

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELLING



УДК 004.032.26

Оригинальное эмпирическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-56-63>


Применение нейронных сетей для решения задачи об установившихся колебаниях

А.В. Галабурдин

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

✉ Galaburdin@mail.ru

Аннотация

Введение. В последнее время быстро развивается область математики, специализирующаяся на применении искусственных нейронных сетей. В настоящей работе предложен новый метод построения нейронной сети для решения волновых дифференциальных уравнений. Этот метод особенно эффективен при решении краевых задач для областей сложной геометрической формы.

Материалы и методы. Предлагается метод построения нейронной сети, предназначенной для решения волнового уравнения для плоской области G , ограниченной произвольной замкнутой кривой. Предполагается, что граничные условия являются периодическими функциями времени t . Рассматривается установившийся режим. При построении нейронной сети в качестве активационных функций принимаются производные от сингулярных решений уравнения Гельмгольца. Сингулярные точки этих решений равномерно распределены по замкнутым кривым, охватывающим границу области. В качестве обучающего множества используется множество частных решений уравнения Гельмгольца.

Результаты исследования. Получены результаты решения первой краевой задачи для различных областей сложной геометрической формы и граничных условий. Результаты представлены в виде таблиц, содержащих точные решения задачи и решения, полученные с помощью нейронной сети. Дано графическое представление точного решения и решения, полученного построенной нейронной сетью.

Обсуждение. Представленные результаты расчетов показали эффективность предложенного метода построения нейронных сетей, решающих краевые задачи дифференциальных уравнений в частных производных для областей сложной геометрической формы.

Заключение. Дальнейшее развитие разработанного автором метода может быть применено к решению краевых задач для волнового уравнения, для решения внешних задач. Особенный интерес представляет применение этого метода к задачам дифракции.

Ключевые слова: волновое уравнение, область сложной геометрической формы, нейронные сети

Для цитирования. Галабурдин А.В. Применение нейронных сетей для решения задачи об установившихся колебаниях. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(3):56–63. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-56-63>

Original Empirical Research

Application of Neural Networks to Steady-State Oscillations

Alexander V. Galaburdin

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

✉ Galaburdin@mail.ru

Abstract

Introduction. In recent years, the field of mathematics specializing in the application of artificial neural networks has been rapidly developing. In this work, a new method for constructing a neural network for solving wave differential equations is proposed. This method is particularly effective in solving boundary value problems for domains of complex geometric shapes.

Materials and Methods. A method is proposed for constructing a neural network designed to solve the wave equation in a planar domain G bounded by an arbitrary closed curve. It is assumed that the boundary conditions are periodic functions of time t , and the steady-state regime is considered. When constructing the neural network, the activation functions are taken as derivatives of singular solutions of the Helmholtz equation. The singular points of these solutions are uniformly distributed along closed curves surrounding the domain boundary. The training set consists of a set of particular solutions of the Helmholtz equation.

Results. Results were obtained for the solution of the first boundary value problem in various domains of complex geometric shape and under different boundary conditions. The results are presented in tables containing both the exact solutions of the problem and the solutions obtained using the neural network. A graphical comparison is also provided between the exact solution and the solution obtained with the constructed neural network.

Discussion. The presented computational results demonstrate the efficiency of the proposed method for constructing neural networks that solve boundary value problems of partial differential equations in domains of complex geometry.

Conclusion. The further development of the proposed method may be applied to solving boundary value problems for the wave equation in exterior domains. Of particular interest is the application of this method to diffraction problems.

Keywords: wave equation, domain of complex geometric shape, neural networks

For Citation. Galaburдин A.V. Application of Neural Networks to Steady-State Oscillations. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(3):56–63. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-56-63>

Введение. При моделировании различных природных объектов и явлений часто используется аппарат дифференциальных уравнений в частных производных. Сложность разрабатываемых моделей не всегда позволяет эффективно использовать традиционные методы. Поэтому в настоящее время все чаще применяется метод нейронных сетей.

