

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELLING



УДК 004.032.26

Оригинальное эмпирическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-1-50-57>


Аппроксимация функций нейронными сетями

А.В. Галабурдин

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

✉ Galaburdin@mail.ru

Аннотация

Введение. В настоящее время при решении многих задач используются методы, основанные на применении искусственных нейронных сетей. Эти методы отличаются простотой в применении и достаточно универсальными возможностями. Нейронные сети различной архитектуры достаточно часто применяются к решениям задач аппроксимации функций нескольких переменных. Разработанные методы построения подобных нейронных сетей применяются при решении актуальных задач в математике, технике, экономике.

Материалы и методы. Предлагается метод построения нейронной сети для решения задач аппроксимации функций, основанный на применении в качестве функций активации дробно-линейных функций. Описывается алгоритм построения нейронных сетей для аппроксимации функций одной и двух переменных. Отдельно рассматривается случай, когда значения аппроксимируемой функции заданы с погрешностью. Исследуется возможность использования данного подхода при экстраполяции функций.

Результаты исследования. Представлены результаты построения нейронных сетей аппроксимации функций одной и двух переменных и применения построенных сетей в виде графиков. Предложенный метод был использован при решении задач экстраполяции, задач аппроксимации функций, значения которых заданы с погрешностью.

Обсуждение. Метод показал хорошие результаты при решении указанных задач. В качестве функций активации были использованы дробно-рациональные функции дельтообразного поведения. Поэтому определение весов нейронной сети свелось к решению систем линейных уравнений с хорошо обусловленными матрицами, что обеспечило достаточно высокую степень точности результатов аппроксимации.

Закключение. Представленные результаты доказали эффективность метода. Предложенный метод построения нейронных сетей может быть использован при решении задач, связанных с цифровой обработкой сигналов.

Ключевые слова: аппроксимация функций, нейронные сети

Для цитирования. Галабурдин А.В. Аппроксимации функций нейронными сетями. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2026;10(1):50–57. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-1-50-57>

Original Empirical Research

Function Approximation by Neural Networks

Alexander V. Galaburdin

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

✉ Galaburdin@mail.ru

Abstract

Introduction. Currently, many problems are solved using methods based on artificial neural networks. These methods are characterized by ease of application and fairly versatile capabilities. Neural networks of various architectures are frequently employed to solve problems of approximating functions of several variables. The developed methods for constructing such neural networks are applied to solving relevant problems in mathematics, engineering, and economics.

Materials and Methods. A method for constructing a neural network to solve function approximation problems is proposed, based on the use of fractional-linear functions as activation functions. An algorithm for constructing neural networks for

approximating functions of one and two variables is described. The case where the values of the approximated function are given with an error is considered separately. The possibility of using this approach for function extrapolation is investigated.

Results. The results of constructing neural networks for approximating functions of one and two variables and the application of the constructed networks are presented in the form of graphs. The proposed method was used in solving extrapolation problems and problems of approximating functions whose values are given with an error.

Discussion. The method showed good results in solving these problems. Fractional-rational functions with delta-like behavior were used as activation functions. Therefore, determining the neural network weights was reduced to solving systems of linear equations with well-conditioned matrices, which ensured a sufficiently high degree of accuracy in the approximation results.

Conclusion. The presented results proved the effectiveness of the method. The proposed method for constructing neural networks can be used in solving problems related to digital signal processing.

Keywords: function approximation, neural networks

For Citation. Galaburdin A.V. Function Approximation by Neural Networks. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2026;10(1):50–57. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-1-50-57>

Введение. В настоящее время при решении многих задач используются методы, основанные на применении искусственных нейронных сетей. Нейронные сети достаточно часто применяются при решении задач аппроксимации функций и прогнозирования. Возможность использования нейронных сетей при аппроксимации функций была представлена еще в работах А.Н. Колмогорова и В.И. Арнольда [1, 2]. Исследования в данной области активно развиваются в наши дни. Например, в работе [3] представлен метод аппроксимации функций двух переменных посредством нейронной сети, не требующей обучения, а в работе [4] представлен процесс аппроксимации функции нейронной сетью, основанный на последовательном дополнении нейронов в структуру однослойного персептрона. Статья [5] посвящена исследованию различных подходов к построению аппроксимаций функций активации. Результаты этой работы могут быть использованы при реализации методов конфиденциального машинного обучения. В исследовании [6] изложен метод идентификации моделей производственной функции на основе статистических данных с использованием нейронной сети, а в статье [7] отмечается, что при аппроксимации и интерполяции функций с использованием искусственных нейронных сетей существует ряд ограничений и особенностей, которые и исследуются в данной работе. Вопрос о количестве нейронов, необходимых для аппроксимации выпуклых функций, рассматривается в [8]; в работе [9] доказано, что для аппроксимации оптимально использование двухслойной нейронной сети. Статья [10] посвящена оптимальным аппроксимациям одномерных функций при помощи нейронных сетей *ReLU* с обратной связью. В [11] сообщается об отрицательном результате, полученном при аппроксимации функций с несколькими неизвестными, определенных на компактных множествах. Многие работы посвящены применению нейронных сетей при прогнозировании экономических показателей [12–14].

