

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELLING



УДК 004.942:532.1

Оригинальное эмпирическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-4-46-55>


Математическое моделирование биопродуктивности мелководного водоема при внезапной депрессии сцифоидными медузами

Д.В. Бондаренко  , А.В. Никитина 

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

 denis.bondarenko.dev@gmail.com

Аннотация

Введение. Актуальность исследования обусловлена необходимостью количественной оценки негативного влияния массового развития сцифоидных медуз (*Aurelia aurita* и *Rhizostomeae*) на биоресурсы Азовского моря, испытывающего комплекс антропогенных нагрузок. Теоретической основой для решения данной проблемы выступает концепция трофических взаимодействий и инвазий в морских экосистемах. Целью настоящей работы является разработка математической модели динамики рыбного сообщества Азовского моря, учитывающей конкурентное и хищническое давление со стороны медуз, для оценки критических порогов его биомассы, приводящих к депрессии промысловых запасов.

Материалы и методы. Для исследования влияния сцифомедуз на биоресурсы Азовского моря в качестве основного инструмента использована математическая модель биологической кинетики, описывающая динамику трёх ключевых компонентов (зоопланктон, рыбы, медузы) с учётом конкуренции и хищничества. Материалом исследования выступали теоретические уравнения системы с соответствующими параметрами взаимодействий и начальными-краевыми условиями.

Результаты исследования. Результаты численного моделирования показали, что при характерных для летнего сезона условиях в Азовском море (высокая температура, эвтрофикация) прирост биомассы сцифомедуз более чем в три раза за период июль-август приводит к резкому переходу экосистемы в альтернативное устойчивое состояние с их доминированием. Этот переход обусловлен комбинированным эффектом интенсивной конкуренции за зоопланктон и прямого хищничества медуз на ранних стадиях развития рыб и сопровождается критическим снижением доступности кормовой базы, что подавляет восстановление промысловых рыбных популяций.

Обсуждение. Проведённое исследование подтверждает высокую экологическую значимость массовых скоплений сцифомедуз и количественно обосновывает риск перехода экосистемы Азовского моря в альтернативное, менее продуктивное состояние, доминируемое медузами. С теоретической точки зрения работа вносит вклад в развитие моделей трофических взаимодействий с учётом множественных механизмов воздействия инвазионных видов.

Заключение. Практическая значимость работы заключается в том, что разработанная модель представляет собой инструмент для прогнозной оценки состояния биоресурсов и обоснования управленческих решений, направленных на смягчение последствий эвтрофикации и биологических инвазий. Перспективы исследования связаны с дальнейшей детализацией модели и включением в неё сезонных и климатических факторов для повышения точности долгосрочных прогнозов.

Ключевые слова: математическое моделирование, биопродуктивность, Азовское море, сцифоидные медузы, трофические взаимодействия, альтернативные устойчивые состояния, экологический прогноз

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–11–00295–П, <https://rscf.ru/project/22-11-00295/>

Для цитирования. Бондаренко Д.В., Никитина А.В. Математическое моделирование биопродуктивности мелководного водоема при внезапной депрессии сцифоидными медузами. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(4):46–55. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-4-46-55>

Mathematical Modelling of the Bioproductivity of a Shallow Water Body under Sudden Depression Caused by Scyphozoan Jellyfish

Denis V. Bondarenko , Alla V. Nikitina 

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

✉ denis.bondarenko.dev@gmail.com

Abstract

Introduction. The relevance of this study is determined by the need for a quantitative assessment of the negative impact of mass outbreaks of scyphozoan jellyfish (*Aurelia aurita* and *Rhizostomeae*) on the bioresources of the Azov Sea, which is subjected to a complex combination of anthropogenic pressures. The theoretical framework of the research is based on the concept of trophic interactions and biological invasions in marine ecosystems. The aim of this study is to develop a mathematical model of the dynamics of the fish community in the Azov Sea that accounts for both competitive and predatory pressure exerted by jellyfish, in order to identify critical biomass thresholds leading to the depression of commercial fish stocks.

Materials and Methods. To investigate the influence of scyphozoan jellyfish on the bioresources of the Azov Sea, a mathematical model of biological kinetics was employed as the primary research tool. The model describes the dynamics of three key ecosystem components (zooplankton, fish, and jellyfish), incorporating mechanisms of competition and predation. The research material consists of a system of theoretical equations with appropriate interaction parameters and initial and boundary conditions.

Results. Numerical simulations demonstrated that under environmental conditions typical of the summer period in the Azov Sea (elevated water temperature and eutrophication), an increase in scyphozoan jellyfish biomass by more than threefold during July–August leads to an abrupt shift of the ecosystem to an alternative stable state dominated by jellyfish. This transition is driven by the combined effects of intense competition for zooplankton and direct predation by jellyfish on the early life stages of fish, and is accompanied by a critical reduction in food availability, which suppresses the recovery of commercial fish populations.

Discussion. The results confirm the high ecological significance of mass aggregations of scyphozoan jellyfish and provide a quantitative justification for the risk of a regime shift in the Azov Sea ecosystem toward an alternative, less productive state dominated by jellyfish. From a theoretical perspective, the study contributes to the development of trophic interaction models that incorporate multiple impact mechanisms of invasive species.

Conclusion. The practical significance of this work lies in the fact that the proposed model serves as a tool for predictive assessment of bioresource status and for substantiating management decisions aimed at mitigating the consequences of eutrophication and biological invasions. Future research will focus on further refinement of the model, including the incorporation of seasonal and climatic factors to improve the accuracy of long-term forecasts.

