

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

## COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 004.93

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-1-7-20>


### Семантическая сегментация с оценкой неопределённости на основе модели Дирихле и анизотропной регуляризации

Е.Ю. Щетинин , А.А. Шевчук 

Севастопольский государственный университет, г. Севастополь, Российская Федерация

✉ [riviera-molto@mail.ru](mailto:riviera-molto@mail.ru)

#### Аннотация

**Введение.** В задачах вычислительной математики вариационные методы минимизации дискретных энергий широко применяются для регуляризации некорректных задач. Однако стандартные дискретные схемы зачастую обладают масштабной несогласованностью: при измельчении сетки ( $h \rightarrow 0$ ) веса, зависящие от ненормированных скачков функции, вырождаются, что приводит к тривиализации анизотропных свойств предельного оператора. В данной работе предложен вычислительный метод, решающий эту проблему за счет параметризации распределения Дирихле и строго обоснованной анизотропной пространственной регуляризации.

**Материалы и методы.** Математическая модель формулируется как задача оптимизации составного функционала в пространстве сеточных функций. Функционал включает ожидаемую логарифмическую функцию потерь, регуляризацию Кульбака-Лейблера и пространственные регуляризаторы типа взвешенной энергии Дирихле. Для обеспечения структурной состоятельности дискретного оператора *edge-aware* весовые функции конструируются строго через нормированные конечные разности. Асимптотическое поведение дискретных энергий исследуется с помощью аппарата сходимости.

**Результаты исследования.** Главным теоретическим результатом работы является математическое доказательство  $\Gamma$ -сходимости семейства дискретных анизотропных функционалов к нетривиальному непрерывному пределу в топологии  $L^2(\Omega)$ . Доказана равнокоэрцитивность дискретных энергий, гарантирующая сходимость последовательности почти минимизаторов к решению непрерывной задачи.

**Обсуждение.** Использование нормированных конечных разностей при построении весов восстанавливает размерную однородность и обеспечивает строгую масштабную инвариантность дискретизации нелокальных операторов.

**Заключение.** Предложенный метод успешно связывает непрерывные вариационные постановки с дискретными предиктивными моделями, предоставляя теоретически обоснованный и вычислительно эффективный (дополнительные расходы инференса составляют 17–18 %) инструмент с контролируемой погрешностью.

**Ключевые слова:** семантическая сегментация, распределение Дирихле, оценка неопределённости, калибровка вероятностей, анизотропная регуляризация, энергия Дирихле,  $\Gamma$ -сходимость, равнокоэрцитивность, медицинские изображения

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Севастопольского государственного университета (проект № 42–01–09/319/2025–1).

**Для цитирования.** Щетинин Е.Ю., Шевчук А.А. Семантическая сегментация с оценкой неопределённости на основе модели Дирихле и анизотропной регуляризации. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2026;10(1):7–20. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-1-7-20>

## Semantic Segmentation with Uncertainty Estimation Based on the Dirichlet Model and Anisotropic Regularization

Evgeny Yu. Shchetinin  , Andrey A. Shevchuk 

Sevastopol State University, Sevastopol, Russia

 [riviera-molto@mail.ru](mailto:riviera-molto@mail.ru)

### Abstract

**Introduction.** In computational mathematics, variational methods for minimizing discrete energies are widely used for the regularization of ill-posed problems. However, standard discrete schemes often suffer from scale inconsistency: upon mesh refinement ( $h \rightarrow 0$ ), weights depending on unnormalized jumps of the function degenerate, leading to trivialization of the anisotropic properties of the limiting operator. In this paper, a computational method is proposed that solves this problem by parameterizing the Dirichlet distribution and employing rigorously justified anisotropic spatial regularization.

**Materials and Methods.** The mathematical model is formulated as an optimization problem for a composite functional in the space of grid functions. The functional includes an expected logarithmic loss function, Kullback-Leibler regularization, and spatial regularizers of the weighted Dirichlet energy type. To ensure the structural consistency of the discrete operator, *edge-aware* weight functions are constructed strictly through normalized finite differences. The asymptotic behavior of the discrete energies is investigated using the apparatus of  $\Gamma$ -convergence.

**Results.** The main theoretical result of the work is a mathematical proof of the  $\Gamma$ -convergence of a family of discrete anisotropic functionals to a non-trivial continuous limit in the  $L^2(\Omega)$  topology. The equicoercivity of the discrete energies is proven, guaranteeing the convergence of a sequence of almost minimizers to the solution of the continuous problem.

**Discussion.** The use of normalized finite differences in constructing the weights restores dimensional homogeneity and ensures strict scale invariance of the discretization of non-local operators.

**Conclusion.** The proposed method successfully links continuous variational formulations with discrete predictive models, providing a theoretically justified and computationally efficient tool (additional inference costs amount to 17–18%) with controlled error.

**Keywords:** semantic segmentation, Dirichlet distribution, uncertainty estimation, probability calibration, anisotropic regularization, Dirichlet energy,  $\Gamma$ -convergence, equicoercivity, medical images

**Funding.** The work was supported by Sevastopol State University (Project No. 42–01–09/319/2025–1).

**For Citation.** Shchetinin E. Yu., Shevchuk A. A. Semantic Segmentation with Uncertainty Estimation Based on the Dirichlet Model and Anisotropic Regularization. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2026;10(1):7–20. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-1-7-20>

**Введение.** Семантическая сегментация медицинских изображений является ключевой задачей компьютерного зрения в диагностике. Однако современные глубокие нейронные сети часто не предоставляют надёжных оценок уверенности в своих предсказаниях [1, 2]. В клинической практике это ограничивает их применение, поскольку врач должен иметь возможность идентифицировать области, где модель неточна, для дополнительной проверки.

Существующие методы оценки неопределённости разделяются на две основные категории:

1. Стохастические методы (*MC-dropout* [3], глубокие ансамбли [4]), требующие многократных прогонов на этапе инференса, что делает их непригодными для приложений реального времени.

2. Детерминированные методы прямого предсказания параметров распределения (*Evidential Deep Learning* [5], *Prior Networks* [6]), которые работают за один проход, но часто страдают от пространственной несогласованности карт неопределённости.

Ряд работ исследует надёжность оценок неопределённости в медицинской сегментации [7] и применение байесовских методов для детекции поражений [8]. Вопросы калибровки предиктивных распределений рассматриваются в [9]. В последнее время появились методы, использующие распределение Дирихле для оценки неопределённости в медицинской сегментации, включая подходы на основе *evidence theory* [10] и адаптивные методы [11]. Развиваются также структурные подходы к неопределённости [12] и методы, устойчивые к зашумлённой разметке [13].

Основными целями настоящей работы являются:

1. Формулировка задачи как минимизации составного функционала с распределением Дирихле и анизотропной пространственной регуляризацией.

2. Определение *edge-aware* весов через нормированные конечные разности, обеспечивающее нетривиальный непрерывный предел.

3. Доказательство  $\Gamma$ -сходимости дискретных анизотропных энергий к непрерывному пределу; ключевые технические шаги (нижняя полунепрерывность взвешенных интегралов и равнокоэрцитивность/компактность).

4. Всесторонняя экспериментальная валидация с расширенным статистическим протоколом, включающим корректные меры размера эффекта для парных данных. Вопросы устойчивости к данным вне распределения (*OOD*) требуют отдельного исследования и выходят за рамки данной работы.

Напомним, что распределение Дирихле — вероятностное распределение на симплексе; энергия Дирихле — функционал вида  $\int_{\Omega} \|\nabla u(\xi)\|^2 d\xi$ ; равнокоэрцитивность — равномерная по параметру дискретизации коэрцитивность семейства функционалов.

**Материалы и методы.** Постановка задачи и математическая модель.

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  — ограниченная область с липшицевой границей,  $d \in \{2,3\}$ .

**Определение 1** (Функциональные пространства). Пусть  $L^p(\Omega; \mathbb{R}^r)$  — пространство Лебега измеримых функций  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^r$  с нормой

$$\|u\|_{L^p} = \left( \int_{\Omega} \|u(\xi)\|_{\mathbb{R}^r}^p d\xi \right)^{1/p}, \quad (1)$$

где  $\|u(\xi)\|_{\mathbb{R}^r} = \left( \sum_{j=1}^r |u_j(\xi)|^2 \right)^{1/2}$  — евклидова норма в  $\mathbb{R}^r$ ;  $W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^r)$  — пространство Соболева функций с квадратично интегрируемыми слабыми производными первого порядка;  $\Delta^{K-1} = \left\{ p \in \mathbb{R}_+^K : \sum_{k=1}^K p_k = 1 \right\}$  — стандартный  $(K-1)$ -мерный симплекс.

