

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 519.6

Оригинальное эмпирическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-1-21-36>


Численное решение краевых задач с однородным линейным уравнением в частных производных модифицированным методом Бубнова-Галеркина на прямоугольнике

Н.К. Волосова¹, К.А. Волосов² , А.К. Волосова² , Н.А. Гурьева⁴, М.И. Карлов³,
Д.Ф. Пастухов⁴ , Ю.Ф. Пастухов⁴

¹ Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Российская Федерация

² Российский университет транспорта, г. Москва, Российская Федерация

³ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
г. Долгопрудный, Российская Федерация

⁴ Полоцкий государственный университет им. Евфросинии Полоцкой, г. Новополоцк, Республика Беларусь

dmitrij.pastuhov@mail.ru

Аннотация

Введение. Рассматривается численное решение краевой задачи с линейным однородным уравнением в частных производных эллиптического типа на прямоугольнике модифицированным методом Бубнова-Галеркина, причем неизвестная функция равна нулю в вершинах прямоугольника. К краевым задачам данного типа можно отнести задачи с уравнениями Пуассона и Лапласа второго порядка, бигармоническое уравнение четвертого порядка и т. д. В полученных алгоритмах допускаются уравнения не только с постоянными, но и с переменными коэффициентами на прямоугольнике. Численное решение краевой задачи записывается в функциональном виде, то есть в виде суммы координатных функций с неизвестным вектором коэффициентов разложения.

Материалы и методы. В силу ортогональности предложенных алгоритмов решения задачи невязка линейного однородного уравнения ортогональна на прямоугольнике всем координатным функциям степенного вида, начиная с функции нуль индекса, тождественно равной единице. Все координатные функции имеют единичную норму Чебышева на прямоугольнике. Обратная матрица для решения системы линейных алгебраических уравнений в краевой задаче с уравнением Пуассона на прямоугольнике вычислялась библиотекой Msimsl.

Результаты исследования. Численное решение краевой задачи с уравнением Пуассона на прямоугольнике модифицированным методом Бубнова-Галеркина показало, что равномерная норма Чебышева невязки краевой задачи имеет порядок 10^{-12} и сравнима с методом прогонки с пятидиагональной матрицей, в котором само уравнение аппроксимировано с восьмым порядком погрешности и с тем же числом узлов равномерной сетки. Однако время решения краевой задачи модифицированным методом Бубнова-Галеркина в 30 раз меньше времени решения этой же задачи методом пятидиагональной прогонки. Быстродействие — главное преимущество методов Бубнова-Галеркина для решения краевых задач с уравнениями в частных производных без заметной потери точности решения. Оптимальным числом является четырнадцать координатных функций в задаче.

Обсуждение. В работе предложены алгоритм (3)–(18) для решения общей задачи с линейным однородным уравнением в частных производных произвольного порядка m и алгоритм (19)–(26) для решения уравнения Пуассона (Лапласа) на прямоугольнике модифицированным методом Бубнова-Галеркина. Отметим, что симметрия краевых условий на этапе редукции общей задачи приводит к уменьшению числа простых задач. Впервые предложена интегральная квадратурная формула на прямоугольнике для вычисления скалярного произведения двух функций с двенадцатым порядком погрешности.

Заключение. С помощью алгоритма (28), (29) численно решены четыре примера для уравнения Пуассона на прямоугольнике, причем неизвестная функция равна нулю в вершинах прямоугольника. Построен алгоритм (5)–(19) для решения краевых задач с однородными уравнениями в частных производных эллиптического типа произвольного порядка, что показывает успешное применение модифицированного метода Бубнова-Галеркина для решения краевых задач на прямоугольнике.

Ключевые слова: численные методы, уравнения в частных производных, гидродинамика, начально-краевая задача, математическое моделирование

Для цитирования. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Гурьева Н.А. Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Численное решение краевых задач с однородным линейным уравнением в частных производных модифицированным методом Бубнова-Галеркина на прямоугольнике. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2026;10(1):21–36. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-1-21-36>

Original Empirical Research

Numerical Solution of Boundary Value Problems with a Homogeneous Linear Partial Differential Equation by a Modified Bubnov-Galerkin Method on a Rectangle

Natalya K. Volosova¹, Konstantin A. Volosov² , Aleksandra K. Volosova² , Nina A. Gurieva⁴, Mikhail I. Karlov³, Dmitriy F. Pastukhov⁴ , Yuriy F. Pastukhov⁴ 

¹ Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

² Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation

³ Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russian Federation

⁴ Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk, Novopolotsk, Republic of Belarus

✉ dmitrij.pastukhov@mail.ru

Abstract

Introduction. This paper considers the numerical solution of a boundary value problem with a homogeneous linear partial differential equation of elliptic type on a rectangular domain using a modified Bubnov-Galerkin method. The unknown function is assumed to be zero at the vertices of the rectangle. Boundary value problems of this type include problems governed by the second-order Poisson and Laplace equations, the fourth-order biharmonic equation, and others. The developed algorithms allow equations with both constant and variable coefficients on the rectangular domain. The numerical solution of the boundary value problem is represented in a functional form, i. e., as a sum of coordinate functions with an unknown vector of expansion coefficients.

Materials and Methods. Due to the orthogonality of the proposed solution algorithms, the residual of the homogeneous linear equation is orthogonal over the rectangular domain to all coordinate functions of polynomial type, starting from the zero-index function that is identically equal to unity. All coordinate functions possess the unit Chebyshev norm on the rectangle. The inverse matrix required for solving the system of linear algebraic equations in the boundary value problem with the Poisson equation on the rectangle was computed using the Msimsl library.

Results. The numerical solution of the boundary value problem with the Poisson equation on a rectangle using the modified Bubnov-Galerkin method shows that the uniform Chebyshev norm of the residual of the boundary value problem is of order 10^{-12} and is comparable with the sweep method for a pentadiagonal matrix, in which the equation itself is approximated with eighth-order accuracy using the same number of nodes of a uniform grid. However, the computation time of the modified Bubnov-Galerkin method is 30 times smaller than that of the pentadiagonal sweep method for solving the same problem. High computational efficiency is the main advantage of the Bubnov-Galerkin methods for solving boundary value problems with partial differential equations without a noticeable loss of accuracy. The optimal number of coordinate functions in the problem is fourteen.

Discussion. The paper proposes algorithm (3)–(18) for solving the general problem with a homogeneous linear partial differential equation of arbitrary order m , and algorithm (19)–(26) for solving the Poisson (Laplace) equation on a rectangle using the modified Bubnov-Galerkin method. It should be noted that the symmetry of boundary conditions at the stage of reduction of the general problem leads to a decrease in the number of elementary subproblems. For the first time, an integral quadrature formula on a rectangle is proposed for computing the scalar product of two functions with twelfth-order accuracy.

Conclusion. Using algorithms (28) and (29), four examples of the Poisson equation on a rectangular domain were solved numerically, where the unknown function is zero at the vertices of the rectangle. An algorithm (5)–(19) was developed for solving boundary value problems with homogeneous elliptic partial differential equations of arbitrary order, demonstrating the successful application of the modified Bubnov-Galerkin method for solving boundary value problems on a rectangular domain.

Keywords: numerical methods, partial differential equations, hydrodynamics, initial-boundary value problem, mathematical modelling

For Citation. Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Gurieva N.A., Karlov M.I., Pastukhov D.F., Pastukhov Yu.F. Numerical solution of boundary value problems with a homogeneous linear partial differential equation by a modified Bubnov-Galerkin method on a rectangle. *Computation Mathematics and Information Technologies*. 2026;10(1):21–36. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-1-21-36>

Введение. В работе впервые рассмотрена возможность применения модифицированного метода Бубнова-Галеркина на прямоугольнике с линейным однородным уравнением в частных производных эллиптического типа произвольного целого порядка m для решения краевой задачи в случаях, когда неизвестная функция равна нулю в вершинах прямоугольника. Методы решения краевых задач с линейными уравнениями в частных производных и классификация уравнений подробно описаны в работах [1–3]. В работах [4–10] приведены алгоритмы решения краевых задач, в том числе двумерных. В работах [11–13] предложен модифицированный метод Бубнова-Галеркина для решения краевых задач на отрезке с обыкновенным дифференциальным уравнением. В данной работе метод Бубнова-Галеркина обобщается для решения краевых задач на прямоугольнике с линейными уравнениями в частных производных с нулевым значением функции в вершинах прямоугольника.