Теоретические основы метода нейронных сетей были заложены еще в середине прошлого века в трудах А.Н. Колмогорова [1]. В настоящее время нейронные сети используются при решении различных краевых задач. Работы [2, 3] посвящены решению краевых задач для уравнения Лапласа. В статье [4] представлено применение методов глубокого обучения для решения уравнения Пуассона в двумерной области. В статье [5] исследованы подходы к решению задач тепломассопереноса на основе нейронной сети персептронного типа.

В настоящее время часто при решении уравнений в частных производных используют физико-информированную нейронную сеть [6, 7]. В работах [8, 9] в качестве активационных функций используются радиально-базисные функции, причем в процессе обучения предлагается варьировать их параметры. В статьях [10, 11] представлено успешное применение нейронных сетей при решении уравнений Навье-Стокса.

В статье [12] радиально-базисные нейронные сети применяются при решении прямых и обратных задач рассеяния. Настоящая работа является дальнейшим развитием метода построения нейронных сетей, используемых при решении дифференциальных уравнений в частных производных, представленных в работах [13–15]. Суть этого метода заключается в том, что в качестве функций активации берутся функции, удовлетворяющие рассматриваемому дифференциальному уравнению. В данной работе этот подход применяется при построении нейронной сети, предназначенной для решения краевых задач для волнового уравнения.

Материалы и методы. Рассмотрим первую краевую задачу для волнового уравнения для плоской области G , ограниченной произвольной гладкой замкнутой кривой γ . Пусть граничные условия являются периодическими функциями времени t с периодом ω , действующими с момента времени $t = -\infty$.

Тогда решение волнового уравнения

$$\Delta U = c^{-2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

можно искать в виде:

$$U = U_1(x, y) \cos \omega t + U_2(x, y) \sin \omega t,$$

где функции $U_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$ удовлетворяют уравнению

$$\Delta U = \frac{\omega^2}{c^2} U.$$

При решении краевой задачи для данного уравнения применялась построенная ниже нейронная сеть. Разыскиваемая функция U в этом случае представлялась в виде:

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^N w_k u(s_k) F(x, y, x_0(\sigma_k), y_0(\sigma_k)) + \sum_{k=1}^N v_k u(s_k) G(x, y, x_0(\tau_k), y_0(\tau_k)),$$

где $u(s_k)$ — заданные значения неизвестной функции U на границе области; $F(x, y, x_0(\sigma_k), y_0(\sigma_k))$ и $G(x, y, x_0(\tau_k), y_0(\tau_k))$ — активационные функции; σ_k и τ_k — дуговые координаты на контурах γ_1 и γ_2 , которые получаются из граничного контура γ смещением каждой точки в направлении внешней нормали к границе области на расстояния ρ_1 и ρ_2 соответственно; x, y — координаты точек области G .

В качестве активационных функций брались

$$F(x, y, x_o(\sigma_k), y_o(\sigma_k)) = \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} Y_0\left(\frac{\omega R}{c}\right)$$

и

$$G(x, y, x_o(\sigma_k), y_o(\sigma_k)) = \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2} Y_0\left(\frac{\omega R}{c}\right) n_1(\sigma_k) + \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} Y_0\left(\frac{\omega R}{c}\right) n_2(\sigma_k),$$

где $R = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}$, $n_1(\sigma_k)$, $n_2(\sigma_k)$ — компоненты вектора нормали к кривой γ_2 ; $Y_0(z)$ — функция Бесселя второго рода.

Активационные функции удовлетворяют уравнению (1), следовательно, необходимо удовлетворить лишь граничным условиям на контуре γ :

$$U|_{\gamma} = u.$$

При обучении сети определялись веса и величины ρ_1 и ρ_2 , для чего минимизировался функционал ошибок

$$\Phi(w_k, v_k, \rho_1, \rho_2) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^N w_k f_k^j F(x_i, y_i, x_o(\sigma_k), y_o(\sigma_k)) + \right. \\ \left. v_k f_k^j G(x_i, y_i, x_o(\tau_k), y_o(\tau_k)) - f_i^j \right\}^2,$$

f_k^j — значение j -ой функции из обучающего множества в точке граничного контура с координатой σ_k .

Для определения w_k и v_k из соотношений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial w_k} = 0 \text{ и } \frac{\partial \Phi}{\partial v_k} = 0$$

строилась система линейных уравнений. Значения ρ_1 и ρ_2 определяются простым перебором.