**Соглашение о нормах.** Для матрицы  $A \in \mathbb{R}^{r \times d}$  (в частности, для матрицы Якоби  $\nabla_u$ ) используется норма Фробениуса:

$$\|A\|_F^2 = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^d |A_{jk}|^2. \quad (2)$$

Для вектора  $v \in \mathbb{R}^r$  используется евклидова норма  $\|v\|_{\mathbb{R}^r} = \sum_{j=1}^r |v_j|^2$ . Когда тип нормы ясен из контекста, индексы опускаются.

**Дискретизация области**

**Определение 2** (Равномерная сетка). Пусть  $\Omega = (0,1)^d$ ,  $d \in \{2,3\}$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \Omega$ . Для целого  $N \geq 2$  положим  $h := \frac{1}{N}$ . Определим равномерную декартову сетку шага  $h$  как множество узлов

$$\Omega_h := \Omega \cap h\mathbb{Z}^d = \{x = (i_1 h, \dots, i_d h) \in \Omega : i_k \in \mathbb{Z}\}. \quad (3)$$

Соответствующее разбиение  $\mathcal{T}_h$  состоит из равных гиперпрямоугольных ячеек  $K_i := \prod_{k=1}^d [i_k h, (i_k + 1)h]$ ,  $i = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{Z}^d$ , так что  $\bar{\Omega} = \bigcup_i K_i$  и внутренние ячейки имеют одинаковый размер  $h \times \dots \times h$ . При необходимости можно различать внутренние  $\Omega_h^\circ := \{\xi_i \in \Omega : 1 \leq i_k \leq N-1\}$  и граничные  $\partial\Omega_h := \Omega_h \setminus \Omega_h^\circ$  узлы.

**Предположение (G)** (Регулярность сетки). Семейство разбиений  $\{\mathcal{T}_h\}_{h \downarrow 0}$  называется квазиравномерным (*shape-regular*), если существует константа  $C_G > 0$  не зависящая от  $h$ , такая что для любой ячейки  $K \in \mathcal{T}_h$  выполнено  $\frac{h_K}{\rho_K} \leq C_G$ ,  $h_K := \text{diam}(K)$ ,  $\rho_K := \sup\{r > 0 : \exists B_r(y) \subset K\}$ , где  $\rho_K$  — радиус вписанного шара ячейки  $K$ .

**Замечание** для равномерной сетки (3).

Для  $K_i = [i_1 h, (i_1 + 1)h] \times \dots \times [i_d h, (i_d + 1)h]$  имеем  $h_K = \sqrt{d} h$ ,  $\rho_K = \frac{h}{2}$ , поэтому  $\frac{h_K}{\rho_K} = 2\sqrt{d}$ , и предположение (G) выполняется с  $C_G = 2\sqrt{d}$  (в частности,  $C_G = 2\sqrt{d}$  при  $d = 2$  и  $C_G = 2\sqrt{3}$  при  $d = 3$ ).

**Определение 3** (Множества узлов). Полный набор внутренних узлов:  $\Omega_h^\circ = \{x \in \Omega_h : \text{dist}(x, \partial\Omega) > h\sqrt{d}\}$ . Внутренние узлы относительно направления  $k \in \{1, \dots, d\}$ :

$$\Omega_h^{(k)} = \{x \in \Omega_h : x + h e_k \in \Omega_h\}, \quad (4)$$

где  $e_k$  —  $k$ -й канонический базисный вектор в  $\mathbb{R}^d$ .

**Определение 4** (Пространства сеточных функций). Скалярные функции:  $V_h = \{v_h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}\}$ . Векторные функции:  $V_h^r = \{u_h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}^r\}$ .

Пространство  $V_h$  наделяется дискретной  $L^2$  нормой:

$$\|v_h\|_h^2 = h^d \sum_{x \in \Omega_h} |v_h(x)|^2. \quad (5)$$

Аналогично для  $V_h^r$ :

$$\|u_h\|_h^2 = h^d \sum_{x \in \Omega_h} \|u_h(x)\|_{\mathbb{R}^r}^2. \quad (6)$$

**Операторы дискретизации и интерполяции.**

**Определение 5** (Оператор ограничения). Для  $u \in C^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^r)$  определим оператор ограничения как

$$\Pi_h : C^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^r) \rightarrow V_h^r : (\Pi_h u)(x) = u(x), \quad x \in \Omega_h. \quad (7)$$

**Определение 6** (Нормированная конечная разность). Для  $v_h \in V_h$  и  $k \in \{1, \dots, d\}$ :

$$D_k^+ v_h(x) = \frac{v_h(x + h e_k) - v_h(x)}{h}, \quad x \in \Omega_h^{(k)}. \quad (8)$$

Для  $u_h \in V_h^r$  определение применяется покомпонентно:

$$(D_k^+ u_h)_j(x) = D_k^+(u_h)_j(x), \quad j = 1, \dots, r. \quad (9)$$

*Определение 7* (Мультилинейная интерполяция). Оператор  $\mathcal{T}_h : V_h^r \rightarrow W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^r)$  — стандартная  $Q_1$ -интерполяция (билинейная при  $d = 2$  трилинейная при  $d = 3$ ), определяемая условиями:

1.  $(\mathcal{T}_h u_h)(x) = u_h(x)$  для всех  $x \in \Omega_h$ .
2. На каждой ячейке  $C_x$  функция  $\mathcal{T}_h u_h$  является полиномом не выше первой степени по каждой переменной.

*Определение 8* (Кусочно-постоянное продолжение). Для  $v_h \in V_h$  определим  $v_h \in L^\infty(\Omega)$ :

$$v_h(\xi) = v_h(x), \quad \xi \in C_x = [x_1, x_1 + h) \times \dots \times [x_d, x_d + h), \quad (10)$$

где  $x \in \Omega_h$  левый нижний угол ячейки, содержащей  $\xi$ . Аналогично определяется  $u_h$  для  $u_h \in V_h^r$ .

*Вероятностная модель на основе распределения Дирихле.*

Пусть  $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^C$  — входное изображение (непрерывная функция или её дискретизация  $I_h = \Pi_h I$ ),  $y : \Omega_L \rightarrow \{1, \dots, K\}$  — разметка на подмножестве  $\Omega_L \subseteq \Omega_h$ . В каждом узле  $x \in \Omega_h$  моделируем вектор вероятностей классов  $p(x) \in \Delta^{K-1}$ :

$$p(\mathbf{p}(x) | \mathbf{a}(x)) = \text{Dir}(\mathbf{p}(x) | \mathbf{a}(x)) = \frac{1}{B(\mathbf{a}(x))} \prod_{k=1}^K p_k(x)^{\alpha_k(x)-1}, \quad (11)$$

где  $\mathbf{a}(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_K(x)) \in \mathbb{R}_{>0}^K$  — параметры концентрации,  $B(\mathbf{a}) = \prod_k \Gamma(\alpha_k) / \Gamma(\sum_k \alpha_k)$  — бета-функция.

Предиктивное среднее:

$$\mathbf{m}(x) = \mathbb{E}[\mathbf{p}(x) | \mathbf{a}(x)] = \frac{\mathbf{a}(x)}{S(x)}, \quad S(x) = \sum_{k=1}^K \alpha_k(x). \quad (12)$$

*Карта неопределённости.*

*Лемма 1* (Взаимная информация как мера неопределённости). Для иерархической модели  $Y | \mathbf{p} \sim \text{Cat}(\mathbf{p})$ ,  $\mathbf{p} | \mathbf{a} \sim \text{Dir}(\mathbf{a})$  взаимная информация  $U(x) = I(Y; \mathbf{p} | \mathbf{a})$  имеет вид:

$$U(x) = H[\mathbf{m}(x)] - \left( \psi(S(x) + 1) - \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k(x)}{S(x)} \psi(\alpha_k(x) + 1) \right), \quad (13)$$

где  $H[\mathbf{m}] = -\sum_k m_k \log m_k$  — энтропия Шеннона,  $\psi$  — дигамма-функция.

В частности, дискретный регуляризатор  $\Gamma$  сходится к непрерывному:

$$\mathcal{J}^{\text{reg}} = \beta_{\text{KL}} R_{\text{KL}} + \lambda_m R_m + \lambda_s R_s. \quad (14)$$

*Доказательство.* Следует из разложения  $I(Y; \mathbf{p}) = H(Y) - \mathbb{E}_{\mathbf{p}}[H(Y | \mathbf{p})]$  и свойств распределения Дирихле [5, Приложение А].