Материалы и методы

Постановка задачи. Рассмотрим краевую задачу для однородного линейного уравнения в частных производных произвольного порядка m на прямоугольнике для функции двух переменных $u(x, y)$. Уравнение называется однородным, если каждое его слагаемое пропорционально частной производной одного и того же порядка m . К данному типу уравнений эллиптического типа, не зависящих от времени, можно отнести уравнение Лапласа ($m = 2$) [3, стр. 29], уравнение Пуассона, бигармоническое уравнение ($m = 4$) [3, стр. 80]:

$$\begin{cases} Lu(x, y) = 0, L \equiv \sum_{j=0}^m g_j(x, y) \frac{\partial^j \partial^{m-j}}{\partial x^j \partial y^{m-j}}, & x \in (a, b), y \in (c, d), \\ u|_{x=a} = \Phi_1(y), u|_{x=b} = \Phi_2(y), \\ u|_{y=c} = \Phi_3(x), u|_{y=d} = \Phi_4(x). \end{cases} \quad (1)$$

Коэффициенты линейного уравнения (1) будем считать непрерывными $g_j(x, y) \in C[a, b] \times [c, d]$ и не зависящими от неизвестной функции $u(x, y)$. Краевые условия задачи (1) — непрерывные функции, которые в вершинах прямоугольника подчинены однородным условиям согласования:

$$\Phi_1(c) = \Phi_3(a) = \Phi_1(d) = \Phi_4(a) = \Phi_2(c) = \Phi_4(b) = \Phi_2(d) = \Phi_3(b) = 0. \quad (2)$$

Выберем систему линейно-независимых функций на отрезке $[a, b]$ либо на отрезке $[c, d]$, как в работах [11–13]:

$$\phi_k(x) = \left(\frac{2x - a - b}{b - a} \right)^k \quad (k = \overline{0, n}); \quad \phi_k : x \in [a, b] \rightarrow z \in \begin{cases} [-1, 1], & k = 2l + 1, \\ [0, 1], & k = 2l, \end{cases} \quad (3)$$

$$\phi_k(y) = \left(\frac{2y - c - d}{d - c} \right)^k \quad (k = \overline{0, n}); \quad \phi_k : y \in [c, d] \rightarrow z \in \begin{cases} [-1, 1], & k = 2l + 1, \\ [0, 1], & k = 2l. \end{cases} \quad (4)$$

В силу линейности (1) можно провести редукцию краевой задачи (1), то есть представить ее решение в виде $u(x, y) = u^1(x, y) + u^2(x, y) + u^3(x, y) + u^4(x, y)$, где:

$$\begin{cases} Lu^1(x, y) = 0, x \in (a, b), y \in (c, d), \\ u^1|_{x=a} = \Phi_1(y), u^1|_{x=b} = 0, \Phi_1(c) = \Phi_1(d) = 0, \\ u^1|_{y=c} = 0, u^1|_{y=d} = 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} Lu^2(x, y) = 0, x \in (a, b), y \in (c, d), \\ u^2|_{x=a} = 0, u^2|_{x=b} = \Phi_2(y), \Phi_2(c) = \Phi_2(d) = 0, \\ u^2|_{y=c} = 0, u^2|_{y=d} = 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} Lu^3(x, y) = 0, x \in (a, b), y \in (c, d), \\ u^3|_{x=a} = 0, u^3|_{x=b} = 0, \Phi_3(a) = \Phi_3(b) = 0, \\ u^3|_{y=c} = \Phi_3(x), u^3|_{y=d} = 0, \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\begin{cases} Lu^4(x, y) = 0, x \in (a, b), y \in (c, d), \\ u^4|_{x=a} = 0, u^4|_{x=b} = 0, \Phi_4(a) = \Phi_4(b) = 0, \\ u^4|_{y=c} = 0, u^4|_{y=d} = \Phi_4(x). \end{cases} \quad (5.4)$$

Решение задачи (5.1) ищем в виде

$$u^1(x, y) = \Phi_1(y)X_1(x) = \Phi_1(y) \sum_{k=0}^n C_k^1 \phi_k(x) \quad (6)$$

с неизвестным вектором весовых коэффициентов разложения C_k^1 .

Учитывая явный вид оператора в частных производных в задаче (1), подставим разложение решения задачи (6) в систему уравнений (5.1):

$$\sum_{j=0}^m g_j(x, y) \frac{\partial^j \partial^{m-j}}{\partial x^j \partial y^{m-j}} \left[\Phi_1(y) \sum_{k=0}^n C_k^1 \phi_k(x) \right] = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n C_k^1 \sum_{j=0}^k g_j(x, y) \Phi_1^{(m-j)}(y) \phi_k^{(j)}(x) = 0.$$

В последней сумме множество индексов $0 \leq j \leq k$ объясняется тем, что для координатных функций степенного вида производные равны

$$\phi_k^{(j)}(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{b-a} \right)^j k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-j+1) \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right)^{k-j}, & j \leq k, \\ 0, & j > k \end{cases} \quad (7.1)$$

Аналогично,

$$\phi_k^{(j)}(y) = \begin{cases} \left(\frac{2}{d-c} \right)^j k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-j+1) \left(\frac{2y-c-d}{d-c} \right)^{k-j}, & j \leq k, \\ 0, & j > k \end{cases} \quad (7.2)$$

Умножим последнее уравнение на координатную функцию $\phi_i(x)$ и потребуем, согласно методу Бубнова-Галеркина, ортогональности невязки уравнения всем координатным функциям $\phi_i(x)$, $i = 0, n-2$. В данном случае невязка совпадает с левой частью последнего уравнения. После скалярного умножения функций в метрике функционального пространства L_2 получим:

$$\sum_{k=0}^n C_k^1 \left\langle \sum_{j=0}^k g_j(x, y) \Phi_1^{(m-j)}(y) \phi_k^{(j)}(x), \phi_i(x) \right\rangle = 0. \quad (8)$$

Решение задачи (5.1) следует рассматривать на множестве допустимых функций с использованием краевых условий (5.1), то есть

$$u^1(a, y) = \Phi_1(y) \sum_{k=0}^n C_k^1 \phi_k(a) = \Phi_1(y) \sum_{k=0}^n C_k^1 (-1)^k = \Phi_1(y) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n C_k^1 (-1)^k = 1,$$

$$u^1(b, y) = \Phi_1(y) \sum_{k=0}^n C_k^1 \phi_k(b) = \Phi_1(y) \sum_{k=0}^n C_k^1 (1)^k = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n C_k^1 = 0,$$

$$u^1(x, c) = \Phi_1(c) \sum_{k=0}^n C_k^1 \phi_k(x) = 0 \Leftrightarrow \Phi_1(c) = 0, u^1(x, d) = \Phi_1(d) \sum_{k=0}^n C_k^1 \phi_k(x) = 0 \Leftrightarrow \Phi_1(d) = 0.$$

Получим $n+1$ систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных коэффициентов C_k^1 :

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n A_{i,k}^1 C_k^1 = f_i^1, & i = \overline{0, n}, \\ A_{i,k}^1 = \left\langle \sum_{j=0}^k g_j(x, y) \Phi_2^{(m-j)}(y) \phi_k^{(j)}(x), \phi_i(x) \right\rangle, & i = \overline{0, n-2}, k = \overline{0, n}, \\ A_{n-1,k}^1 = (-1)^k, & k = \overline{0, n}; \quad A_{n,k}^1 = 1, k = \overline{0, n}, \\ f_i^1 = 0, & i = \overline{0, n-2}, f_{n-1}^1 = 1, f_n^1 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Неоднородность СЛАУ обеспечивает коэффициент $f_{n-1}^1 = 1$ в правой части (9).

В классических методах уравнений математической физики решение краевой задачи раскладывают по собственным функциям однородной краевой задачи, при этом каждая собственная функция удовлетворяет однородным краевым условиям. Условия однородности для каждой собственной функции $\phi_k(x)$ являются достаточными, чтобы вся сумма вида (6) на концах отрезка $x = a$, $x = b$ обращалась в нуль, но не являются необходимыми условиями. Необходимыми условиями в данной задаче являются $\sum_{k=0}^n C_k^1 (-1)^k = 1$ и $\sum_{k=0}^n C_k^1 = 0$.

