

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 519.6

Оригинальное эмпирическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-2-7-16>


Метод вырождения интегрального ядра для решения интегрального уравнения Фредгольма

Н.К. Волосова¹, К.А. Волосов² , А.К. Волосова² , М.И. Карлов³,
Д.Ф. Пастухов⁴ , Ю.Ф. Пастухов⁴

¹ Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Российская Федерация

² Российский университет транспорта, г. Москва, Российская Федерация

³ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
г. Долгопрудный, Российская Федерация

⁴ Полоцкий государственный университет им. Евфросинии Полоцкой, г. Новополоцк, Республика Беларусь

dmitrij.pastuhov@mail.ru

Аннотация

Введение. Впервые предложен модифицированный метод вырождения интегрального ядра для решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Идея заключается в том, чтобы интегральное ядро разложить в ряд Тейлора по одной переменной x , а не по двум переменным x, s как в классическом методе.

Материалы и методы. Разложение ядра в ряд проводится в средней точке отрезка интегрирования, что уменьшает модули элементов матрицы C , а также область невырожденности для матрицы $I - \lambda C$. Используется система степенных базисных функций на отрезке интегрирования. Получены три теоремы для достаточных условий корректности предложенного алгоритма методом вырождения интегрального ядра. Введено определение факториальной нормы Чебышева вектор-функции. Факториальная норма для системы частных производных интегрального ядра по переменной x и параметр λ входят в неравенство третьей теоремы — достаточное условие корректности алгоритма. Обратная матрица для решения уравнения Пуассона за конечное число элементарных операций вычислялась библиотекой Msimsl.

Результаты исследования. Предложенный в работе численный алгоритм протестирован на трех интегральных уравнениях Фредгольма с ядрами с экспоненциальным ростом или с периодическим изменением знака ядра. Численные решения совпадают с точными решениями в 15 значащих знаках в равномерной метрике.

Обсуждение. Предложен модифицированный алгоритм численного решения уравнения Фредгольма второго рода с двойной точностью. Решение представимо в виде суммы $n+1$ слагаемого степенного вида с нулем в середине отрезка $[a, b]$ и функции — правой части уравнения Фредгольма.

Заключение. Метод вырождения интегрального ядра представляет интерес для функционального анализа и численных методов. Ядро интегрального уравнения должно быть достаточно гладким по переменной x .

Ключевые слова: уравнения Фредгольма, численные методы, интегральные уравнения, матричный метод

Для цитирования. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Метод вырождения интегрального ядра для решения интегрального уравнения Фредгольма. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2026;10(2):7–16. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-2-7-16>

Integral Kernel Degeneration Method for Solving the Fredholm Integral Equation

Natalya K. Volosova¹, Konstantin A. Volosov² , Aleksandra K. Volosova² , Mikhail I. Karlov³,
Dmitriy F. Pastukhov⁴ , Yuriy F. Pastukhov⁴ 

¹ Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

² Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation

³ Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russian Federation

⁴ Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk, Novopolotsk, Republic of Belarus

✉ dmitrij.pastuhov@mail.ru

Abstract

Introduction. A modified degenerate kernel method for solving Fredholm integral equations of the second kind is proposed for the first time. The main idea is to expand the integral kernel into a Taylor series with respect to a single variable x , rather than with respect to two variables x and s , as in the classical method.

Materials and Methods. The kernel expansion is performed at the midpoint of the integration interval, which reduces the absolute values of the elements of matrix C , as well as enlarges the nonsingularity region of the matrix $I - \lambda C$. A system of power basis functions is employed on the integration interval. Three theorems establishing sufficient conditions for the correctness of the proposed algorithm based on the degenerate kernel method are obtained. A definition of the factorial Chebyshev norm of a vector-valued function is introduced. The factorial norm for the system of partial derivatives of the integral kernel with respect to the variable x , together with the parameter λ , is included in the inequality of the third theorem, which provides a sufficient condition for the correctness of the algorithm. The inverse matrix arising in the numerical solution was computed using the IMSL library within a finite number of elementary operations.

Results. The proposed numerical algorithm was tested on three Fredholm integral equations with kernels exhibiting exponential growth or periodic sign changes. The numerical solutions coincide with the exact solutions to 15 significant digits in the uniform metric.

Discussion. A modified algorithm for the numerical solution of Fredholm equations of the second kind with double precision is proposed. The solution is represented as the sum of $n+1$ power-type terms vanishing at the midpoint of the interval $[a, b]$ and the right-hand side function of the Fredholm equation.

Conclusion. The degenerate kernel method is of interest for both functional analysis and numerical methods. The integral kernel must possess sufficient smoothness with respect to the variable x .

Keywords: Fredholm equations, numerical methods, integral equations, matrix method

For Citation. Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Karlov M.I., Pastukhov D.F., Pastukhov Yu.F. Integral kernel degeneration method for solving the Fredholm integral equation. *Computation Mathematics and Information Technologies*. 2026;10(2):7–16. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-2-7-16>

Введение. Методы решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерры подробно описаны в работе [1]. Это прямые [1, стр. 135] и проекционные [1, стр. 139] методы. В работе [2] для решения интегральных уравнений Фредгольма используются сплайны обобщенного вида. В [3, 4] предложен метод подбора подобластей на базе полиномов Канторовича для решения уравнения Фредгольма второго рода, а также рассматривается специальный вариант метода коллокации на базе полиномов Бернштейна для решения уравнений Фредгольма второго рода. Метод коллокации для решения интегрального уравнения Вольтерры второго рода с использованием многочленов Чебышева и Лежандра применен в [5]. В исследовании [6] решается система интегральных уравнений методом коллокации с узлами многочленов Чебышева первого и второго рода. В [7] предложен метод решения системы нелинейных интегральных уравнений сверточного типа с монотонно выпуклой нелинейностью. В работе [8] предложен обобщенный метод Петрова-Галеркина для решения системы линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. В статье [9] методом замены интеграла с квадратурной интегральной формулой с двенадцатым порядком погрешности получено табличное решение интегрального уравнения с двойной точностью.