Оценить точность полученного решения можно, сравнив значения U на границе области, вычисленные с помощью нейронной сети с заданными граничными значениями

$$U(x(s_i), y(s_i)) = \sum_{k=1}^N w_k u(s_k) F(s_i, \sigma_k) + \sum_{k=1}^N v_k u(s_k) G(s_i, \tau_k), \\ F(s_i, \sigma_k) = F(x(s_i), y(s_i), x_o(\sigma_k), y_o(\sigma_k)), \\ G(s_i, \tau_k) = F(x(s_i), y(s_i), x_o(\tau_k), y_o(\tau_k)).$$

В качестве обучающего множества применялось множество функций, являющихся решением уравнения (1) и имеющих вид:

$$v_1 = \cos\left(\frac{\omega}{c} n_1^k x + \alpha_k\right) \cos\left(\frac{\omega}{c} n_2^k y - \alpha_k\right), \\ v_2 = \cos\left(\frac{\omega}{c} n_2^k x + \alpha_k\right) \cos\left(\frac{\omega}{c} n_1^k y - \alpha_k\right).$$

Каждая функция соответствовала точке граничного контура с номером k . С изменением номера k изменялись и значения величин α_k , а также компонент вектора нормали.

Определенные описанным выше способом параметры не всегда обеспечивают желаемую точность полученного с помощью нейронной сети решения. В этом случае нужной точности можно достичь итерационным уточнением полученного результата, используя изложенный ниже алгоритм:

$$\Delta u^o(s_i) = u(s_i), u_t^o(s_i) = u(s_i), i = 1, 2, \dots, N, \\ \Delta V^{n+1}(s_i) = \sum_{k=1}^N \{w_k \Delta u^n(s_k) F(s_i, \sigma_k) + v_k \Delta u^n(s_k) G(s_i, \tau_k)\}, \\ \Delta u^{n+1}(s_i) = \Delta u^{n+1}(s_i) - \Delta V^{n+1}(s_i), \\ u_t^{n+1}(s_i) = u_t^{n+1}(s_i) - \Delta u^{n+1}(s_i).$$

Здесь $u_t^{n+1}(s_i)$ — значения уточненного решения на границе области.

Итерационный процесс уточнения решения продолжается до тех пор, пока не будет достигнута заданная точ-

ность $\frac{\|\Delta u^{n+1}(s_i)\|}{\|u_t^{n+1}(s_i)\|} < \delta$ (δ — величина, определяющая желаемую точность значений функции U на границе области G),

либо величина $\frac{\|\Delta u^{n+1}(s_i)\|}{\|u_t^{n+1}(s_i)\|}$ не начнет расти.

После этого значение решения в любой точке области G вычисляется по формуле:

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^N w_k u_t(s_k) F(x, y, x_o(\sigma_k), y_o(\sigma_k)) + \sum_{k=1}^N v_k u_t(s_k) G(x, y, x_o(\tau_k), y_o(\tau_k)).$$

Результаты исследования. Изложенный выше метод был применен для решения краевых задач для волнового уравнения для плоских областей, граница которых задавалась в виде

$$\begin{cases} x = a \cos(t) + g \sin(dt), \\ y = b \sin(t) + f \cos(dt), \end{cases}$$

где $t \in [0, 2\pi]$, a, b, g, f, d — изменяемые параметры.

Во всех рассмотренных ниже задачах принимались следующие значения параметров: количество функций в обучающем множестве $M = 72$, количество нейронов сети $N = 72$, $c = 250$, $\delta = 0,0025$.

Задача 1. Рассматривалась плоская область, форма которой определялась значениями параметров $a = 0,27$, $b = 0,27$, $g = -0,055$, $f = 0,055$, $d = 3$ (рис. 1).