Аналогично, для задачи (5.2) получим решение вида:

$$u^2(x, y) = \Phi_2(y)X_2(x) = \Phi_2(y) \sum_{k=0}^n C_k^2 \phi_k(x), \quad (10)$$

с неизвестным вектором весовых коэффициентов разложения C_k^2 и СЛАУ:

$$u^2(a, y) = \Phi_2(y) \sum_{k=0}^n C_k^2 \phi_k(a) = \Phi_2(y) \sum_{k=0}^n C_k^2 (-1)^k = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n C_k^2 (-1)^k = 0,$$

$$\begin{aligned}
 u^2(b, y) &= \Phi_2(y) \sum_{k=0}^n C_k^2 \phi_k(b) = \Phi_2(y) \sum_{k=0}^n C_k^2 (1)^k = \Phi_2(y) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n C_k^2 = 1, \\
 u^2(x, c) &= \Phi_2(c) \sum_{k=0}^n C_k^2 \phi_k(x) = 0 \Leftrightarrow \Phi_2(c) = 0, u^2(x, d) = \Phi_2(d) \sum_{k=0}^n C_k^2 \phi_k(x) = 0 \Leftrightarrow \Phi_2(d) = 0, \\
 &\begin{cases} \sum_{k=0}^n A_{i,k}^2 C_k^2 = f_i^2, i = \overline{0, n}, \\ A_{i,k}^2 = \left\langle \sum_{j=0}^k g_j(x, y) \Phi_1^{(m-j)}(y) \phi_k^{(j)}(x), \phi_i(x) \right\rangle, i = \overline{0, n-2}, k = \overline{0, n}, \\ A_{n-1,k}^2 = (-1)^k, k = \overline{0, n}; \quad A_{n,k}^2 = 1, k = \overline{0, n}, \\ f_i^2 = 0, i = \overline{0, n-2}, \quad f_{n-1}^2 = 0, f_n^2 = 1. \end{cases} \quad (11)
 \end{aligned}$$

Для решения задачи (5.3) имеем разложение решения по неизвестному вектору коэффициентов C_k^3 :

$$u^3(x, y) = \Phi_3(x) Y_3(y) = \Phi_3(x) \sum_{k=0}^n C_k^3 \phi_k(y) \quad (12)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned}
 u^3(x, c) &= \Phi_3(x) \sum_{k=0}^n C_k^3 \phi_k(c) = \Phi_3(x) \sum_{k=0}^n C_k^3 (-1)^k = \Phi_3(x) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n C_k^3 (-1)^k = 1, \\
 u^3(x, d) &= \Phi_3(x) \sum_{k=0}^n C_k^3 \phi_k(d) = \Phi_3(x) \sum_{k=0}^n C_k^3 (1)^k = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n C_k^3 = 0, \\
 u^3(a, y) &= \Phi_3(a) \sum_{k=0}^n C_k^3 \phi_k(y) = 0 \Leftrightarrow \Phi_3(a) = 0, u^3(b, y) = \Phi_3(b) \sum_{k=0}^n C_k^3 \phi_k(y) = 0 \Leftrightarrow \Phi_3(b) = 0
 \end{aligned}$$

и системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n A_{i,k}^3 C_k^3 = f_i^3, i = \overline{0, n}, \\ A_{i,k}^3 = \left\langle \sum_{j=m-k}^m g_j(x, y) \Phi_3^{(j)}(x) \phi_k^{(m-j)}(y), \phi_i(y) \right\rangle, i = \overline{0, n-2}, k = \overline{0, n}, \\ A_{n-1,k}^3 = (-1)^k, k = \overline{0, n}; \quad A_{n,k}^3 = 1, k = \overline{0, n}, \\ f_i^3 = 0, i = \overline{0, n-2}, \quad f_{n-1}^3 = 1, f_n^3 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Аналогично для задачи (5.4) разложим решение по базисным функциям с вектором весовых коэффициентов C_k^4 :

$$u^4(x, y) = \Phi_4(x) Y_4(y) = \Phi_4(x) \sum_{k=0}^n C_k^4 \phi_k(y) \quad (14)$$

с краевыми условиями (множество допустимых функций)

$$\begin{aligned}
 u^4(x, c) &= \Phi_4(x) \sum_{k=0}^n C_k^4 \phi_k(c) = \Phi_4(x) \sum_{k=0}^n C_k^4 (-1)^k = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n C_k^4 (-1)^k = 0, \\
 u^4(x, d) &= \Phi_4(x) \sum_{k=0}^n C_k^4 \phi_k(d) = \Phi_4(x) \sum_{k=0}^n C_k^4 (1)^k = \Phi_4(x) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n C_k^4 = 1, \\
 u^4(a, y) &= \Phi_4(a) \sum_{k=0}^n C_k^4 \phi_k(y) = 0 \Leftrightarrow \Phi_4(a) = 0, u^4(b, y) = \Phi_4(b) \sum_{k=0}^n C_k^4 \phi_k(y) = 0 \Leftrightarrow \Phi_4(b) = 0
 \end{aligned}$$

и системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n A_{i,k}^4 C_k^4 = f_i^4, i = \overline{0, n}, \\ A_{i,k}^4 = \left\langle \sum_{j=m-k}^m g_j(x, y) \Phi_4^{(j)}(x) \phi_k^{(m-j)}(y), \phi_i(y) \right\rangle, i = \overline{0, n-2}, k = \overline{0, n}, \\ A_{n-1,k}^4 = (-1)^k, k = \overline{0, n}; \quad A_{n,k}^4 = 1, k = \overline{0, n}, \\ f_i^4 = 0, i = \overline{0, n-2}, \quad f_{n-1}^4 = 0, f_n^4 = 1. \end{cases} \quad (15)$$

Общее решение задачи (1) представимо в виде

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= u^1(x, y) + u^2(x, y) + u^3(x, y) + u^4(x, y) = \\
 &= \Phi_1(y) \sum_{k=0}^n C_k^1 \phi_k(x) + \Phi_2(y) \sum_{k=0}^n C_k^2 \phi_k(x) + \Phi_3(x) \sum_{k=0}^n C_k^3 \phi_k(y) + \Phi_4(x) \sum_{k=0}^n C_k^4 \phi_k(y) = \\
 &= \sum_{k=0}^n (C_k^1 \Phi_1(y) + C_k^2 \Phi_2(y)) \phi_k(x) + \sum_{k=0}^n (C_k^3 \Phi_3(x) + C_k^4 \Phi_4(x)) \phi_k(y).
 \end{aligned} \quad (16)$$

Замечание. Если краевые функции на противоположных сторонах прямоугольника равны друг другу $\Phi_1(y) = \Phi_2(y)$, $\Phi_3(x) = \Phi_4(x)$, то, обозначая сумму коэффициентов разложения $C_k^1 + C_k^2 = C_k^*$, $k = \overline{0, n}$, $C_k^3 + C_k^4 = C_k^{**}$, $k = \overline{0, n}$ и складывая уравнения, содержащие $C_k^1, C_k^2, C_k^3, C_k^4$ в системах (9), (11) и (13), (15), получим две системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n A_{i,k}^* C_k^* = f_i^*, i = \overline{0, n}, \\ A_{i,k}^* = \left\langle \sum_{j=0}^k g_j(x, y) \Phi_1^{(m-j)}(y) \phi_k^{(j)}(x), \phi_i(x) \right\rangle, i = \overline{0, n-2}, k = \overline{0, n}, \\ A_{n-1,k}^* = (-1)^k, k = \overline{0, n}; A_{n,k}^* = 1, k = \overline{0, n}, \\ f_i^* = 0, i = \overline{0, n-2}, f_{n-1}^* = 1, f_n^* = 1, \end{cases} \quad (17.1)$$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n A_{i,k}^{**} C_k^{**} = f_i^{**}, i = \overline{0, n}, \\ A_{i,k}^{**} = \left\langle \sum_{j=m-k}^m g_j(x, y) \Phi_3^{(j)}(x) \phi_k^{(m-j)}(y), \phi_i(y) \right\rangle, i = \overline{0, n-2}, k = \overline{0, n}, \\ A_{n-1,k}^{**} = (-1)^k, k = \overline{0, n}; A_{n,k}^{**} = 1, k = \overline{0, n}, \\ f_i^{**} = 0, i = \overline{0, n-2}, f_{n-1}^{**} = 1, f_n^{**} = 1. \end{cases} \quad (17.2)$$

Решение по общей формуле (16) перейдет в упрощенную формулу:

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^n (C_k^* \Phi_1(y) \phi_k(x) + C_k^{**} \Phi_3(x) \phi_k(y)). \quad (18)$$

Отметим, что в системах линейных алгебраических уравнений (9), (11), (13), (15) скалярное произведение двух функций на прямоугольнике находится с помощью весовой матрицы для двумерной квадратурной интегральной формулы с двенадцатым порядком погрешности. Одномерный вариант весовых коэффициентов применялся в работах [11–13]:

$$\begin{aligned}
 \langle f_1, f_2 \rangle &= \int_a^b \int_c^d f_1(x, y) f_2(x, y) dx dy = 25 h_1 h_2 \sum_{i=0}^{n_2} \sum_{j=0}^{n_1} C_{i,j} f_1(x_j, y_i) f_2(x_j, y_i) + \\
 &+ O(h_1^{12} + h_2^{12}), C_{i,j} = C_i^2 \cdot C_j^1, i = \overline{0, n_2}, j = \overline{0, n_1}, \\
 x_j &= a + j h_1, y_i = c + i h_2, n_1 = 10 p_1, n_2 = 10 p_2, h_1 = \frac{b-a}{n_1}, h_2 = \frac{d-c}{n_2}, p_1, p_2 \in N,
 \end{aligned}$$