Материалы и методы. При построении нейронных сетей для решения различных задач в основном применяется достаточно ограниченное множество функций активации. Причем часто изначально уже имеется некоторая информация о решении этих задач. Но при выборе функций активации эта информация чаще всего слабо используется. В работах [15, 16] при построении нейронной сети для решения краевых задач для дифференциальных уравнений для областей сложной формы была предпринята попытка учесть известную информацию о решении данной задачи. Эту идею автор развивает и в настоящей работе.

Известно, что дробно-рациональные функции обладают хорошими аппроксимационными свойствами. С другой стороны, при построении нейронных сетей для решения задач аппроксимации функций успешно применяется функция Гаусса. Характерной особенностью функции Гаусса является то, что она принимает значения, существенно отличные от нуля на некотором небольшом отрезке числовой оси. Такой же особенностью обладают многие дробно-рациональные функции, например:

$$K_1(x, z) = \frac{1}{1 + s^2(x - z)^2},$$

$$K_2(x, z) = \frac{1}{1 + s^4(x - z)^4},$$

$$K_3(x, z) = \frac{1}{1 + s^2(x - z)^2 + s^4(x - z)^4}.$$

Допустим, что заданы значения функции на некотором множестве точек $x_i \in [a, b]$, $i = 1, \dots, N$, где $[a, b]$ — отрезок, на котором аппроксимируется функция $f(x)$.

Тогда аппроксимационную формулу можно представить в виде:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N a_i f(x_i) K(x, x_i),$$

где a_i — неизвестные коэффициенты, $K(x, x_i)$ — одна из функций, приведенных выше.

Для определения коэффициентов a_i находится минимум функционала

$$J(a_i) = \sum_{j=1}^M \left\{ \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N [a_i f^j(x_i) K(x_k, x_i) - f^j(x_k)] \right\}^2 + \alpha \sum_{j=1}^M \left\{ \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N a_i f^j(x_i) K(x_k, x_i) \right\}^2,$$

где $f^j(x_i)$ — функции из обучающего множества, M — количество функций обучающего множества, α — параметр.

Неизвестные коэффициенты a_i определяются из системы линейных уравнений, которая получается из соотношений

$$\frac{\partial J(a_i)}{\partial a_m} = 0, \quad i, m = 1, \dots, N.$$

В силу указанных выше свойств используемых дробно-рациональных функций полученная система уравнений имеет матрицу с диагональным преобладанием. Если значения аппроксимируемой функции заданы с некоторой погрешностью ε , то коэффициенты a_i определяются посредством минимизации функционала

$$J(a_i) = \sum_{j=1}^M \left\{ \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N [a_i (f^j(x_i) + \varepsilon^j) K(x_k, x_i) - f^j(x_k)] \right\}^2 + \alpha \sum_{j=1}^M \left\{ \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N a_i f^j(x_i) K(x_k, x_i) \right\}^2,$$

где ε^j — погрешность j -ой функции из обучающего множества.

При этом предполагается, что известен уровень погрешности аппроксимируемой функции. Это дает возможность соответствующим образом подобрать величины ε^j .

Аналогично можно строить аппроксимационные формулы для функций двух переменных. В этом случае следует использовать дробно-рациональные функции, зависящие от двух переменных:

$$P_1(x, u, y, v) = \frac{1}{(1 + s^2((x-u)^2 + (y-v)^2))},$$

$$P_2(x, u, y, v) = \frac{1}{(1 + s^4((x-u)^2 + (y-v)^2)^2)},$$

$$P_3(x, u, y, v) = \frac{1}{(1 + s^2((x-u)^2 + (y-v)^2) + s^4((x-u)^2 + (y-v)^2)^2)}.$$

Будем аппроксимировать функции на множестве $\begin{cases} x \in [a, b] \\ y \in [c, d] \end{cases}$. Предположим, что заданы значения функции на множестве точек (x_i, y_j) , $i = 1, \dots, N_x$, $j = 1, \dots, N_y$.

