$$a_{m,n} = \begin{cases} -\frac{10}{3}, m = n; m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1}, \\ \frac{2}{3}, m = n + 1 \text{ или } m = n - 1, \\ 0, m \geq n + 2 \text{ или } m \leq n - 2, \end{cases} \quad b_{m,n} = \begin{cases} \frac{2}{3}, m = n; m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1}, \\ \frac{1}{6}, m = n + 1 \text{ или } m = n - 1, \\ 0, m \geq n + 2 \text{ или } m \leq n - 2. \end{cases} \quad (10)$$

В данной работе матричный алгоритм решения (9) такой же, как и в [2]:

1. По формуле

$$F^T_{m,n} = f_{m,n} h^2 + \frac{h^4}{12} (f_{xx} + f_{yy}) + h^6 \left( \frac{1}{360} (f_x^{(4)} + f_y^{(4)}) + \frac{1}{90} f_{xyxy}^{(4)} \right) \Big|_{x=x_n, y=y_m}$$

вычислить правую часть уравнения Пуассона во всех внутренних узлах равномерной сетки прямоугольника ( $m=1, \dots, n_2-1; n=1, \dots, n_1-1$ ).

2. Модифицировать правые части системы уравнений (11) по формулам (12), (13) в узлах прямоугольного контура, соседнего с граничным контуром, то есть найти  $\overline{F_{m,n}}$  по величинам  $F_{m,n}$  пункта 1:

$$\begin{cases} A\psi_1^T + B\psi_2^T = \overline{F_1^T}, \\ B\psi_{m-1}^T + A\psi_m^T + B\psi_{m+1}^T = \overline{F_m^T}, m = \overline{2, n_2 - 2}, \\ B\psi_{n_2-2}^T + A\psi_{n_2-1}^T = \overline{F_{n_2-1}^T}. \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \frac{-10}{3} \psi_{1,n_1-1} + \frac{2}{3} (\psi_{2,n_1-1} + \psi_{1,n_1-2} + \psi_{1,n_1} + \psi_{0,n_1-1}) + \frac{1}{6} (\psi_{2,n_1-2} + \psi_{0,n_1-2} + \psi_{2,n_1} + \psi_{0,n_1}) = F_{1,n_1-1}, \\ \overline{F_{1,n_1-1}} \equiv F_{1,n_1-1} - \frac{2}{3} (\psi_{1,n_1} + \psi_{0,n_1-1}) - \frac{1}{6} (\psi_{0,n_1-2} + \psi_{2,n_1} + \psi_{0,n_1}), \\ \frac{-10}{3} \psi_{n_2-1,1} + \frac{2}{3} (\psi_{n_2-2,1} + \psi_{n_2-1,2} + \psi_{n_2-1,0} + \psi_{n_2,1}) + \frac{1}{6} (\psi_{n_2-2,2} + \psi_{n_2,2} + \psi_{n_2-2,0} + \psi_{n_2,0}) = F_{n_2-1,1}, \\ \overline{F_{n_2-1,1}} \equiv F_{n_2-1,1} - \frac{2}{3} (\psi_{n_2-1,0} + \psi_{n_2,1}) - \frac{1}{6} (\psi_{n_2,2} + \psi_{n_2-2,0} + \psi_{n_2,0}), \\ \frac{-10}{3} \psi_{n_2-1,n_1-1} + \frac{2}{3} (\psi_{n_2-2,n_1-1} + \psi_{n_2-1,n_1-2} + \psi_{n_2-1,n_1} + \psi_{n_2,n_1-1}) + \frac{1}{6} (\psi_{n_2-2,n_1-2} + \psi_{n_2,n_1-2} + \psi_{n_2-2,n_1} + \psi_{n_2,n_1}) = F_{n_2-1,n_1-1}, \\ \overline{F_{n_2-1,n_1-1}} \equiv F_{n_2-1,n_1-1} - \frac{2}{3} (\psi_{n_2-1,n_1} + \psi_{n_2,n_1-1}) - \frac{1}{6} (\psi_{n_2,n_1-2} + \psi_{n_2-2,n_1} + \psi_{n_2,n_1}), \\ \frac{-10}{3} \psi_{1,1} + \frac{2}{3} (\psi_{2,1} + \psi_{1,2} + \psi_{1,0} + \psi_{0,1}) + \frac{1}{6} (\psi_{2,2} + \psi_{0,2} + \psi_{2,0} + \psi_{0,0}) = F_{1,1}, \\ \overline{F_{1,1}} \equiv F_{1,1} - \frac{2}{3} (\psi_{1,0} + \psi_{0,1}) - \frac{1}{6} (\psi_{0,2} + \psi_{2,0} + \psi_{0,0}). \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases}
 -\frac{10}{3}\Psi_{1,n} + \frac{2}{3}(\Psi_{1,n-1} + \Psi_{2,n} + \Psi_{1,n+1} + \Psi_{0,n}) + \frac{1}{6}(\Psi_{2,n-1} + \Psi_{2,n+1} + \Psi_{0,n-1} + \Psi_{0,n+1}) = F_{1,n}, n = \overline{2, n_1 - 2}, \\
 \overline{F_{1,n}} = F_{1,n} - \frac{2}{3}\Psi_{0,n} - \frac{1}{6}(\Psi_{0,n-1} + \Psi_{0,n+1}), n = \overline{2, n_1 - 2}, \\
 -\frac{10}{3}\Psi_{n_2-1,n} + \frac{2}{3}(\Psi_{n_2-1,n-1} + \Psi_{n_2-2,n} + \Psi_{n_2-1,n+1} + \Psi_{n_2,n}) + \frac{1}{6}(\Psi_{n_2-2,n-1} + \Psi_{n_2-2,n+1} + \Psi_{n_2,n-1} + \Psi_{n_2,n+1}) = F_{n_2-1,n}, n = \overline{2, n_1 - 2}, \\
 \overline{F_{n_2-1,n}} = F_{n_2-1,n} - \frac{2}{3}\Psi_{n_2,n} - \frac{1}{6}(\Psi_{n_2,n-1} + \Psi_{n_2,n+1}), n = \overline{2, n_1 - 2}, \\
 -\frac{10}{3}\Psi_{m,1} + \frac{2}{3}(\Psi_{m-1,1} + \Psi_{m,2} + \Psi_{m+1,1} + \Psi_{m,0}) + \frac{1}{6}(\Psi_{m-1,2} + \Psi_{m+1,2} + \Psi_{m-1,0} + \Psi_{m+1,0}) = F_{m,1}, m = \overline{2, n_2 - 2}, \\
 \overline{F_{m,1}} = F_{m,1} - \frac{2}{3}\Psi_{m,0} - \frac{1}{6}(\Psi_{m-1,0} + \Psi_{m+1,0}), m = \overline{2, n_2 - 2}, \\
 -\frac{10}{3}\Psi_{m,n_1-1} + \frac{2}{3}(\Psi_{m-1,n_1-1} + \Psi_{m,n_1-2} + \Psi_{m+1,n_1-1} + \Psi_{m,n_1}) + \frac{1}{6}(\Psi_{m-1,n_1-2} + \Psi_{m+1,n_1-2} + \Psi_{m-1,n_1} + \Psi_{m+1,n_1}) = F_{m,n_1-1}, m = \overline{2, n_2 - 2}, \\
 \overline{F_{m,n_1-1}} = F_{m,n_1-1} - \frac{2}{3}\Psi_{m,n_1} - \frac{1}{6}(\Psi_{m-1,n_1} + \Psi_{m+1,n_1}), m = \overline{2, n_2 - 2}, \\
 \overline{F_{m,n}} = F_{m,n}, \forall m \in \overline{2, n_2 - 2}, n \in \overline{2, n_1 - 2}.
 \end{cases} \quad (13)$$