где

$$C_i^k = \begin{cases} \frac{16067}{299376}, \text{если } i = 0 \text{ или } i = n_k, k = 1, 2, (i = \overline{0, n_k}), \\ \frac{16067}{149688}, \text{если } (i \equiv 0 \pmod{10}) \text{ или } (0 < i < n_k), \\ \frac{26575}{74844}, \text{если } (i \equiv 1 \pmod{10}) \text{ или } (i \equiv 9 \pmod{10}), \\ \frac{-16175}{99792}, \text{если } (i \equiv 2 \pmod{10}) \text{ или } (i \equiv 8 \pmod{10}), \\ \frac{5675}{6237}, \text{если } (i \equiv 3 \pmod{10}) \text{ или } (i \equiv 7 \pmod{10}), \\ \frac{-4825}{5544}, \text{если } (i \equiv 4 \pmod{10}) \text{ или } (i \equiv 6 \pmod{10}), \\ \frac{17807}{12474}, \text{если } i \equiv 5 \pmod{10}. \end{cases} \quad (19)$$

Рассмотрим численное решение уравнения Пуассона на прямоугольнике (пример взят из работы [14]), используя полученный алгоритм решения общей задачи (1):

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \sin x, & 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = \sin y, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = \sin x, & 0 \leq y \leq \pi. \end{cases} \quad (20)$$

Приведенный пример (20) имеет точное аналитическое решение [14, стр. 64]:

$$u(x, y) = \left(\left(\frac{1 - \operatorname{ch} \pi}{\operatorname{sh} \pi} \right) \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x \right) \sin y + \left(\left(\frac{1 - \operatorname{ch} \pi}{\operatorname{sh} \pi} \right) \operatorname{sh} y + \operatorname{ch} y \right) \sin x + \left(-1 + \left(\frac{1 - \operatorname{ch} \pi}{\operatorname{sh} \pi} \right) \operatorname{sh} y + \operatorname{ch} y \right) \sin x. \quad (21)$$

Для уравнения Пуассона коэффициенты уравнения в частных производных в задаче (1) равны $g_0(x, y) \equiv 1, g_1(x, y) \equiv 0, g_2(x, y) \equiv 1$. Численное решение примера 1 с учетом замечания для равенства краевых условий на противоположных сторонах прямоугольника, а также равенства правой части уравнения Пуассона второму краевому условию (функции $\sin x$) разобьем на две части. Исходную задачу (20) сводим к двум более простым, где первая задача имеет вид:

$$\begin{cases} u^1_{xx} + u^1_{yy} = \sin x, & 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u^1|_{x=0} = u^1|_{x=\pi} = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u^1|_{y=0} = u^1|_{y=\pi} = \sin x, & 0 \leq y \leq \pi, \end{cases} \quad (22)$$

$$u^1(x, y) = \sin x \cdot \sum_{k=0}^n C_k^1 \phi_k(y)$$

с краевыми условиями

$$y = 0 : \sum_{k=0}^n C_k^1 (-1)^k = 1, \quad y = \pi : \sum_{k=0}^n C_k^1 = 1.$$

Подставим решение $u^1(x, y)$ в уравнение Лапласа

$$-\sin x \cdot \sum_{k=0}^n C_k^1 \phi_k(y) + \sin x \cdot \sum_{k=2}^n C_k^1 \phi_k''(y) = \sin x \Leftrightarrow -C_0^1 - C_1^1 \phi_1 + \sum_{k=2}^n C_k^1 (\phi_k'' - \phi_k) = 1,$$

умножая скалярно последнее уравнение на базисную функцию $\phi_i(y), i = \overline{0, n-2}$, получим:

$$\begin{aligned} -C_0^1 \langle 1, \phi_i \rangle - C_1^1 \langle \phi_1, \phi_i \rangle + \sum_{k=2}^n C_k^1 \langle \phi_k'' - \phi_k, \phi_i \rangle &= \langle 1, \phi_i \rangle, i = \overline{0, n-2} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n A_{i,k}^1 C_k^1 = f_i^1, i = \overline{0, n}, \\ A_{i,k}^1 &= \langle \phi_k'' - \phi_k, \phi_i \rangle, i = \overline{0, n-2}, k = \overline{2, n}; A_{i,0}^1 = -\langle 1, \phi_i \rangle, i = \overline{0, n-2}, k = 0; A_{i,1}^1 = -\langle \phi_1, \phi_i \rangle, i = \overline{0, n-2}, k = 1, \\ f_i^1 &= \langle 1, \phi_i \rangle, i = \overline{0, n-2}, f_{n-1}^1 = f_n^1 = 1. \end{aligned} \quad (23)$$

Если определитель матрицы $A_{i,k}^1; i, k = \overline{0, n}$ отличен от нуля, то существует единственное решение СЛАУ (22) $C^1 = (A^1)^{-1} f^1$.

Вторую подзадачу для решения задачи (20) запишем в виде:

$$\begin{cases} u^2_{xx} + u^2_{yy} = 0, & 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u^2|_{x=0} = u^2|_{x=\pi} = \sin y, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u^2|_{y=0} = u^2|_{y=\pi} = 0, & 0 \leq y \leq \pi, \end{cases} \quad (24)$$

$$u^2(x, y) = \sin y \cdot \sum_{k=0}^n C_k^2 \phi_k(x)$$

с краевыми условиями

$$x = 0 : \sum_{k=0}^n C_k^2 (-1)^k = 1, \quad x = \pi : \sum_{k=0}^n C_k^2 = 1.$$

Подставим решение $u^2(x, y)$ в уравнение Лапласа:

$$\sin y \cdot \sum_{k=2}^n C_k^2 \phi_k''(x) - \sin y \cdot \sum_{k=0}^n C_k^2 \phi_k(x) = 0 \Leftrightarrow -C_0^2 - C_1^2 \phi_1 + \sum_{k=2}^n C_k^2 (\phi_k'' - \phi_k) = 0,$$

умножая скалярно последнее уравнение на базисную функцию $\phi_i(x), i = \overline{0, n-2}$, получим:

$$-C_0^2 \langle 1, \phi_i \rangle - C_1^2 \langle \phi_1, \phi_i \rangle + \sum_{k=2}^n C_k^2 \langle \phi_k^* - \phi_k, \phi_i \rangle = 0, i = \overline{0, n-2} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n A_{i,k}^2 C_k^2 = f_i^2, i = \overline{0, n},$$

$$A_{i,k}^2 = \langle \phi_k^* - \phi_k, \phi_i \rangle, i = \overline{0, n-2}, k = \overline{2, n}; A_{i,0}^2 = -\langle 1, \phi_i \rangle, i = \overline{0, n-2}, k = 0; A_{i,1}^2 = -\langle \phi_1, \phi_i \rangle, i = \overline{0, n-2}, k = 1, \quad (25)$$

$$f_i^2 = 0, i = \overline{0, n-2}, f_{n-1}^2 = f_n^2 = 1.$$

Вектор коэффициентов разложения найдем по формуле $C^2 = (A^2)^{-1} f^2$.

Окончательно численное решение задачи (20) представимо в виде суммы решений задач (22), (24):

$$u(x, y) = u^1(x, y) + u^2(x, y) = \sin x \cdot \sum_{k=0}^n C_k^1 \phi_k(y) + \sin y \cdot \sum_{k=0}^n C_k^2 \phi_k(x). \quad (26)$$

