

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELLING



УДК 519.6:504.05

Оригинальное эмпирическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-2-17-30>


Математическая модель динамики фитопланктона с учетом трансформации биогенных соединений, взвешенных и растворённых веществ

И.Ю. Кузнецова , Ю.В. Белова

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

✉ ikuznecova@donstu.ru

Аннотация

Введение. В условиях возрастающей антропогенной нагрузки и нарушения баланса биогенных элементов особую актуальность приобретает разработка моделей динамики фитопланктона. Предлагаемый в настоящей работе подход интегрирует описание циклов кислорода и углекислого газа, что критически важно для оценки рисков «цветения» воды цианобактериями и деоксигенации водоемов.

Материалы и методы. Рассмотрен подход к построению комплексной математической модели, которая в отличие от существующих аналогов одновременно учитывает динамику трех функционально различных групп фитопланктона с их специфическими предпочтениями к источникам азота и фосфора, а также полный цикл кремния, критически важный для диатомей. Модель интегрирует ключевые показатели здоровья экосистемы — кислотность и процессы газообмена, что позволяет оценивать влияние динамики планктона на кислородный режим водной среды.

Результаты исследования. Получены стационарные решения задачи динамики планктона с учетом трансформации биогенных соединений, взвешенных и растворённых веществ, в том числе кислорода и углекислого газа. В зависимости от внешних условий (свет, температура, входные концентрации биогенных веществ) возможны несколько качественно различных устойчивых стационарных состояний.

Обсуждение. Полученные результаты могут быть использованы для прогноза последствий эвтрофикации водоемов, «цветения» вод, оценки сезонной сукцессии планктонных сообществ; разработки стратегий снижения антропогенной нагрузки на водоемы; оценки роли морских и пресноводных экосистем в поглощении CO_2 и продуцировании кислорода.

Заключение. Проанализированы условия, при которых система приходит к тому или иному стационарному состоянию (равновесию), что позволит спрогнозировать долгосрочные последствия антропогенного воздействия и разрабатывать эффективные управляющие решения.

Ключевые слова: динамика планктона, биогенные вещества, растворенный кислород, углекислый газ, стационарное решение

Благодарности. Авторы выражают искреннюю благодарность Александру Ивановичу Сухинову, доктору физико-математических наук, профессору, член-корреспонденту РАН за внимательное отношение и помощь в работе, конструктивные замечания и ценные рекомендации, которые способствовали улучшению качества исследования.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–71–10102–П, <https://rscf.ru/project/22-71-10102/>

Для цитирования. Кузнецова И.Ю., Белова Ю.В. Математическая модель динамики планктона с учетом трансформации биогенных соединений, взвешенных и растворённых веществ. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2026;10(2):17–30. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-2-17-30>

Mathematical Model of Plankton Dynamics Accounting for the Transformation of Nutrient Compounds, Suspended and Dissolved Substances

Inna Yu. Kuznetsova^{ID}, Yulia V. Belova^{ID}

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

✉ ikuznecova@donstu.ru

Abstract

Introduction. In the context of increasing anthropogenic pressure and imbalance of nutrients, the development of phytoplankton dynamics models becomes particularly relevant. The proposed approach integrates the description of oxygen and carbon dioxide cycles, which is critically important for assessing the risks of cyanobacterial water “blooms” and reservoir deoxygenation.

Materials and Methods. An approach to constructing a comprehensive mathematical model is considered. Unlike existing analogues, this model simultaneously accounts for the dynamics of three functionally distinct phytoplankton groups with their specific preferences for nitrogen and phosphorus sources, as well as the complete silicon cycle, which is critically important for diatoms. The model integrates gas exchange processes, enabling the assessment of plankton dynamics’ impact on the oxygen regime of the aquatic environment and acidity, which are key indicators of ecosystem health.

Results. Stationary solutions were obtained for the problem of plankton dynamics, considering the transformation of nutrient compounds, suspended and dissolved substances, including oxygen and carbon dioxide. Depending on external conditions (light, temperature, input nutrient concentrations), several qualitatively different stable stationary states are possible.