Keywords: mathematical modelling, bioproductivity, Azov Sea, scyphozoan jellyfish, trophic interactions, alternative stable states, ecological forecasting

Funding. The study was supported by grant No. 22–11–00295–II from the Russian Science Foundation, <https://rscf.ru/project/22-11-00295/>

For Citation. Bondarenko D.V., Nikitina A.V. Mathematical modelling of the bioproductivity of a shallow water body under sudden depression caused by scyphozoan jellyfish. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(4):46–55. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-4-46-55>

Введение. Азовское море — одно из самых мелководных морей мира, играющее ключевую роль в рыбопромысловой и экологической системе Юга России. В последние десятилетия его экосистема испытывает серьёзные нагрузки: эвтрофикация, изменение речного стока, загрязнение и инвазии чужеродных видов [1]. Одной из характерных тенденций является массовое развитие сцифомедуз, в первую очередь *Aurelia aurita* и *Rhizostomeae*. Обладая высокой репродуктивной способностью и экологической пластичностью, эти медузы формируют обширные скопления в прибрежных водах в весенне-летний период. В отдельные годы их биомасса достигает тысяч тонн, оказывая значительное давление на трофические сети [2]. Поэтому можно говорить о внезапной депрессии водоема сцифоидными медузами и их влиянии на биопродуктивность водной экосистемы. На рис. 1 можем наблюдать скопления сцифоидных медуз в Азовском море.

Сцифомедузы могут быть опасны для человека, так как их прикосновение к коже вызывает ожоги, зуд или раздражение. Сцифоидные медузы (сцифомеду́зы, лат. *Scyphozoa*) — класс морских организмов из типа стрекающих (*Cnidaria* — их характеризует наличие стрекательных клеток, которые они используют для охоты и защиты от хищников). Группа включает сравнительно небольшое количество видов — около 200. Жизненный цикл сцифоидных — метогенез, в котором присутствует бесполовая (полипоидная) и половая (медузоидная) стадии. Медузы некоторых представителей характеризуются крупными размерами и порой образуют очень большие скопления. Полипы сцифоидных (сцифистомы), напротив, обладают очень мелкими размерами — порядка нескольких

миллиметров. Обычные для морей России сцифомедузы — это ушастая медуза (*Aurelia aurita*), львиная грива (*Cyanea capillata*), корнерот (*Rhizostoma pulmo*). Некоторые виды сцифомедуз, например, «морская оса», опасны особенно сильно. Прикосновение к ней вызывает острую боль и жжение, как от удара хлыстом. Болевой шок часто приводит к потере сознания, а затем возникают симптомы интоксикации (сухость во рту, трудности с дыханием). Иногда «укус» морской осы приводит к смерти человека.



Рис. 1. Побережье Ейского лимана с медузами в июле 2025 года

Aurelia aurita и *Rhizostomeae* Азовского моря активно потребляют зоопланктон — копепод, личинок ракообразных и моллюсков, которые являются основным кормом для молоди и планктоноядных рыб, таких как салака, тарань и молодь судака. Это приводит к жёсткой конкуренции за ресурс. Кроме того, медузы проявляют хищничество в отношении икры и личинок рыб, что подтверждается полевыми данными: при высокой численности они могут потреблять до 10–30 % суточного рациона личинок [3]. Несмотря на наличие биологических данных, количественная оценка влияния медуз на рыбные запасы остаётся недостаточной [4–7]. В работе представлена математическая модель, с помощью которой описывается динамика рыбного сообщества с учётом конкуренции и хищничества со стороны медуз. Модель позволяет оценивать критические пороги их биомассы, при которых происходит подавление продуктивности ценных и промысловых рыб Азовского моря [8]. Поэтому имеет смысл говорить о внезапной депрессии состояния основных биоресурсов Азовского моря при появлении такого рода инвазивантов — сцифоидных медуз.

Материалы и методы. Для количественной оценки влияния сцифомедуз *Aurelia aurita* и *Rhizostomeae* на рыбные сообщества Азовского моря разработана динамическая модель, описывающая взаимодействие трёх ключевых компонентов экосистемы: $Z(t)$ — концентрации зоопланктона (ресурс), $F(t)$ — биомассы рыбного сообщества, $J(t)$ — биомассы сцифомедуз. Модель учитывает два основных механизма воздействия медуз на рыб: конкуренция за общий пищевой ресурс — зоопланктон, прямое хищничество медуз на икру и личинки рыб. Структура взаимодействий представлена на рис. 2.

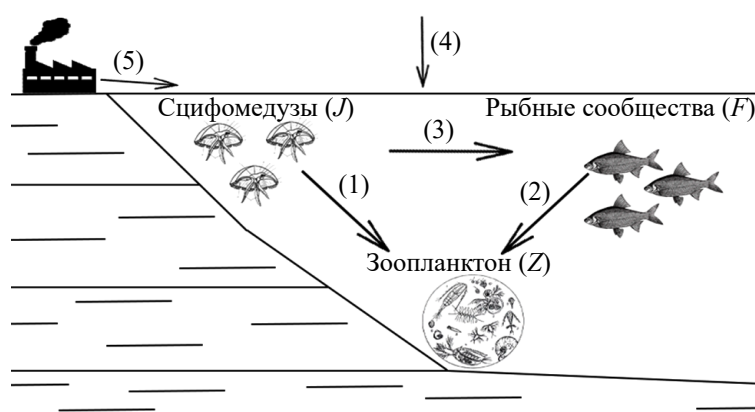


Рис. 2. Структурная схема трофических взаимодействий между медузами, рыбами и зоопланктоном

На рис. 2 введены обозначения: (1) — потребление зоопланктона сцифомедузами, (2) — потребление зоопланктона рыбными сообществами, (3) — потребление икры и личинок рыбы сцифомедузами, (4) — влияние изменения внешних факторов среды (температура, солёность и т. д.), (5) — влияние изменений среды с суши (антропогенная нагрузка, речной сток, эвтрофикация).