В этом случае аппроксимационная формула будет иметь вид:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} a_{in} f(x_i, y_n) P(x, x_i, y, y_n),$$

а коэффициенты a_{in} будут определяться посредством минимизации функционала

$$J(a_{in}) = \sum_{j=1}^M \left\{ \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{s=1}^{N_y} \sum_{t=1}^{N_y} [a_{in} f^j(x_i, y_t) P(x_k, x_i, y_s, y_t) - f^j(x_k, y_s)] \right\}^2 +$$

$$+ \alpha \sum_{j=1}^M \left\{ \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{s=1}^{N_y} \sum_{t=1}^{N_y} a_{in} f^j(x_i, y_t) P(x_k, x_i, y_s, y_t) \right\}^2,$$

где $f^j(x_i, y_t)$ — функции из обучающего множества, M — количество функций обучающего множества, α — параметр.

Результаты исследования. Представленный выше метод был использован при построении аппроксимационных формул для ряда функций.

Задача 1. Изложенный метод был применен при построении аппроксимационной формулы для функции $f(x) = \cos(10,5 \cdot x^2 + 4,5) \cdot x$. При этом полагалось $N = 45$, $M = 35$, $x \in [0, 1]$. В аппроксимационной формуле использовалась функция $K_3(x, z)$. В качестве обучающего множества использовались смещенные полиномы Чебышева $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(2x - 1))$, $n = 1, \dots, M$.

Параметры α и s определялись простым перебором. Выбирались те значения этих параметров, при которых коэффициент детерминации, определенный по заданным значениям функции $f(x)$ в точках x_i и вычисленным в этих же точках по аппроксимационной формуле, был больше.

На рис. 1 представлены результаты аппроксимации. Сплошной линией (1) изображен график исходной функции, а пунктирной линией (2) изображен результат аппроксимации. Точность аппроксимации оценивалась по коэффициенту детерминации, который в данном случае был равен 0,9974.

Этот подход был использован при решении задачи экстраполяции. Для этого при определении коэффициентов a_i к тому множеству точек $x \in [0, 1]$ $i = 1, \dots, N$, на котором заданы значения аппроксимируемой функции в выражении $J(a_i)$, следует добавить точки x_i из того множества $[b, d]$, на которое будет распространен процесс экстраполяции. В рассмотренном примере это множество $[1, 1,05]$. На этом отрезке было добавлено равномерно 7 точек. Полученный результат представлен на рис. 2. При этом коэффициент детерминации равнялся 0,9673.