Таблица 1

Результаты работы программы с числом базисных функций 14 ($n = 13$)

x_j	y_i	$u^{exact}(x_j, y_i)$	$u^{num}(x_j, y_i)$
0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	0,000000000E+000	0,00000000E+000
0,785398163397448	0,0000000000E+000	0,707106781186547	0,707106781188
1,57079632679490	0,0000000000E+000	1,000000000000000	1,000000000002
2,35619449019234	0,0000000000E+000	0,707106781186548	0,707106781188
3,14159265358979	0,0000000000E+000	1,22460635382-016	1,224606353E-016
0,392699081698724	0,392699081698724	0,430835084394819	0,4308350843945
1,17809724509617	0,392699081698724	0,549883843264189	0,549883843263
1,96349540849362	0,392699081698724	0,549883843264189	0,549883843263
2,74889357189107	0,392699081698724	0,430835084394819	0,4308350843945
0,000000000E+000	0,78539816339744	0,70710678118654	0,707106781188
0,785398163397448	0,785398163397448	0,412749869982035	0,412749869984
1,57079632679490	0,785398163397448	0,337619060675814	0,337619060678
2,35619449019234	0,785398163397448	0,412749869982035	0,412749869984
3,14159265358979	0,785398163397448	0,707106781186547	0,707106781188
0,392699081698724	1,17809724509617	0,600835882782445	0,600835882781
1,17809724509617	1,17809724509617	0,266992276932959	0,266992276929
1,96349540849362	1,17809724509617	0,266992276932959	0,266992276929
2,74889357189107	1,17809724509617	0,600835882782445	0,600835882781
0,0000000000E+000	1,57079632679490	1,000000000000000	1,000000000002
0,785398163397448	1,57079632679490	0,384414876168756	0,384414876171
1,57079632679490	1,57079632679490	0,195610446015160	0,195610446018
2,35619449019234	1,57079632679490	0,384414876168756	0,384414876171
3,14159265358979	1,57079632679490	1,000000000000000	1,0000000000028
0,392699081698724	1,96349540849362	0,600835882782446	0,600835882781
1,17809724509617	1,96349540849362	0,266992276932960	0,266992276929
1,96349540849362	1,96349540849362	0,266992276932960	0,266992276929
2,74889357189107	1,96349540849362	0,600835882782445	0,600835882781
0,0000000000E+000	2,35619449019234	0,707106781186548	0,707106781188
0,785398163397448	2,35619449019234	0,412749869982035	0,412749869984
1,57079632679490	2,35619449019234	0,337619060675815	0,337619060678
2,35619449019234	2,35619449019234	0,412749869982035	0,412749869984
3,14159265358979	2,35619449019234	0,707106781186548	0,707106781188
0,392699081698724	2,74889357189107	0,430835084394819	0,4308350843945
1,17809724509617	2,74889357189107	0,549883843264188	0,549883843263
1,96349540849362	2,74889357189107	0,549883843264188	0,549883843263
2,74889357189107	2,74889357189107	0,430835084394819	0,4308350843945
0,0000000000E+000	3,14159265358979	1,2246063538E-016	1,224606353E-016
0,785398163397448	3,14159265358979	0,707106781186548	0,707106781188
1,57079632679490	3,14159265358979	1,000000000000000	1,00000000000272
2,35619449019234	3,14159265358979	0,707106781186548	0,707106781188
3,14159265358979	3,14159265358979	2,4492127076E-016	2,4492127076E-016

В первом и втором столбцах таблицы записаны координаты узловых точек прямоугольника, в третьем и четвертом столбцах точное (по формуле (21)) и численное (по формуле (26)) решения задачи (20) на равномерной сетке $x_j = a + jh_1, y_i = c + ih_2, j = \overline{0, n_1}, i = \overline{0, n_2}, h_1 = \frac{b-a}{n_1}, h_2 = \frac{d-c}{n_2}, n_1 = n_2 = 40$. В пространстве дискретных функций с равномерной нормой невязка решения примера (20) равна $\|u^{exact} - u^{num}\|_C = \max_{j=\overline{0, n_1}, i=\overline{0, n_2}} |u_{i,j}^{exact} - u_{i,j}^{num}| = 3,764766276503906E - 012$.

В работе [14] уравнение Пуассона на прямоугольнике аппроксимируется с восьмым порядком погрешности. Полученное разностное уравнение в краевой задаче (20) решается методом прогонки с пятидиагональной матрицей и методом простой итерации. С помощью программы при аналогичных параметрах $n_1 = 40$ ($n = 80$); $n_2 = 40$ ($n_1 = 40$), ($m = 20000$) (в скобках указаны параметры программы в статье [14]) получим, что

$$\|u^{exact} - u^{num}\|_C = \max_{j=\overline{0, n_1}, i=\overline{0, n_2}} |u_{i,j}^{exact} - u_{i,j}^{num}| = 7,355227538141662E - 013.$$

На языке Fortran с использованием библиотеки dfmsl можно записывать момент начала (call cpu_time(t1)) и окончания (call cpu_time(t2)) работы программы. Используя программу из статьи [14] получим время работы $t_2 - t_1 = 2,125$ секунды. Время работы программы с алгоритмом (19)–(26) в данной работе равно $t_2 - t_1 = 7,8125E - 002$, то есть в 27,2 (в десятки) раз меньше, чем в работе [14] при сопоставимой точности решения задач в равномерной метрике.

Рассмотрим однородную краевую задачу Дирихле (27) на прямоугольнике для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \sin x \cdot \sin y = f_1(x)f_2(y), f_1(0) = f_1(\pi) = 0, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, 0 \leq x \leq \pi, \\ u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, 0 \leq y \leq \pi \end{cases} \quad (27)$$

с точным решением

$$u(x, y) = \frac{-\sin x \sin y}{2} : u_{xx} + u_{yy} = \frac{\sin x \sin y}{2} + \frac{\sin x \sin y}{2} = \sin x \sin y,$$

$$u(x, y) = f_1(x) \sum_{k=0}^n C_k \phi_k(y) = \sin x \cdot \sum_{k=0}^n C_k \phi_k(y)$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} u(x, c) = f_1(x) \sum_{k=0}^n C_k \phi_k(c) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n C_k (-1)^k = 0, \quad u(x, d) = f_1(x) \sum_{k=0}^n C_k \phi_k(d) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n C_k^1 = 0, \\ u(0, y) = \sin 0 \cdot \sum_{k=0}^n C_k \phi_k(y) &= 0, u(\pi, y) = \sin \pi \cdot \sum_{k=0}^n C_k \phi_k(y) = 0. \end{aligned}$$

Подставим решение $u(x, y)$ в уравнение Лапласа:

$$f_1''(x) \cdot \sum_{k=0}^n C_k \phi_k(y) + f_1(x) \cdot \sum_{k=2}^n C_k \phi_k''(y) = f_1(x)f_2(y).$$

Умножая скалярно последнее уравнение на базисную функцию $\phi_i(y), i = \overline{0, n-2}$, в общем случае получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_k \langle f_1''(x) \phi_k(y), \phi_i(y) \rangle + \sum_{k=2}^n C_k \langle f_1(x) \phi_k''(y), \phi_i(y) \rangle &= \langle f_1(x)f_2(y), \phi_i(y) \rangle \Leftrightarrow \\ C_0 \langle f_1''(x), \phi_i \rangle + C_1 \langle \phi_1 f_1''(x), \phi_i \rangle + \sum_{k=2}^n C_k \langle f_1(x) \phi_k'' + \phi_k f_1''(x), \phi_i \rangle &= \langle f_1(x)f_2(y), \phi_i(y) \rangle, i = \overline{0, n-2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n A_{i,k} C_k &= f_i, i = \overline{0, n}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{cases} A_{i,k} = \langle f_1(x) \phi_k''(y) + \phi_k(y) f_1''(x), \phi_i(y) \rangle, i = \overline{0, n-2}, k = \overline{2, n}, \\ A_{i,0} = \langle f_1''(x), \phi_i(y) \rangle, i = \overline{0, n-2}, k = 0; A_{i,1} = \langle \phi_1(y) f_1''(x), \phi_i(y) \rangle, i = \overline{0, n-2}, k = 1, \\ A_{n-1,k} = (-1)^k, A_{n,k} = 1, k = \overline{0, n}, \\ f_i = \langle f_1(x)f_2(y), \phi_i(y) \rangle, i = \overline{0, n-2}, f_{n-1} = f_n = 0. \end{cases}$$

Для примера (27) из (28) получим:

$$\begin{aligned} -\sin x \cdot \sum_{k=0}^n C_k \phi_k(y) + \sin x \cdot \sum_{k=2}^n C_k \phi_k''(y) &= \sin x \sin y \Leftrightarrow -C_0 - C_1 \phi_1 + \sum_{k=2}^n C_k (\phi_k'' - \phi_k) = f_2(y) = \sin y, \\ -C_0 \langle 1, \phi_i \rangle - C_1 \langle \phi_1, \phi_i \rangle + \sum_{k=2}^n C_k \langle \phi_k'' - \phi_k, \phi_i \rangle &= \langle \sin y, \phi_i \rangle, i = \overline{0, n-2} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n A_{i,k} C_k = f_i, i = \overline{0, n}, \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^n A_{i,k} C_k = f_i, i = \overline{0, n}, \quad (29)$$

$$A_{i,k} = \langle \phi_k^* - \phi_k, \phi_i \rangle, i = \overline{0, n-2}, k = \overline{2, n}; A_{i,0} = -\langle 1, \phi_i \rangle, i = \overline{0, n-2}, k = 0; A_{i,1} = -\langle \phi_1, \phi_i \rangle, i = \overline{0, n-2}, k = 1,$$

$$A_{n-1,k} = (-1)^k, A_{n,k} = 1, k = \overline{0, n}, f_i = \langle \sin y, \phi_i \rangle, i = \overline{0, n-2}, f_{n-1} = f_n = 0.$$

Существует единственное решение СЛАУ (27): $u(x, y) = \sin x \cdot \sum_{k=0}^n C_k \phi_k(y)$, $C = (A)^{-1} f$.