*Определение 9* (Edge-aware веса). Для изображения  $I \in C^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^C)$  и параметров  $\eta > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  определим дискретные веса:

$$w_h^k(x) = \exp(-\eta \|D_k^+(\Pi_h I)(x)\|_{\mathbb{R}^C}^2) + \varepsilon, \quad x \in \Omega_h^{(k)}. \quad (15)$$

*Замечание 1.* Использование нормированной разности  $D_k^+$  (деление на  $h$ ) критично: это обеспечивает сходимость к нетривиальной предельной функции

$$w^k(\xi) = \exp(-\eta \|\partial_k I(\xi)\|_{\mathbb{R}^C}^2) + \varepsilon \quad (16)$$

при  $h \rightarrow 0$  тогда как ненормированные разности давали бы  $w_h^k \rightarrow 1 + \varepsilon \equiv \text{const}$ .

*Определение 10* (Составной функционал). Полный функционал для оптимизации:

$$\mathcal{J}_h[\mathbf{a}_h] = \mathcal{L}_{\text{data}}[\mathbf{a}_h] + \beta_{\text{KL}} \mathcal{R}_{\text{KL}}[\mathbf{a}_h] + \lambda_m \mathcal{R}_m[\mathbf{m}_h] + \lambda_s \mathcal{R}_s[S_h], \quad (17)$$

где  $\mathbf{a}_h \in V_h^K$ ,  $\mathbf{m}_h = \mathbf{a}_h / S_h \in V_h^K$ ,  $S_h = \sum_{k=1}^K (\mathbf{a}_h)_k \in V_h$ .

Согласование с данными (ожидаемая log-потеря):

$$\mathcal{L}_{\text{data}}[\mathbf{a}_h] = h^d \sum_{x \in \Omega_L} (\psi(S_h(x)) - \psi((\mathbf{a}_h)_{y(x)}(x))). \quad (18)$$

KL-регуляризация к равномерному априорному:

$$\mathcal{R}_{\text{KL}}[\mathbf{a}_h] = h^d \sum_{x \in \Omega_h} \text{KL}(\text{Dir}(\mathbf{a}_h(x)) \| \text{Dir}(\mathbf{1})). \quad (19)$$

Анизотропные пространственные регуляризаторы:

$$\mathcal{R}_m[\mathbf{m}_h] = h^d \sum_{k=1}^d \sum_{x \in \Omega_h^{(k)}} w_h^k(x) \|D_k^+ \mathbf{m}_h(x)\|_{\mathbb{R}^K}^2, \quad (20)$$

$$\mathcal{R}_s[S_h] = h^d \sum_{k=1}^d \sum_{x \in \Omega_h^{(k)}} w_h^k(x) |D_k^+ \log S_h(x)|^2. \quad (21)$$

*Теоретическое обоснование.* В этом разделе фиксируем корректную (масштабно-согласованную) дискретизацию анизотропной энергии Дирихле и формулируем  $\Gamma$ -сходимость соответствующих дискретных функционалов. Подробные доказательства стандартны и опираются на классические результаты  $\Gamma$ -сходимости [14–16].

Непрерывная и дискретная энергии. Пусть  $W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^r)$  и  $w^k \in L^\infty(\Omega)$ ,  $k = 1, \dots, d$ .

Непрерывная энергия:  $E[u] = \sum_{k=1}^d \int_{\Omega} w^k(\xi) \|\partial_k u(\xi)\|_{\mathbb{R}^r}^2 d\xi$ .

Дискретная энергия для  $u_h \in V_h^r$  определяется через нормированные конечные разности  $D_k^+ u_h(x) = (u_h(x + h e_k) - u_h(x)) / h$ :

$$E_h[u_h] = h^d \sum_{k=1}^d \sum_{x \in \Omega_h^{(k)}} w_h^k(x) \|D_k^+ u_h(x)\|_{\mathbb{R}^r}^2. \quad (22)$$

Условия на веса:

(W1)  $\varepsilon \leq w_h^k(x) \leq \bar{w}$ ; (W2) кусочно-постоянное продолжение  $w_h^k \rightarrow w^k$  в  $L^1(\Omega)$ .

**Теорема 1** (Г-сходимость энергий). Пусть веса удовлетворяют условиям (W1)–(W2). Тогда дискретные энергии  $E_h$  Г-сходятся к непрерывной энергии  $E$  в топологии  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$ , а семейство  $\{E_h\}$  равнокоэрцитивно на подпространстве функций с фиксированным средним значением (или при периодических граничных условиях). Следовательно, любая последовательность почти минимизаторов имеет (возможно, после выделения подпоследовательности) предел  $u$  — минимизатор  $E$ .

*Доказательство.*

1) Равнокоэрцитивность. Пусть  $\{u_h\} \in V_h^r$  и  $\sup_h E_h[u_h] < \infty$ . Из нижней оценки (W1) получаем контроль дискретных градиентов:

$$\sum_{k=1}^d \|D_k^+ u_h\|_{0,h}^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} E_h[u_h]. \quad (23)$$

При выбранной калибровке (фиксированное среднее или периодические/фиксирующие граничные условия) дискретное неравенство Пуанкаре даёт контроль нормы  $L^2$  и последовательность  $\{u_h\}$  становится компактной в  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$  после интерполяции.

Переходя к мультилинейной интерполяции  $I_h u_h$ , используем стандартную оценку устойчивости интерполяции:

$$\|\nabla(I_h u_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u_h\|_{0,h}. \quad (24)$$

Следовательно,  $\{I_h u_h\}$  ограничена в  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^r)$ . По теореме Реллиха-Кондрашова существует такая подпоследовательность, что  $I_h u_h \rightarrow u$  в  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^r)$  и  $I_h u_h \rightarrow u$  в  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$ . Это и даёт равнокоэрцитивность в топологии  $L^2$ .

2) *Liminf*-неравенство. Пусть  $u_h \rightarrow u$  в  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$  и  $\sup_h E_h[u_h] < \infty$ . Тогда, как и выше, можно считать, что  $I_h u_h \rightarrow u$  в  $H^1$  и  $D_k^+ u_h \rightarrow \partial_k u$  в  $L^2$  (после продолжения на  $\Omega$ ). По (W2) имеем  $w_h^k \rightarrow w^k$  в  $L^\infty$ . Для каждого направления  $k$  используем слабую полунепрерывность снизу квадратичной формы; получаем

$$\int_{\Omega} w^k |\partial_k u|^2 \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} w_h^k |D_k^+ u_h|^2. \quad (25)$$

Замена  $w_h^k$  на  $w^k$  контролируется оценкой

$$\left| \int_{\Omega} (w_h^k - w^k) |D_k^+ u_h|^2 \right| \leq \|w_h^k - w^k\|_{L^\infty(\Omega)} \|D_k^+ u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0. \quad (26)$$

Суммируя по  $k = 1, \dots, d$ , получаем *liminf*-неравенство  $E_h[u_h] \geq E[u]$ .

3) *Limsup*-неравенство (восстанавливающая последовательность).

Пусть  $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^r)$ . Построим  $u_h \in \mathbb{R}^{r \times \Omega_h^1}$  следующим образом.

Случай А (узловая дискретизация / ограничение на узлы). Предположим, что  $(u_h)_i := u(\xi_i)$ ,  $\xi_i \in \Omega_h^\circ$ , и рассмотрим кусочно-линейную (или кусочно-постоянную) интерполяцию  $\mathcal{I}_h u_h \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^r)$ .

Случай В (проекция по ячейкам /  $L^2$ -дискретизация).

Предположим, что

$$(u_h)_i := \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} u(x) dx, \quad u_h := \Pi_h u, \quad (27)$$

где  $K_i \in \mathcal{T}_h$  ячейка, ассоциированная с индексом  $i$ , а  $\Pi_h$  — оператор ячейкового усреднения ( $L^2$  — проекция на пространство кусочно-постоянных функций). В этом случае  $\mathcal{I}_h u_h$  кусочно-постоянная функция на  $\mathcal{T}_h$ .

В обоих случаях (при квазиравномерности сетки и стандартных свойствах  $\Pi_h, \mathcal{I}_h$ ) выполняется аппроксимация градиента:  $D_k^+ u_h \rightarrow \partial_k u$  в  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$ ,  $k = 1, \dots, d$ , а также  $\mathcal{I}_h u_h \rightarrow u$  в  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$ . Далее, из предположений о весах (W2) и ограниченности (W1) имеем  $w_h^k \rightarrow w^k$  в  $L^\infty(\Omega)$ ,  $0 < \varepsilon \leq w_h^k(x) \leq M$ . Следовательно, пользуясь сходимостью дискретных градиентов и сходимостью римановых сумм к интегралам, получаем  $E_h[u_h] \rightarrow E[u]$ . Тем самым для фиксированного  $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^r)$  построена восстанавливающая последовательность  $u_h$ , удовлетворяющая  $\limsup_{h \rightarrow 0} E_h[u_h] \leq E[u]$ . Теперь пусть  $u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$  и  $E[u] < 0$ . Тогда  $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^r)$ . Построим последовательность  $u^{(m)} \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^r) \cap H^1(\Omega; \mathbb{R}^r)$ , такую что  $u^{(m)} \rightarrow u$  в  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^r)$ ,  $E[u^{(m)}] \rightarrow E[u]$ . Для каждого  $m$  построим  $u_h^{(m)}$  по одному из случаев А/В выше, так что  $\lim_{h \rightarrow 0} E_h[u_h^{(m)}] = E[u^{(m)}]$ . Выбирая диагональную подпоследовательность  $h = h(m) \downarrow$  получаем последовательность  $u_{h(m)} := u_{h(m)}^{(m)}$ , для которой  $u_{h(m)} \rightarrow u$  в  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$ ,  $\limsup_{m \rightarrow \infty} E_{h(m)}[u_{h(m)}] \leq E[u]$ . Тем самым *limsup*-неравенство доказано для всех  $u$  с конечной предельной энергией.