В настоящей работе предложен модифицированный метод вырождения интегрального ядра для решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода по базисной системе степенных функций и функциональный вид решения. Достаточно использовать двадцать базисных функций и тридцать интервалов интегрирования в квадратурных формулах для достижения двойной точности решения в трех примерах. Алгоритм тестировался на примерах с экспоненциальным изменением интегрального ядра или с периодическим изменением знака ядра. Доказаны 3 теоремы (достаточные условия существования и единственности численного решения задачи (1) алгоритмом (2)–(7)).

Материалы и методы

Постановка задачи. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода [1, стр. 135]:

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad (x, s) \in [a, b] \times [a, b]. \quad (1)$$

В уравнении (1) параметр λ , интегральное ядро $K(x, s) \in L_2[a, b] \times [a, b]$, правая часть (функция $f(x)$) заданы. Неизвестная функция должна быть интегрируема с квадратом на отрезке $[a, b]$, $y(x) \in L_2[a, b]$. Пусть также частные производные ядра по переменной x непрерывны на квадрате $K_x^{(i)}(x, s) \in C[a, b] \times [a, b], i = 0, n$.

Известен прямой метод решения интегрального уравнения (1) методом вырожденного ядра [1, стр. 135], который заключается в том, чтобы интегральное ядро разложить в ряд по переменным x, s (например, как в задаче 29.11 [1, стр. 138]). Затем решается уравнение (1) методом замены ядра. В классическом методе требуется две системы базисных линейно-независимых функций $\{A_i(x)\}_{i=1}^n, \{B_i(x)\}_{i=1}^n$. По одной из систем раскладывается решение, а ядро представляется суммой попарных произведений функций по одной из каждой системы [1, стр. 138]. Чтобы из интегрального ядра $K(x, s)$ произвольного вида получить полином по двум переменным необходимо разложить ядро в ряд Тейлора по переменным x, s . В этом идея традиционного подхода решения уравнения (1) методом замены интегрального ядра.

Модифицируем известный метод. В данном случае понадобится одна система линейно-независимых функций $\{A_i(x)\}_{i=0}^n, x \in [a, b]$. Будем рассматривать симметричную переменную $y \Big|_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} = x \Big|_a^b - \frac{a+b}{2}, c = \frac{a+b}{2}, h = \frac{b-a}{2}$ относительно середины отрезка $c = \frac{a+b}{2}, y \in [-h, h]$ и систему линейно независимых степенных функций $\{A_i(y) = y^i\}_{i=0}^n, y \in \left[-\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2}\right]$.

Идея модифицированного метода вырождения ядра заключается в том, чтобы разложить ядро $K(x, s)$ по первой переменной x в центре отрезка $c = \frac{a+b}{2}, x = c + y, dx = dy$:

$$K(x, s) = K(c + y, s) = \sum_{i=0}^n K_x^{(i)}(c, s) \frac{y^i}{i!} + O(y^{n+1}), K_n(x, s) = \sum_{j=0}^n K_x^{(i)}(c, s) \frac{y^j}{j!}. \quad (2)$$

В формуле (2) обозначим $K_x^{(i)}(c, s) = q_i(s), i = \overline{0, n}, s \in [a, b]$. Разложим решение $y(x)$ на отрезке $[a, b]$ в сумму

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=0}^n A_i(y) D_i. \quad (3)$$

В формуле (3) $D_i, i = \overline{0, n}$ называется вектором коэффициентов разложения решения по базисным функциям $\{A_i(y) = y^i\}_{i=0}^n$.

Подставим разложения (2), (3) в уравнение Фредгольма второго рода (1):

$$\begin{aligned} y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds &= f(x), A_i(y) = y^i \Leftrightarrow f(x) + \lambda \sum_{i=0}^n y^i D_i - \lambda \int_a^b \sum_{i=0}^n q_i(s) \frac{y^i}{i!} \left(f(s) + \lambda \sum_{j=0}^n A_j(s-c) D_j \right) ds = f(x) \Leftrightarrow \\ &\sum_{i=0}^n y^i D_i - \lambda \int_a^b \sum_{i=0}^n q_i(s) \frac{y^i}{i!} \left(f(s) + \lambda \sum_{j=0}^n (s-c)^j D_j \right) ds = 0 \Leftrightarrow \\ &\sum_{i=0}^n y^i \left\{ D_i - \lambda \sum_{j=0}^n \left(\int_a^b \frac{q_i(s)}{i!} (s-c)^j ds \right) D_j \right\} = \sum_{i=0}^n y^i \left\{ \int_a^b \frac{q_i(s)}{i!} f(s) ds \right\} \Leftrightarrow \\ &D_i - \lambda \sum_{j=0}^n \left(\int_a^b \frac{q_i(s)}{i!} (s-c)^j ds \right) D_j = \int_a^b \frac{q_i(s)}{i!} f(s) ds, i = \overline{0, n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Если ввести обозначения в системе из n уравнений (4):

$$C_{i,j} = \int_a^b \frac{q_i(s)}{i!} (s-c)^j ds, i, j = \overline{0, n}, f_i = \int_a^b \frac{q_i(s)}{i!} f(s) ds, i = \overline{0, n}, \quad (5)$$

то получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $D_i, i = \overline{0, n}$

$$D_i - \lambda \sum_{j=0}^n C_{i,j} D_j = f_i, i = \overline{0, n}. \quad (6)$$

Систему уравнений (6) можно переписать в матричном виде:

$$D_i - \lambda \sum_{j=0}^n C_{i,j} D_j = f_i, i = \overline{0, n}, (I - \lambda C) D = f \Leftrightarrow D = (I - \lambda C)^{-1} f. \quad (7)$$

Обратная матрица $(I - \lambda C)^{-1}$ в программе вычислялась библиотекой Msimsl на языке Fortran. Матричные элементы C_{ij} и коэффициенты правой части (6) можно записать в виде формулы:

$$\begin{cases} C_{i,j} = \int_a^b \frac{q_i(s)}{i!} (s-c)^j ds = \int_{-h}^h \frac{q_i(c+y)}{i!} y^j dy, i, j = \overline{0, n}, h = \frac{b-a}{2}, y \in [-h, h], \\ f_i = \int_a^b \frac{q_i(s)}{i!} f(s) ds = \int_{-h}^h \frac{q_i(c+y)}{i!} f(c+y) dy, i = \overline{0, n}. \end{cases} \quad (8)$$

В формулах (8) переменная $y \in [-h, h]$ изменяет знак и принимает абсолютное значение меньшее, чем переменная x на отрезке $[a, b]$, поэтому элементы матрицы C_{ij} по модулю будут меньше, чем при использовании системы базисных функций $\{A_i(y) = y^i\}_{i=0}^n, y \in [-h, h]$ вместо системы функций $\{A_i(x) = x^i\}_{i=0}^n, x \in [a, b]$ [1, стр. 137]. Это уменьшит норму матрицы $I - \lambda C$ и расширит область невырожденности матрицы $\|C\|$, то есть расширит область существования обратной матрицы $(I - \lambda C)^{-1}$.

Базисные функции $\{A_i(y) = y^i\}_{i=0}^n$ степенного вида не только входят множителями в разложение в ряд Тейлора (2) интегрального ядра $K(x, s)$ по переменной x , но также обеспечивают корректность СЛАУ (4).

Решение (3) является функцией-полиномом степени n , которое можно сравнить с точным решением в каждой точке отрезка $x \in [a, b]$ в отличие от работы [9], где решение ищется в табличном виде на узлах сетки.

В работе [9, стр. 11] приведена интегральная квадратурная формула (9) для вычисления определенного интеграла с двенадцатым порядком погрешности, которая используется для вычисления элементов матрицы и коэффициентов правой части системы (6) по формулам (8):

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \int_a^b y_1(x)y_2(x)dx = 5h \sum_{i=0}^{n_1} y_1(x_i)y_2(x_i) + O(h^{12}),$$

$$n_1 = 10p, h = \frac{b-a}{n_1}, p \in N,$$

где

$$C_i = \begin{cases} \frac{16067}{299376}, \text{если } i = 0 \text{ или } i = n_1, \\ \frac{16067}{149688}, \text{если } (i \equiv 0 \bmod 10) \text{ и } (0 < i < n_1), \\ \frac{26575}{74844}, \text{если } (i \equiv 1 \bmod 10) \text{ или } (i \equiv 9 \bmod 10), \\ \frac{-16175}{99792}, \text{если } (i \equiv 2 \bmod 10) \text{ или } (i \equiv 8 \bmod 10), \\ \frac{5675}{6237}, \text{если } (i \equiv 3 \bmod 10) \text{ или } (i \equiv 7 \bmod 10), \\ \frac{-4825}{5544}, \text{если } (i \equiv 4 \bmod 10) \text{ или } (i \equiv 6 \bmod 10), \\ \frac{17807}{12474}, \text{если } i \equiv 5 \bmod 10. \end{cases}$$

Таким образом, алгоритм (2)–(9) решает численно уравнение Фредгольма второго рода (1). Обратная матрица $(I - \lambda C)^{-1}$ в формуле (7) вычислялась библиотекой Msimsl в компиляторе Fortran. Алгоритм (2)–(7) назовем решением интегрального уравнения Фредгольма (1) методом вырождения интегрального ядра.

Теорема 1 (критерий существования и единственности решения в алгоритме (2)–(7)). Для того чтобы алгоритм (2)–(7) имел единственное решение необходимо и достаточно, чтобы матрица $I - \lambda C$ была невырожденной.

Доказательство Теоремы 1 следует из формулы (7), в которой требуется существование обратной матрицы $(I - \lambda C)^{-1}$, что эквивалентно неравенству нулю определителя матрицы $I - \lambda C$, $\det(I - \lambda C) \neq 0$. **Теорема 1** доказана.

Здесь I — единичная матрица порядка n .