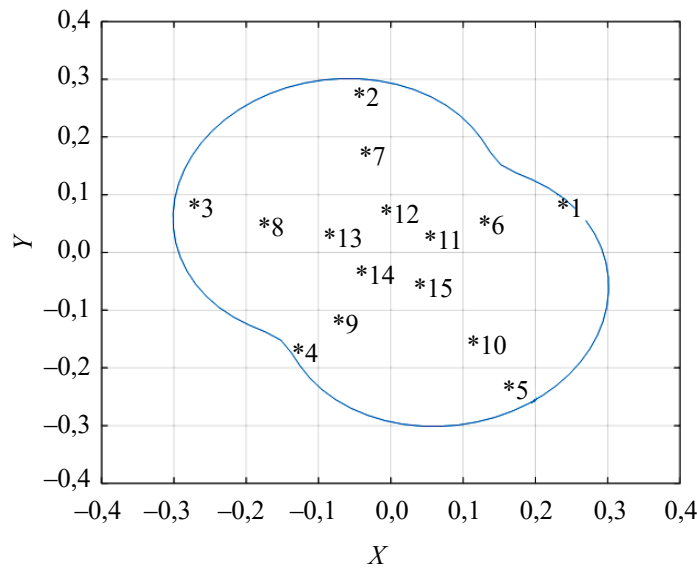


Рис. 1. Форма области задачи 1

На рис. 1 звездочками обозначены точки области, в которых вычисляются точные значения решения задачи и значения, полученные при помощи нейронной сети. В таблице 1 представлены результаты расчетов (амплитуды), соответствующие решению, которое в полярной системе координат имеет вид:

$$U = J_1\left(\frac{\omega r}{c}\right) \cos \varphi \cos(\omega t), \quad \omega = 550.$$

Таблица 1

Результаты расчетов для задачи 1

Номер точки	1	2	3	4	5
Точное решение	0,25615	0,12741	-0,01673	-0,18688	-0,28990
Решение НС	0,25598	0,12730	-0,01643	-0,18703	-0,28962
Номер точки	6	7	8	9	10
Точное решение	0,16308	0,08066	-0,01072	-0,12037	0,18643
Решение НС	0,16297	0,08061	-0,01065	-0,12032	0,18635
Номер точки	11	12	13	14	15
Точное решение	0,06463	0,03187	-0,00426	-0,04800	-0,07427
Решение НС	0,06457	0,03184	-0,00426	-0,04800	-0,07425

Задача 2. Исследовалась плоская область, форма которой определялась значениями параметров $a = 0,27$, $b = 0,27$, $g = -0,035$, $f = 0,035$, $d = 4$ (рис. 2).

Рассматривалось решение волнового уравнения, имеющее вид:

$$U = \cos\left(\frac{\omega}{c}\right) \cdot (ct - \cos(f)x - \sin(f)y), \quad f = 1,5, \quad \omega = 125.$$

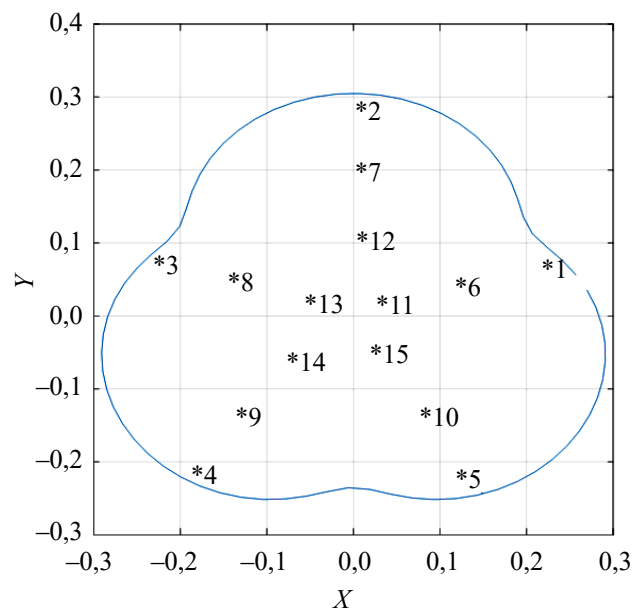


Рис. 2. Форма области задачи 2

Приведенное выражение удовлетворяет как волновому уравнению, так и уравнению (1). Поэтому время t рассматривалось как параметр, которому присваивалось некоторое значение и затем реализовывался описанный ранее алгоритм получения решения. В таблице 2 представлены результаты расчетов с применением нейронной сети и точное решение задачи, соответствующее моменту времени $t = 3T/5$ ($T = 2\pi/\omega$ — период решения).