3. Найти матричные коэффициенты прогонки вперед по формулам (14), (15)  $m = \overline{1, n_2 - 2}$ :

$$\lambda_1 = -A^{-1}B, v_1 = A^{-1}\overline{F_1^T}, \quad (14)$$

$$\lambda_m = -(B\lambda_{m-1} + A)^{-1}B, v_m = (B\lambda_{m-1} + A)^{-1}(\overline{F_m^T} - Bv_{m-1}), m = \overline{2, n_2 - 2}. \quad (15)$$

4. Найти вектор-строку  $\Psi_{n_2-1}^T$  по формуле (16):

$$\Psi_{n_2-1}^T = (B\lambda_{n_2-2} + A)^{-1}(\overline{F_{n_2-1}^T} - Bv_{n_2-2}). \quad (16)$$

5. Найти остальные строки матрицы-решения  $\Psi_m^T$  по формулам (17):

$$\Psi_m^T = \lambda_m \Psi_{m+1}^T + v_m, m = \overline{n_2 - 2, 1}, v_{n_2-1} = \Psi_{n_2-1}^T. \quad (17)$$

Матричный алгоритм прогонки (9)–(17) сохраняет шестой порядок погрешности согласно формулам (7), (8) для уравнения Пуассона.

Второе и третье уравнения системы (4)  $\overline{w} = \overline{v_x} - \overline{u_y}$ ,  $\overline{u} = \overline{v_y}$ ,  $\overline{v} = -\overline{v_x}$  линейны относительно первых частных производных. Приведем квадратурные формулы первой производной с различными центрами. Для уравнения  $u = \Psi_{\overline{y}}$  имеем:

$$\begin{cases}
 u_{(i,j)} = \frac{1}{h} \left( \frac{3}{4}(\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}) - \frac{3}{20}(\Psi_{i+2,j} - \Psi_{i-2,j}) + \frac{1}{60}(\Psi_{i+3,j} - \Psi_{i-3,j}) \right) + O(h^6), i = \overline{3, n_2 - 3}, j = \overline{1, n_1 - 1}, \\
 u_{(1,j)} = \frac{1}{h} \left( -\frac{\Psi_{0,j}}{5} - \frac{13}{12}\Psi_{1,j} + 2\Psi_{2,j} - \Psi_{3,j} + \frac{\Psi_{4,j}}{3} - \frac{\Psi_{5,j}}{20} \right) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\
 u_{(2,j)} = \frac{1}{12h} (8(\Psi_{3,j} - \Psi_{1,j}) - (\Psi_{4,j} - \Psi_{0,j})) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\
 u_{(n_2-1,j)} = -\frac{1}{h} \left( -\frac{\Psi_{n_2,j}}{5} - \frac{13}{12}\Psi_{n_2-1,j} + 2\Psi_{n_2-2,j} - \Psi_{n_2-3,j} + \frac{\Psi_{n_2-4,j}}{3} - \frac{\Psi_{n_2-5,j}}{20} \right) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\
 u_{(n_2-2,j)} = -\frac{1}{12h} (8(\Psi_{n_2-3,j} - \Psi_{n_2-1,j}) - (\Psi_{n_2-4,j} - \Psi_{n_2,j})) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}.
 \end{cases} \quad (18)$$

Аналогичные формулы можно записать для уравнения  $\overline{v} = -\overline{v_x}$ . Для ускорения численного решения уравнение вихря (4) применялся метод расщепления [9].