Теорема 2 (достаточные условия корректности алгоритма (2)–(7)). Пусть норма вектора f в уравнении (7) конечна. Если $q = \|\lambda\| \|C\| < 1$, то алгоритм (2)–(7) корректен и справедлива оценка нормы обратной матрицы

$$\|(I - \lambda C)^{-1}\| < \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\|\lambda\| \|C\|}.$$

Доказательство. По условию теоремы 2 $q = \|\lambda\| \|C\| < 1$. Поэтому справедливо представление обратной матрицы бесконечным рядом

$$(I - \lambda C)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k C^k, \quad \|(I - \lambda C)^{-1}\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k C^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\lambda\|^k \|C\|^k = \frac{1}{1-\|\lambda\| \|C\|} < \infty,$$

$$\|D\| = \|(I - \lambda C)^{-1} f\| \leq \|(I - \lambda C)^{-1}\| \|f\| \leq \frac{\|f\|}{1-\|\lambda\| \|C\|} < \infty.$$

Теорема 2 доказана.

Определение 1. Факториальной нормой Чебышева вектор-функции $f(x) : [a, b] \rightarrow C([a, b], R^{n+1})$, $f(x) = \{f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ назовем число $\|f\|_{\infty}^F = \max_{\substack{i=0, n \\ x \in [a, b]}} \frac{|f_i(x)|}{i!}$.

Теорема 3. Выполнение условия $\|q\|_{\infty}^F < \frac{1}{2\|\lambda\| sh(h)}$ достаточно для корректности алгоритма (2)–(7).

Доказательство. Пусть выполнены условия **Теоремы 2** $q = |\lambda| \|C\| < 1$. Оценим бесконечную норму матрицы C , используя формулу (8):

$$\begin{aligned} \|C\|_{\infty} &= \max_{i=0,n} \sum_{j=0}^n |C_{i,j}| = \max_{i=0,n} \sum_{j=0}^n \left| \int_{-h}^h \frac{q_i(c+y)}{i!} y^j dy \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{n=2k} \max_{\substack{i=0,n \\ y \in [-h,h]}} \frac{1}{i!} |q_i(c+y)| \left| \int_{-h}^h y^j dy \right| = \sum_{j=0}^{n=2k} \|q\|_{\infty}^F \left| \int_{-h}^h y^j dy \right| = 2 \|q\|_{\infty}^F \sum_{j=0}^{n=2k} \left(h + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + \dots + \frac{h^{2k+1}}{(2k+1)!} \right). \end{aligned}$$

Поскольку $e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + \frac{h^5}{5!} + \dots$, $e^{-h} = 1 - h + \frac{h^2}{2!} - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} - \frac{h^5}{5!} + \dots$, то

$$e^h - e^{-h} = 2 \left(h + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + \dots \right) \Leftrightarrow h + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + \dots = \frac{e^h - e^{-h}}{2} = sh(h).$$

Обозначим конечную сумму

$$\begin{aligned} I_{n=2k} &= h + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + \dots + \frac{h^{2k+1}}{(2k+1)!}, I_{n=2k} + R_{n=2n} = sh(h), I_{n=2k} < sh(h), R_{n=2n} > 0. \\ R_{n=2n} &= sh(h) - I_{n=2k} = \frac{h^{2k+3}}{(2k+3)!} + \frac{h^{2k+5}}{(2k+5)!} + \frac{h^{2k+7}}{(2k+7)!} + \frac{h^{2k+9}}{(2k+9)!} + \dots = \\ &= \frac{h^{2k+3}}{(2k+3)!} \left(1 + \frac{(2k+3)!}{(2k+5)!} h^2 + \frac{(2k+3)!}{(2k+7)!} h^4 + \frac{(2k+3)!}{(2k+9)!} h^6 + \dots \right) = \frac{h^{2k+3}}{(2k+3)!} \cdot \\ &\cdot \left(1 + \frac{h^2}{(2k+4)(2k+5)} + \frac{h^4}{(2k+4)(2k+5)(2k+6)(2k+7)} + \right. \\ &\left. + \frac{h^6}{(2k+4)(2k+5)(2k+6)(2k+7)(2k+8)(2k+9)} + \dots \right) \leq \\ &\leq \frac{h^{2k+3}}{(2k+3)!} \left(1 + \left(\frac{h}{2k+4} \right)^2 + \left(\frac{h}{2k+4} \right)^4 + \left(\frac{h}{2k+4} \right)^6 + \dots \right) = \frac{h^{2k+3}}{(2k+3)!} \frac{1}{1 - \left(\frac{h}{2k+4} \right)^2}. \\ sh(h) - I_{n=2k} &\leq \frac{h^{2k+3}}{(2k+3)!} \frac{1}{1 - \left(\frac{h}{2k+4} \right)^2} \Leftrightarrow I_{n=2k} \geq sh(h) - \frac{h^{2k+3}}{(2k+3)!} \frac{1}{1 - \left(\frac{h}{2k+4} \right)^2}. \end{aligned}$$

Поскольку $q = |\lambda| \|C\| < 1 \Leftrightarrow \|C\| < \frac{1}{|\lambda|}$, а также $\|C\|_{\infty} \leq 2 \|q\|_{\infty}^F I_{n=2k} < \frac{1}{|\lambda|}$, то верны оценки

$$\|q\|_{\infty}^F < \frac{1}{2|\lambda| sh(h)} < \frac{1}{2|\lambda| I_{n=2k}} \leq \frac{1}{2|\lambda| \left(sh(h) - \frac{1}{(2k+3)!} \frac{h^{2k+3}}{1 - \left(\frac{h}{2k+4} \right)^2} \right)}, n = 2k. \quad (10)$$

Теорема 3 доказана.