Discussion. The obtained results can be used for forecasting the consequences of reservoir eutrophication and water “blooms”; assessing the seasonal succession of plankton communities; developing strategies to reduce anthropogenic load on water bodies; and evaluating the role of marine and freshwater ecosystems in CO_2 absorption and oxygen production.

Conclusions. Understanding the conditions under which the system reaches a particular stationary state (equilibrium) allows us to predict the long-term consequences of anthropogenic impact and develop effective management solutions.

Keywords: plankton dynamics, nutrients, dissolved oxygen, carbon dioxide, stationary solution

Acknowledgements. The authors express their sincere gratitude to Alexander I. Sukhinov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, for his attentive attitude and assistance in the work, constructive comments, and valuable recommendations that contributed to improving the quality of the study.

Funding. The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 22–71–10102–II, <https://rscf.ru/project/22-71-10102/>

For Citation. Kuznetsova I.Yu., Belova Yu.V. A Mathematical Model of Plankton Dynamics Accounting for the Transformation of Nutrient Compounds, Suspended and Dissolved Substances. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2026;10(2):17–30. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-2-17-30>

Введение. Экосистема водоема представляет собой сложноорганизованную структуру взаимодействия различных групп гидробионтов как с органическими веществами, так и с факторами среды (соленость, температура и др.). Значительное влияние на экосистему оказывает уровень растворенного кислорода, так как при нехватке кислорода можно наблюдать массовую гибель живых организмов. Увеличение объемов промышленного производства и сброс производственных отходов и загрязняющих веществ в водоемы резко увеличивает нагрузку на водную экосистему. Например, в последние десятилетия отмечено значительное влияние углеродного цикла на экосистемы водных объектов, так как растет уровень поглощения углекислого газа океанами планеты, что в свою очередь влияет как на водородный показатель вод, так и на химические реакции, проходящие в толще воды и оказывающие существенное влияние на жизнедеятельность живых организмов.

Фитопланктон, будучи основным продуцентом в большинстве водных экосистем, играет ключевую роль в глобальных биогеохимических циклах, продуцируя кислород и поглощая углекислый газ. Однако в условиях антропогенного воздействия, в первую очередь эвтрофикации — насыщения вод биогенными элементами (азотом и фосфором), наблюдается нарушение естественного баланса планктонных сообществ. Это нарушение часто проявляется в виде массивного «цветения» воды, которое может быть вызвано различными группами фитопланктона. Особую опасность представляют цветения цианобактерий (сине-зеленых водорослей), многие из которых продуцируют токсины, опасные для гидробионтов, животных и человека. Кроме того, разложение отмершей биомассы планктона приводит к деоксигенации воды — образованию «мертвых зон», гипоксических и аноксических участков, непригодных для жизни аэробных организмов [1]. Смена доминирующих видов фитопланктона, например, диатомовых водорослей на цианобактерии, является индикатором серьезных изменений в состоянии экосистемы.

Ключевым аспектом функционирования водных экосистем является трансформация веществ. Поступление минеральных форм фосфора и азота стимулирует рост фитопланктона. Отмирание и экскреция органического

вещества запускают процессы деструкции, которые тесно связаны с динамикой растворенного кислорода (O_2) и диоксида углерода (CO_2). Ведущими факторами формирования кислородного режима в поверхностных водах являются главным образом продукционные процессы, в придонных — биохимическое разложение донных отложений [2]. Также растворенный кислород является не только источником дыхания гидробионтов, но и фактором, определяющим полноту и скорость минерализации органических веществ в водоеме. Особенностью кислородного режима Азовского моря является его нестабильность, которая определяется рядом постоянных и сезонных факторов: поглощением атмосферного кислорода поверхностным слоем воды, неравномерным притоком речных и черноморских вод, развитием и затуханием жизнедеятельности организмов, циркуляционными процессами, определяющими возможности проникновения кислорода в придонные слои, и другими процессами [3].

В связи с этим актуальной задачей является не просто прогноз роста биомассы фитопланктона, а комплексное моделирование структуры планктонного сообщества и связанных с ним биогеохимических циклов. Математическое моделирование становится незаменимым инструментом для решения этой задачи, позволяя интегрировать разрозненные данные о физических, химических и биологических процессах и предсказывать отклик системы на изменяющиеся внешние условия.