Модель биологической кинетики базируется на известных моделях [9, 10] и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial t} + u \frac{\partial Z}{\partial x} + v \frac{\partial Z}{\partial y} + (w + w_{gz}) \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_z \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_z \frac{\partial Z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_z \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + \Psi_Z, \\ \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + (w + w_{gF}) \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_F \frac{\partial F}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_F \frac{\partial F}{\partial y} \right) + \Psi_F, \\ \frac{\partial J}{\partial t} + u \frac{\partial J}{\partial x} + v \frac{\partial J}{\partial y} + (w + w_{gJ}) \frac{\partial J}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_J \frac{\partial J}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_J \frac{\partial J}{\partial y} \right) + \Psi_J, \end{cases} \quad (1)$$

$$\Psi_Z = rZ \left(1 - \frac{Z}{K} \right) - \frac{a_z F Z}{1 + h_a a_z Z} - \frac{b_z J Z}{1 + h_b b_z Z},$$

$$\Psi_F = \alpha \left(\frac{a_z F Z}{1 + h_a a_z Z} \right) - d_F F - \varepsilon J F, \quad \Psi_J = \beta \left(\frac{b_z F Z}{1 + h_b b_z Z} \right) + \delta J F - d_J J.$$

В системе (1) введены следующие обозначения: $\mathbf{u} = (u, v, w)$ — поле скоростей водного потока; $w_{g\phi}$ — скорость осаждения субстанции ϕ , $\phi \in \{Z, F, G\}$; μ_ϕ, ν_ϕ — коэффициенты диффузии субстанции ϕ , $\phi \in \{Z, F, G\}$ в горизонтальном и вертикальном направлениях; r — внутренняя скорость роста зоопланктона; K — ёмкость среды; a_z — коэффициент скорости поедания зоопланктона рыбой; b_z — коэффициент скорости поедания зоопланктона медузами; h_a — время обработки пищи рыбой; h_b — время обработки пищи медузами; α — коэффициент прироста рыб (эффективность преобразования зоопланктона); d_F — коэффициент естественной смертности; ε — коэффициент потери биомассы рыб с учетом хищничества медуз на икру и личинки рыб; β — коэффициент прироста медуз; δ — коэффициент нелинейного хищничества; d_J — коэффициент смертности медуз.

Пусть Γ — граница области G , $\bar{G} = G \cup \Gamma$; σ — боковая граничная поверхность; $\Sigma_{нов}$ — часть свободной поверхности и $\Sigma_{дно}$ — поверхность дна. $\Gamma = \sigma \cup \Sigma_{нов} \cup \Sigma_{дно}$.

Зададим:

– начальные условия при $t = 0$

$$\varphi(x, y, z, 0) \equiv \varphi_0(x, y, z); \quad (2)$$

– граничные условия на боковой поверхности σ в любой момент времени $\sigma \times (0, T]$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = 0, \text{ если } (\mathbf{u}_\Gamma, \mathbf{n}) < 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{u_\Gamma}{\mu_\varphi} \varphi, \text{ если } (\mathbf{u}_\Gamma, \mathbf{n}) \geq 0, \quad (4)$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль к границе области σ ; \mathbf{u}_Γ — вектор скорости движения жидкости на границе σ ; u_Γ — проекция вектора скорости движения среды на направление нормали \mathbf{n} на границе области G ;

– граничные условия на поверхности воды $\Sigma_{нов} \times (0 < t \leq T]$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = 0; \quad (5)$$

– граничные условия на дне $\Sigma_{дно} \times (0 < t \leq T]$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{w_{g\varphi}}{v_i} \varphi, \quad \varphi \in \{Z, F, J\}. \quad (6)$$

Для изучения динамики рассматриваемых гидробионтов экосистемы Азовского моря и выявления ключевых закономерностей взаимодействия сцифомедуз и рыбных сообществ проведём качественный анализ предложенной нелинейной системы с ОДУ. Основное внимание уделено поиску равновесных состояний (точек покоя) и исследованию их устойчивости на основе анализа матрицы Якоби. Такой подход позволяет выявить условия, при которых возможно сосуществование выделенных компонент экосистемы, а также определить пороговые параметры, при превышении которых происходит переход в альтернативное устойчивое состояние — например, доминирование медуз. Рассмотрим систему (1). Равновесные состояния системы определяются из условия обращения всех правых частей в ноль:

$$\frac{dZ}{dt} = 0, \frac{dF}{dt} = 0, \frac{dJ}{dt} = 0.$$

Рассмотрим четыре основных биологически значимых случая.

1. Тривиальное равновесие $E_0 = (K, 0, 0)$.