Замечание. Отметим, что в правой части неравенства (10) обе оценки фактически совпадают, поскольку если положить $n = 2k = 10$, $h = \pi/2$ добавочное слагаемое очень мало:

$$\frac{1}{(2k+3)!} \frac{h^{2k+3}}{1 - \left(\frac{h}{2k+4} \right)^2} = \frac{1}{13!} \frac{1,57^{13}}{1 - \left(\frac{1,57}{14} \right)^2} \approx 5,73 \cdot 10^{-8}.$$

Теорема 4.

1) Пусть C — положительная матрица, $C_{i,j} > 0, i, j = \overline{0, n}$ и $\lambda > 0$ (либо C — отрицательная матрица, $C_{i,j} > 0, i, j = \overline{0, n}$ и $\lambda < 0$) с элементами главной диагонали $1 - |\lambda| |C_{i,i}| > |\lambda| \sum_{j=0, j \neq i}^n |C_{i,j}|, i = \overline{0, n}$, тогда алгоритм (2)–(7) корректен.

2) Верна оценка для нормы обратной матрицы

$$\frac{1}{r^*} \leq \|(I - \lambda C)^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{r_*}, r_* = \min_{i=0, n} \left(1 - \lambda \sum_{i=0}^n C_{i,j} \right), r^* = \max_{i=0, n} \left(1 - \lambda \sum_{i=0}^n C_{i,j} \right).$$

Доказательство.

1) По условию **Теоремы 4**

$$1 - |\lambda| \|C_{i,i}\| > |\lambda| \sum_{j=0, j \neq i}^n |C_{i,j}|, i = \overline{0, n} \Leftrightarrow |\lambda| \sum_{j=0}^n C_{i,j} < 1 \Rightarrow \max_{i=\overline{0, n}} |\lambda| \sum_{j=0}^n |C_{i,j}| = |\lambda| \|C\|_{\infty} < 1.$$

По **Теореме 2** алгоритм (2)–(7) корректен и существует обратная матрица $(I - \lambda C)^{-1}$ с ограниченной нормой.

2) Диагональные элементы матрицы $I - \lambda C$ положительны $1 - |\lambda| \|C_{i,i}\| > |\lambda| \sum_{j=0, j \neq i}^n |C_{i,j}| \geq 0$, а недиагональные

отрицательны, так как $-\lambda C_{i,j} < 0 \forall i, j = \overline{0, n}, i \neq j$. Также по условию **Теоремы 4** матрица $I - \lambda C$ имеет строгое диагональное преобладание. Тогда выполнены все условия Теоремы Ю.С. Волкова, В.Л. Мирошниченко [10] для матрицы монотонного вида $I - \lambda C$ и справедлива оценка

$$\frac{1}{r^*} \leq \|(I - \lambda C)^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{r_*}, r_* = \min_{i=\overline{0, n}} \left(1 - \lambda \sum_{j=0}^n C_{i,j} \right) > 0, r^* = \max_{i=\overline{0, n}} \left(1 - \lambda \sum_{j=0}^n C_{i,j} \right) > 0.$$

Теорема 4 доказана.

Пример 1. Рассматривается задача

$$y(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{x-s} y(s) ds = e^x. \quad (11)$$

с точным решением $y(x) = 2e^x$.

$$\text{Выполним проверку: } 2e^x - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{x-s} 2e^s ds = e^x \Leftrightarrow 2e^x - e^x = e^x.$$

Применим алгоритм (2)–(9) и достаточные условия корректности алгоритма (Теорему 3) к примеру (10).

При $n = 20$ получим:

$$\lambda = 1/2, K(x, s) = e^{x-s}, f(x) = e^x, a = 0, b = 1, c = h = 1/2, K_x^{(i)}(c, s) = q_i(s) = K_x^{(i)}(1/2, s) = e^{1/2-s},$$

$$i = \overline{0, n}, s \in [0, 1], \|q\|_{\infty}^F < \frac{1}{2|\lambda|sh(h)} \Leftrightarrow \|q\|_{\infty}^F = \max_{\substack{s \in [0, 1], \\ i = \overline{0, n}}} \frac{|e^{1/2-s}|}{i!} = e^{1/2} \approx 1,649 < \frac{1}{2 \cdot (1/2)sh(1/2)} \approx 1,919.$$

Таблица 1

Численное и точное решение примера (10).

Число базисных функций $n = 20$, число интервалов в квадратурной формуле (9) $n_1 = 10$

x	u^{num}	u^{exact}	$u^{num} - u^{exact}$
0,0000000000000000E+000	2,0000000000000000	2,0000000000000000	8,88178419E-016
0,1000000000000000	2,21034183615130	2,21034183615130	4,44089209E-016
0,2000000000000000	2,44280551632034	2,44280551632034	-4,4408920E-016
0,3000000000000000	2,69971761515201	2,69971761515201	4,44089209E-016
0,4000000000000000	2,98364939528254	2,98364939528254	0,0000000000E+000
0,5000000000000000	3,29744254140026	3,29744254140026	8,881784197E-016
0,6000000000000000	3,64423760078102	3,64423760078102	8,881784197E-016
0,7000000000000000	4,02750541494095	4,02750541494095	8,8817841970E-016
0,8000000000000000	4,45108185698493	4,45108185698494	-8,881784197E-016
0,9000000000000000	4,91920622231390	4,91920622231390	8,8817841970E-016
1,0000000000000000	5,43656365691809	5,43656365691809	8,8817841970E-016