Классические модели (например, уравнение Моно или модель Михаэлиса-Ментен) описывают зависимость скорости роста фитопланктона от концентрации одного лимитирующего вещества (азота или фосфора) [4]. Более сложные модели учитывают совместное лимитирование несколькими ресурсами. Для описания адаптации фитопланктона к изменяющимся условиям были разработаны модели роста фитопланктона, где скорость роста зависит от внутреннего содержания питательных веществ в клетке, а не только от их концентрации в окружающей среде (модель Друппа) [5].

Модель конкурентного исключения (закон или принцип Гаузе) предсказывает, что в стационарном состоянии может выжить только столько видов, сколько лимитирующих ресурсов [6]. Это стимулировало создание моделей, учитывающих дополнительные факторы, позволяющие сосуществовать большему числу видов: пространственная неоднородность, временная изменчивость параметров, аллелопатия, наличие хищников (зоопланктона). В контексте данного исследования ключевыми являются модели, рассматривающие конкуренцию фитопланктона с разными стратегиями потребления биогенных веществ, например, способностью цианобактерий фиксировать атмосферный азот.

Работы таких ученых, как Р. Райли, Д. Стил, М. Лоренц, заложили основы включения биогеохимических процессов в модели экосистем [7, 8]. Были разработаны модели круговорота азота, включающие нитрификацию и денитрификацию (например, модели *WASP* — *Water Quality Analysis Simulation Program* [9] и *ERSEM* — *European Regional Seas Ecosystem Model* [10]). В 1990-2000-х годах произошла интеграция моделей динамики планктона и моделей биогеохимии, что позволило описывать сезонную изменчивость видов и связанные с ней изменения в циклах элементов.

Динамика O_2 и CO_2 традиционно моделируется через баланс процессов фотосинтеза, дыхания и воздушно-водного газообмена [11]. Сложность заключается в необходимости учета суточной динамики, которая в моделях, ориентированных на долгосрочные прогнозы, часто усредняется. В последнее время все большее внимание уделяется моделированию карбонатной системы (pH, щелочность) и ее влиянию на рост различных видов фитопланктона.

Классические модели, такие как модель *NPZ* (*Nutrient-Phytoplankton-Zooplankton*) [12], фокусируются на взаимодействии биогенов, фитопланктона и зоопланктона. Однако они часто рассматривают биогенные элементы в упрощенном виде (например, «азот» или «фосфор» как единый пул).

Более сложные модели учитывают трансформацию различных форм элементов. Например, цикл азота детализируется с учетом процессов нитрификации (окисление аммония в нитриты, а затем в нитраты) и денитрификации [13]. Это критически важно, поскольку разные виды фитопланктона имеют различные предпочтения к источникам азота: диатомовые водоросли предпочитают нитраты, многие зеленые водоросли — аммоний, а некоторые цианобактерии способны к фиксации атмосферного азота (N_2), что дает им конкурентное преимущество в бедных азотом водах.

Аналогично, для адекватного описания динамики диатомовых водорослей необходимо учитывать цикл кремния, так как их панцирь состоит из кремнезема (SiO_2). Модели, игнорирующие лимитацию по кремнию, могут существенно завышать прогнозы по биомассе диатомей.

Модели, включающие динамику кислорода и CO_2 , являются следующим уровнем сложности. Они позволяют оценивать последствия эвтрофикации не только в терминах биомассы водорослей, но и в терминах здоровья экосистемы (кислородный режим) и ее роли в цикле углерода. Такие модели часто строятся на основе стехиометрических соотношений (соотношений Редфилда [11]) между углеродом, азотом и фосфором в биомассе планктона.

Несмотря на существование комплексных моделей (например, семейства моделей *ERSEM*), модели, которые бы одновременно учитывали конкуренцию нескольких специфических видов фитопланктона с различными стратегиями питания, полный цикл кремния и динамику газов в замкнутой системе уравнений, представлены в литературе недостаточно. Данное исследование направлено на заполнение этого пробела путем построения комплексной модели и проведения системного анализа ее стационарных состояний, что является фундаментальной задачей для понимания устойчивости водных экосистем к антропогенному воздействию.