Итак,  $E_h \xrightarrow{\Gamma} E$  в топологии  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$ , а семейство  $\{E_h\}$  равнокоэрцитивно по фундаментальной теореме  $\Gamma$ -сходимости о сходимости почти-минимизаторов [14]. Отсюда следует, что всякая последовательность почти-минимизаторов  $\{u_h\}$  имеет  $L^2$ -сходящуюся подпоследовательность к минимизатору предельного функционала, а минимальные значения  $\inf E_h$  сходятся к  $\inf E$ .

**Теорема 2** ( $\Gamma$ -сходимость регуляризатора). Пусть дискретные регуляризаторы  $R_m[m_h]$  и  $R_s[S_h]$  заданы формулами (19)–(20), а веса удовлетворяют (W1)–(W2). Предположим также, что  $S_h(x) \geq S_{\min} > 0$  (в реализации это обеспечивается параметризацией  $\alpha_k(x) = 1 + \text{softplus}(s_k(x))$ ), поэтому  $\log S_h$  корректно определён). Тогда  $R_m$  и  $R_s$   $\Gamma$ -сходятся в топологии  $L^2$  к функционалам:

$$R_m(m) = \sum_{k=1}^d \int_{\Omega} w^k(\xi) \|\partial_k m(\xi)\|^2 d\xi, \quad m \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^K), \quad (28)$$

$$R_s(S) = \sum_{k=1}^d \int_{\Omega} w^k(\xi) |\partial_k \log S(\xi)|^2 d\xi, \quad \log S \in H^1(\Omega). \quad (29)$$

*Доказательство.*

Пункт  $R_m$  следует из Теоремы 1, применённой покомпонентно к векторному полю  $m_h$ : дискретный функционал (19) есть сумма по направлениям квадратичных энергий типа  $E_h$ , а  $\Gamma$ -пределом является сумма соответствующих интегралов. Для  $R_s$  применяем Теорему 1 к скалярной функции  $u_h = \log S_h$  (условие  $S_h \geq S_{\min}$  гарантирует корректность).  $\Gamma$ -сходимость линейной комбинации  $J_r^{\text{reg}}$  следует из устойчивости  $\Gamma$ -сходимости относительно сложения функционалов и умножения на положительные константы.

**Замечание 1'** (устранение ядра градиента). Для корректной коэрцитивности квадратичных энергий фиксируем калибровку: либо рассматриваем функции нулевого среднего, либо задаём периодические граничные условия, либо фиксируем значение в одной точке. Выбор не влияет на  $\Gamma$ -предел и используется только для исключения добавления константы.

*Архитектура нейронной сети.*

В качестве базовой архитектуры используется *U-Net* [17] с энкодером *ResNet-34* [18], предобученным на *ImageNet*.

Параметризация выхода. Сеть предсказывает логиты  $\mathbf{s}(x) \in \mathbb{R}^K$  для каждого пикселя  $x$ . Параметры Дирихле вычисляются как

$$\alpha_k(x) = 1 + \text{softplus}(s_k(x)) = 1 + \log(1 + \exp(s_k(x))), \quad k = 1, \dots, K. \quad (30)$$

Это гарантирует  $\alpha_k(x) > 1$  что соответствует унимодальному распределению Дирихле.

Предиктивные вероятности:

$$\mathbf{m}(x) = \frac{\boldsymbol{\alpha}(x)}{S(x)}, \quad S(x) = \sum_{k=1}^K \alpha_k(x). \quad (31)$$

Веса *edge-aware* вычисляются один раз перед обучением для каждого изображения  $I$ :

$$w_h^k(x) = \exp\left(-\eta \left\| \frac{I(x + he_k) - I(x)}{h} \right\|^2\right) + \varepsilon. \quad (32)$$

На практике для изображений с дискретными пикселями  $h = 1$  (один пиксель), и формула упрощается до:

$$w_{i,j}^k = \exp\left(-\eta \|I_{i+\delta_k, j+\delta_l} - I_{i,j}\|^2\right) + \varepsilon, \quad (33)$$

где  $(\delta_k, \delta_l) \in ((1,0), (0,1))$  для  $d = 2$ .

**Замечание 2.** При изменении разрешения изображения (например, при работе с пирамидами) параметр  $\eta$  не требует перенастройки благодаря нормировке на  $h$ .

*Алгоритм оптимизации. Обучение модели.*

Вход: Обучающая выборка  $((I^{(n)}, y^{(n)}))_{n=1}^N$  гиперпараметры  $\beta_{\text{KL}}, \lambda_m, \lambda_s, \eta, \varepsilon$ .

Выход: Параметры сети  $\theta^*$ .

Шаги алгоритма:

1. Предвычисление весов: для каждого  $I^{(n)}$  вычислить  $w_h^k$ .

2. Инициализация:  $\theta \rightarrow \theta_0$  (предобученные веса).

3. Цикл по эпохам: Для  $t = 1, \dots, T$ :

Для каждого мини-батча  $\mathcal{B}$ :

Прямой проход:  $\boldsymbol{\alpha}^{(n)} = f_{\theta}(I^{(n)})$  для  $n \in \mathcal{B}$ .

Вычисление функционала потерь (16).

Обратное распространение и шаг оптимизатора *Adam* [19].

4. Возврат:  $\theta^* = \theta$ .

Дополнительные расходы разработанного метода (+18 %) (Таблица 1) обусловлены:

– вычислением  $K$  параметров  $\alpha_k$  вместо  $K$  логитов (незначительно);

– предвычислением весов  $w_h^k$  (один раз на изображение).

Таблица 1

Временные затраты метода (NVIDIA A100, изображение  $batch\ size = 1$ , только инференс)

Метод	Время (мс)	Относительно
<i>Baseline</i> (CE)	22±1	100 %
Разработанный метод	26±1	118 %
<i>MC-dropout</i> ( $T = 30$ )	660±15	3000 %
<i>Deep Ensembles</i> ( $M = 5$ )	110±5	500 %

Протокол подбора гиперпараметров (Таблица 2). Гиперпараметры подбирались с помощью 5-кратной кросс-валидации исключительно на  $train+val$ . Тестовая выборка не использовалась ни на одном этапе выбора модели или параметров. После фиксации гиперпараметров проводилось:

1. Финальное обучение на  $train$ .
2. Early stopping по  $val$ .
3. Оценка на  $test$ .

Таблица 2

Характеристики наборов данных

Датасет	Модальность	<i>Train</i>	<i>Val</i>	<i>Test</i>	Классы
<i>ACDC</i> [20]	MPT сердца	70	10	20	4
<i>Synapse</i> [21]	КТ брюшной полости	18	6	6	9
<i>CHAOS</i> [22]	КТ/MPT печени	24	8	8	4

Примечание (*split* по пациентам). Во всех наборах данных разбиение  $train/val/test$  выполняется на уровне пациентов (объёмов), а не отдельных 2D-срезов, что исключает утечку информации между подвыборками. Результаты усреднены по 10 независимым запускам с разными *random seeds*. Все методы обучались с идентичными условиями: фиксированные разбиения данных, одинаковые начальные веса для сопоставимых архитектур.

*Метрики качества.*

Сегментация:

$$Dice = 2 | A \cap B | / ( | A | + | B | ), IoU = | A \cap B | / | A \cup B |. \quad (34)$$

Калибровка: ECE (*Expected Calibration Error*): 15 равномерных бинов по *confidence*, *micro-averaging* по пикселям всех классов (включая фон):

$$ECE = \sum_{b=1}^{15} \frac{n_b}{N} | acc(b) - conf(b) |, \quad (35)$$

где число пикселей в бине  $b$ , доля правильных предсказаний, средняя уверенность. NLL (*Negative Log-Likelihood*): среднее по пикселям  $-\log_{y(x)}(x)$ .

Обнаружение ошибок. *AUROC*: площадь под *ROC*-кривой для бинарной задачи «корректное/ошибочное предсказание» с неопределённостью  $U(x)$  в качестве *score*. *AURC* (*Area Under Risk-Coverage Curve*): оценка селективной сегментации [23].