Таблица 2

Результаты работы программы в примере (27) с 14 базисными функциями

x_j	y_i	$u^{exact}(x_j, y_i)$	$u^{num}(x_j, y_i)$
0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000
0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000
0,628318530717959	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	-2,8151350900E-013
1,25663706143592	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	-4,5549842585E-013
1,88495559215388	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	-4,5549842585E-013
2,51327412287183	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	-2,8151350900E-013
3,14159265358979	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	-5,8651221762E-029
0,0000000000E+000	0,628318530717959	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000
0,628318530717959	0,628318530717959	-0,172745751406263	-0,172745751406184
1,25663706143592	0,628318530717959	-0,279508497187474	-0,279508497187345
1,88495559215388	0,628318530717959	-0,279508497187474	-0,279508497187345
2,51327412287183	0,628318530717959	-0,172745751406263	-0,172745751406184
3,14159265358979	0,628318530717959	-3,5990277732E-017	-3,5990277732E-017
0,0000000000E+000	1,25663706143592	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000
0,628318530717959	1,25663706143592	-0,279508497187474	-0,279508497188230
1,25663706143592	1,25663706143592	-0,452254248593737	-0,452254248594961
1,88495559215388	1,25663706143592	-0,452254248593737	-0,452254248594961
2,51327412287183	1,25663706143592	-0,279508497187474	-0,279508497188230
3,14159265358979	1,25663706143592	-5,8233492634E-017	-5,8233492635E-017
0,0000000000E+000	1,88495559215388	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000
0,628318530717959	1,88495559215388	-0,279508497187474	-0,279508497188234
1,25663706143592	1,88495559215388	-0,452254248593737	-0,452254248594967
1,88495559215388	1,88495559215388	-0,452254248593737	-0,452254248594967
2,51327412287183	1,88495559215388	-0,279508497187474	-0,279508497188234
3,14159265358979	1,88495559215388	-5,8233492634E-017	-5,8233492635E-017
0,0000000000E+000	2,51327412287183	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000
0,628318530717959	2,51327412287183	-0,172745751406263	-0,172745751406185
1,25663706143592	2,51327412287183	-0,279508497187474	-0,279508497187347
1,88495559215388	2,51327412287183	-0,279508497187474	-0,279508497187347
2,51327412287183	2,51327412287183	-0,172745751406263	-0,172745751406185
3,14159265358979	2,51327412287183	-3,5990277732E-017	-3,5990277732E-017
0,0000000000E+000	3,14159265358979	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000
0,628318530717959	3,14159265358979	-3,59902777320E-017	-2,8152623432E-013
1,25663706143592	3,14159265358979	-5,8233492634E-017	-4,5551901586E-013
1,88495559215388	3,14159265358979	-5,8233492634E-017	-4,5551901586E-013
2,51327412287183	3,14159265358979	-3,59902777320E-017	-2,8152623432E-013
3,14159265358979	3,14159265358979	-7,49830360911E-033	-5,8653872988E-029

Программа для примера (27) с уравнением Пуассона с учетом формул (28), (29) дает равномерную норму погрешности $\|u^{exact} - u^{num}\|_C = \max_{j=0, n_1, i=0, n_2} |u_{i,j}^{exact} - u_{i,j}^{num}| = 1,650901637617608E-012$, $n_1 = n_2 = 30, n = 13$ за время работы $t_2 - t_1 = 3,125000000000000E-002$ секунды в режиме Debug.

Третий пример отличается от второго множителем x^2 вместо функции $\sin x$:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = x^2 \cdot \sin y, & 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, & 0 \leq y \leq \pi. \end{cases} \quad (30)$$

Решение примера (30) ищем в виде:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= f(x) \sin y, u_{xx} = f'' \sin y, u_{yy} = -f(x) \sin(y), \\ u_{xx} + u_{yy} &= \sin y (f'' - f) = x^2 \sin y \Leftrightarrow f'' - f = x^2. \end{aligned}$$

В итоге имеем краевую задачу

$$\begin{cases} f'' - f = x^2, & 0 < x < \pi, \\ f(0) = f(\pi) = 0. \end{cases}$$

Общее решение однородного уравнения $f'' - f = 0$ имеет вид $f_{oh}(x) = A \operatorname{ch} x + B \operatorname{sh} x$, частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $f_u(x) = C + Dx^2 \Leftrightarrow 2D - C - Dx^2 = x^2 \Leftrightarrow D = -1, C = 2D = -2; f_u(x) = -x^2 - 2$.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$f_{oh}(x) = A \operatorname{ch} x + B \operatorname{sh} x - x^2 - 2; f_{oh}(0) = 0 \Leftrightarrow A = 2; f_{oh}(\pi) = 0 \Leftrightarrow 2 \operatorname{ch} \pi + B \operatorname{sh} \pi - \pi^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$B = \frac{2(1 - \operatorname{ch} \pi) + \pi^2}{\operatorname{sh} \pi}, f(x) = 2 \operatorname{ch} x + \left(\frac{2(1 - \operatorname{ch} \pi) + \pi^2}{\operatorname{sh} \pi} \right) \operatorname{sh} x - x^2 - 2.$$

В итоге точное решение (третий столбец в таблице 3) примера (30) имеет вид:

$$u(x, y) = \left(2 \operatorname{ch} x + \left(\frac{2(1 - \operatorname{ch} \pi) + \pi^2}{\operatorname{sh} \pi} \right) \operatorname{sh} x - x^2 - 2 \right) \sin y.$$

Таблица 3

Результаты работы программы в примере (30) по алгоритму (28) с 14 базисными функциями

x_j	y_i	$u^{exact}(x_j, y_i)$	$u^{num}(x_j, y_i)$
0,000000000E+000	0,00000000000E+000	0,00000000000E+000	0,00000000000E+000
0,628318530717959	0,00000000000E+000	0,00000000000E+000	0,00000000000E+000
1,25663706143592	0,00000000000E+000	0,00000000000E+000	0,00000000000E+000
1,88495559215388	0,00000000000E+000	0,00000000000E+000	0,00000000000E+000
2,51327412287183	0,00000000000E+000	0,00000000000E+000	0,00000000000E+000
3,14159265358979	0,00000000000E+000	0,00000000000E+000	0,00000000000E+000
0,00000000000E+000	0,628318530717959	0,00000000000E+000	-4,4197281494E-012
0,628318530717959	0,628318530717959	-0,378365183428067	-0,378365183428139
1,25663706143592	0,628318530717959	-0,800948970019281	-0,800948970022709
1,88495559215388	0,628318530717959	-1,15615367583243	-1,15615367583571
2,51327412287183	0,628318530717959	-1,11556919336887	-1,11556919336957
3,14159265358979	0,628318530717959	0,00000000000E+000	5,937775557832E-012
0,00000000000E+000	1,25663706143592	0,00000000000E+000	-7,15127036687E-012
0,628318530717959	1,25663706143592	-0,612207726946317	-0,612207726946200
1,25663706143592	1,25663706143592	-1,29596265674542	-1,29596265675096
1,88495559215388	1,25663706143592	-1,87069594371500	-1,87069594372030
2,51327412287183	1,25663706143592	-1,80502887167314	-1,80502887167427
3,14159265358979	1,25663706143592	0,00000000000E+000	9,607522670141E-012
0,00000000000E+000	1,88495559215388	0,00000000000E+000	-7,1512703668E-012
0,628318530717959	1,88495559215388	-0,612207726946200	-0,612207726946317
1,25663706143592	1,88495559215388	-1,29596265674542	-1,29596265675096
1,88495559215388	1,88495559215388	-1,87069594371500	-1,87069594372030
2,51327412287183	1,88495559215388	-1,80502887167314	-1,80502887167427
3,14159265358979	1,88495559215388	0,00000000000E+000	9,607522670141E-012
0,00000000000E+000	2,51327412287183	0,00000000000E+000	-4,4197281494E-012
0,628318530717959	2,51327412287183	-0,378365183428067	-0,378365183428139
1,25663706143592	2,51327412287183	-0,800948970019281	-0,800948970022709
1,88495559215388	2,51327412287183	-1,15615367583243	-1,15615367583571

x_j	y_i	$u^{exact}(x_j, y_i)$	$u^{num}(x_j, y_i)$
2,51327412287183	2,51327412287183	-1,11556919336887	-1,11556919336957
3,14159265358979	2,51327412287183	0,000000000000E+000	5,937775557832E-012
0,000000000000E+000	3,14159265358979	0,000000000000E+000	-9,20817110142E-028
0,628318530717959	3,14159265358979	-7,88295395102E-017	-7,88295395102E-017
1,25663706143592	3,14159265358979	-1,66871692331E-016	-1,66871692331E-016
1,88495559215388	3,14159265358979	-2,40875920567E-016	-2,40875920568E-016
2,51327412287183	3,14159265358979	-2,32420448964E-016	-2,32420448965E-016
3,14159265358979	3,14159265358979	0,000000000000E+000	1,23709086734E-027

Программа для примера (30) с уравнением Пуассона с учетом формул (28), (29) дает равномерную норму погрешности $\|u^{exact} - u^{num}\|_C = \max_{j=0, n_1, i=0, n_2} |u_{i,j}^{exact} - u_{i,j}^{num}| = 7,962103198977388E-013$, $n_1 = n_2 = 60, n = 13$ за время работы $t_2 - t_1 = 1,562500000000000E-002$ секунды в режиме Debug.