Материалы и методы

1. Математическая модель динамики планктона. Предлагаемая модель динамики планктона основана на системе уравнений транспорта биогенных веществ [11, 13, 14]:

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial(uq_i)}{\partial x} + \frac{\partial(vq_i)}{\partial y} + \frac{\partial((w + w_{s,i})q_i)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial q_i}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial q_i}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \frac{\partial q_i}{\partial z}\right) + R_{q_i} + C_{q_i}, \quad (1)$$

где q_i — концентрация i -ой компоненты, мг/л (сведения о компонентах представлены в таблице 1); $\mathbf{V} = \{u, v, w\}$ — компоненты вектора скорости водного потока, м/с; $w_{s,i}$ — скорость гравитационного осаждения i -ой компоненты, если она находится во взвешенном состоянии; μ, ν — горизонтальная и вертикальная составляющие коэффициента турбулентного обмена, м²/с; R_{q_i} — функция-источник биогенных веществ, мг/л·с; C_{q_i} — поток кислорода и углекислого газа из атмосферы, мг/л·с.

Рассматриваемая модель учитывает следующие факторы (компоненты), представленные в таблице 1 и формирующие систему уравнений (1).

Таблица 1

Компоненты математической модели (1)

i	Обозначение	Название
1.	F_1	концентрация зелёных водорослей (<i>Chlorella vulgaris</i>)
2.	F_2	концентрация сине-зеленых водорослей (<i>Aphanizomenon flos-aquae</i>)
3.	F_3	концентрация диатомовых водорослей (<i>Skeletonema costatum</i>)
4.	PO_4	концентрация фосфатов, минерального фосфора
5.	POP	концентрация взвешенного органического фосфора
6.	DOP	концентрация растворённого органического фосфора
7.	NO_3	концентрация нитратов
8.	NO_2	концентрация нитритов
9.	NH_4	концентрация аммония
10.	Si	концентрация растворенного неорганического кремния (кремнекислота, $Si(OH)_4$)
11.	O_2	концентрация растворённого кислорода
12.	CO_2	концентрация углекислого газа (газообразный диоксид углерода, растворенные органический углерод и общий неорганический углерод)

При дальнейшем рассмотрении модели учтем следующие допущения:

1. Температура и световой режим задаются как внешние, управляющие параметры.
2. Гидродинамические процессы учитываются. Вектор скорости водной среды рассчитывается на основании математической модели гидродинамики мелководного водоема [15].
3. Зоопланктон и высшая водная растительность исключены из рассмотрения для фокусировки на процессах первичного продуцирования и деструкции.
4. Поступление биогенов (PO_4 , NO_3 , NH_4 , Si) из внешних источников постоянно.
5. Процессы нитрификации идут в две стадии: окисление NH_4^+ до NO_2^- и NO_2^- до NO_3^- .
6. Процессы минерализации, нитрификации и дыхания зависят от температуры по закону Вант-Гоффа.
7. Стехиометрические соотношения элементов в биомассе фитопланктона ($C:N:P:Si$) считаются постоянными для каждого вида.

2. Уравнения для фитопланктона. Химико-биологические реакции для фитопланктона, описывающие функцию-источник биогенных веществ, могут быть записаны в виде [11, 14]:

$$R_{F_i} = C_{F_i} (1 - K_{F_iR}) q_{F_i} - K_{F_iD} q_{F_i} - K_{F_iE} q_{F_i}, \quad i = \overline{1,3}, \quad (2)$$

где C_{F_i} — скорость роста i -го вида фитопланктона; K_{F_iR} — удельная скорость дыхания i -го вида фитопланктона; K_{F_iD} — удельная скорость отмирания (естественной смертности) i -го вида фитопланктона; K_{F_iE} — удельная скорость экскреции фитопланктона.

Скорость роста i -го вида фитопланктона моделируется с учетом лимитирования по множественным ресурсам: для F_1 и F_2 нет лимитирования по кремнию; для F_2 возможен учет фиксации молекулярного азота (N_2), что снимает лимит по азоту при низкой концентрации NH_4 и NO_3 (это может быть учтено введением дополнительного члена $K_{N_2F_2}$, зависящего от концентрации O_2 (фиксация ингибируется кислородом), но в данном исследовании N_2 не учитывается; для F_3 обязателен лимит по кремнию; для предпочтительно поглощение NH_4 перед NO_3 (эффект подавления).