С нормой Чебышева [11] для невязки задачи (разности численного решения и точного решения) на узлах сетки квадратурной формулы

$$\|u^{num} - u^{exact}\|_C = \max_{i=\overline{0, n_1}} |u_i^{num} - u_i^{exact}| = 8,881784197001252E - 016, x_i = a + h \cdot i, i = \overline{0, n_1}.$$

По найденному решению (3) можно найти норму невязки в промежуточных узлах сетки, она равна:

$$\|u^{num} - u^{exact}\|_C = \max_{i=\overline{1, n_1}} |u_i^{num} - u_i^{exact}| = 1,776356839400250E - 015, x_i = a + h \cdot (i - 1/2), i = \overline{1, n_1}.$$

Значения нормы невязки задачи показывают, что функциональное решение (3) имеет двойную точность и дает 15 верных значащих цифр в решении (таблица 1).

Пример 2. Рассматривается задача

$$y(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{x+s} y(s) ds = e^x. \quad (12)$$

с точным решением $y(x) = \frac{4}{5-e^2} e^x$.

Выполним проверку:

$$\frac{4}{5-e^2} e^x - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{x+s} \left(\frac{4}{5-e^2} \right) e^s ds = e^x \Leftrightarrow \frac{4}{5-e^2} - \frac{2}{5-e^2} \left(\frac{e^2-1}{2} \right) = \frac{5-e^2}{5-e^2} = 1 = 1.$$

Применяя алгоритм (2)–(9) к примеру (12), получим

$$\lambda = 1/2, K(x, s) = e^{x+s}, f(x) = e^x, a = 0, b = 1, c = 1/2, K_x^{(i)}(c, s) = q_i(s) = K_x^{(i)}(1/2, s) = e^{1/2+s}.$$

Бесконечная норма матрицы C , вычисленная программой с числом базисных функций $n = 20$ равна:

$$\|C\|_{\infty} = 3,39714811032309, |\lambda| \|C\|_{\infty} = (1/2) 3,39714811032309 = 1,69857405516155 > 1.$$

Поэтому достаточные условия в теоремах 2, 3, 4 не выполнены и теоремы 2, 3, 4 к примеру 2 неприменимы.

Таблица 2

Численное и точное решение примера (11).

Число базисных функций $n = 20$, число интервалов в квадратурной формуле (9) $n_1 = 30$

x	u^{num}	u^{exact}	$u^{num} - u^{exact}$
0,000000000000000E+000	-1,67430141208924	1,67430141208924	2,2204460492E-016
0,100000000000000	-1,85038922873402	-1,85038922873402	0,0000000000E+000
0,200000000000000	-2,04499636271726	-2,04499636271727	1,3322676295E-015
0,300000000000000	-2,26007050764560	-2,26007050764560	8,8817841970E-016
0,400000000000000	-2,49776419785038	-2,49776419785038	4,4408920985E-016
0,500000000000000	-2,76045635167479	-2,76045635167479	4,4408920985E-016
0,600000000000000	-3,05077608048818	-3,05077608048818	4,4408920985E-016
0,700000000000000	-3,37162900171635	-3,37162900171635	8,8817841970E-016
0,800000000000000	-3,72622631923734	-3,72622631923734	4,4408920985E-016
0,900000000000000	-4,11811696218917	-4,11811696218917	0,0000000000E+000
1,000000000000000	-4,55122310384550	-4,55122310384550	8,881784197E-016

Норма Чебышева [11] для невязки задачи (разности численного решения и точного решения) на узлах сетки квадратурной формулы:

$$\|u^{num} - u^{exact}\|_C = \max_{i=0, n_1} |u_i^{num} - u_i^{exact}| = 1,332267629550188E - 015, x_i = a + h \cdot i, i = \overline{0, n_1}.$$

Пример 3. Рассматривается задача

$$y(x) - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(x+s) y(s) ds = \sin x + \cos x. \quad (13)$$

с точным решением $y(x) = \frac{4}{4-\pi} (\sin x + \cos x)$.

Выполним проверку:

$$\begin{aligned} \frac{4}{4-\pi} (\sin x + \cos x) - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(x+s) \frac{4}{4-\pi} (\sin s + \cos s) ds &= \frac{4}{4-\pi} (\sin x + \cos x) - \\ \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\sin x \cos s + \cos x \sin s) \left(\frac{4}{4-\pi} \right) (\sin s + \cos s) ds &= \frac{4}{4-\pi} (\sin x + \cos x) - \frac{2}{4-\pi} (\sin x + \cos x) \frac{\pi}{2} = \\ &= \left(\frac{4-\pi}{4-\pi} \right) (\sin x + \cos x) = \sin x + \cos x. \end{aligned}$$

Применим алгоритм (2)–(9) к примеру 3, получим

$$\begin{aligned} \lambda &= 1/2, K(x, s) = \sin(x+s), f(x) = \sin x + \cos x, a = 0, b = \pi, \\ c &= \pi/2, K_x^{(i)}(c, s) = q_i(s) = K_x^{(i)}(\pi/2, s) = \sin \left(s + (i+1) \frac{\pi}{2} \right), i = \overline{0, n}, s \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

Бесконечная норма матрицы C , вычисленная программой с числом базисных функций $n = 20$ в примере 3 равна

$$\|C\|_{\infty} = 1528,89560494716, \|\lambda\| \|C\|_{\infty} = (1/2)1528,89560494716 = 764,447802473580 > 1.$$

Поэтому достаточные условия в теоремах 2, 3, 4 не выполнены и теоремы 2, 3, 4 к примеру 3 неприменимы.