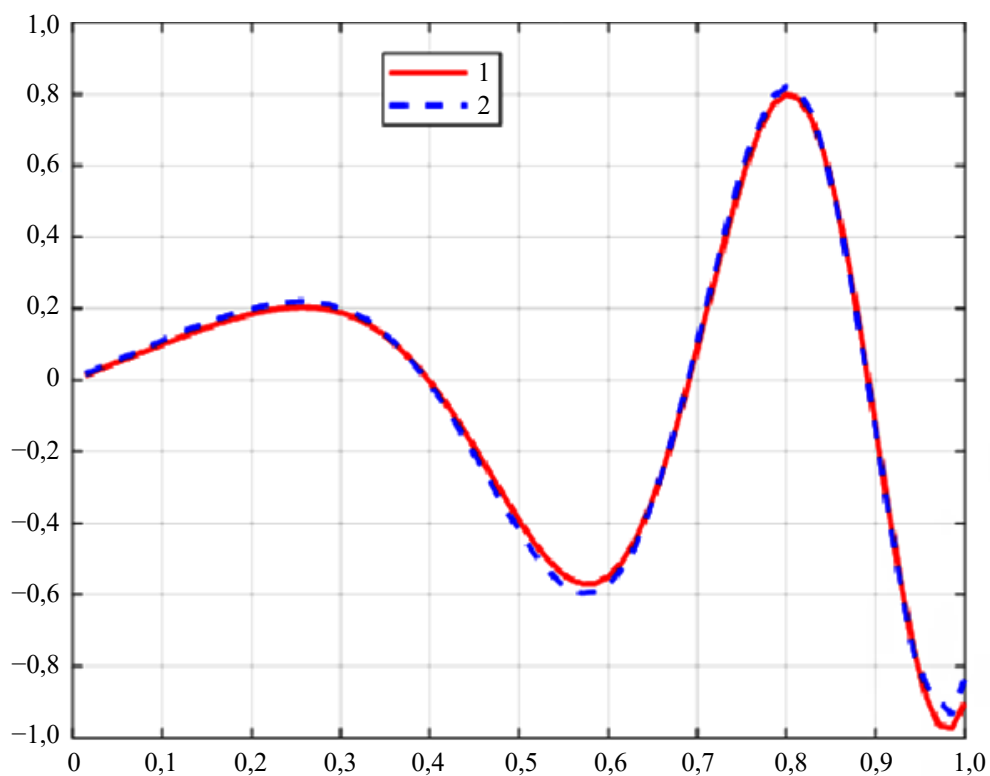


Рис. 1. Аппроксимация функции $f(x) = \cos(10,5 \cdot x^2 + 4,5) \cdot x$

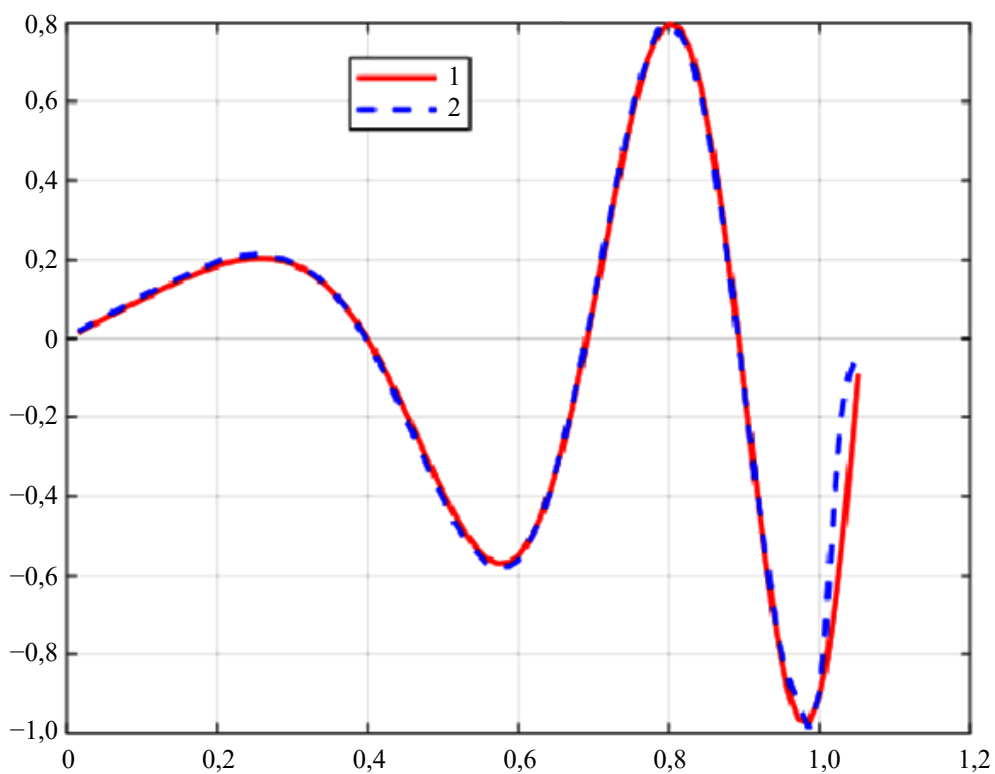
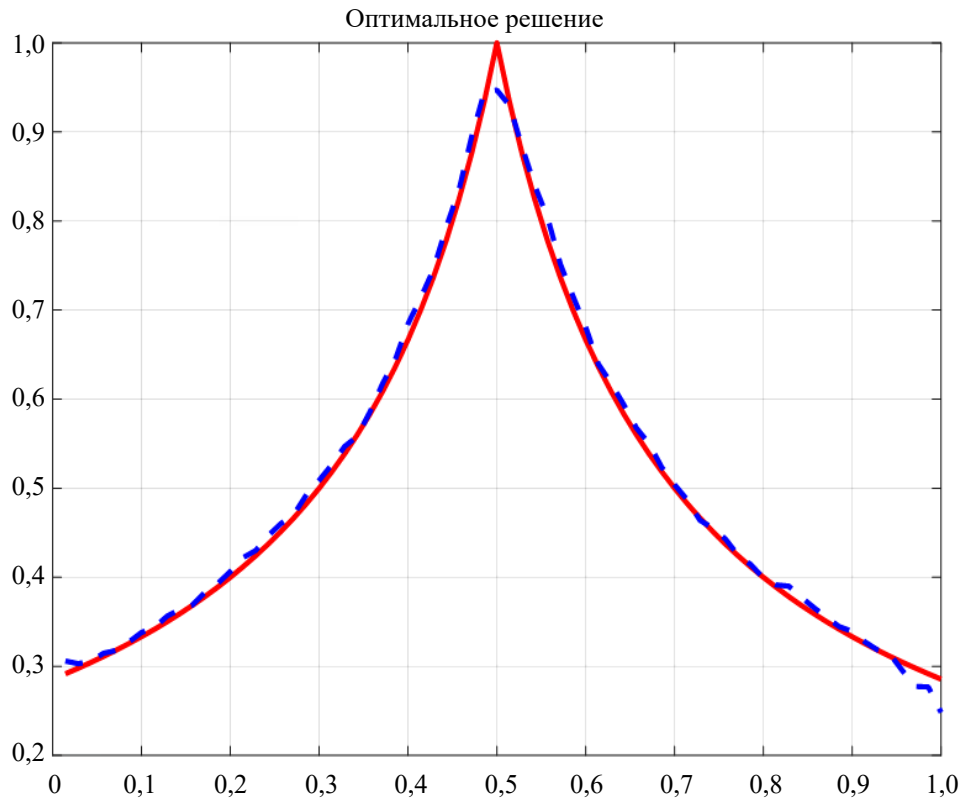