Тогда с учетом указанных ограничений получаем следующую функцию для описания скорости роста фитопланктона:

$$\begin{aligned} C_{F_{1,2}} &= K_{NF_{1,2}} f_T(T) f_I(I) f_S(S) \min \{ f_P(q_{PO_4}), f_N(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4}) \}, \\ C_{F_3} &= K_{NF_3} f_T(T) f_I(I) f_S(S) \min \{ f_P(q_{PO_4}), f_N(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4}), f_{Si}(q_{Si}) \}, \end{aligned} \quad (3)$$

где K_{NF_i} — максимальная удельная скорость роста фитопланктона; $f_T(T), f_I(I), f_S(S)$ — функции зависимости скорости роста конкретного вида фитопланктона от температуры, освещенности и солености соответственно; $f_P(q_{PO_4}), f_N(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4}), f_{Si}(q_{Si})$ — функции зависимости скорости роста фитопланктона от содержания в воде фосфора, соединений азота и кремния соответственно.

Принцип Либиха (минимума) в форме $\min \{ f_P(q_{PO_4}), f_N(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4}) \}$ и $\min \{ f_P(q_{PO_4}), f_N(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4}), f_{Si}(q_{Si}) \}$ использован для учета совместного лимитирующего действия нескольких биогенных соединений.

Функция зависимости роста фитопланктона от температуры и солености:

$$f_T(T) = \exp \left(-\alpha \left\{ (T - T_{opt}) / T_{opt} \right\}^2 \right), f_S(S) = \exp \left(-\beta \left\{ (S - S_{opt}) / S_{opt} \right\}^2 \right), \quad (4)$$

где T_{opt} — температура, S_{opt} — соленость, оптимальные для конкретного вида фитопланктона, $\alpha > 0, \beta > 0$ — коэффициенты ширины интервалов толерантности фитопланктона к температуре и солености соответственно.

Функция зависимости фитопланктона от освещенности описывается моделью Стила:

$$f_T(T) = (I / I_{opt}) \exp(1 - I / I_{opt}), \quad (5)$$

где I_{opt} — оптимальная интенсивность света для фотосинтеза.

Функция лимитирования фосфором:

$$f_P(q_{PO_4}) = \frac{q_{PO_4}}{q_{PO_4} + K_{PO_4}}, \quad (6)$$

где K_{PO_4} — константа полунасыщения фосфатами.

Функция лимитирования соединениями азота:

$$\begin{aligned} f_N(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4}) &= f_N^{(1)}(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4}) + f_N^{(2)}(q_{NH_4}), \\ f_N^{(1)}(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4}) &= \frac{(q_{NO_3} + q_{NO_2}) \exp(-K_{psi} q_{NH_4})}{K_{NO_3} + (q_{NO_3} + q_{NO_2})}, \\ f_N^{(2)}(q_{NH_4}) &= \frac{q_{NH_4}}{K_{NH_4} + q_{NH_4}}, \end{aligned} \quad (7)$$

где K_{NO_3} — константа полунасыщения нитратами; K_{NH_4} — константа полунасыщения аммонием; K_{psi} — коэффициент ингибирования аммония.

Функция лимитирования кремнием:

$$f_{Si}(q_{Si}) = \frac{q_{Si}}{q_{Si} + K_{Si}}, \quad (8)$$

где K_{Si} — константа полунасыщения кремнием.

3. Уравнения для трансформации биогенных элементов

3.1. Цикл фосфора. Уравнение для фосфатов (PO_4): химико-биологическую реакцию, описывающую функцию-источник для фосфатов (PO_4), можно записать в следующем виде [11, 14]:

$$R_{PO_4} = - \sum_{i=1}^3 s_P C_{F_i} (1 - K_{F_iR}) q_{F_i} + K_{PN} q_{POP} + K_{DN} q_{DOP}, \quad (9)$$

где s_P — нормировочный коэффициент в соответствии со стехиометрическим соотношением, K_{PN} — коэффициент фосфатофикации POP ; K_{DN} — коэффициент фосфатофикации DOP . Первое слагаемое в (9) отражает потребление фосфатов фитопланктоном. Также стоит отметить, что минерализация (гидролиз) DOP в фосфаты происходит быстрее по сравнению со скоростью минерализации POP .