Аналитически метод  $n$ -кратного расщепления уравнения вихря для временного интервала  $\tau_0 / n$  можно записать в виде:

$$\frac{w^{k+(i+1)/n} - w^{k+(i/n)}}{\tau_0 / n} + u^k \cdot w_x^{k+(i/n)} + v^k \cdot w_y^{k+(i/n)} = \frac{1}{\text{Re}} (w_{xx}^{k+(i/n)} + w_{yy}^{k+(i/n)}), i = \overline{0, n-1}. \quad (19)$$

Система рекуррентных уравнений (19) для вихря с замороженным полем скорости  $(u^k(x, y), v^k(x, y)), i = \overline{0, n-1}, k = \text{const}, k = 1, 2, \dots$  состоит из  $n$  промежуточных шагов  $i = \overline{0, n-1}$ , верхний индекс  $i$  указывает номер промежуточного слоя времени в уравнении вихря (19), индекс  $k$  — номер кратного слоя времени в системе (19). Поля скорости и функции тока постоянны в уравнениях (19) при значениях  $k = \text{const}$  и изменении

индекса  $i = \overline{0, n-1}$ . В данной системе уравнений изменяется только поле вихря  $w^{k+(i/n)}, i = \overline{0, n-1}$ . Поле скорости скачком изменяется в системах (4) или в (22), (19), когда временной индекс функции вихря увеличивается на единицу от  $k$  до  $k+1$  в системе уравнений (19).

Идея расщепления системы уравнений (19) заключается в уменьшении накопления ошибки округления и времени вычислений при ее решении. Дифференциальные операторы по координате в (19) аппроксимированы во внутренних узлах с точностью  $O(h^6)$ , как и все уравнения системы (4), граничные условия с точностью  $O(h^4)$ , а по времени — с точностью  $O(\tau)$ .

Таким образом, за время  $\tau_0 / n$  (связанное с уменьшением устойчивости решения из-за наличия четырех особых точек поля скорости), решая  $n$  раз уравнение (19), получим скачок по времени  $\tau_0$  (в  $n$  раз больший, чем последовательное решение системы уравнений (4)).

Уравнение (19) линейно относительно координатных производных  $w_x^i, w_y^i, w_{xx}^i, w_{yy}^i$ . В работе [9] показано, что для спектральной устойчивости уравнения динамики вихря (19) достаточно выбрать соотношение временного и пространственного шагов в виде неравенства  $\tau_0 \leq \frac{3}{16}h^2 \text{Re}-(4), (\tau_0 \leq \frac{3}{16}h^2 - (22))$ .

Для производной  $w_y$  в (19) запишем квадратурные формулы (формулы для производной  $w_x$  аналогичны):

$$\begin{cases} w_{y(i,j)} = \frac{1}{h} \left( \frac{3}{4}(w_{i+1,j} - w_{i-1,j}) - \frac{3}{20}(w_{i+2,j} - w_{i-2,j}) + \frac{1}{60}(w_{i+3,j} - w_{i-3,j}) \right) + O(h^6), i = \overline{3, n_2 - 3}, j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{y(1,j)} = \frac{1}{h} \left( -\frac{w_{0,j}}{5} - \frac{13}{12}w_{1,j} + 2w_{2,j} - w_{3,j} + \frac{w_{4,j}}{3} - \frac{w_{5,j}}{20} \right) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{y(2,j)} = \frac{1}{12h} (8(w_{3,j} - w_{1,j}) - (w_{4,j} - w_{0,j})) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{y(n_2-1,j)} = -\frac{1}{h} \left( -\frac{w_{n_2,j}}{5} - \frac{13}{12}w_{n_2-1,j} + 2w_{n_2-2,j} - w_{n_2-3,j} + \frac{w_{n_2-4,j}}{3} - \frac{w_{n_2-5,j}}{20} \right) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{y(n_2-2,j)} = -\frac{1}{12h} (8(w_{n_2-3,j} - w_{n_2-1,j}) - (w_{n_2-4,j} - w_{n_2,j})) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}. \end{cases} \quad (20)$$

Вторые частные производные  $w_{yy}$  в (19) имеют вид:

$$\begin{cases} w_{yy(i,j)} = \frac{1}{h^2} \left( -\frac{49}{18}w_{i,j} + \frac{3}{2}(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - \frac{3}{20}(w_{i+2,j} + w_{i-2,j}) + \frac{1}{90}(w_{i+3,j} + w_{i-3,j}) \right) + O(h^6), i = \overline{3, n_2 - 3}, j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{yy(1,j)} = \frac{1}{h^2} \left( \frac{137}{180}w_{0,j} - \frac{49}{60}w_{1,j} - \frac{17}{12}w_{2,j} + \frac{47}{18}w_{3,j} - \frac{19}{12}w_{4,j} + \frac{31}{60}w_{5,j} - \frac{13}{180}w_{6,j} \right) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{yy(2,j)} = \frac{1}{h^2} \left( -\frac{5}{2}w_{2,j} + \frac{4}{3}(w_{1,j} + w_{3,j}) - \frac{1}{12}(w_{0,j} + w_{4,j}) \right) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{yy(n_2-1,j)} = \frac{1}{h^2} \left( \frac{137}{180}w_{n_2,j} - \frac{49}{60}w_{n_2-1,j} - \frac{17}{12}w_{n_2-2,j} + \frac{47}{18}w_{n_2-3,j} - \frac{19}{12}w_{n_2-4,j} + \frac{31}{60}w_{n_2-5,j} - \frac{13}{180}w_{n_2-6,j} \right) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{yy(n_2-2,j)} = \frac{1}{h^2} \left( -\frac{5}{2}w_{n_2-2,j} + \frac{4}{3}(w_{n_2-1,j} + w_{n_2-3,j}) - \frac{1}{12}(w_{n_2,j} + w_{n_2-4,j}) \right) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}. \end{cases} \quad (21)$$

Аналогично формулам (21) записываются формулы для производной  $w_{xx}$ . Задача (4) и алгоритм ее решения (5)–(21), (23), (24) применяется при движении крови в аорте и в артериях при больших скоростях и больших числах Рейнольдса, но при малых числах Рейнольдса, используя диффузионный масштаб времени [9], приходим к задаче (22).