Таблица 3

Численное и точное решение примера (12).

Число базисных функций $n = 20$, число интервалов в квадратурной формуле (9) $n_1 = 30$

x	u^{num}	u^{exact}	$u^{num} - u^{exact}$
0,0000000000000000E+000	4,65979236632548	4,65979236632549	-2,66453525E-015
0,314159265358979	5,87168092602949	5,87168092602949	-2,66453525E-015
0,628318530717959	6,50880844628713	6,50880844628714	-3,55271367E-015
0,942477796076938	6,50880844628713	6,50880844628714	-1,77635683E-015
1,25663706143592	5,87168092602949	5,87168092602949	-1,77635683E-015
1,57079632679490	4,65979236632549	4,65979236632549	0,0000000000E+000
1,88495559215388	2,99177086312304	2,99177086312304	-8,881784197E-016
2,19911485751286	1,03089398294480	1,03089398294480	8,8817841970E-016
2,51327412287183	-1,03089398294480	-1,03089398294480	1,11022302E-015
2,82743338823081	-2,99177086312304	-2,99177086312304	0,000000000000E+000
3,14159265358979	-4,65979236632548	-4,65979236632549	1,776356839400E-015

Норма Чебышева [11] для невязки задачи (разности численного решения и точного решения) на узлах сетки квадратурной формулы:

$$\|u^{num} - u^{exact}\|_C = \max_{i=0, n_1} |u_i^{num} - u_i^{exact}| = 1,776356839400250E - 015, x_i = a + h \cdot i, i = \overline{0, n_1}.$$

Обсуждение. Впервые предложен модифицированный метод вырождения ядра для решения интегрального уравнения Фредгольма 2 рода. Идея метода заключается в разложении интегрального ядра по переменной x в ряд Тейлора в середине отрезка интегрирования. Доказаны три теоремы — достаточные условия корректности алгоритма (2)–(7) с оценкой нормы обратной матрицы в формуле (7). Определена факториальная норма Чебышева вектор-функции. Впервые получено достаточное условие (10), связывающее факториальную норму системы функций из частных производных интегрального ядра с параметром λ . Алгоритм (2)–(7) тестировался для 3-х примеров, в которых интегральное ядро имеет экспоненциальную особенность или периодическую смену знака.

Заключение. Метод вырождения интегрального ядра представляет интерес в функциональном анализе и в численных методах. Ядро интегрального уравнения должно иметь достаточную гладкость по переменной x .

Список литературы / References

- Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. *Численные методы в задачах и упражнениях*. Москва: Бином. Лаборатория знаний. 2010. 240 с.
Bakhvalov N.S., Lapin A.V., Chizhonkov E.V. *Numerical methods in problems and exercises*. Binom. lab. Knowledge. 2010. 240 p. (In Russ.)
- Бурова И.Г., Алтыбеев Г.О. Применение сплайновых аппроксимаций второго порядка к решению интегральных уравнений второго рода. *Вычислительные методы и программирование*. 2025;2(26):175–191. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v26r213>
Burova I.G., Altsybeev G.O. The use of second-order H alsoths to solve integral equations of the second kind. *Computational methods and programming*. 2025;2(26):175–191. (In Russ.) <https://doi.org/10.26089/NumMet.v26r213>
- Соловьева С.А. О специальном варианте метода подобластей решения интегральных уравнения Фредгольма второго рода. *Вычислительные методы и программирование*. 2018;3(19):230–234. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v19r322>
Solovyova, S.A. On the special version of the method of resolving the integrated equations of Fredgolm of the second kind. *Computational methods and programming*. 2018;3(19):230–234. (In Russ.) <https://doi.org/10.26089/NumMet.v19r322>
- Соловьева С.А. Об одном варианте метода коллокации для интегральных уравнений Фредгольма второго рода. *Вычислительные методы и программирование*. 2017;(2)18:187–191. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v18r216>
Solovyova S.A. On one version of the collocation method for the integrated equations of Fredgolm of the second kind. *Computational methods and programming*. 2017;2(18):187–191. (In Russ.) <https://doi.org/10.26089/NumMet.v18r216>
- Гермидер О.В., Попов В.Н. О методе коллокации при построении решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода с использованием многочленов Чебышева и Лежандра. *Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика*. 2024;50:19–35. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.19>

Hermider O.V., Popov V.N. On the method of collocation when constructing a solution to the integral equation of Voltaire's second kind using polynomials of Chebyshev and Lyandra. *Izvestia of the Irkutsk State University. Series: Mathematics*. 2024;50:19–35. (In Russ.) <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.19>

6. Junghanns P., Roch St., Silbermann B. Collocation methods for systems of cauchy singular integral equations. *Computational Technologies*. 2001;1(6):88–124.