Уравнение для взвешенного органического фосфора (POP):

$$R_{POP} = \sum_{i=1}^3 s_P K_{F_iD} q_{F_i} - K_{PD} q_{POP} - K_{PN} q_{POP}, \quad (10)$$

где K_{PD} — удельная скорость автолиза POP . Первое слагаемое в (10) отражает поступление POP за счет отмершей биомассы фитопланктона, второе и третье слагаемые — потеря за счет перехода части POP в DOP в процессе деструкции и минерализации (фосфатофикации) POP .

Уравнение для растворенного органического фосфора (DOP):

$$R_{DOP} = \sum_{i=1}^3 s_P K_{F_iE} q_{F_i} + K_{PD} q_{POP} - K_{DN} q_{DOP}. \quad (11)$$

Первое слагаемое в (11) отражает поступление DOP за счет лизиса и экзоосмоса отмершей биомассы фитопланктона, второе слагаемое — переход части POP в DOP в процессе деструкции, третье слагаемое — минерализация DOP в фосфаты.

3.2. Цикл азота. Уравнение для аммония (NH_4): химико-биологическую реакцию, описывающую функцию-источник для аммония (NH_4), можно записать в следующем виде [11, 14]:

$$R_{NH_4} = -\sum_{i=1}^3 s_N C_{F_i} (1 - K_{F_iR}) \frac{f_N^{(2)}(q_{NH_4})}{f_N(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4})} q_{F_i} + \sum_{i=1}^3 s_N (K_{F_iD} + K_{F_iE}) q_{F_i} - K_{42} q_{NH_4}, \quad (12)$$

где s_N — нормировочный коэффициент в соответствии со стехиометрическим соотношением; K_{42} — удельная скорость окисления аммония до нитритов в процессе нитрификации (в общем случае зависит от концентрации аммония и кислорода). Первое слагаемое в (12) отражает потребление аммония фитопланктоном.

Уравнение для нитритов (NO_2):

$$R_{NO_2} = -\sum_{i=1}^3 s_N C_{F_i} (1 - K_{F_iR}) \frac{f_N^{(1)}(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4})}{f_N(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4})} \cdot \frac{q_{NO_2}}{q_{NO_2} + q_{NO_3}} q_{F_i} + K_{42} q_{NH_4} - K_{23} q_{NO_2}, \quad (13)$$

где K_{23} — удельная скорость окисления нитритов до нитратов в процессе нитрификации. Первое слагаемое в (13) отражает потребление нитритов фитопланктоном (обычно незначительно), второе слагаемое — приток за счет первой стадии нитрификации (окисления аммония до нитритов), третье слагаемое — отток за счет второй стадии нитрификации (окисления нитритов до нитратов).

Уравнение для нитратов (NO_3):

$$R_{NO_3} = -\sum_{i=1}^3 s_N C_{F_i} (1 - K_{F_iR}) \frac{f_N^{(1)}(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4})}{f_N(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4})} \cdot \frac{q_{NO_3}}{q_{NO_2} + q_{NO_3}} q_{F_i} + K_{23} q_{NO_2}. \quad (14)$$

Первое слагаемое в (14) отражает потребление нитратов фитопланктоном, второе слагаемое — приток за счет второй стадии нитрификации (окисления нитритов до нитратов).

3.3. Цикл кремния. Химико-биологическую реакцию, описывающую функцию-источник для растворенного кремния (Si), можно записать в следующем виде [11, 14]:

$$R_{Si} = -s_{Si} C_{F_3} (1 - K_{F_3R}) q_{F_3} + s_{Si} K_{F_3D} q_{F_3}, \quad (15)$$

где s_{Si} — нормировочный коэффициент в соответствии со стехиометрическим соотношением. Первое слагаемое в (15) отражает потребление кремния диатомовыми водорослями, второе слагаемое — приток за счет растворения биогенного кремния из «панцирей» отмерших диатомей.