Обозначим

$$\bar{t} = \frac{t}{T}, T_{dif} = T = \frac{L^2}{\nu}, \text{Re} = \frac{u_{\max} L}{\nu},$$

$$0 \leq \bar{x} = \frac{x}{L} \leq 1, 0 \leq \bar{y} = \frac{y}{L} \leq k = \frac{H}{L}, \bar{\psi} = \frac{\Psi}{\Psi_{\max}}, \Psi_{\max} = Lu_{\max},$$

$$\bar{u} = \frac{u}{u_{\max}}, \bar{v} = \frac{v}{u_{\max}}, \bar{w} = \frac{w}{w_{\max}}, w_{\max} = \frac{u_{\max}}{L},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{T} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \frac{u_{\max}}{L} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{\nu}{L^2} \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\nu}{L^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \frac{u_{\max}}{L} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{\nu}{L^2} \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \right) \Leftrightarrow \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \text{Re} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\psi}_{xx} + \overline{\psi}_{yy} = -\overline{w}(x, y), 0 < \overline{x} = \frac{x}{L} < 1, 0 < \overline{y} < k_{\max}, \\ \overline{w} = \overline{v}_x - \overline{u}_y, \\ \overline{u} = \overline{\psi}_y; \overline{v} = -\overline{\psi}_x, \\ \overline{w}_t + \text{Re}(\overline{u} \cdot \overline{w}_x + \overline{v} \cdot \overline{w}_y) = \overline{w}_{xx} + \overline{w}_{yy}, 0 < \overline{t} = \frac{t}{T}, \\ \overline{\psi}|_{\Gamma_1} \equiv 0, \overline{v}|_{\Gamma} \equiv 0, \overline{u}|_{\Gamma_1} = 0, \overline{v}|_{\Gamma_2} = 0, \\ \overline{\psi}(0, y) = \overline{\psi}(L, y) = \begin{cases} 0, y \in [0, H - \Delta], \\ \frac{1}{L} \left( y + \frac{2}{3} \Delta - H - \frac{(y - H)^3}{3\Delta^2} \right), y \in [H - \Delta, H], \\ \frac{2\Delta}{3L} = \text{const}, y = H, \forall x \in [0, L]. \end{cases} \\ \overline{u}(0, y) = \overline{u}(L, y) = \frac{u(y)}{u_{\max}} = \begin{cases} 0, y \in [0, H - \Delta], \\ \left( 1 - \frac{(y - H)^2}{\Delta^2} \right), y \in [H - \Delta, H]. \end{cases} \end{array} \right. \quad (22)$$

Другие уравнения в задаче (22) такие же, как и в задаче (4). Согласно общему алгоритму (шаг 6) необходимо вычислить вихрь на границе прямоугольника, а затем решать уравнение вихря (19) во внутренних точках каверны. В линейном приближении предположим, что скорость и функция вихря, а также функция тока на границе и в ближайших внутренних узлах связаны одной линейной квадратурной формулой. Аппроксимируем граничные значения вихря с четвертым порядком погрешности [10], так как в работе [1] указаны формулы аппроксимации только с первым или со вторым порядком:

$$\begin{aligned} \psi_{xx}(0) &= \frac{1}{h_1^2} (C_0 \psi_0 + C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2 + C_3 \psi_3 + C_4 \psi_4) + \frac{C_5 \psi_x(0)}{h_1} = \frac{1}{h_1^2} \left( C_0 \psi_0 + \sum_{i=1}^4 \sum_{k=0}^{\infty} C_i \cdot \frac{(ih_1)^k \psi_0^{(k)}}{k!} \right) + \frac{C_5 \psi_x(0)}{h_1} = \\ &= \frac{\psi_0}{h_1^2} (C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + \frac{\psi_x(0)}{h_1} (C_1 + 2C_2 + 3C_3 + 4C_4 + C_5) + \psi_{xx}(0) \left( \frac{C_1}{2} + 2C_2 + \frac{9}{2}C_3 + 8C_4 \right) + \\ &\quad + h_1 \psi_x^{(3)}(0) \left( \frac{C_1}{6} + \frac{8}{6}C_2 + \frac{27}{6}C_3 + \frac{64}{6}C_4 \right) + h_1^2 \psi_x^{(4)}(0) \left( \frac{C_1}{24} + \frac{16}{24}C_2 + \frac{81}{24}C_3 + \frac{256}{24}C_4 \right) + \\ &\quad + h_1^3 \psi_x^{(5)}(0) \left( \frac{C_1}{120} + \frac{32}{120}C_2 + \frac{243}{120}C_3 + \frac{1024}{120}C_4 \right) + O(h_1^4). \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0 \\ C_1 + 2C_2 + 3C_3 + 4C_4 + C_5 = 0 \\ C_1 + 4C_2 + 9C_3 + 16C_4 = 2 \\ C_1 + 8C_2 + 27C_3 + 64C_4 = 0 \\ C_1 + 16C_2 + 81C_3 + 256C_4 = 0 \\ C_1 + 32C_2 + 243C_3 + 1024C_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow C_0 = -\frac{415}{72}, C_1 = 8, C_2 = -3, C_3 = \frac{8}{9}, C_4 = -\frac{1}{8}, C_5 = -\frac{25}{6}.$$