*Статистический анализ.* Размер эффекта для парных данных. Поскольку сравнения проводятся на одних и тех же тестовых примерах (парный дизайн), используется *Cohen's  $d_z$* :  $d_z = \frac{\bar{D}}{s_D}$ ,  $D_i = X_i^{our} - X_i^{baseline}$ , где  $\bar{D}$  — среднее разностей,  $s_D$  — стандартное отклонение разностей.

Проверка нормальности. Тест Шапиро-Уилка применялся к разностям для каждой метрики. При использовался знаковый ранговый критерий Уилкоксона; в остальных случаях — парный  $t$ -критерий.

Коррекция на множественные сравнения. Поправка *Holm-Bonferroni* применялась внутри каждого семейства гипотез (сравнения с *baseline* для одного датасета). Для сравнений между датасетами применялся *FDR*-контроль по *Benjamini-Hochberg*.

Доверительные интервалы. 95 % ВСа бутстрап-интервалы (10000 реплик) для всех метрик.

Сравниваемые методы:

1. CE (*baseline*): кросс-энтропийная потеря, *U-Net* + *ResNet-34*.
2. *MC-dropout* [3]: *dropout*  $p = 0,5$  на этапе инференса,  $T = 30$  прогонов.
3. *Deep Ensembles* [4]:  $M = 5$  независимо обученных моделей.
4. *Evidential U-Net* [10]: распределение Дирихле без пространственной регуляризации.
5. *UDEL* [11]: адаптивная оценка неопределённости.
6. Разработанный метод: полный функционал (16).
7. *nnU-Net* [24]: внешний ориентир (*self-configuring pipeline*, не является строго сопоставимым).

Результаты исследования.

Таблица 3

Качество сегментации и калибровка на ACDC (среднее  $\pm$  std, 10 запусков)

Метод	<i>Dice</i>	<i>ECE</i>	<i>NLL</i>
<i>CE</i>	0,891 $\pm$ 0,011	0,078 $\pm$ 0,006	0,351 $\pm$ 0,018
<i>MC-dropout</i>	0,897 $\pm$ 0,010	0,032 $\pm$ 0,004	0,315 $\pm$ 0,014
<i>Deep Ensembles</i>	0,908 $\pm$ 0,008	0,024 $\pm$ 0,003	0,301 $\pm$ 0,012
<i>Evidential U-Net</i>	0,909 $\pm$ 0,008	0,023 $\pm$ 0,003	0,303 $\pm$ 0,013
<i>UDEL</i>	0,907 $\pm$ 0,009	0,025 $\pm$ 0,004	0,306 $\pm$ 0,014
Разработанный метод	<b>0,912 <math>\pm</math> 0,008</b>	<b>0,021 <math>\pm</math> 0,003</b>	<b>0,298 <math>\pm</math> 0,012</b>
<i>nnU-Net</i>	0,915 $\pm$ 0,007	0,023 $\pm$ 0,003	0,295 $\pm$ 0,011

Таблица 4

Обнаружение ошибок и селективная сегментация (ACDC)

Метод	<i>AUROC</i>	95 % <i>CI</i>	<i>AURC</i>	95 % <i>CI</i>
<i>CE</i> (энтропия)	0,812 $\pm$ 0,015	[0,798, 0,826]	0,178 $\pm$ 0,012	[0,166, 0,190]
<i>MC-dropout</i>	0,847 $\pm$ 0,013	[0,835, 0,859]	0,156 $\pm$ 0,010	[0,146, 0,166]
<i>Deep Ensembles</i>	0,875 $\pm$ 0,011	[0,865, 0,885]	0,132 $\pm$ 0,008	[0,124, 0,140]
<i>Evidential U-Net</i>	0,8885 $\pm$ 0,010	[0,876, 0,894]	0,129 $\pm$ 0,007	[0,122, 0,136]
<i>UDEL</i>	0,882 $\pm$ 0,011	[0,872, 0,892]	0,131 $\pm$ 0,008	[0,123, 0,139]
Разработанный метод	<b>0,891 <math>\pm</math> 0,009</b>	[0,883, 0,899]	<b>0,124 <math>\pm</math> 0,006</b>	[0,118, 0,130]

Тест Шапиро-Уилка для разностей:  $p > 0,15$  для всех метрик, нормальность не отвергается (Таблица 5).

Таблица 5

Статистическая значимость (разработанный метод vs. CE baseline, ACDC)

Метрика	$\Delta$ (разработанный — <i>CE</i> )	95 % <i>BCa CI</i>	<i>Cohen's</i>	$p$ ( <i>Holm</i> )	Тест
<i>Dice</i>	+0,021	[0,014, 0,028]	2,1	< 0,001	<i>t</i> -тест
<i>ECE</i>	-0,057	[-0,063, -0,051]	2,3	< 0,001	<i>t</i> -тест
<i>NLL</i>	-0,053	[-0,068, -0,038]	1,9	< 0,001	<i>t</i> -тест
<i>AUROC</i>	+0,079	[0,065, 0,093]	2,4	< 0,001	<i>t</i> -тест

Результаты на наборах данных *Synapse* и *CHAOS* представлены в Таблице 6.

Эмпирическая верификация теоретических результатов.

Эксперимент 1. Порядок сходимости дискретной энергии.

Тестовый профиль:  $u(\xi) = \sin(\pi\xi_1) \cos(\pi\xi_2)$ ,  $w^k(\xi) = 1 + 0,5 \cos(2\pi\xi_k)$ ,  $\Omega = [0,1]^2$ . Аналитическое значение:  $E[u] = 4,9348$ .

Таблица 6

Результаты на *Synapse* и *CHAOS*

Датасет	Метод	<i>Dice</i>	<i>ECE</i>	<i>AUROC</i>
<i>Synapse</i>	<i>CE</i>	0,762 $\pm$ 0,014	0,081 $\pm$ 0,007	0,847 $\pm$ 0,014
<i>Synapse</i>	<i>Deep Ensembles</i>	0,785 $\pm$ 0,010	0,027 $\pm$ 0,004	0,887 $\pm$ 0,010
<i>Synapse</i>	Разработанный метод	<b>0,789 <math>\pm</math> 0,011</b>	<b>0,024 <math>\pm</math> 0,004</b>	<b>0,895 <math>\pm</math> 0,008</b>
<i>CHAOS</i>	<i>CE</i>	0,883 $\pm$ 0,012	—	0,831 $\pm$ 0,016
<i>CHAOS</i>	<i>Deep Ensembles</i>	0,901 $\pm$ 0,009	0,039 $\pm$ 0,005	0,872 $\pm$ 0,012
<i>CHAOS</i>	Разработанный метод	<b>0,906 <math>\pm</math> 0,009</b>	<b>0,036 <math>\pm</math> 0,004</b>	<b>0,883 <math>\pm</math> 0,010</b>

Таблица 7

Сходимость дискретной энергии (один тестовый профиль)

$h$	$E_h$	$ E_h - E $	Порядок
1/8	4,8721	0,0627	—
1/16	4,9035	0,0313	1,00

$h$	$E_h$	$ E_h - E $	Порядок
1/32	4,9191	0,0157	0,99
1/64	4,9270	0,0078	1,01
1/128	4,9309	0,0039	1,00

Для подтверждения универсальности порядка проведены эксперименты на дополнительных профилях (Таблица 8):  $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in (0,1)^2$ ,  $k \in \{1,2\}$ . Для В:  $u(\xi) = \xi_1 + \xi_2$ ,  $w^k(\xi) \equiv 1$ . Для D:  $u(\xi) = \exp(-(\xi_1^2 + \xi_2^2))$ ,  $w^k(\xi) = \exp(-\xi_k^2)$ .

Таблица 8

Порядок сходимости для различных тестовых функций

Профиль	$u(\xi)$	$w^k(\xi)$	Порядок ( $h: 1/16 \rightarrow 1/128$ )
<i>A</i>	$\sin(\pi\xi_1) \cos(\pi\xi_2)$	$1 + 0,5 \cos(2\pi\xi_k)$	$1,00 \pm 0,01$
<i>B</i>	$\xi_1 + \xi_2$	1	$1,01 \pm 0,01$
<i>C</i>	$\xi_1^2(1-\xi_1)^2 \xi_2^2(1-\xi_2)^2$	$1 + \xi_k$	$0,99 \pm 0,02$
<i>D</i>	$\exp(-(\xi_1^2 + \xi_2^2))$	$\exp(-\xi_k^2)$	$0,99 \pm 0,02$

Все профили демонстрируют первый порядок сходимости, согласующийся с Теоремой 1.  
Абляционный анализ.