4. Уравнения для растворенных газов

4.1. Растворенный кислород

$$R_{O_2} = s_O \sum_{i=1}^3 s_P C_{F_i} (K_{F_iR} - 1) q_{F_i} + s_O (K_{PN} q_{POP} + K_{DN} q_{DOP}) + \gamma_{O_2}^{(1)} K_{42} q_{NH_4} - \gamma_{O_2}^{(2)} K_{23} q_{NO_2} + C_{O_2}, \quad (16)$$

где s_O — нормировочный коэффициент в соответствии со стехиометрическим соотношением; $\gamma_{O_2}^{(1)}$ — коэффициент потребления кислорода для первой стадии нитрификации (окисления аммония до нитритов); $\gamma_{O_2}^{(2)}$ — коэффициент потребления кислорода для второй стадии нитрификации (окисления нитритов до нитратов); C_{O_2} — газообмен с атмосферой. Первое слагаемое в (16) отражает производство O_2 при фотосинтезе и потребление O_2 на дыхание фитопланктона, второе и третье слагаемые — отражают участие O_2 в процессе фосфатофикации, четвертое и пятое слагаемые — отражают участие O_2 в процессе нитрификации. Для описания процесса газообмена кислородом между атмосферой и океаном воспользуемся [16]:

$$C_{O_2} = k_{O_2} \left(\frac{Sc}{660} \right)^{-0.5} (C_{O_{2eq}} - q_{O_2}), \quad (17)$$

где k_{O_2} — относительная скорость газообмена, которая может быть вычислена как зависимость от скорости ветра, $k_{O_2}(u) = 0,365u^2 + 0,46u$ [16], где u — скорость ветра, Sc — число Шмидта, отражающее соотношение между кинематической вязкостью и коэффициентом турбулентного обмена, при 20 °C для кислорода $Sc = 660$, $C_{O_{2eq}}$ — равновесная концентрация кислорода, рассчитываемая как функция температуры и солености в соответствии со стандартами UNESCO (1986) [17], при 20 °C равна 31 мл/л.

4.2. Диоксид углерода

$$R_{CO_2} = s_C \sum_{i=1}^3 C_{F_i} (K_{F_i R} - 1) q_{F_i} + C_{CO_2}, \quad (18)$$

где s_C — нормировочный коэффициент в соответствии со стехиометрическим соотношением; C_{CO_2} — газообмен с атмосферой. Первое слагаемое в (18) отражает потребление CO_2 при фотосинтезе и выделение CO_2 при дыхании фитопланктона.

Для описания процесса газообмена диоксидом углерода между атмосферой и океаном воспользуемся следующей формулой [18]:

$$C_{CO_2} = k_{CO_2} (C_{CO_2 eq} - q_{CO_2}), \quad (19)$$

где k_{CO_2} — коэффициент обмена, вычисляемый исходя из приземной скорости ветра по эмпирическим формулам согласно [19]; $C_{CO_2 eq}$ — равновесная концентрация углекислого газа, рассчитываемая по закону Генри: $C = kP$, где P — парциальное давление углекислого газа, а k — константа Генри, зависящая от газа и жидкости.

5. Задание начальных и граничных условий. Для системы (1) зададим векторное поле скоростей водного потока, рассчитываемое на основании математической модели гидродинамики мелководного водоема [15, 20], поле солёности S и температуры T , а также начальные значения функций концентраций q_i , где индекс i соответствует компонентам, представленным в таблице 1:

$$\begin{aligned} q_i(x, y, z, 0) &= q_i^0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \bar{G}, \quad t = 0, \\ \mathbf{V}(x, y, z, 0) &= \mathbf{V}_0(x, y, z), \quad T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z), \quad S(x, y, z, 0) = S_0(x, y, z). \end{aligned} \quad (20)$$

Математическую модель (1)–(19) рассмотрим в расчетной области G , которая представляет собой замкнутый бассейн, ограниченный невозмущенной поверхностью водоема Σ_0 , дном $\Sigma_H = \Sigma_H(x, y)$ и цилиндрической (боковой) поверхностью σ для временного интервала $0 < t \leq T$. $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_H \cup \sigma$ — кусочно-гладкая граница области G . Пусть $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности Σ , u_n — нормальная по отношению к Σ составляющая вектора скорости водного потока.