С учетом (22) получим общее краевое условие для вихря в открытой каверне с четвертым порядком погрешности, дважды дифференцируя (22) по  $y$ :

$$w(x, y) = -\psi_{xx} - \psi_{yy} = \frac{1}{h_1^2} \left( \frac{415}{72} \psi_0 - 8\psi_1 + 3\psi_2 - \frac{8}{9}\psi_3 + \frac{1}{8}\psi_4 \right) - \frac{25 v(0, y)}{6 h_1} - \psi_{yy}, v = -\psi_x. \quad (23)$$

$$\overline{w}_{m,0} = \begin{cases} \frac{1}{h_1^2} \left( \frac{415}{72} \overline{\psi}_{m,0} - 8\overline{\psi}_{m,1} + 3\overline{\psi}_{m,2} - \frac{8}{9}\overline{\psi}_{m,3} + \frac{1}{8}\overline{\psi}_{m,4} \right) - \frac{25 \overline{v}_{m,0}}{6 h_1} + 2 \frac{(\overline{y}_m - H / L)}{(\Delta / L)^2}, m = \overline{n_3}, \overline{n_2}, \\ \frac{1}{h_1^2} \left( \frac{415}{72} \overline{\psi}_{m,0} - 8\overline{\psi}_{m,1} + 3\overline{\psi}_{m,2} - \frac{8}{9}\overline{\psi}_{m,3} + \frac{1}{8}\overline{\psi}_{m,4} \right) - \frac{25 \overline{v}_{m,0}}{6 h_1}, m = \overline{0}, \overline{n_3}, \text{left}. \end{cases} \quad (24.1)$$

$$\overline{w}_{m,n_1} = \begin{cases} \frac{1}{h_1^2} \left( \frac{415}{72} \overline{\psi}_{m,n_1} - 8\overline{\psi}_{m,n_1-1} + 3\overline{\psi}_{m,n_1-2} - \frac{8}{9}\overline{\psi}_{m,n_1-3} + \frac{1}{8}\overline{\psi}_{m,n_1-4} \right) + \frac{25 \overline{v}_{m,n_1}}{6 h_1} + 2 \frac{(\overline{y}_m - H / L)}{(\Delta / L)^2}, m = \overline{n_3}, \overline{n_2}, \\ \frac{1}{h_1^2} \left( \frac{415}{72} \overline{\psi}_{m,n_1} - 8\overline{\psi}_{m,n_1-1} + 3\overline{\psi}_{m,n_1-2} - \frac{8}{9}\overline{\psi}_{m,n_1-3} + \frac{1}{8}\overline{\psi}_{m,n_1-4} \right) + \frac{25 \overline{v}_{m,n_1}}{6 h_1}, m = \overline{0}, \overline{n_3}, \text{right}. \end{cases} \quad (24.2)$$

$$\bar{w}_{0,n} = \begin{cases} \frac{1}{h_2^2} \left( \frac{415}{72} \bar{\psi}_{0,n} - 8 \bar{\psi}_{1,n} + 3 \bar{\psi}_{2,n} - \frac{8}{9} \bar{\psi}_{3,n} + \frac{1}{8} \bar{\psi}_{4,n} \right) + \frac{25 \bar{u}_{0,n}}{6 h_2}, & n = \bar{0}, \bar{n}_1, u = \psi_y, \text{bottom}, \\ \frac{1}{h_2^2} \left( \frac{415}{72} \bar{\psi}_{n_2,n} - 8 \bar{\psi}_{n_2-1,n} + 3 \bar{\psi}_{n_2-2,n} - \frac{8}{9} \bar{\psi}_{n_2-3,n} + \frac{1}{8} \bar{\psi}_{n_2-4,n} \right) - \frac{25 \bar{u}_{n_2,n}}{6 h_2}, & n = \bar{0}, \bar{n}_1, \text{top}. \end{cases} \quad (24.3)$$

В отличие от работы [2] с закрытой каверной с явно вычисляемыми производными от функции вихря до 5-го порядка включительно, в задачах (4), (22) уместно применение формулы (23). Так как в поле скоростей с разрывами функция вихря и ее частные производные имеют большие значения. При выводе формулы (23) удалены производные функции тока выше второго порядка. В таблице 1 приведена классификация кровеносных сосудов.

Таблица 1

Классификация кровеносных сосудов

Тип	Диаметр	Скорость крови	Число Re	Система уравнений
Капилляры	(5–10) мкм	(0,5–1,0) мм/с	0,00075–0,00300	(21)
Артериолы	(10–100) мкм	(0,5–10,0) см/с	0,015–3,000	(21),(4)
Артерии	(2–10) мм	(10–40) см/с	60–1200	(4)
Аорта	(2–3) см	0,5 м/с	3000	(4)

Для определенности решаем численно задачу (22) если  $Re < 1$  и задачу (4) в случаях, когда  $Re > 1$  ( $h_1 = h_2 = 0,01$ ). Опыт показывает, что для быстрого решения задачи в артериолах нужно выбрать инерционный интервал времени  $\frac{L}{u_{\max}}$ , а для решения гидродинамической задачи в аневризме артериолы использовать систему уравнений (4) аналогично решению задачи в аневризме артерии.