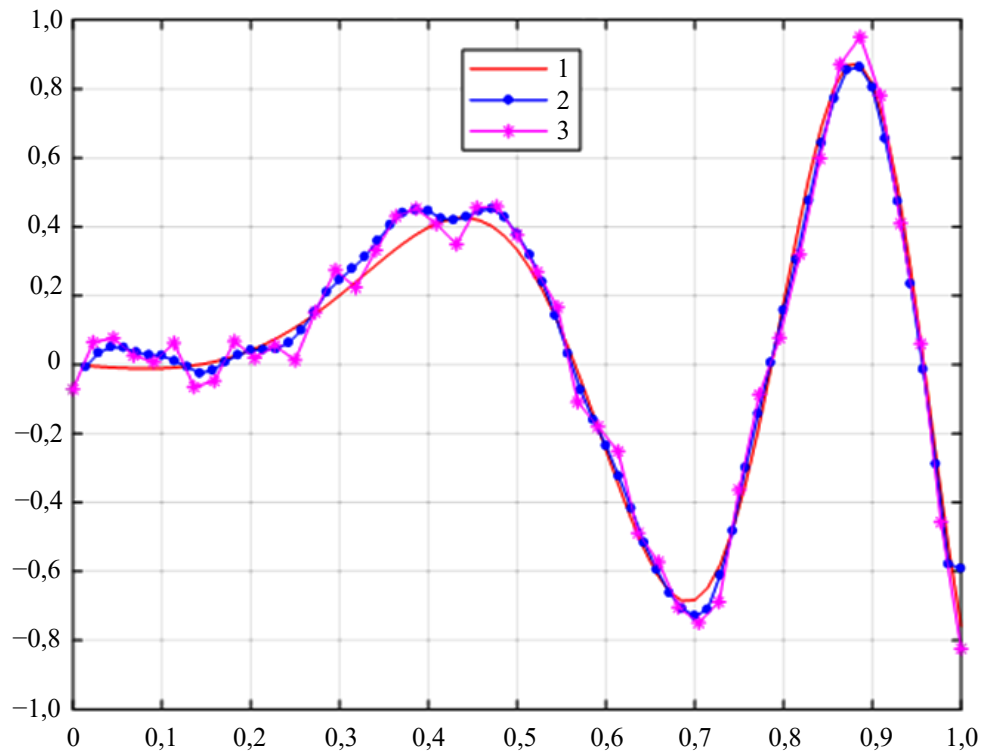
Рис. 2. Экстраполяция функции $f(x) = \cos(10,5 \cdot x^2 + 4,5) \cdot x$

Задача 2. Данный метод был применен при построении аппроксимационной формулы для функции с угловой точкой $f(x) = 1/(1 + 5 \cdot \text{abs}(x - 0,5))$.

При этом все параметры оставались теми же, что и в задаче 1. Результат аппроксимации представлен на рис. 3. Коэффициент детерминации в этом случае был равен 0,9958.

Рис. 3. Аппроксимация функции $f(x) = 1/(1 + 5 \cdot \text{abs}(x - 0,5))$

Задача 3. Рассматривается построение аппроксимационной формулы для функции $f(x) = \cos(10,5 \cdot x^2 + 4,5) \cdot x$, значения которой $f(x_i)$ заданы с погрешностью $\varepsilon_i = (\varepsilon - 0,5) \cdot 0,21$, где ε — равномерно распределенная случайная величина, принимающая значения от 0 до 1. При этом полагалось $N = 45$, $M = 35$, $x \in [0, 1]$, в аппроксимационной формуле использовалась функция $K_2(x, z)$, в качестве обучающего множества использовались смещенные полиномы Чебышева. Полученные результаты представлены на рис. 4. Линия (1) — график функции $f(x)$, линия (2) — результат аппроксимации, линия (3) — график функции $f(x) + \varepsilon$.