Таблица 2

Результаты расчетов для задачи 2

Номер точки	1	2	3	4	5
Точное решение	-0,82913	-0,86526	-0,88547	-0,87167	-0,83232
Решение НС	-0,82908	-0,86525	-0,88553	-0,87169	-0,83227
Номер точки	6	7	8	9	10
Точное решение	-0,82047	-0,84421	-0,86163	-0,84979	-0,82211
Решение НС	-0,82046	-0,84420	-0,86164	-0,84979	-0,82210
Номер точки	11	12	13	14	15
Точное решение	-0,81162	-0,82176	-0,83572	-0,82633	-0,81163
Решение НС	-0,81161	-0,82176	-0,83572	-0,82633	-0,81163

Задача 3. Исследовалась плоская область, форма которой определялась значениями параметров $a = 0,27$, $b = 0,27$, $g = 0,035$, $f = 0,035$, $d = 2$ (рис. 3).

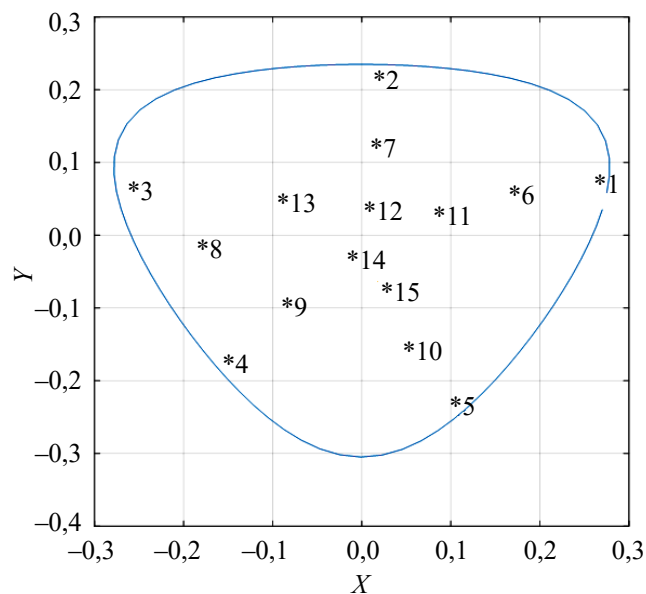


Рис. 3. Форма области задачи 3

Рассматривалось решение волнового уравнения, имеющее в полярной системе координат вид:

$$U = J_1\left(\frac{\omega r}{c}\right) \cos(\varphi - \omega t), \quad \omega = 25.$$

В таблице 3 представлены результаты расчетов с применением нейронной сети и точные значения решения задачи, соответствующие моменту времени $t = 5T/10$.

Таблица 3

Результаты расчетов для задачи 3

Номер точки	1	2	3	4	5
Точное решение	-0,01309	-0,01010	-0,002314	0,005639	0,01259
Решение НС	-0,01309	-0,01010	-0,002317	0,005640	0,01259
Номер точки	6	7	8	9	10
Точное решение	-0,00840	0,00672	-0,00145	0,00365	0,00840
Решение НС	-0,00840	0,00672	-0,00146	0,00365	0,00840
Номер точки	11	12	13	14	15
Точное решение	-0,00372	-0,00333	0,000595	0,00166	0,00421
Решение НС	-0,00372	-0,00333	0,000594	0,00166	0,00421

На рис. 4 и рис. 5 представлено изменение во времени при решении задачи в точках 3 и 5, полученное с помощью нейронной сети. Звездочками отмечены точные значения решения данной задачи.