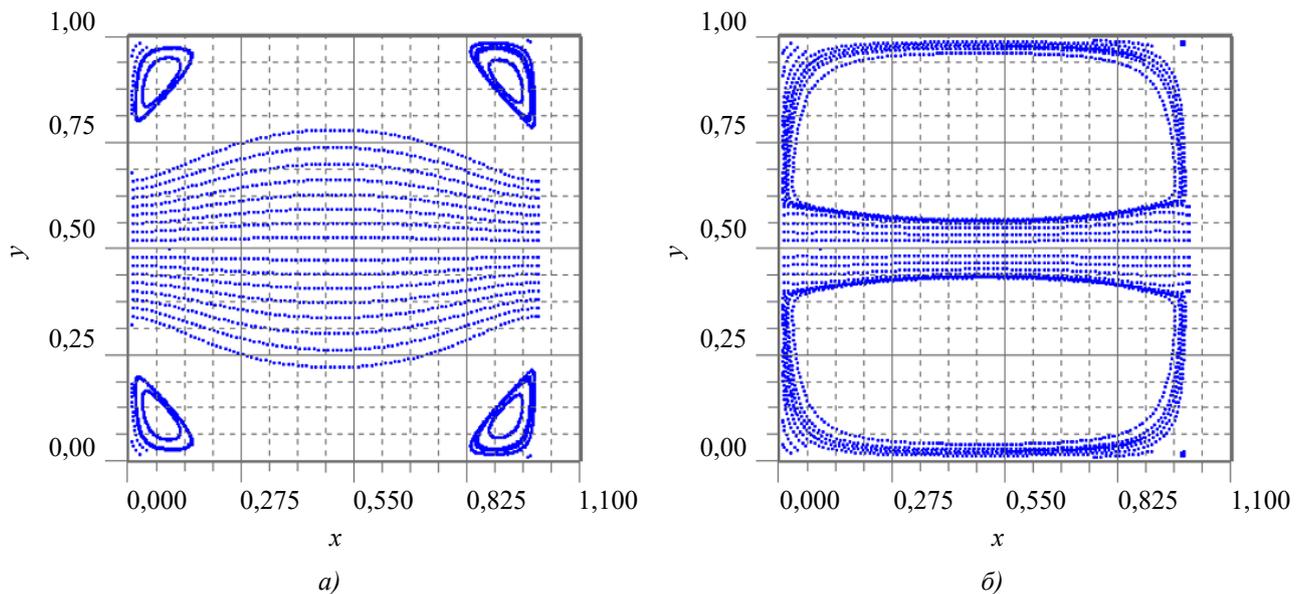


Рис. 3. Предельное поле линий тока в артериолах с применением формулы (5.1):

- a* —  $Re = 0,75, n_1 \times n_2 = 100 \times 50, \Delta / H = 0,5; L = 1, H = 50 \text{ мкм}, u_{\max} = 5 \text{ см/с}, \tau = \frac{6}{16} h_1^2, n = 400000$  шагов,  
кратность расщепления  $m = 100, t = 0,512$  с;
- б* —  $Re = 0,75, n_1 \times n_2 = 100 \times 50, \Delta / H = 0,2; L = 1, H = 50 \text{ мкм}, u_{\max} = 5 \text{ см/с}, \tau = \frac{6}{16} h_1^2, n = 200000$  шагов,  
кратность расщепления  $m = 100, t = 0,256$  с

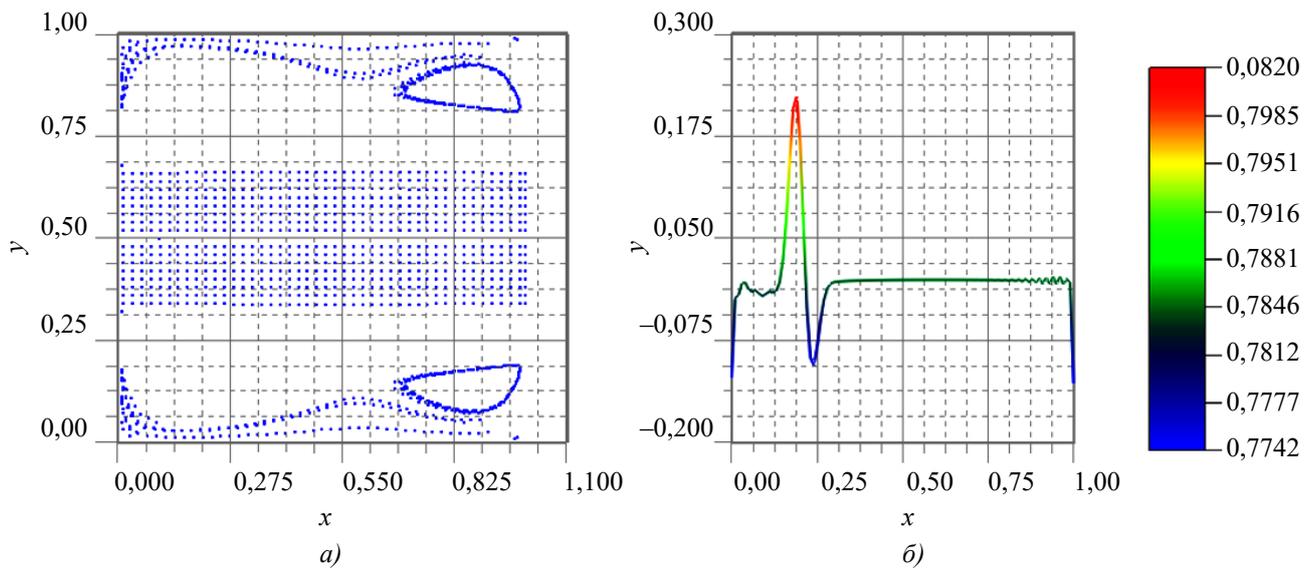


Рис. 4. Результаты решения задачи (4) с применением (5.1):

*a* —  $Re = 1500$ ,  $n_1 \times n_2 = 100 \times 50$ ,  $\Delta / H = 0,6$ ;  $L = 1$ ,  $H = 1$  см,  $u_{\max} = 50$  см/с, поле линий тока крови в артериях после  $n = 10000$  шагов, кратность расщепления  $m = 200$ ; *б* — график функции вихря в плоскости симметрии