Рис. 4. Аппроксимация функции $f(x) = \cos(10,5 \cdot x^2 + 4,5) \cdot x$, заданной с погрешностью

Коэффициент детерминации в этом случае равнялся 0,9880.

Задача 4. Рассматривалась аппроксимация функции двух переменных:

$$f(x, y) = 1 - \cos(2\pi x) \cdot \cos(2\pi y),$$

$$f(x) = \cos(10,5 \cdot x^2 + 4,5) \cdot x.$$

При этом полагалось $N_x = 21$, $N_y = 21$, $M = 25$. В качестве обучающего множества использовались функции $T_n(x)$, $T_m(y)$, представляющие собой произведение смещенных полиномов Чебышева. Для построения аппроксимационной формулы использовалась дробно-рациональная функция $P_2(x, u, y, v)$. Результаты аппроксимации изображены на рис. 5.

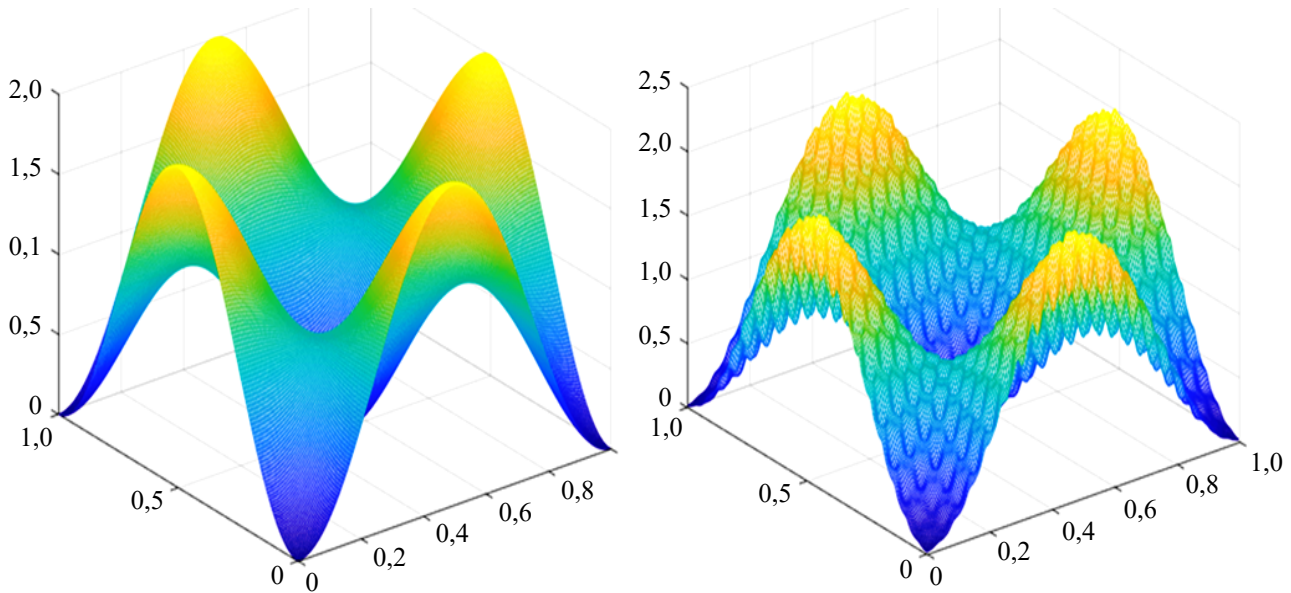


Рис. 5. Аппроксимация функции $f(x, y) = 1 - \cos(2\pi x) \cdot \cos(2\pi y)$

Слева представлено изображение графика функции, а справа — изображение графика аппроксимации. Коэффициент детерминации в этом случае равнялся 0,9718.

Задача 5. Рассматривалась аппроксимация функции двух переменных $f(x, y) = \exp(-\beta \cdot \sqrt{(x-0,5)^2 + (y-0,5)^2})$, имеющую особую точку (0,5; 0,5). При этом для построения аппроксимационной формулы использовалась дробно-рациональная функция $P_3(x, u, y, v)$ и полагалось $\beta = 9$. Все параметры имели те же значения, что и в предыдущей задаче.

Полученные результаты представлены на рис. 6.