7. Давыдов А.А., Хачатрян Х.А., Петросян А.С. О решениях одной системы нелинейных интегральных уравнений типа свёртки на всей числовой прямой. *Дифференциальные уравнения*. 2023;11(59):1500–1514. <https://doi.org/10.31857/S0374064123110055>

Davydov A.A., Khachatryan H.A., Petrosyan A.S. On the solutions of one system of non-linear integrated equations such as a soften throughout the numerical direct. *Differential equations*. 2023;11(59):1500–1514. (In Russ.) <https://doi.org/10.31857/S0374064123110055>

8. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Обобщение метода Петрова-Галеркина для решения системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода. *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2023;1(60):5–14. <https://doi.org/10.17072/1993-0550-2023-1-5-14>

Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Karlov M.I., Pastuhov D.F., Pastuhov Yu.F. The solution of the integral equations of Fredholm by replacing the integrated square with the twelfth order of the error in the matrix form. *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*. 2023;1(60):5–14. (In Russ.) <https://doi.org/10.17072/1993-0550-2023-1-5-14>

9. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Решение интегральных уравнений Фредгольма методом замены интеграла квадратурой с двенадцатым порядком погрешности в матричном виде. *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2022;4(59):9–17. <https://doi.org/10.17072/1993-0550-2022-4-9-17>

Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Karlov M.I., Pastuhov D.F., Pastuhov Yu.F. The solution of the integral equations of Fredholm by replacing the integrated square with the twelfth order of the error in the matrix form. *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*. 2022;4(59):9–17. (In Russ.) <https://doi.org/10.17072/1993-0550-2022-4-9-17>

10. Волков Ю.С., Мирошниченко В.Л. Оценки норм матриц, обратных к матрицам монотонного вида и вполне неотрицательным матрицам. *Сибирский математический журнал*. 2009;6(50):1248–1254.

Volkov Yu.S., Miroshnichenko V.L. Assessments of the norms of matrices, opposite to matrices of a monotonous kind and quite non-negative matrices. *Siberian mathematical journal*. 2009;6(50):1248–1254. (In Russ.)

11. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы: учебное пособие для студентов физико-математических специальностей высших учебных заведений*. Москва: Бинوم. Лаборатория знаний; 2011. 636 с.

Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Numerical methods: a textbook for students of physics and mathematics specialties of higher educational institutions*. Binom. lab. Knowledge; 2011. 636 p. (In Russ.)

Об авторах:

Наталья Константиновна Волосова, аспирант Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана (105005, Российская Федерация, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, стр. 1), navalosova@yandex.ru

Константин Александрович Волосов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Российская Федерация, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-8431-1111), [SPIN-код](https://spina.org.ru/SPIN-код), konstantinvolosov@yandex.ru

Александра Константиновна Волосова, кандидат физико-математических наук, начальник аналитического отдела ООО «Трамплин» Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Российская Федерация, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-8431-1111), [SPIN-код](https://spina.org.ru/SPIN-код), alya01@yandex.ru

Михаил Иванович Карлов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Московского физико-технического института (141701, ГСП-4, Российская Федерация, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9), [SPIN-код](https://spina.org.ru/SPIN-код), karlov.mipt@gmail.com

Дмитрий Феликсович Пастухов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-8431-1111), [SPIN-код](https://spina.org.ru/SPIN-код), dmitrij.pastuhov@mail.ru

Юрий Феликсович Пастухов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-8431-1111), [SPIN-код](https://spina.org.ru/SPIN-код), pulsar1900@mail.ru

Заявленный вклад соавторов:

Н.К. Волосова: постановка задачи; написание черновика рукописи; формулировка идей исследования, целей и задач.

К.А. Волосов: научное руководство; разработка методологии.

А.К. Волосова: перевод; изучение истории задачи; поиск литературы.

М.И. Карлов: формальный анализ.

Д.Ф. Пастухов: визуализация; валидация; разработка программного обеспечения.

Ю.Ф. Пастухов: тестирование существующих компонентов кода.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Natalya K. Volosova, Post-graduate Student of Bauman Moscow State Technical University (5–1, 2nd Baumanskaya St., Moscow, 105005, Russian Federation), navalosova@yandex.ru

Konstantin A. Volosov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics of the Russian University of Transport (9–9, Obraztsova St., Moscow, GSP-4, 127994, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), konstantinvolosov@yandex.ru

Aleksandra K. Volosova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Chief Analytical Department “Tramplin” LLC, Russian University of Transport (9–9, Obraztsova St., Moscow, GSP-4, 127994, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), alya01@yandex.ru

Mikhail I. Karlov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (9, Institutsky Lane, GSP-4, Dolgoprudny, 141701, Russian Federation), [SPIN-code](#), karlov.mipt@gmail.com

Dmitriy F. Pastukhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (29, Blokhin St., Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), [ORCID](#), [SPIN-code](#), dmitrij.pastuhov@mail.ru

Yuriy F. Pastukhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (29, Blokhin St., Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), [ORCID](#), [SPIN-code](#), pulsar1900@mail.ru

Contributions of the authors:

N.K. Volosova: ideas; formulation or evolution of overarching research goals and aims; writing — original draft preparation.

K.A. Volosov: supervision; methodology.

A.K. Volosova: translation; study of the history of the task; literature.

M.I. Karlov: formal analysis.

D.F. Pastukhov: visualization; validation; software.

Yu.F. Pastukhov: testing of existing code components.

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 30.08.2025

Поступила после рецензирования / Reviewed 26.10.2025

Принята к публикации / Accepted 12.12.2025