Это состояние соответствует отсутствию как рыб, так и медуз. Зоопланктон достигает ёмкости среды. Подстановка $F = 0, J = 0$ в систему приводит к:

$$rZ \left(1 - \frac{Z}{K} \right) = 0 \Rightarrow Z = K.$$

Исходя из этого, $E_0 = (K, 0, 0)$ — равновесие. Для анализа устойчивости вычислим коэффициенты матрицы Якоби в окрестности E_0 :

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Z}{\partial Z} & \frac{\partial Z}{\partial F} & \frac{\partial Z}{\partial J} \\ \frac{\partial F}{\partial Z} & \frac{\partial F}{\partial F} & \frac{\partial F}{\partial J} \\ \frac{\partial J}{\partial Z} & \frac{\partial J}{\partial F} & \frac{\partial J}{\partial J} \end{pmatrix}_{(K,0,0)}.$$

После вычисления частных производных и подстановки получаем:

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -r & -\frac{a_z K}{1+h_a a_z K} & -\frac{b_z K}{1+h_b b_z K} \\ 0 & \alpha \frac{a_z K}{1+h_a a_z K} - d_F & 0 \\ 0 & 0 & \beta \frac{b_z K}{1+h_b b_z K} - d_J \end{pmatrix}.$$

Собственными значениями матрицы являются диагональные элементы, так как матрица является верхнетреугольной:

$$\lambda_1 = -r < 0, \lambda_2 = \alpha \frac{a_z K}{1+h_a a_z K} - d_F, \lambda_3 = \beta \frac{b_z K}{1+h_b b_z K} - d_J.$$

Равновесие E_0 устойчиво, если $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_3 < 0$, то есть:

$$\alpha \frac{a_z K}{1+h_a a_z K} < d_F, \beta \frac{b_z K}{1+h_b b_z K} < d_J, \text{ при } \alpha > 0, \beta > 0.$$

Эти условия определяют пороговые значения ёмкости среды K , при которых медузы и рыбы не могут колонизировать экосистему. При превышении этих порогов E_0 становится неустойчивым, и начинается рост одной или обеих популяций.

2. Равновесие с рыбами, без медуз $E_F = (Z_F^*, F^*, 0)$.

Рассмотрим случай, когда $J = 0, F > 0$. Это соответствует состоянию, в котором медузы отсутствуют, а рыбное сообщество стабилизировалось на фоне зоопланктона. Из уравнений получим:

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} = 0 &\Rightarrow rZ \left(1 - \frac{Z}{K}\right) = \frac{a_z F Z}{1+h_a a_z Z}, \\ \frac{dF}{dt} = 0 &\Rightarrow \alpha \frac{a_z F K}{1+h_a a_z K} = d_F F \Rightarrow \alpha \frac{a_z K}{1+h_a a_z K} = d_F \Rightarrow \frac{a_z Z}{1+h_a a_z Z} = \frac{d_F}{\alpha}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$Z_F^* = \frac{d_F}{a_z(\alpha - h_a d_F)} \text{ (при условии } \alpha > h_a d_F \text{)}.$$

Подставляя Z_F^* в первое уравнение, можно найти F^* . Из этого следует, что существует нетривиальное равновесие $E_F = (Z_F^*, F^*, 0)$, при условии, что $d_F < \alpha \frac{a_z}{1+h_a a_z K}$. Устойчивость E_F зависит от влияния медуз, то есть если $\beta \frac{b_z Z_F^*}{1+h_b b_z Z_F^*} > d_J$, то медузы могут инвазировать, из чего следует, что равновесие неустойчиво.

3. Равновесие с медузами, без рыб $E_J = (Z_J^*, 0, J^*)$.

Рассмотрим случай обратный второму, то есть $F = 0, J > 0$. Это состояние, когда происходит доминирование медузных сообществ. После подстановки из уравнений получим:

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} = 0 &\Rightarrow rZ \left(1 - \frac{Z}{K}\right) = \frac{J Z}{1+h_b Z}, \\ \frac{dJ}{dt} = 0 &\Rightarrow \beta \frac{J Z}{1+h_b Z} = d_J J \Rightarrow \beta \frac{Z}{1+h_b Z} = d_J \Rightarrow \frac{Z}{1+h_b Z} = \frac{d_J}{\beta}. \end{aligned}$$

Получим:

$$Z_J^* = \frac{d_J}{(\beta - h_b d_J)} \text{ (при условии } \beta > h_b d_J \text{)}.$$

Подставляя Z_J^* в первое уравнение, находим J^* . Таким образом, существует равновесие $E_J = (Z_F^*, 0, J^*)$, которое соответствует вытеснению рыб медузами. Устойчивость E_J в данном случае зависит от влияния рыб, то есть если $\alpha \frac{a_z Z_J^*}{1 + h_a a_z Z_J^*} > d_F$, то рыбы могут начать вытеснять медуз из чего следует, что равновесие неустойчиво.

4. Условия сосуществования и бифуркации.

Сосуществование рыб и медуз возможно при одновременном выполнении условий:

$$\alpha \frac{a_z Z}{1 + h_a a_z Z} > d_F + \varepsilon J, \beta \frac{b_z Z}{1 + h_b b_z Z} + \delta F > d_J.$$

Однако численный анализ показывает, что область сосуществования узкая. При увеличении J и b_z система теряет устойчивость, и происходит вытеснение, при котором $F \rightarrow 0$. Критический порог массы медуз, при котором это происходит можно оценить из условия:

$$\alpha \frac{a_z Z}{1 + h_a a_z Z} = d_F + \varepsilon J.$$

При $Z \approx Z_J^*$, это уравнение даёт пороговое значение, превышение которого делает невозможным существование рыбного сообщества.