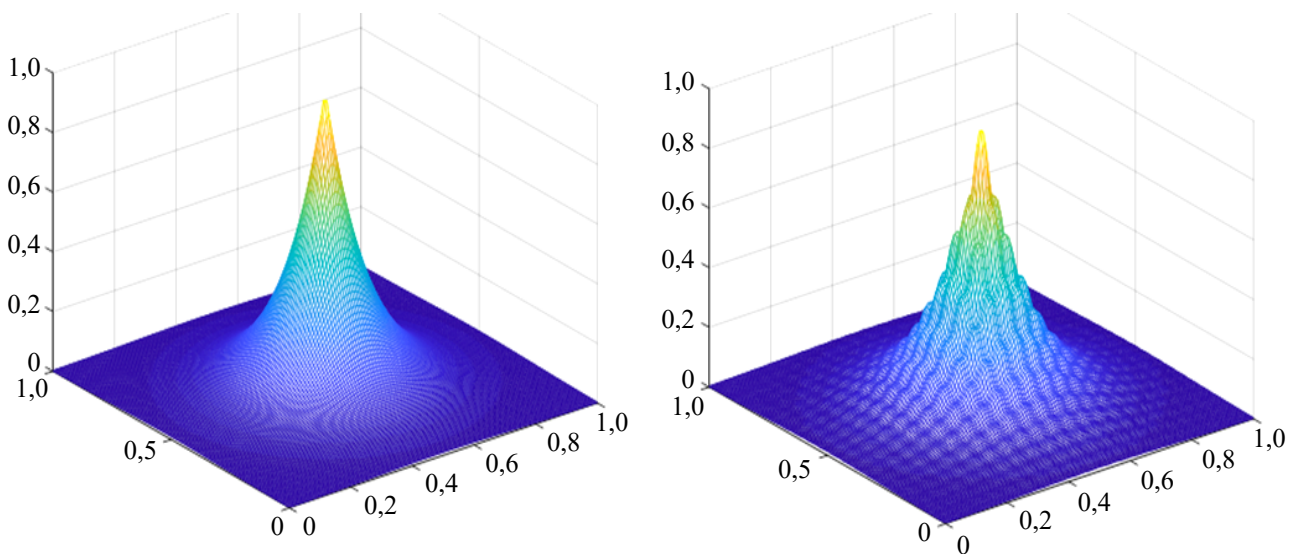


Рис. 6. Аппроксимация функции $f(x, y) = \exp(-\beta \cdot \sqrt{(x-0,5)^2 + (y-0,5)^2})$

Коэффициент детерминации равен 0,9898.

Обсуждение. Результаты исследования наглядно продемонстрировали достоинства примененного метода, которые проявились не только при решении задач аппроксимации. Метод показал хорошие результаты и при

решении задач экстраполяции, задач аппроксимации функций, значения которых заданы с погрешностью, при решении задач аппроксимации функций двух переменных. Отличительной чертой метода является то, что в качестве функций активации используются дробно-рациональные функции дельтообразного поведения. Это функции, принимающие значения существенно отличные от нуля на некотором небольшом отрезке числовой оси. Это приводит к тому, что при определении весов нейронной сети решаются системы линейных уравнений, имеющих матрицы с диагональным преобладанием, то есть хорошо обусловленные. Это является одной из причин достаточно высокой степени точности результатов аппроксимации.

Заключение. Представленные результаты позволяют сделать вывод о том, что использование дробно-рациональных функций в качестве функций активации при построении нейронных сетей для решения задач аппроксимации является достаточно эффективным методом. Стоит отметить перспективность применения подобных подходов для решения задач, связанных с цифровой обработкой сигналов.