Таблица 9

Влияние компонент функционала (ACDC, 10 запусков)

Конфигурация	<i>Dice</i>	<i>ECE</i>	<i>NLL</i>	<i>AURC</i>
Полная модель	<b>0,912</b>	<b>0,021</b>	<b>0,298</b>	<b>0,124</b>
Без $\mathcal{R}_{KL}$	0,897	0,052	0,325	0,151
Без $\mathcal{R}_m$	0,899	0,048	0,320	0,145
Без $\mathcal{R}_s$	0,905	0,035	0,310	0,136
Ненормированные разности в весах	0,908	0,028	0,305	0,131
<i>CE baseline</i>	0,891	0,078	0,351	0,178

- Все компоненты функционала вносят вклад в улучшение.
- Наибольший эффект даёт  $\mathcal{R}_{KL}$  (калибровка).
- Нормированные разности в весах улучшают *ECE* на 25 % относительно ненормированных.

Воспроизводимость.

- Данные и разбиение: фиксированные разбиения (*splits*) по пациентам; единая предобработка и постобработка для всех методов.
- Обучение: оптимизатор *Adam*; *mixed precision (FP16/AMP)*; 10 инициализаций (*seeds*).
- Метрики: *Dice*, *Jaccard*, *ECE*; для детекции ошибок — *AUROC* и *AURC* по карте неопределённости; статистика — парный *Wilcoxon* или *t*-тест (по нормальности) с коррекцией *Holm-Bonferroni*.
- Аппаратно-программная среда: *GPU NVIDIA A100*; *PyTorch*; код и конфигурации — по запросу / после принятия.

Таблица 10

Оптимальные гиперпараметры (подобраны по валидационной выборке)

Параметр	Описание	<i>ACDC</i>	<i>Synapse</i>	<i>CHAOS</i>
$\beta_{KL}$	Вес KL-регуляризации	0,100	0,100	0,080
$\lambda_m$	Вес регуляризации <i>m</i>	0,010	0,015	0,012
$\lambda_s$	Вес регуляризации <i>S</i>	0,010	0,015	0,012
$\eta$	Чувствительность весов	5,000	4,500	5,500
$\varepsilon$	Нижняя граница весов	$1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-3}$
<i>lr</i>	Скорость обучения	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$
<i>batch size</i>	Размер мини-батча	8	8	8
<i>epochs</i>	Число эпох	100	150	100

Чувствительность гиперпараметров (*ACDC*)

Таблицы 11–12:  $mean \pm std$  по 10 инициализациям; варьировался один параметр, остальные брались из Таблицы 10. Здесь  $\lambda$  означает совместное значение  $\lambda = \lambda_m = \lambda_s$ .

Таблица 11

Влияние параметра  $\eta$  (*ACDC*)

$\eta$	<i>Dice</i>	<i>ECE</i>	<i>AUROC</i>
1,0	0,905 ± 0,009	0,028 ± 0,004	0,879 ± 0,011
2,5	0,908 ± 0,008	0,024 ± 0,003	0,885 ± 0,010
5,0	0,912 ± 0,008	0,021 ± 0,003	0,891 ± 0,009
10,0	0,910 ± 0,008	0,022 ± 0,003	0,888 ± 0,010
20,0	0,907 ± 0,009	0,025 ± 0,004	0,882 ± 0,011

Таблица 12

Влияние параметра  $\lambda$  (*ACDC*)

$\lambda$	<i>Dice</i>	<i>ECE</i>	<i>AUROC</i>
0,001	0,903 ± 0,010	0,031 ± 0,004	0,875 ± 0,012
0,005	0,908 ± 0,009	0,025 ± 0,003	0,884 ± 0,010
0,010	0,912 ± 0,008	0,021 ± 0,003	0,891 ± 0,009
0,020	0,909 ± 0,008	0,023 ± 0,003	0,887 ± 0,010
0,050	0,901 ± 0,011	0,027 ± 0,004	0,878 ± 0,012

Абляция формулировки весов (*ACDC*).

Сравнивались: (a) нормированные разности с делением на шаг сетки  $h$ ; (b) ненормированные разности (без деления на  $h$ ); (c) изотропные веса  $w = \varepsilon + \exp(-\eta \cdot \|\nabla_h I\|^2)$ ; (d) постоянные веса  $w \equiv 1$  (Таблица 13).

Таблица 13

Влияние формулировки весов (*ACDC*)

Формулировка весов	<i>Dice</i>	<i>ECE</i>	<i>AUROC</i>
Нормированные разности (разработанный метод)	0,912	0,021	0,891
Ненормированные разности	0,908	0,028	0,883
Изотропные веса $w = \varepsilon + \exp(-\eta \cdot \ \nabla_h I\ ^2)$	0,909	0,024	0,886
Постоянные веса $w \equiv 1$	0,902	0,035	0,871

Метрики *AUROC* и *AURC*.

Пусть  $\hat{y}(x)$  — предсказанный класс,  $y(x)$  — разметка,  $e(x) = 1\{\hat{y}(x) \neq y(x)\}$  — индикатор ошибки, а  $U(x) \geq 0$  — скалярная неопределённость. Для детекции ошибок используем  $U(x)$  как *score*:

$$e(x) = 1\{\hat{y}(x) \neq y(x)\}. \quad (36)$$

Определим покрытие и риск при пороге  $\tau$  по  $U(x)$ :

$$\text{cov}(\tau) = \mathbb{P}(U(x) \leq \tau), \quad \text{risk}(\tau) = \mathbb{P}(e(x) = 1 \mid U(x) \leq \tau). \quad (37)$$

*AUROC* есть площадь под *RQC*-кривой бинарного классификатора  $e(x)$  по *score*  $U(x)$ ; *AURC* — площадь под кривой *risk-coverage*:  $AURC = \int_0^1 \text{risk}(\text{cov}) d(\text{cov})$ , оцениваемая дискретно по ранжированию  $U(x)$ .

Дискретная сетка и разностные операторы.

Равномерная сетка  $\Omega_h \subset \Omega$  задаётся шагом  $h = 1/N$ . Для направления  $k = 1, \dots, d$  используем нормированную прямую разность и дискретное скалярное произведение, определяемые формулами [26]:

$$D_{k,h} v_h(x) = \frac{v_h(x + h e_k) - v_h(x)}{h}, \quad (38)$$

$$\langle a, b \rangle_h = h^d \sum_{x \in \Omega_h} a(x) b(x), \quad (39)$$

$$\Omega_h = \{(i_1 h, \dots, i_d h) : i_j = 0, 1, \dots, N\} \cap \Omega. \quad (40)$$

Свойства распределения Дирихле и связанных с ним моментов/энтропий описаны в монографии [27].

*Замечание:* используем регуляризующую постановку, согласованную с классическими подходами к некорректным задачам [28].

*План доказательства Г-сходимости.*

Доказательство Г-сходимости состоит из трёх стандартных шагов: равнокоэрцитивность (компактность) семейства  $E_h$ ; оценка  $\liminf$  для произвольной сходящейся последовательности  $u_h \rightarrow u$  в  $L^2(\Omega)$ ; построение восстанавливающей последовательности (*recovery sequence*) для каждого  $u \in H^1(\Omega)$ . Далее используется классическая теорема Г-сходимости о сходимости почти минимизаторов.

**Лемма 1.** Пусть  $w^n, w \in L^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ ,  $0 < \varepsilon \leq w_n \leq M$ ,  $w_n \rightarrow w$  в  $L^2(\Omega)$  и  $f_n \rightarrow f$  в  $L^2(\Omega)$ . Тогда выполняется неравенство

$$\int_{\Omega} w(x) |f(x)|^2 dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} w_n(x) |f_n(x)|^2 dx. \quad (41)$$

Доказательство. Для  $M_0 > 0$  разложим квадрат модуля на ограниченную и хвостовую части:

$$|f_n|^2 = \min(|f_n|^2, M_0) + (|f_n|^2 - M_0)_+. \quad (42)$$

Ограниченная часть контролируется сходимостью весов, а хвост — энергетической оценкой:

$$\int_{\Omega} (w_n - w) \min(|f_n|^2, M_0) \leq M_0 \|w_n - w\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0. \quad (43)$$

Для хвоста имеем:

$$\int_{\Omega} (|f_n|^2 - M_0)_+ \leq \frac{1}{\varepsilon M_0} \int_{\Omega} w_n |f_n|^2. \quad (44)$$

Выбирая  $M_0 \rightarrow \infty$  и используя слабую полунепрерывность снизу квадратичной формы  $f \mapsto \int w |f|^2$  при фиксированном  $w$ , получаем следующее утверждение.