После исследования устойчивости равновесных состояний перейдём к качественному анализу динамики системы, позволяющему визуализировать типичные траектории развития экосистемы и выявить ключевые сценарии её поведения. Для этого построим фазовые портреты в проекции рыбного сообщества F и сцифомедуз J при фиксированном уровне зоопланктона Z , что соответствует квазистационарному приближению (редукции размерности), часто используемому в моделях биологической кинетики [11]. Рассмотрим упрощённую систему, описывающую динамику F и J при постоянной концентрации зоопланктона $Z = Z^*$:

$$\begin{cases} \frac{dF}{dt} = \alpha \left(\frac{a_z F Z^*}{1 + h_a a_z Z^*} \right) - d_F F - \varepsilon J F, \\ \frac{dJ}{dt} = \beta \left(\frac{b_z F Z^*}{1 + h_b b_z Z^*} \right) + \delta J F - d_J J. \end{cases} \quad (7)$$

Это позволяет исключить быструю динамику зоопланктона и сосредоточиться на долгосрочном взаимодействии медуз и рыб при заданной продуктивности экосистемы. На рис. 3 представлен фазовый портрет системы при $Z^* = 1,5$ усл. ед. Анализ фазового портрета показывает наличие двух аттракторов:

1. Устойчивое равновесие с доминированием рыб — наблюдается при низкой начальной численности медуз.
2. Состояние доминирования медуз — достигается при превышении критического порога массы медуз.

Между ними находится граница бассейнов притяжения, определяющая, какой из двух сценариев реализуется в зависимости от начальных условий. Это указывает на альтернативную устойчивость экосистемы: при одних и тех же внешних параметрах возможны два качественно разных состояния.

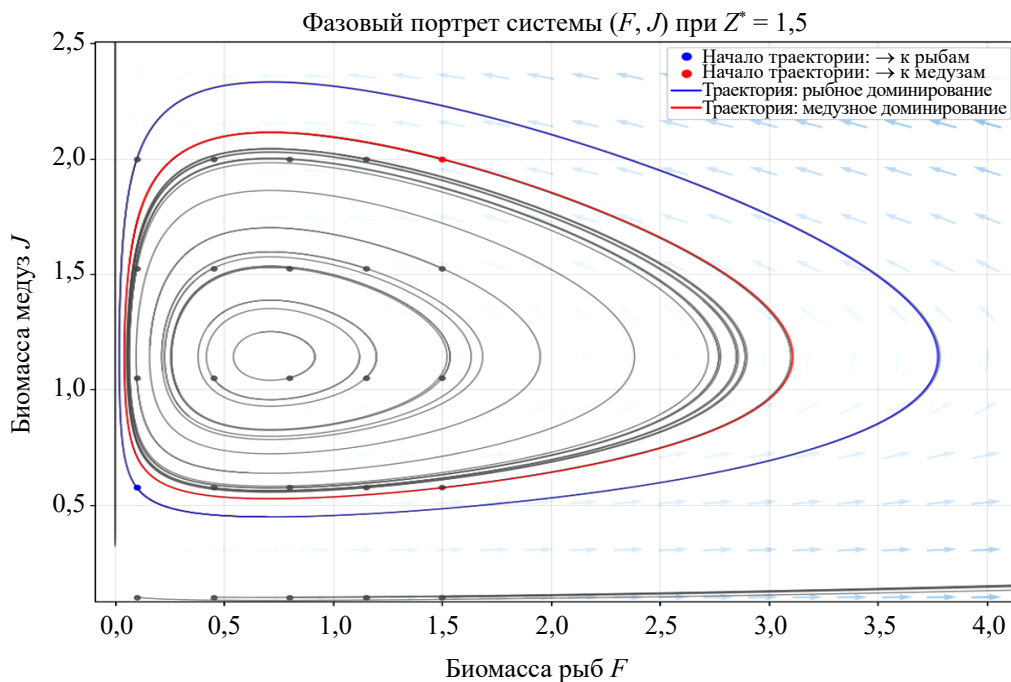


Рис. 3. Фазовый портрет системы в проекции (F, J) при $Z^* = 1,5$ усл. ед.

Для количественной оценки перехода между режимами построена бифуркационная диаграмма — зависимость равновесной биомассы рыб от биомассы медуз (рис. 4). Такой тип поведения характерен для систем с положительной обратной связью: рост численности медуз → падение роста численности зоопланктона и гибель личинок рыб → снижение конкуренции за ресурс → дальнейший рост численности медуз. Это делает переход в новое состояние малообратимым без внешнего вмешательства (например, снижения эвтрофикации водной экосистемы) [12–14].