Список литературы / References

1. Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного. *Доклады АН СССР*. 1957;114(5):953–956.
Kolmogorov A.N. On the representation of continuous functions of several variables as a superposition of continuous functions of one variable. *Doklady Akad. Sci.* (1957);114(5):953–956. (In Russ.)
2. Арнольд В.И. О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных. *Математическое просвещение*. 1958;3:41–61.
Arnold V. I. On the representation of functions of several variables as a superposition of functions of fewer variables. *Mathematical Education*. 1958;3:41–61. (In Russ.)
3. Воевода А.А., Романников Д.О. Синтез нейронных сетей с несколькими переменными. *Сборник научных трудов НГТУ*. 2018;1(91):86–94. <https://doi.org/10.17212/2307-6879-2018-1-86-94>
Voevoda A.A., Romannikov D.O. Synthesis of neural networks with several variables. *Proceedings of NSTU*. 2018;1(91):86–94. (In Russ.) <https://doi.org/10.17212/2307-6879-2018-1-86-94>
4. Романников Д.О. О синтезе нейронных сетей. *Сборник научных трудов НГТУ*. 2018;1(91):104–111. <https://doi.org/10.17212/2307-6879-2018-1-104-111>
Romannikov D.O. On the synthesis of neural networks. *Proceedings of NSTU*. 2018;1(91):104–111. (In Russ.) <https://doi.org/10.17212/2307-6879-2018-1-104-111>
5. Маршалко Г.Б., Труфанова Ю.А. Полиномиальные аппроксимации некоторых функций активации нейронных сетей. *Информатика и автоматизация*. 2022;21(1):161–180.
Marshalko G.B., Trufanova Yu.A. Polynomial approximations of some activation functions of neural networks. *Informatics and automation*. 2022;21(1):161–180.
6. Чертков А.А., Сабуров С.В., Каск Я.Н. Алгоритм идентификации параметров моделей производственных функций при помощи нейронной сети. *Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова*. 2023;15(6):1096–1104. <https://doi.org/10.21821/2309-5180-2023-15-6-1096-1104>
Chertkov A.A., Saburov S.V., Kask Ya.N. An algorithm for identifying parameters of production function models using a neural network. *Bulletin of the Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping*. 2023;15(6):1096–1104. (In Russ.) <https://doi.org/10.21821/2309-5180-2023-15-6-1096-1104>
7. Галкин В.А., Гавриленко Т.В., Смородинов А.Д. Некоторые аспекты аппроксимации и интерполяции функций искусственными нейронными сетями. *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*. 2022;38(1):54–73. <https://doi.org/10.26117/20796641-2022-38-1-54-73>
Galkin V.A., Gavrilenco T.V., Smorodinov A.D. Some aspects of approximation and interpolation of functions by artificial neural networks. *Vestnik KRAUNC. Phys.-Math. Sciences*. 2022;38(1):54–73. (In Russ.) <https://doi.org/10.26117/20796641-2022-38-1-54-73>
8. Hanin B. Universal Function Approximation by Deep Neural Nets with Bounded Width and ReLU Activations. *Mathematics*. 2019;7(10):992.
9. Guliyev N.J., Ismailov V.E. Approximation capability of two hidden layer feedforward neural networks with fixed weights. *Neurocomputing*. 2018;316:262–269.
10. Liu B., Liang Y. Optimal function approximation with ReLU neural networks. *Neurocomputing*. 2021;435:216–227.
11. Almira J.M., Lopez-de-Teruel P.E., Romero-L'opez D.J., Voigtlaender F. Negative results for approximation using single layer and multilayer feedforward neural networks. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2021;494:124584.
12. Ермаков Б.С. Влияние структуры искусственной нейронной сети на ее эффективность на примере прогнозирования макроэкономических показателей. *Системный анализ и логистика*. 2021;2(28):44–51. <https://doi.org/10.31799/2077-5687-2021-2-44-51>
Ermakov B.S. The influence of the structure of an artificial neural network on its performance: the example of forecasting macroeconomic indicators. *Systems Analysis and Logistics*. 2021;2(28):44–51. (In Russ.) <https://doi.org/10.31799/2077-5687-2021-2-44-51>

13. Chudziak, A., Predictability of stock returns using neural networks: Elusive in the long term. *Expert systems with applications*. 2023;213(C):119203.

14. Maniatopoulos A., Gazis A. Technical analysis forecasting and evaluation of stock markets: the probabilistic recovery neural network approach. *International journal of economics and business research*. 2023;1:64–100.

15. Галабурдин А.В. Применение нейронных сетей при решении эллиптических уравнений для областей сложной формы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):44–51. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-44-51>

Galaburdin A.V. Application of neural networks in solving elliptic equations for domains of complex shape. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):44–51. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-44-51>

16. Галабурдин А.В. Применение нейронных сетей для решения задачи Дирихле для областей сложной формы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):68–79. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-68-79>

Galaburdin A.V. Application of neural networks to solve the Dirichlet problem for domains of complex shape. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):68–79. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-68-79>

Об авторе:

Александр Васильевич Галабурдин, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики Донского государственного технического университета (Российская Федерация, 344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID](#), [SPIN-код](#), Galaburdin@mail.ru

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

About the Author:

Alexander V. Galaburdin, Cand.Sci. (Phys. – math.), Associate Professor, Associate Professor of the Department Mathematics and Informatics, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), Galaburdin@mail.ru

Conflict of Interest Statement: the author declares no conflict of interest.

The author has read and approved the final version of manuscript.

Поступила в редакцию / Received 12.02.2026

Поступила после рецензирования / Reviewed 10.03.2026

Принята к публикации / Accepted 26.03.2026