**Лемма 2.** Пусть  $u_h \in V_h$  и  $\sup_h E_h(u_h) < \infty$ . При калибровке, устранивающей ядро градиента (нулевое среднее или периодические/фиксирующие граничные условия; см. Замечание 1'), существует подпоследовательность  $h_j \rightarrow 0$  и функция  $u \in H^1(\Omega)$  такие, что  $\prod_{h_j} u_{h_j} \rightarrow u$  в  $L^2(\Omega)$ , а дискретные градиенты  $D_k^+ u_{h_j} \rightharpoonup \partial_k u$  в  $L^2(\Omega)$  для  $k = 1, \dots, d$ .

*Доказательство.* Из нижней границы  $\varepsilon \leq w_h^k$  следует оценка дискретных градиентов:

$$\|D^+ u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} E_h(u_h). \quad (45)$$

Дискретное неравенство Пуанкаре при выбранной калибровке даёт равномерную ограниченность нормы  $L^2$ ; далее компактность и идентификация предела следуют из стандартных результатов конечно-разностной/конечно-элементной аппроксимации [16].

*Сшивка и следствие о почти минимизаторах.*

*Liminf-неравенство.*

Пусть  $u_h \rightarrow u$  в  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$  и  $\sup_h E_h[u_h] < \infty$ . Тогда из равнокоэрцитивности (Лемма 2) следует, что существует такая подпоследовательность, что  $D^+ u_h \rightharpoonup \nabla u$  в  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^{r \times d})$ ,  $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^r)$ . Пусть  $u_h \rightarrow u$  в  $L^2(\Omega)$ . Далее, из (W2) и построения весов (см. Замечание 1) имеем  $w_h^k \rightarrow w^k$  в  $L^\infty(\Omega)$  ( $k = 1, \dots, d$ ),  $0 < \varepsilon \leq w_h^k(x) \leq M$ . Применяя Лемму 1 к последовательности  $f_h : D_k^+ u_h$  и весам  $w_h^k$  получаем для каждого  $k$ :  $\int_{\Omega} w^k |\partial_k u|^2 dx \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} w_h^k |D_k^+ u_h|^2 dx$ . Суммируя по  $k = 1, \dots, d$ , заключаем, что  $E[u] \leq \liminf_{h \rightarrow 0} E_h[u_h]$ , то есть *liminf*-неравенство Г-сходимости доказано.

*Замечание о норме сходимости весов.* Для *liminf*-шага достаточно  $w_h^k \rightarrow w^k$  в  $L^2(\Omega)$  при равномерной ограниченности  $w_h^k$  в  $L^\infty(\Omega)$  и нижней границе  $w_h^k \geq \varepsilon > 0$ . Авторами используется более сильная сходимость в  $L^\infty(\Omega)$ , которая естественна для весов, порождённых сглаженным изображением.

*Limsup-неравенство* (восстанавливающая последовательность). Пусть сначала  $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^r)$ . Определим восстановительную последовательность через стандартный оператор интерполяции на сетке:  $u_h := \mathcal{I}_h u$ , где  $\mathcal{I}_h$  — выбранная дискретизация (кусочно-линейная узловая интерполяция, либо кусочно-постоянная по ячейкам). Тогда  $\mathcal{I}_h u \rightarrow u$  в  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$ ,  $D_k^+(\mathcal{I}_h u) \rightarrow \partial_k u$  в  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$ ,  $k = 1, \dots, d$ . Используя ограниченность  $w_h^k$  и сходимость  $w_h^k \rightarrow w^k$  (W2), а также сходимость дискретных сумм к интегралам, получаем  $\lim_{n \rightarrow 0} E_h[u_h] = E[u]$ , и, следовательно,  $\limsup_{h \rightarrow 0} E_h[u_h] \leq E[u]$ . Для произвольного  $u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$  с  $E[u] < \infty$  имеем  $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^r)$ . Тем самым *limsup*-неравенство доказано для всех  $u$  с конечной предельной энергией. Это завершает доказательство Г-сходимости энергий:  $E_h \xrightarrow{\Gamma} E$  в  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$ .

Теорема 2 следует из Теоремы 1 применением Г-сходимости к каждому слагаемому регуляризатора и стандартной устойчивости Г-сходимости: к конечным суммам Г-сходящихся функционалов; к добавлению непрерывных (в  $L^2$ ) членов низшего порядка. Равнокоэрцитивность (Лемма 2) и Г-сходимость влекут стандартный результат о сходимости почти минимизаторов [14]: если  $\delta_h \downarrow 0$  и  $u_h - \delta_h$  почти минимизаторы, то существует подпоследовательность и  $u^* \in \text{Armin } E$  такие, что  $u_h \rightarrow u^*$  в  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^r)$ , а также  $\liminf_{n \rightarrow 0} E_h = \inf E$ ,  $\lim_{n \rightarrow 0} E_h[u_h] = E[u^*] = \inf E$ .

**Обсуждение****Основные результаты. Предложенный метод демонстрирует:**

1. Точность сегментации на уровне современных методов:  $Dice = 0,912$  на *ACDC* (Таблица 3), что сопоставимо с *Deep Ensembles* (0,908) и *nnU-Net* (0,915).
2. Значительное улучшение калибровки:  $ECE$  снижен с 0,078 до 0,021 (улучшение на 73 % относительно *baseline*). Это означает, что предсказанные вероятности классов точнее отражают истинные частоты.
3. Лучшие показатели обнаружения ошибок:  $AUROC = 0,891$  превосходит все сравниваемые методы (Таблица 4). Карты неопределённости эффективно идентифицируют пиксели с ошибочными предсказаниями.
4. Вычислительная эффективность: 18 % дополнительных временных расходов по сравнению с 3000 % для *MC-dropout* и 500 % для *Deep Ensembles*.

**Теоретическое обоснование.** Доказательство  $\Gamma$ -сходимости (Теорема 2) обеспечивает:

– Корректность дискретизации: дискретный функционал аппроксимирует непрерывный с контролируемой погрешностью.

– Сходимость минимизаторов: решения дискретных задач сходятся к решению непрерывной задачи.

– Обоснование масштабной инвариантности: нормировка разностей на  $h$  гарантирует нетривиальный предел весов.

**Сравнение с существующими подходами.**

• *Evidential Deep Learning* [5]: использует распределение Дирихле, но без пространственной регуляризации. Разработанный метод добавляет анизотропные регуляризаторы, улучшающие пространственную согласованность карт неопределённости.

• Анизотропная диффузия [25]: Классический подход к сглаживанию с сохранением границ. Настоящая работа впервые даёт строгое обоснование  $\Gamma$ -сходимости для *edge-aware* весов, определённых через дискретные разности.

• *Deep Ensembles* [4]: обеспечивают хорошую калибровку ценой многократного увеличения вычислительных затрат. Предложенный авторами метод достигает сопоставимого качества за один проход.

**Ограничения.**

1. 2D-постановка. Эксперименты проводились на 2D-срезах. Расширение на полноценные 3D-объёмы требует адаптации архитектуры и увеличения памяти.

2. *In-distribution* валидация. Все эксперименты проводились на данных из того же распределения. Поведение метода на *OOD*-данных (другие модальности, патологии, артефакты) требует отдельного исследования.

3. Условие  $I \in W^{1,\infty}$ . Теоретические результаты требуют ограниченности градиента изображения. На практике это обеспечивается стандартным *preprocessing* (нормализация, клиппинг).

4. Выбор гиперпараметров. Параметры  $\eta$ ,  $\varepsilon$ ,  $\lambda_m$ ,  $\lambda_s$  подбираются по валидационной выборке. Автоматические методы выбора (например, байесовская оптимизация) могут улучшить результаты.

**Заключение.** В работе предложен вычислительный метод семантической сегментации с оценкой неопределённости, основанный на распределении Дирихле и анизотропной пространственной регуляризации. Доказана  $\Gamma$ -сходимость дискретных анизотропных энергий к непрерывному пределу; приведены ключевые технические леммы о нижней полунепрерывности и равнокоэрцитивности. Получено статистически значимое улучшение калибровки ( $Cohen's d_2 > 2$ ,  $p < 0,001$ ) при минимальных вычислительных накладных расходах (18 %). Использование нормированных конечных разностей в определении *edge-aware* весов обеспечило сходимость к нетривиальной предельной весовой функции.

Метод продемонстрировал улучшение на трёх различных наборах медицинских данных (*ACDC*, *Synapse*, *CHAOS*) с различными модальностями (МРТ, КТ) и анатомическими структурами.

**Направления дальнейших исследований:**

1. Расширение на 3D. Обобщение метода на трёхмерные медицинские изображения (КТ, МРТ объёмы) с соответствующей адаптацией анизотропной регуляризации.

2. Анализ *OOD*-устойчивости. Исследование поведения метода на данных вне распределения обучающей выборки, включая другие модальности, патологии и артефакты изображений.