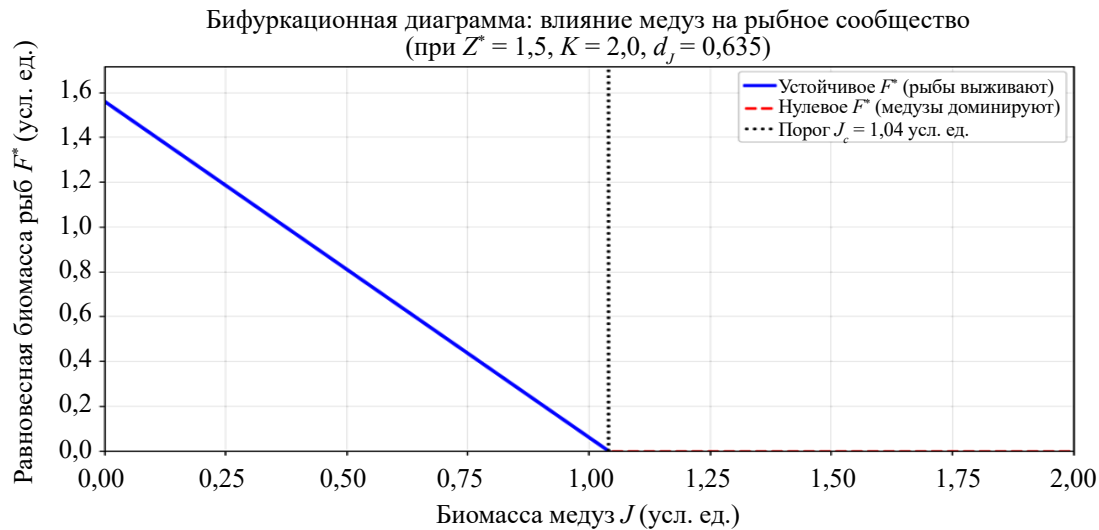


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма: равновесная биомасса рыб в зависимости от биомассы медуз

Полученные результаты подтверждают, что экосистема Азовского моря может находиться в двух альтернативных устойчивых состояниях:

- рыбоцентричное (при умеренной численности медуз);
- медузоцентричное (при превышении численности медуз критического порога).

Таким образом, фазовый анализ наглядно демонстрирует риск экологического коллапса и необходимости экологического мониторинга и управления Азовского моря [9, 10].

Результаты исследования. Численное моделирование динамики экосистемы Азовского моря за период с 1 июля по 31 августа 2025 года выявило существенное влияние сцифомедуз *Rhizostomeae* и *Aurelia aurita* на состояние рыбного сообщества через комбинированное воздействие — конкуренцию за зоопланктон и прямое хищничество на ранних стадиях развития рыб. В качестве начальных условий приняты значения, соответствующие типичному состоянию экосистемы в начале июля, когда медузы только начинают активно размножаться, а рыбные популяции используют высокую продуктивность планктона для роста молоди [15].

Ключевые параметры модели заданы следующим образом:

- $r = 0,8 \text{ день}^{-1}$ — скорость роста зоопланктона, соответствует высокой температуре воды ($22\text{--}26 \text{ }^\circ\text{C}$) и обилию питательных веществ вследствие эвтрофикации;
- $K = 2,0 \text{ усл. ед.}$ — ёмкость среды, отражающая максимальную устойчивую биомассу зоопланктона в прибрежной зоне;
- $a_z = 1,2$; $b_z = 2$ — скорости потребления зоопланктона рыбами и медузами соответственно. Значение учитывает высокую фильтрационную способность *Aurelia aurita*, способной обрабатывать большие объёмы воды;
- $h_a = 0,9$; $h_b = 0,3$ — время обработки пищи (handling time). Более низкое указывает на большую эффективность медуз как фильтраторов по сравнению с рыбами;
- $\alpha = 0,3$; $\beta = 0,4$ — коэффициенты эффективности преобразования пищи в прирост биомассы. У медуз он выше, что связано с низкими энергозатратами на поддержание жизнедеятельности;
- $\delta = 0,03$ — дополнительный прирост медуз за счёт потребления икры и личинок рыб, отражающий их хищническую активность;
- $d_F = 0,05$; $d_j = 0,635$ — естественные уровни смертности. У медуз смертность растёт к концу августа из-за стробилиляции и отмирания;
- $\varepsilon = 0,15$ — коэффициент хищничества медуз на личинок рыб.

Динамика всех трёх компонентов системы (зоопланктона, рыб и медуз) наглядно представлена на рис. 5.

Как показали расчёты, при начальной биомассе медуз на уровне $0,3 \text{ усл. ед.}$ и благоприятных условиях (высокая температура, эвтрофикация) их численность к концу августа увеличивается более чем в 3 раза, что приводит к резкому снижению доступности зоопланктона и подавлению прироста рыбной биомассы. Полученные результаты демонстрируют переход экосистемы в состояние, при котором медузы временно доминируют в трофической структуре, ограничивая восстановление ихтиофауны.