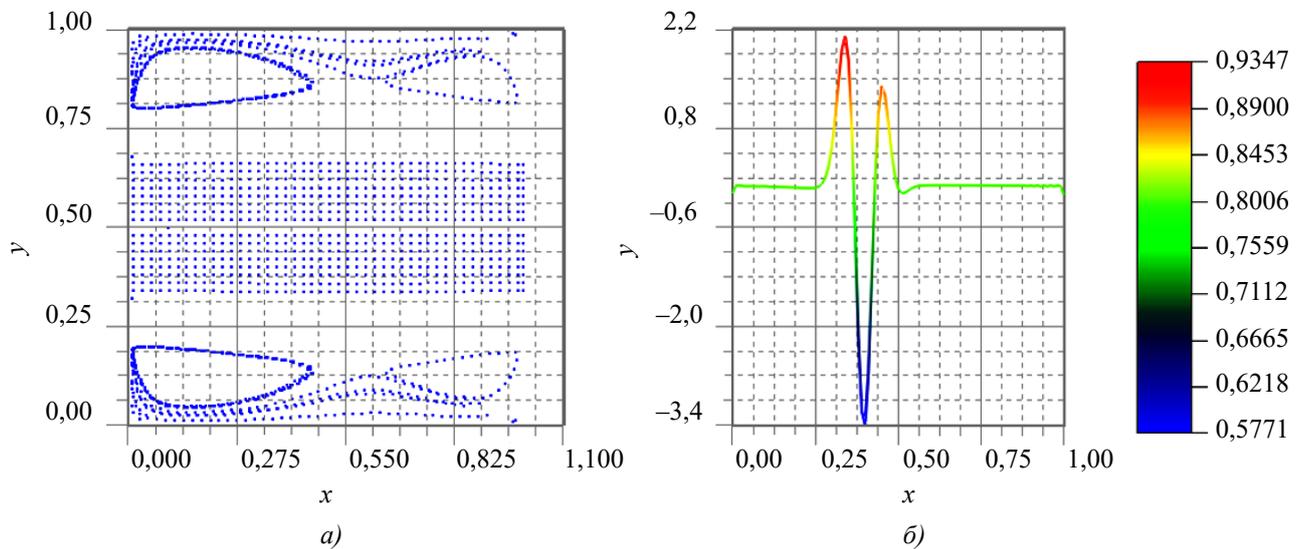


Рис. 5. Результаты решения задачи (4) с применением (5.1):

*a* —  $Re = 1500$ ,  $n_1 \times n_2 = 100 \times 50$ ,  $\Delta / H = 0,6$ ;  $L = 1$ ,  $H = 1$  см,  $u_{\max} = 50$  см/с, поле линий тока крови в артериях после  $n = 20000$  шагов, кратность расщепления  $m = 200$ ; *б* — график функции вихря в плоскости симметрии

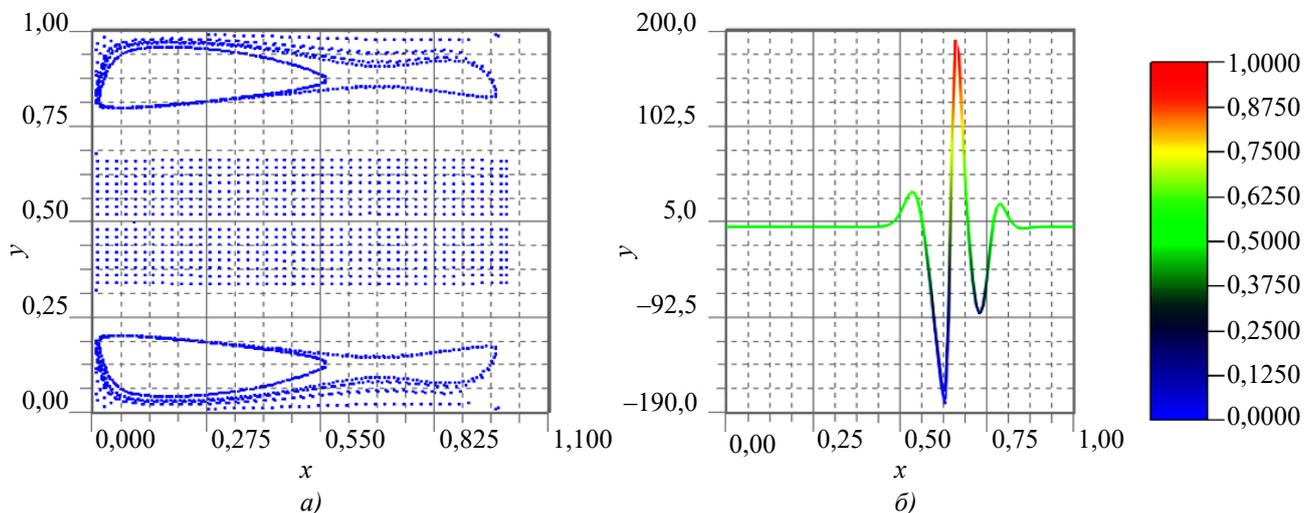
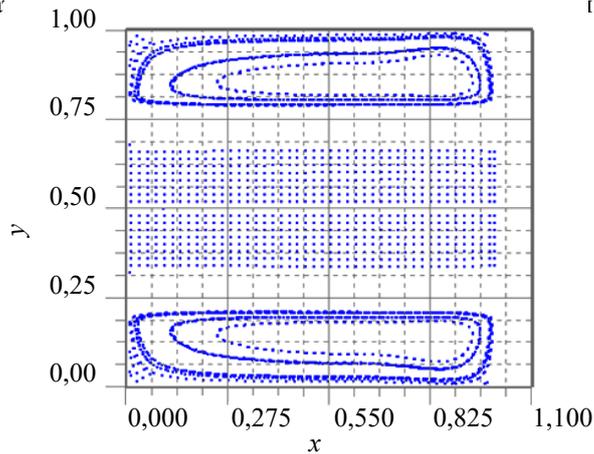


Рис. 6. Результаты решения задачи (4) с применением (5.1):

*a* —  $Re = 1500$ ,  $n_1 \times n_2 = 100 \times 50$ ,  $\Delta / H = 0,6$ ;  $L = 1$ ,  $H = 1$  см,  $u_{\max} = 50$  см/с, поле линий тока крови в артериях

после  $n = 34000$  шагов, кра



т вихря в плоскости симметрии

Рис. 7. Результаты решения задачи (4) с применением (5.2):  
 $Re = 1500$ ,  $n_1 \times n_2 = 100 \times 50$ ,  $\Delta / H = 0,6$ ;  $L = 1$ ,  $H = 1$  см,  $u_{\max} = 50$  см/с,  
 поле линий тока в артерии  $n = 2310000$  шагов, кратность расщепления  $m = 200$