Рассмотрим четвертый пример:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, & 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, & 0 \leq y \leq \pi. \end{cases} \quad (31)$$

Благодаря симметрии примера (31) можно решить более простую задачу

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \cos x \sin y, & 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, & 0 \leq y \leq \pi. \end{cases} \quad (32)$$

Решение примера (32) ищем в виде:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= f(x) \sin y, u_{xx} = f'' \sin y, u_{yy} = -f(x) \sin y, \\ u_{xx} + u_{yy} &= \sin y (f'' - f) = \cos x \sin y \Leftrightarrow f'' - f = \cos x. \end{aligned}$$

В итоге имеем краевую задачу

$$\begin{cases} f'' - f = \cos x, & 0 < x < \pi, \\ f(0) = f(\pi) = 0. \end{cases}$$

Общее решение однородного уравнения $f'' - f = 0$ имеет вид $f_{oh}(x) = A \operatorname{ch} x + B \operatorname{sh} x$, частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $f_q(x) = C \cos x \Leftrightarrow -2C \cos x = \cos x \Leftrightarrow C = -1/2$; $f_q(x) = -\cos x/2$.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$f_{oh}(x) = A \operatorname{ch} x + B \operatorname{sh} x - \cos x/2; f_{oh}(0) = 0 \Leftrightarrow A = 1/2; f_{oh}(\pi) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ch} \pi/2 + B \operatorname{sh} \pi + 1/2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$B = \frac{-(1 + \operatorname{ch} \pi)}{2 \operatorname{sh} \pi}, f(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{2} - \left(\frac{(1 + \operatorname{ch} \pi)}{2 \operatorname{sh} \pi} \right) \operatorname{sh} x - \frac{\cos x}{2}.$$

В итоге точное решение примера (32) имеет вид:

$$u(x, y) = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{2} - \left(\frac{(1 + \operatorname{ch} \pi)}{2 \operatorname{sh} \pi} \right) \operatorname{sh} x - \frac{\cos x}{2} \right) \sin y.$$

А точное решение примера (31) получим с учетом симметрии

$$u(x, y) = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{2} - \left(\frac{(1 + \operatorname{ch} \pi)}{2 \operatorname{sh} \pi} \right) \operatorname{sh} x - \frac{\cos x}{2} \right) \sin y + \left(\frac{\operatorname{ch} y}{2} - \left(\frac{(1 + \operatorname{ch} \pi)}{2 \operatorname{sh} \pi} \right) \operatorname{sh} y - \frac{\cos y}{2} \right) \sin x. \quad (33)$$

Вычисленное по формуле (33) точное решение в узлах равномерной сетки записано в третьем столбце таблицы 4, а численное — в четвертом.

Таблица 4

Результаты работы программы в примере (31) с 14 базисными функциями

x_i	y_i	$u^{exact}(x_i, y_i)$	$u^{num}(x_i, y_i)$
0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000
0,628318530717959	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	-1,0441573502E-013
1,25663706143592	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	-1,6894820822E-013
1,88495559215388	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	-1,6894820822E-013
2,51327412287183	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	-1,0441573502E-013
3,14159265358979	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	-2,1754232868E-029
0,0000000000E+000	0,628318530717959	0,0000000000E+000	-1,0441573502E-013
0,628318530717959	0,628318530717959	-0,197551489645173	-0,197551489645269
1,25663706143592	0,628318530717959	-0,209856683772612	-0,209856683772669
1,88495559215388	0,628318530717959	-0,109788341001450	-0,109788341001551
2,51327412287183	0,628318530717959	2,220446049250E-016	1,42941214420E-015
3,14159265358979	0,628318530717959	5,014789931644E-016	1,04386956393E-013
0,0000000000E+000	1,25663706143592	0,0000000000E+000	-1,6894820822E-013
0,628318530717959	1,25663706143592	-0,209856683772612	-0,209856683772669
1,25663706143592	1,25663706143592	-0,161913979801615	-0,161913979801545
1,88495559215388	1,25663706143592	2,636779683484E-016	-1,6792123247E-015
2,51327412287183	1,25663706143592	0,109788341001451	0,109788341001552
3,14159265358979	1,25663706143592	8,342836304895E-016	1,68924517002E-013
0,0000000000E+000	1,88495559215388	0,0000000000E+000	-1,6894820822E-013
0,628318530717959	1,88495559215388	-0,109788341001450	-0,109788341001551
1,25663706143592	1,88495559215388	2,636779683484E-016	-1,6653345369E-015
1,88495559215388	1,88495559215388	0,161913979801615	0,161913979801542
2,51327412287183	1,88495559215388	0,209856683772613	0,209856683772670
3,14159265358979	1,88495559215388	8,551321168875E-016	1,68945365488E-013
0,0000000000E+000	2,51327412287183	0,0000000000E+000	-1,0441573502E-013
0,628318530717959	2,51327412287183	2,081668171172E-016	1,41553435639E-015
1,25663706143592	2,51327412287183	0,109788341001451	0,109788341001552
1,88495559215388	2,51327412287183	0,209856683772613	0,209856683772670
2,51327412287183	2,51327412287183	0,197551489645174	0,197551489645272
3,14159265358979	2,51327412287183	5,426373598439E-016	1,04428114760E-013
0,0000000000E+000	3,14159265358979	0,0000000000E+000	-2,1754232868E-029
0,628318530717959	3,14159265358979	5,014789931644E-016	1,04386956393E-013
1,25663706143592	3,14159265358979	8,342836304895E-016	1,68924517002E-013
1,88495559215388	3,14159265358979	8,551321168875E-016	1,68945365488E-013
2,51327412287183	3,14159265358979	5,426373598439E-016	1,04428114760E-013
3,14159265358979	3,14159265358979	2,175337872185E-031	4,35050491505E-029

Программа для примера (30) с уравнением Пуассона с учетом формул (28), (29) дает равномерную норму погрешности $\|u^{exact} - u^{num}\|_C = \max_{j=0, n_1, i=0, n_2} |u_{i,j}^{exact} - u_{i,j}^{num}| = 7,962103198977388E-013$, $n_1 = n_2 = 60$, $n = 13$ за время работы $t_2 - t_1 = 1,56250000000000E-002$ секунды в режиме Release.

Обсуждение

1. В работе впервые предложен алгоритм решения краевых задач модифицированным методом Бубнова-Галеркина (3)–(18) с линейными однородными уравнениями в частных производных эллиптического типа на прямоугольнике (1) с нулевыми значениями функции в вершинах прямоугольника. При этом коэффициенты $g_i(x, y)$ у частных производных могут зависеть от координат, но не зависят от неизвестной функции.

2. Алгоритм (3)–(18) можно обобщить для решения краевых задач с произвольным линейным уравнением в частных производных на прямоугольнике, в этом случае сумму для дифференциального оператора с одним индексом $\sum_{j=0}^m g_j(x, y) \frac{\partial^j \partial^{m-j}}{\partial x^j \partial y^{m-j}}$ необходимо заменить на сумму с двумя индексами $\sum_{i,j=0}^{m_1, m_2} g_{i,j}(x, y) \frac{\partial^i \partial^j}{\partial x^i \partial y^j}$. Условие

нулевых значений функции в вершинах прямоугольника сохраняется.

3. В работе рассмотрены четыре примера решения краевой задачи с уравнением Лапласа (Пуассона) на прямоугольнике (19)–(26), а также решение уравнение Лапласа на прямоугольнике с однородными краевыми условиями в общем виде (27), (28) с неоднородной правой частью с разделяющимися переменными методом Бубнова-

Галеркина с нулевыми значениями решения в вершинах прямоугольника.