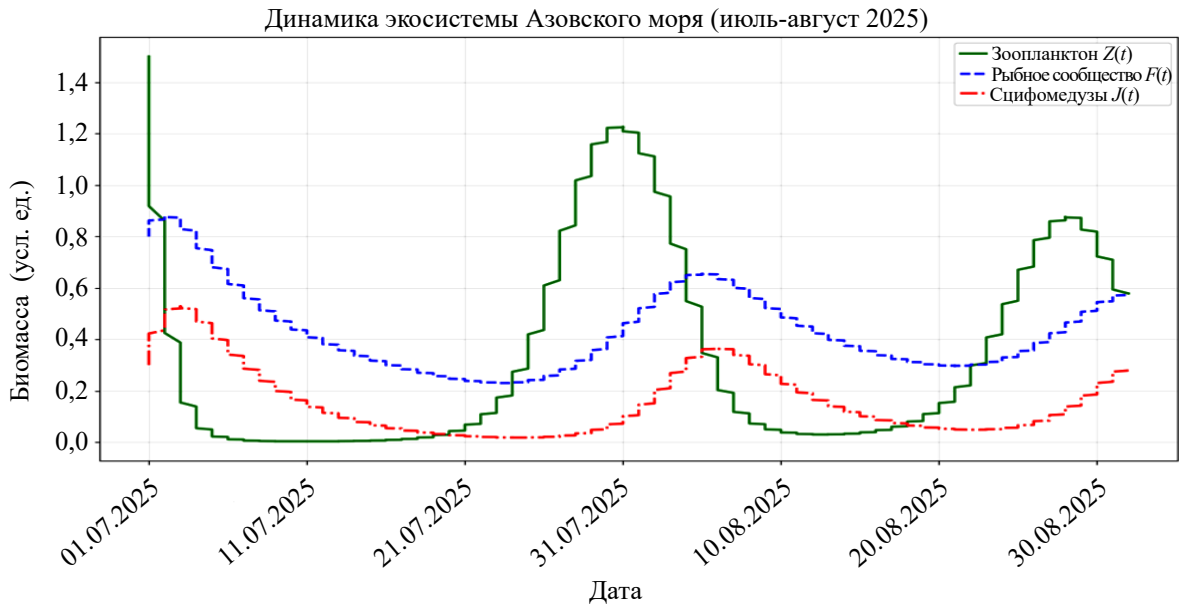


Рис. 5. Результаты численного эксперимента динамики основных гидробионтов и сцифомедуз экосистемы Азовского моря

Обсуждение. В ходе проведённого исследования разработана, исследована и численно реализована математическая модель, отражающая сложные трофические взаимодействия между сцифомедузами и рыбными сообществами в экосистеме Азовского моря. В предложенной математической модели учитывается как конкуренция за общий ресурс — зоопланктон, так и прямое хищничество медуз на ранних стадиях развития рыб, что делает модель более реалистичной по сравнению с классическими системами «ресурс — потребитель». Результаты численного эксперимента за июль-август 2025 года показали, что массовое размножение медуз может привести к существенному подавлению продуктивности ценных и промысловых рыб, особенно в условиях продолжающейся эвтрофикации и повышения температуры воды. Это указывает на риск устойчивого смещения экосистемы в режим, доминируемый гельминтофагами, что снижает её устойчивость и рыбопромысловую ценность.

Заключение. Математическое моделирование подтверждает необходимость комплексного мониторинга скоплений желетелых инвазиантов и их интеграции в системы экологического управления морскими ресурсами Юга России. Предложенная модель может быть использована в качестве инструментария для прогнозирования экологических состояний, оценки эффективности природоохранных мер и обоснования управления рыбопромысловыми нагрузками в регионе. В перспективе модель может быть расширена за счёт учёта сезонной динамики внешних факторов и влияния климатических изменений [16].

Список литературы / References

1. Матишов Г.Г., Степаньян О.В. НИС «Денеб»: 10 лет морских научных исследований. *Морской гидрофизический журнал*. 2018;34(6):548–555.
Matishov G.G., Stepanyan O.V. R/V “Deneb”: 10 years of marine scientific research. *Physical Oceanography*. 2018;34(6):548–555. (In Russ.)
2. Смирнова Е.А., Матишов Г.Г., Глухов В.В. Исследование выбросов сцифоидных медуз *Rhizostoma pulmo* (Macri, 1778) на Ясенской косе Азовского моря в сентябре 2024 г. *Наука Юга России*. 2025;21(1):58–62. <https://doi.org/10.7868/S25000640250108>
Smirnova E.A., Matishov G.G., Glukhov V.V. Study of the strandings of scyphozoan jellyfish *Rhizostoma pulmo* (Macri, 1778) on the Yasenskaya Spit of the Azov Sea in September 2024. *Science of the South of Russia*. 2025;21(1):58–62. (In Russ.) <https://doi.org/10.7868/S25000640250108>
3. Мирзоян З.А., Мартынюк М.Л., Хренкин Д.В., Афанасьев Д.Ф. Развитие популяций сцифоидных медуз *Rhizostoma pulmo* и *Aurelia aurita* в Азовском море. *Водные биоресурсы и среда обитания*. 2019;2(2):27–35. https://doi.org/10.47921/2619-1024_2019_2_2_27
Mirzoyan Z.A., Martynyuk M.L., Khrenkin D.V., Afanasiev D.F. Development of scyphozoan jellyfish *Rhizostoma pulmo* and *Aurelia aurita* populations in the Sea of Azov. *Aquatic Bioresources and Environment*. 2019;2(2):27–35. (In Russ.) https://doi.org/10.47921/2619-1024_2019_2_2_27
4. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Белова Ю.В., Кузнецова И.Ю. Аналитическое и численное исследование задачи динамики планктонных популяций при наличии микропластика. *Математическое моделирование*. 2024;36(3):95–114. <https://doi.org/10.20948/mm-2024-03-07>

Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Belova Yu.V., Kuznetsova I.Yu. Analytical and numerical study of the plankton population dynamics problem in the presence of microplastic. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2024;36(3):95–114. (In Russ.) <https://doi.org/10.20948/mmm-2024-03-07>

5. Рябенкий В.С. Теория управления решениями линейных разностных схем в составных областях. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2012;(011):1–32.

Ryabenkii V.S. Theory of control of solutions of linear difference schemes in composite domains. *Keldysh Institute Preprints*. 2012;(011):1–32. (In Russ.)

6. Lovisari M., Kelly O.R., McDonald A.R. Hydrocarbon Oxidation by a Porphyrin- π -Cation Radical Complex. *Angewandte Chemie International Edition*. 2023;62(20):202303083. <https://doi.org/10.1002/anie.202303083>

7. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Якобовский М.В. Точность численного решения уравнения диффузии-конвекции на основе разностных схем второго и четвертого порядков погрешности аппроксимации. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика*. 2016;5(1):47–62.

Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Yakobovskiy M.V. Accuracy of the numerical solution of the convection-diffusion equation using finite difference schemes with the second and fourth order of approximation error. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Computer Science*. 2016;5(1):47–62. (In Russ.)