**Обсуждение.** Предложены два численных алгоритма решения двумерной задачи в открытой каверне (5)–(21), (23), (24) в переменных «функция тока — вихрь», моделирующих движение крови в аневризме для ламинарного ( $Re < 1$ , 22)) и для турбулентного ( $Re > 1$ , (4)) течения. В капиллярах и артериолах (рис. 3) структура течения устанавливается за время 0,002 % от периода между пульсационными волнами (1 с). Таким образом, область свертывания определяется областью циркуляции крови в аневризме. Структура областей циркуляции при малых числах Рейнольдса существенно зависит от соотношения диаметра сосуда к диаметру аневризмы (рис. 3). Если параметр  $\Delta / H = 0,5$ , то область циркуляции расположена в углах аневризмы (рис. 3а). Если параметр  $\Delta / H = 0,2$ , то область циркуляции — вся аневризма (рис. 3б) и происходит сужение диаметра канала на 34 %. Это объясняет явление «сужения просвета канала» при образовании тромба. При быстрых течениях ( $Re = 1500$ ) в артериях и аортах область циркуляции — вся аневризма для любого параметра  $\Delta / H$  ( $\Delta / H = 0,6$  на рис. 6а и 7).

В плоскости симметрии аневризмы вдоль по току крови (вправо) образуется последовательность вихрей переменного знака. На рис. 4б два вихря со знаками  $w +, -$ . На рис. 5б три вихря со знаками  $+, -, +$ . На рис. 6б пять вихрей с последовательностью знаков  $w +, -, +, -, +$ . Такую цепь вихрей с чередованием знаков можно сравнить с дорожкой Кармана в вихревом следе за препятствием.

Наличие вихрей в плоскости симметрии аневризмы нарушает предположение о симметрии решения. Поэтому необходимо допустить возможность нормальной компоненты скорости в плоскости симметрии и включать всю аневризму при решении задачи (4) движения крови в аорте. Постановки задач (4), (22) и алгоритмы их решения обобщены на случай открытой каверны, то есть с пересечением границ каверны потоками жидкости.

**Заключение.** Сформулированные в работе начально-краевые задачи (4), (22) позволят качественно моделировать движение крови в аневризмах капилляров, артериол и артерий кровеносных сосудов при малых и больших скоростях, а также движение крови в элементах медицинского оборудования.

### Список литературы / References

1. Salih A. Streamfunction — Vorticity Formulation. *Department of Aerospace Engineering Indian Institute of Space Science and Technology*. 2013;10:1–10.
2. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Сравнение решений гидродинамической задачи в прямоугольной каверне методами торможения и разгона начального поля скорости. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):22–33. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-22-33>
3. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Comparison of solution of the hydrodynamic problem in a rectangular cavity methods of inhibition and acceleration of the initial speed field. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):22–33 (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-22-33>
3. Петров А.Г. Высокоточные численные схемы решения плоских краевых задач для полигармонического уравнения и их применение к задачам гидродинамики. *Прикладная математика и механика*. 2023;87(3):343–368. <https://doi.org/10.31857/S0032823523030128>
4. Petrov A.G. High-precision numerical schemes for solving plane boundary value problems for a polyharmonic equation and their application to problems of hydrodynamics. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2023;87(3):343–368 (In Russ.) <https://doi.org/10.31857/S0032823523030128>
4. Сухинов А.И., Колгунова О.В., Гирмай М.З., Нахом О.С. Двумерная гидродинамическая модель прибрежных систем, учитывающая испарение. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):9–21. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-9-21>



**Ю.Ф. Пастухов:** тестирование существующих компонентов кода.

**Конфликт интересов:** авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.**

***About the Authors:***

**Natalya K. Volosova**, Post-graduate Student of Bauman Moscow State Technical University (2nd Baumanskaya St. 5–1, Moscow, 105005, Russian Federation), [ORCID](#), [navalosova@yandex.ru](mailto:navalosova@yandex.ru)

**Konstantin A. Volosov**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics of the Russian University of Transport (Obraztsova St. 9–9, Moscow, GSP-4, 127994, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), [konstantinvolosov@yandex.ru](mailto:konstantinvolosov@yandex.ru)

**Aleksandra K. Volosova**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Chief Analytical Department “Tramplin” LLC, Russian University of Transport (Obraztsova St. 9–9, Moscow, GSP-4, 127994, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), [alya01@yandex.ru](mailto:alya01@yandex.ru)

**Mikhail I. Karlov**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (9, Institutsky Lane, GSP-4, Dolgoprudny, 141701, Russian Federation), [SPIN-code](#), [karlov.mipt@gmail.com](mailto:karlov.mipt@gmail.com)

**Dmitriy F. Pastukhov**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (Blokhin St. 29, Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), [ORCID](#), [SPIN-code](#), [dmitrij.pastuhov@mail.ru](mailto:dmitrij.pastuhov@mail.ru)

**Yuriy F. Pastukhov**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (Blokhin St. 29, Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), [ORCID](#), [SPIN-code](#), [pulsar1900@mail.ru](mailto:pulsar1900@mail.ru)

***Contributions of the authors:***

**N.K. Volosova:** setting the task; writing a draft of the manuscript; formulation of research ideas, goals and objectives.

**K.A. Volosov:** scientific guidance; methodology development.

**A.K. Volosova:** translation; study of the history of the task; literature.

**M.I. Karlov:** formal analysis.

**D.F. Pastukhov:** visualization; validation; software.

**Yu.F. Pastukhov:** testing of existing code components.

***Conflict of Interest Statement:*** the authors declare no conflict of interest.

***All authors have read and approved the final manuscript.***

**Поступила в редакцию / Received** 25.07.2025

**Поступила после рецензирования / Revised** 18.08.2025

**Принята к публикации / Accepted** 17.09.2025