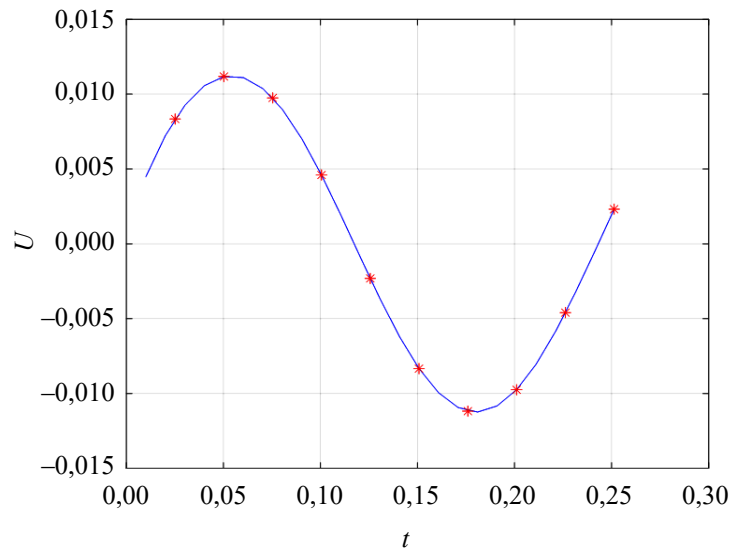


Рис. 4. Изменение во времени, иллюстрирующее решение задачи в точке 3

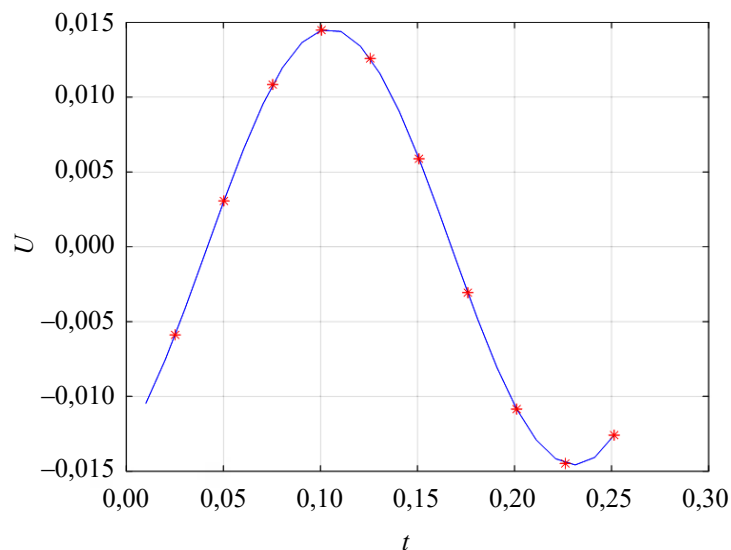


Рис. 5. Изменение во времени, иллюстрирующее решение задачи в точке 5

Обсуждение. Предложенный метод построения нейронных сетей, решающих краевые задачи дифференциальных уравнений в частных производных для областей сложной геометрической формы, показал свою эффективность на представленных задачах.

Заключение. Дальнейшие исследования автора будут посвящены применению разработанного метода к решению краевых задач для волнового уравнения, для решения внешних задач, к задачам дифракции. Развитие данного подхода в указанных направлениях может принести интересные и важные результаты как в теории, так и при решении практических задач.