8. Сухинов А.И., Атаян А.М., Белова Ю.В., Литвинов В.Н., Никитина А.В., Чистяков А.Е. Обработка данных натурных измерений экспедиционных исследований для математического моделирования гидродинамических процессов Азовского моря. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2020;13(2):161–174.

Sukhinov A.I., Atayan A.M., Belova Yu.V., Litvinov V.N., Nikitina A.V., Chistyakov A.E. Processing of field measurement data from expeditionary studies for mathematical modeling of hydrodynamic processes of the Azov Sea. *Computational Continuum Mechanics*. 2020;13(2):161–174. (In Russ.)

9. Самарский А.А., Николаев Е.С. *Методы решения сеточных уравнений*. Москва: Наука; 1978. 591 с.

Samarskiy A.A., Nikolaev E.S. *Methods for solving grid equations*. Moscow: Nauka; 1978. 591 p. (In Russ.)

10. Кудинов Н.В., Филина А.А., Никитина А.В. Моделирование вертикальных движений морской воды в стратифицированных водоемах. *Advanced Engineering Research*. 2023;23(2):212–224. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-2-212-224>

Kudinov N.V., Filina A.A., Nikitina A.V. Modeling of vertical movements of seawater in stratified reservoirs. *Advanced Engineering Research*. 2023;23(2):212–224. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-2-212-224>

11. Литвинов В.Н., Руденко Н.Б., Грачева Н.Н. Разработка модели параллельно-конвейерного вычислительного процесса для решения системы сеточных уравнений. *Advanced Engineering Research*. 2023;23(3):329–339. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-3-329-339>

Litvinov V.N., Rudenko N.B., Gracheva N.N. Development of a model of a parallel-pipeline computing process for solving a system of grid equations. *Advanced Engineering Research*. 2023;23(3):329–339. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-3-329-339>

12. Белова Ю.В., Никитина А.В. Применение методов усвоения данных наблюдений для моделирования распространения загрязняющих веществ в водоеме и управления устойчивым развитием. *Безопасность техногенных и природных систем*. 2024;8(3):39–48. <https://doi.org/10.23947/2541-9129-2024-8-3-39-48>

Belova Yu.V., Nikitina A.V. Application of observational data assimilation methods for modeling the spread of pollutants in a reservoir and managing sustainable development. *Safety of technogenic and natural systems*. 2024;8(3):39–48. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2541-9129-2024-8-3-39-48>

13. Белова Ю.В., Филина А.А., Чистяков А.Е. Прогнозирование динамики летних видов фитопланктона на основе методов усвоения спутниковых данных. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):27–34. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-27-34>

Belova Yu.V., Filina A.A., Chistyakov A.E. Forecasting the dynamics of summer phytoplankton species based on satellite data assimilation methods. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):27–34. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-27-34>

14. Babar Z.B., Rizwan K., Munir S. Multifunctional Smart Nano-membranes for the Removal of Oil-Based Pollutants from Marine Sources: A Tool for Sustainable Environment. *Water, Air, & Soil Pollution*. 2024;235(2):80. <https://doi.org/10.1007/s11270-023-06864-x>

15. Сухинов А.И., Сидорякина В.В. Аппроксимация граничных условий второго и третьего рода в краевых задачах для уравнений конвекции-диффузии с приложением к экологической гидродинамике. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(3):16–29. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-16-29>

Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V. Approximation of boundary conditions of the second and third kind in boundary value problems for convection-diffusion equations with application to environmental hydrophysics. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(3):16–29. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-16-29>

16. Состояние запасов медуз в Черном и Азовском морях (по периодам до 2000 года) в условиях хозяйственной деятельности на акватории региона и прилегающих территориях. Оценка запасов медузы, карта распределения и прогноз вылова: отчет о НИР. Ростов-на-Дону: Изд-во АЗНИИРХ; 1981. 18 с.

The state of jellyfish stocks in the Black and Azov Seas (according to periods until 2000) under the conditions of economic activity in the water area of the region and adjacent territories. Assessment of jellyfish stocks, distribution map and catch forecast: research report. Rostov-on-Don: AzNIIRKH Publishing House; 1981. 18 p. (In Russ.)

Об авторах:

Денис Вадимович Бондаренко, ассистент кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID](#), [SPIN-код](#), [ScopusID](#), denis.bondarenko.dev@gmail.com

Алла Валерьевна Никитина, доктор технических наук, профессор кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID](#), [SPIN-код](#), [ScopusID](#), nikitina.vm@gmail.com

Заявленный вклад авторов:

Д.В. Бондаренко: проведение расчетов; подготовка текста; оформление графических материалов; работа с источниками.

А.В. Никитина: формирование основной концепции; цели и задачи исследования; анализ результатов исследований; формулирование выводов; корректировка текста.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Denis V. Bondarenko, assistant department of software for computing equipment and automated systems Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), [ScopusID](#), denis.bondarenko.dev@gmail.com

Alla V. Nikitina, doctor of engineering science, Professor department of software for computing equipment and automated systems Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), [ScopusID](#), nikitina.vm@gmail.com

Contributions of the authors:

D.V. Bondarenko: calculations; text preparation; graphic design; source analysis.

A.V. Nikitina: development of the main concept; research goals and objectives; analysis of research results; formulation of conclusions; proofreading.

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 27.10.2025

Поступила после рецензирования / Reviewed 12.11.2025

Принята к публикации / Accepted 10.12.2025