4. Точность решения краевой задачи с уравнением Пуассона модифицированным методом Бубнова-Галеркина сопоставима с точностью решения этой же задачи методом прогонки с пятидиагональной матрицей, при этом время решения задачи примерно в тридцать раз меньше.

5. Каждое неоднородное краевое условие на одной из четырех сторон квадрата порождает отдельную частную краевую задачу. В случае если краевые условия на противоположных сторонах квадрата совпадают (симметрия краевых условий), то можно обойтись двумя простыми краевыми задачами.

6. В качестве системы линейно-независимых координатных функций в краевой задаче использовались функции степенного вида (3), (4), которые равны -1 на левом конце отрезка, $+1$ на правом конце отрезка (для функций нечетного индекса). И равны $+1$ на концах отрезка (для функций четного индекса).

7. В работе предложена весовая матрица для квадратурной интегральной формулы на прямоугольнике с 12 порядком погрешности применяемая для вычисления скалярного произведения двух функций.

8. Два последних уравнения в каждой системе линейных алгебраических уравнений представляют условия для множества допустимых функций в краевой задаче на прямоугольнике.

Заключение. Численно решены четыре примера с помощью алгоритма (28), (29) для уравнения Пуассона на прямоугольнике, в которых неизвестная функция равна нулю в вершинах прямоугольника. Построен алгоритм (5)–(19) для решения краевых задач с однородными уравнениями в частных производных эллиптического типа произвольного порядка, что показывает успешное применение модифицированного метода Бубнова-Галеркина для решения краевых задач на прямоугольнике.

Список литературы / References

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы: учебное пособие для студентов физико-математических специальностей высших учебных заведений*. Москва: Бином. Лаборатория знаний; 2011. 636 с.
Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Numerical methods: a textbook for students of physics and mathematics specialties of higher educational institutions*. Moscow: BINOM. Knowledge laboratory; 2011. 636 p. (In Russ.)
2. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. *Численные методы в задачах и упражнениях*. Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний; 2010. 240 с.
Bahvalov N.S., Lapin A.V., Chizhonkov E.V. *Numerical methods in problems and exercises*. Moscow: BINOM. Knowledge laboratory; 2010. 240 p. (In Russ.)
3. Пикун В.П., Похожаев С.И. *Практический курс по уравнениям математической физики*. Москва: МЦНМО; 2004. 208 с.
Pikulin V.P., Pokhozhaev S.I. *Practical course on the equations of mathematical physics*. Moscow: MTSNMO; 2004. 208 p. (In Russ.)
4. Сухинов А.И., Проценко Е.А., Проценко С.В., Панасенко Н.Д. Параллельная численная реализация моделей волновой гидродинамики с учетом особенностей вертикального турбулентного обмена. *Математическое моделирование*. 2023;35(12):51–68. <https://doi.org/10.20948/mm-2023-12-04>
5. Sukhinov A.I., Protsenko E.A. Parallel numerical implementation of wave hydrodynamics models taking into account the features of vertical turbulent exchange. *Mathematical Modeling*. 2023;35(12):51–68. (In Russ.) <https://doi.org/10.20948/mm-2023-12-04>
6. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Никитина А.В., Атаян А.М., Литвинов В.Н. Метод решения сеточных уравнений для задач гидродинамики в плоских областях. *Математическое моделирование*. 2023;35(3):35–58. (In Russ.) <https://doi.org/10.20948/mm-2023-03-03>
7. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Nikitina A.V., Atayan A.M., Litvinov V.N. Method for solving grid equations for hydrodynamic problems in flat areas. *Mathematical Modeling*. 2023;35(3):35–58. (In Russ.) <https://doi.org/10.20948/mm-2023-03-03>
8. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Сидорякина В.В., Кузнецова И.И., Атаян А.М. Использование параллельных вычислений для оценки процесса переноса загрязняющих веществ в мелководных водоемах. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2024;24(2):298–315. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-298-315>
9. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Sidoryakina V.V., Kuznetsova I.I., Atayan A.M. The use of parallel computing to assess the process of transport of pollutants in shallow water bodies. *News of Saratov University. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2024;24(2):298–315. (In Russ.) <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-298-315>
10. Сидорякина В.В., Сухинов А.И. Построение и исследование близости решений в L_2 двух краевых задач для модели переноса многокомпонентных взвесей в прибрежных системах. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2023;63(10):1721–1732. <https://doi.org/10.31857/S0044466923100149>
11. Sidoryakina V.V., Sukhinov A.I. Construction and study of the proximity of solutions in L_2 of two boundary value problems for the model of transport of multicomponent suspended matter in coastal systems. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2023;63(10):1721–1732. (In Russ.) <https://doi.org/10.31857/S0044466923100149>
12. Сидорякина В.В., Соломаха Д.А. Симметризованные варианты методов Зейделя и верхней релаксации решения двумерных разностных задач эллиптического типа. *Computational Mathematics and Information Technologies*.

9. Бурова И.Г., Алцыбеев Г.О. Применение сплайновых аппроксимаций второго порядка к решению интегральных уравнений второго рода. *Вычислительные методы и программирование*. 2025;26(2):175–191. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v26r213>

10. Чернышев А.Д., Горяйнов В.В., Кузнецов С.В., Никифорова О.Ю. Применение быстрых разложений для построения точных решений задачи о прогибе прямоугольной мембраны под действием переменной нагрузки. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2021;70:127–142. <https://doi.org/10.17223/19988621/70/11>

11. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированный метод Бубнова-Галеркина для решения краевых задач с линейным обыкновенным дифференциальным уравнением. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(3):23–33. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-3-23-33>

12. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Увеличение точности решения краевых задач с линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями методом Бубнова-Галеркина. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):7–18. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-7-18>

13. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Решение краевых задач для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений методом Бубнова-Галеркина. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(1):7–19. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-7-19>

14. Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности. *Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки*. 2017;12: 62–77.
Pastukhov D.F., Pastukhov Yu.F. Approximation of the Poisson equation on a rectangle of increased accuracy. *Bulletin*

Об авторах:

Константин Александрович Волосов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Российская Федерация, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9), [ORCID](#), [SPIN-код](#), konstantinvolosov@yandex.ru

Гурьева Нина Алексеевна, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), [SPIN-код](#)

Дмитрий Феликсович Пастухов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), [ORCID](#), [SPIN-код](#), dmitrij.pastuhov@mail.ru

35

мирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), [ORCID](#), [SPIN-код](#), pulsar1900@mail.ru

Заявленный вклад авторов:

Н.К. Волосова: постановка задачи; написание черновика рукописи; формулировка идей исследования, целей и задач; разработка программного обеспечения.

К.А. Волосов: научное руководство; разработка методологии.

А.К. Волосова: перевод; изучение истории задачи; поиск литературы.

Н.А. Гурьева: подбор примеров для тестирования.

М.И. Карлов: формальный анализ.

Д.Ф. Пастухов: визуализация; валидация.

Ю.Ф. Пастухов: тестирование существующих компонентов кода.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Natalya K. Volosova, Post-graduate Student of Bauman Moscow State Technical University (5–1, 2nd Baumanskaya St., Moscow, 105005, Russian Federation), [ORCID](#), navalosova@yandex.ru

Konstantin A. Volosov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics of the Russian University of Transport (9–9, Obraztsova St., Moscow, GSP-4, 127994, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), konstantinvolosov@yandex.ru

Aleksandra K. Volosova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Chief Analytical Department “Tramplin” LLC, Russian University of Transport (9–9, Obraztsova St., Moscow, GSP-4, 127994, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), alya01@yandex.ru

Nina A. Gurieva, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (29, Blokhin St., Novopolotsk, Republic of Belarus, 211440), [SPIN-code](#)

Mikhail I. Karlov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (9, Institutsky Lane, GSP-4, Dolgoprudny, 141701, Russian Federation), [SPIN-code](#), karlov.mipt@gmail.com

Dmitriy F. Pastukhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (29, Blokhin St., Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), [ORCID](#), [SPIN-code](#), dmitrij.pastuhov@mail.ru

Yuriy F. Pastukhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (29, Blokhin St., Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), [ORCID](#), [SPIN-code](#), pulsar1900@mail.ru

Contributions of the authors:

N.K. Volosova: ideas; formulation or evolution of overarching research goals and aims; writing-original draft preparation; software.

K.A. Volosov: supervision; methodology.

A.K. Volosova: translation; study of the history of the task; literature.

N.A. Gurieva: examples.

M.I. Karlov: formal analysis.

D.F. Pastukhov: visualization; validation.

Yu.F. Pastukhov: testing of existing code components.

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 30.08.2025

Поступила после рецензирования / Reviewed 26.10.2025

Принята к публикации / Accepted 12.12.2025