Список литературы / References

1. Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения. *Доклады Академии наук СССР*. 1957;114(5):953–956.
Kolmogorov A.N. On the representation of continuous functions of several variables in the form of superpositions of continuous functions of one variable and addition. *Reports of the USSR Academy of Sciences*. 1957;114(5):953–956. (In Russ.)
2. Варшавчик Е.А., Галютдинова А.Р., Седова Ю.С., Тархов Д.А. Решение дифференциальных уравнений в частных производных для областей с постоянными границами. В: «Искусственный интеллект в решении актуальных социальных и экономических проблем XXI века». Пермь: издательство Пермского государственного национального исследовательского университета; 2018. С. 294.
Varshavchik E.A., Galyautdinova A.R., Sedova Yu.S., Tarkhov D.A. Solving partial differential equations for regions with constant boundaries. In: “Artificial intelligence in solving urgent social and economic problems of the 21st century”. Perm: Publishing House of Perm State National Research University; 2018. P. 294. (In Russ.)
3. Тюрин К.А., Брагунец В.В., Светлов Д.Д. Решение дифференциального уравнения Лапласа с помощью модифицированной нейронной сети. *Молодой ученый*. 2019;27(265):10–12.
Tyurin K.A., Bragunets V.V., Svetlov D.D. Solution of the Laplace Differential Equation Using a Modified Neural Network. *Young Scientist*. 2019;27(265):10–12.
4. Епифанов А.А. Применение методов глубокого обучения для решения дифференциальных уравнений в частных производных. *Успехи кибернетики*. 2020;1(4):22–28. <https://doi.org/10.51790/2712-9942-2020-1-4-3>
Epifanov A.A. Application of deep learning methods for solving partial differential equations. *Russian Journal of Cybernetics*. 2020;1(4):22–28. (In Russ.) <https://doi.org/10.51790/2712-9942-2020-1-4-3>
5. Cai S., Wang Z., Wang S., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks for heat transfer problems. *Journal of Heat Transfer*. 2021;143(6):060801. <https://doi.org/10.1115/1.4050542>
6. Raissia M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*. 2019;378:686–707.
7. Зрелова Д.П., Ульянов С.В. Модели физически информированных / осведомленных классических Лагранжевых / Гамильтоновых нейронных сетей в глубоком обучении. *Современные информационные технологии и ИТ-образование*. 2022;18(2):310–325. <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.310-325>
Zrelova D.P., Ulyanov S.V. Physics-informed classical Lagrange / Hamilton neural networks in deep learning. *Modern information technologies and IT-education*. 2022;18(2):310–325. <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.310-325>
8. Kansa E.J. Motivation for using radial basis functions to solve PDEs. URL: <http://uahtitan.uah.edu/kansaweb.html> (дата обращения: 12.08.2025).
9. Kansa E.J. Multiquadrics – A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. II. Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*. 1990;19(8–9):147–161. [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(90\)90271-K](https://doi.org/10.1016/0898-1221(90)90271-K)
10. Almajid M., Abu-alsaud M. Prediction of porous media fluid flow using physics informed neural networks. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 2021;208:109205. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.109205>
11. Eivazi H., Tahani M., Schlatter P., Vinuesa R. Physics-informed neural networks for solving Reynolds-averaged Navier-Stokes equations. *Physics of Fluids*. 2022;34:075117. <https://doi.org/10.1063/5.0095270>
12. Шевкун С.А., Самойлов Н.С. Применение нейросетевого подхода к решению прямых и обратных задач рассеяния. *Вестник инженерной школы ДВФУ*. 2021;2(47):66–74. <https://doi.org/10.24866/2227-6858/2021-2-7>
Shevkun S.A., Samoylov N.S. Application of the neural network approach for solution of direct and inverse problems of scattering. *FEFU: School of Engineering Bulletin*. 2021;2(47):66–74. (In Russ.) <https://doi.org/10.24866/2227-6858/2021-2-7>
13. Галабурдин А.В. Применение нейронных сетей для решения задачи Дирихле для областей сложной формы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):68–79. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-68-79>
Galaburdin A.V. Application of neural networks to solve the Dirichlet problem for areas of complex shape. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):68–79. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-68-79>
14. Галабурдин А.В. Применение нейронных сетей для решения нелинейных краевых задач для областей сложной формы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):35–42. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-35-42>
Galaburdin A.V. Application of neural networks to solve nonlinear boundary value problems for areas of complex shape. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):35–42. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-35-42>

15. Галабурдин А.В. Применение нейронных сетей при решении эллипти-ческих уравнений для областей сложной формы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):44–51. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-44-51>

Galaburdin A.V. Application of Neural Networks for Solving Elliptic Equations in Domains with Complex Geometries. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):44–51. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-44-51>

Об авторе:

Александр Васильевич Галабурдин, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID](#), [SPIN-код](#), Galaburdin@mail.ru

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

About the Author:

Alexander V. Galaburdin, Cand. Sci. (Phys. – math.), Associate Professor at the Department Mathematics and informatics, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostovon-Don, 344003, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), Galaburdin@mail.ru

Conflict of Interest Statement: the author declares no conflict of interest.

The author has read and approved the final version of manuscript.

Поступила в редакцию / Received 18.08.2025

Поступила после рецензирования / Reviewed 12.09.2025

Принята к публикации / Accepted 19.09.2025