3. Автоматический выбор гиперпараметров. Разработка методов адаптивного выбора  $\eta$ ,  $\lambda_m$ ,  $\lambda_s$  на основе свойств входного изображения.

4. Обобщение теоретических результатов. Расширение анализа  $\Gamma$ -сходимости на случай разрывных весов  $w^k \in BV(\Omega)$ , что позволит рассматривать изображения с резкими границами.

**Список литературы / References**

1. Begoli E., Bhattacharya T., Kusnezov D. The need for uncertainty quantification in machine-assisted medical decision making. *Nat Mach Intell.* 2019;1(1):20–23. <https://doi.org/10.1038/s42256-018-0004-1>
2. Abdar M., Pourpanah F., Hussain S., et al. A review of uncertainty quantification in deep learning: Techniques, applications and challenges. *Inf Fusion.* 2021;76:243–297. <https://doi.org/10.1016/j.inffus.2021.05.008>
3. Gal Y., Ghahramani Z. Dropout as a Bayesian approximation: representing model uncertainty in deep learning. In: *Proc. ICML*. New York: PMLR; 2016. P. 1050–1059.
4. Lakshminarayanan B., Pritzel A., Blundell C. Simple and scalable predictive uncertainty estimation using deep ensembles. In: *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2017;30:6402–6413.

5. Sensoy M., Kaplan L., Kandemir M. Evidential deep learning to quantify classification uncertainty. In: *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2018;31:3183–3193.
6. Malinin A., Gales M. Predictive uncertainty estimation via prior networks. In: *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2018;31:7047–7058.
7. Jungo A., Reyes M. Assessing reliability and challenges of uncertainty estimations for medical image segmentation. In: *MICCAI 2019*. LNCS, vol. 11765. Cham: Springer; 2019. P. 48–56. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-32245-8\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-030-32245-8_6)
8. Nair T., Precup D., Arnold D.L., Arbel T. Exploring uncertainty measures in deep networks for multiple sclerosis lesion detection and segmentation. *Med Image Anal.* 2020;59:101557. <https://doi.org/10.1016/j.media.2019.101557>
9. Mehrtaash A., Wells W.M., Tempany C.M., Abolmaesumi P., Kapur T. Confidence calibration and predictive uncertainty estimation for deep medical image segmentation. *IEEE Trans Med Imaging.* 2020;39(12):3868–3878. <https://doi.org/10.1109/TMI.2020.3006437>
10. Li H., Nan Y., Del Ser J., Yang G. Region-based evidential deep learning to quantify uncertainty and improve robustness of brain tumor segmentation. *Neural Comput Appl.* 2023;35:22071–22085. <https://doi.org/10.1007/s00521-022-08016-4>
11. UDEL: Rethinking uncertainty dynamic estimation learning for ambiguous medical image segmentation. *Digit Signal Process.* 2025;169:105723. <https://doi.org/10.1016/j.dsp.2025.105723>
12. Yang B., Zhang X., Zhang H., et al. Structural uncertainty estimation for medical image segmentation. *Med Image Anal.* 2025;103:103602. <https://doi.org/10.1016/j.media.2025.103602>
13. Han K., Wang S., Chen J., et al., Region uncertainty estimation for medical image segmentation with noisy labels. *IEEE Trans Med Imaging.* 2025;44(12):5197–5207. <https://doi.org/10.1109/TMI.2025.3589058>
14. Dal Maso G. *An Introduction to  $\Gamma$ -Convergence*. Boston: Birkhäuser; 1993. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0327-8>
15. Braides A.  *$\Gamma$ -Convergence for Beginners*. Oxford: Oxford University Press; 2002. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198507840.001.0001>
16. Ciarlet P.G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Philadelphia: SIAM; 2002. <https://doi.org/10.1137/1.9780898719208>
17. Ronneberger O., Fischer P., Brox T. U-Net: convolutional networks for biomedical image segmentation. In: *MICCAI 2015*. LNCS, vol. 9351. Cham: Springer; 2015. P. 234–241. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-24574-4\\_28](https://doi.org/10.1007/978-3-319-24574-4_28)
18. He K., Zhang X., Ren S., Sun J. Deep residual learning for image recognition. In: *Proc. CVPR*. 2016. P. 770–778. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2016.90>
19. Kingma D.P., Ba J. Adam: a method for stochastic optimization. In: *Proc. ICLR*. 2015. arXiv:1412.6980.
20. Bernard O., Lalande A., Zotti C., et al. Deep learning techniques for automatic MRI cardiac multi-structures segmentation and diagnosis. *IEEE Trans Med Imaging.* 2018;37(11):2514–2525. <https://doi.org/10.1109/TMI.2018.2837502>
21. Landman B.A., Xu Z., Iglesias J.E., et al. MICCAI Multi-Atlas Labeling Beyond the Cranial Vault — Workshop and Challenge. <https://doi.org/10.7303/syn3193805>
22. Kavur A.E., Gezer N.S., Barış M., et al. CHAOS Challenge — combined (CT-MR) healthy abdominal organ segmentation. *Med Image Anal.* 2021;69:101950. <https://doi.org/10.1016/j.media.2020.101950>
23. Geifman Y., El-Yaniv R. Selective classification for deep neural networks. In: *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2017;30:4878–4887.
24. Isensee F., Jaeger P.F., Kohl S.A.A. et al. nnU-Net: a self-configuring method for deep learning-based biomedical image segmentation. *Nat Methods.* 2021;18(2):203–211. <https://doi.org/10.1038/s41592-020-01008-z>
25. Perona P., Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell.* 1990;12(7):629–639. <https://doi.org/10.1109/34.56205>
26. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы*. Москва: БИНОМ; 2012. 636 с. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Numerical methods*. Moscow: BINOM; 2012. 636 p.
27. Джонсон Н.Л., Котц С., Балакришнан Н. *Непрерывные одномерные распределения*. Т. 2. Нью-Йорк: Wiley; 1995. Johnson N.L., Kotz S., Balakrishnan N. *Continuous Univariate Distributions*. Vol. 2. 2nd ed. New York: Wiley; 1995. (In Russ.)
28. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач*. Москва: Наука; 1979. 288 с. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Methods for solving ill-posed problems*. Moscow: Nauka; 1979. 288 p. (In Russ.)
29. Самарский А.А. *Теория разностных схем*. Москва: Наука; 1989. 616 с. Samarsky A.A. *The theory of difference schemes*. Moscow: Nauka; 1989. 616 p. (In Russ.)
30. Chen T., Xu B., Zhang C., Guestrin C. Training deep nets with sublinear memory cost. *arXiv:1604.06174*. 2016.
31. Micikevicius P., Narang S., Alben J. et al. Mixed precision training. In: *Proc. ICLR*. 2018. arXiv:1710.03740.

**Об авторах:**

**Евгений Юрьевич Щетинин**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных технологий Севастопольского государственного университета (Российская Федерация, 299053, г. Севастополь, ул. Университетская, 33), [ORCID](#), [SPIN-код](#), [riviera-molto@mail.ru](mailto:riviera-molto@mail.ru)

**Андрей Андреевич Шевчук**, аспирант кафедры информационных технологий Севастопольского государственного университета (Российская Федерация, 299053, г. Севастополь, ул. Университетская, 33), [ORCID](#), [andreiluck11@yandex.ru](mailto:andreiluck11@yandex.ru)

***Заявленный вклад авторов:***

**Е.Ю. Щетинин:** общее научное руководство; постановка задачи; формулировка идей исследования, целей и задач, разработка методологии, получение расчетных формул и проведение численного эксперимента.

**А.А. Шевчук:** формулировка достигнутых результатов и описание их значимости, оформление материала статьи.

***Конфликт интересов:*** авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

***Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.***

***About the Authors:***

**Evgeny Yu. Shchetinin**, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Department of Information Technologies, Sevastopol State University (33, Universitetskaya St., Sevastopol, 299053, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), [riviera-molto@mail.ru](mailto:riviera-molto@mail.ru)

**Andrey A. Shevchuk**, PhD Student, Department of Information Technologies, Sevastopol State University (33, Universitetskaya St., Sevastopol, 299053, Russian Federation), [ORCID](#), [andreiluck11@yandex.ru](mailto:andreiluck11@yandex.ru)

***Contributions of the authors:***

**E.Yu. Shchetinin:** general scientific supervision; problem statement; formulation of research ideas, objectives and goals; methodology development; derivation of calculation formulas and numerical experiment.

**A.A. Shevchuk:** formulation of achieved results and description of their significance; manuscript preparation.

***Conflict of Interest Statement:*** the authors declare no conflict of interest.

***All authors have read and approved the final manuscript.***

**Поступила в редакцию / Received** 02.02.2026

**Поступила после рецензирования / Reviewed** 03.03.2026

**Принята к публикации / Accepted** 20.03.2026