Для концентраций всех веществ, за исключением O_2 и CO_2 , будем предполагать отсутствие поступления веществ через верхнюю границу расчетной области:

$$\frac{\partial q_i}{\partial z} = 0, \quad i = \overline{1, 10}. \quad (21)$$

Для растворенного кислорода и углекислого газа газообмен с атмосферой рассчитывается согласно формулам (17) и (19):

$$\frac{\partial q_{11}}{\partial z} = C_{O_2}(q_{11}), \quad \frac{\partial q_{12}}{\partial z} = C_{CO_2}(q_{12}). \quad (22)$$

На боковой границе σ для концентраций всех веществ, представленных в таблице 1, зададим следующие условия:

$$q_i = 0, \quad \text{если } u_n < 0; \quad \frac{\partial q_i}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \text{если } u_n \geq 0. \quad (23)$$

На дне Σ_H для концентраций всех веществ, представленных в таблице 1, зададим следующие условия:

$$\frac{\partial q_i}{\partial z} = \varepsilon_i q_i, \quad (24)$$

где ε_i — коэффициент поглощения i -й компоненты донными отложениями.

Предложенная модель (1)–(24) может быть использована для моделирования процессов движения и накопления растворенного кислорода и углекислого газа в толще воды и исследования их влияния на экосистему водоема.

Подбор параметров модели. Для уточнения параметров модели динамики фитопланктона с учётом трансформации биогенных соединений, взвешенных и растворённых веществ, в том числе кислорода и углекислого газа, найдём стационарные решения рассмотренной модели (1)–(24). Для проведения вычислительного эксперимента написана программа на языке программирования R , реализующая решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) (2), (9)–(16), (18) методом Рунге-Кутты четвертого порядка, построение графиков полученных стационарных решений для концентраций фитопланктона, биогенных соединений, взвешенных и растворённых веществ и проверку устойчивости полученных стационарных решений. Проведены численные эксперименты с учетом предположения, что развитие фитопланктона зависит от единственного лимитирующего вещества.

Входные значения параметров модели динамики фитопланктона с учётом трансформации биогенных соединений, взвешенных и растворённых веществ, в том числе кислорода и углекислого газа, а также начальные концентрации фитопланктона, биогенных соединений, взвешенных и растворённых веществ представлены в Таблице 2. Лимитирование температурой, солёностью (4) и освещённостью (5) не учитывались: $T = T_{opt}$, $I = I_{opt}$, $S = S_{opt}$.

Таблица 2

Значения параметров модели динамики фитопланктона и начальные концентрации исследуемых субстанций

Обозначение	Название	Величина	Единица измерения
Параметры модели			
Зеленая водоросль (<i>Chlorella vulgaris</i>)			
K_{NF_1}	максимальная удельная скорость роста	2,8000	1/сут
K_{F_1R}	удельная скорость дыхания	0,1500	1/сут
K_{F_1D}	удельная скорость отмирания	0,0500	1/сут
K_{F_1E}	удельная скорость экскреции	0,1500	1/сут
K_{PO_4}	константа полунасыщения фосфатами	0,2400	
K_{NO_3}	константа полунасыщения нитратами	0,3000	
K_{NH_4}	константа полунасыщения аммонием	0,2000	
Сине-зеленая водоросль (<i>Aphanizomenon flos-aquae</i>)			
K_{NF_2}	максимальная удельная скорость роста	2,8000	1/сут
K_{F_2R}	удельная скорость дыхания	0,1500	1/сут
K_{F_2D}	удельная скорость отмирания	0,0500	1/сут
K_{F_2E}	удельная скорость экскреции	0,1500	1/сут
K_{PO_4}	константа полунасыщения фосфатами	0,2400	
K_{NO_3}	константа полунасыщения нитратами	0,3000	
K_{NH_4}	константа полунасыщения аммонием	0,2000	
Диатомовая водоросль (<i>Skeletonema costatum</i>)			
K_{NF_3}	максимальная удельная скорость роста	2,8000	1/сут
K_{F_3R}	удельная скорость дыхания	0,1500	1/сут
K_{F_3D}	удельная скорость отмирания	0,0500	1/сут
K_{F_3E}	удельная скорость экскреции	0,1500	1/сут
K_{PO_4}	константа полунасыщения фосфатами	0,2400	
K_{NO_3}	константа полунасыщения нитратами	0,3000	
K_{NH_4}	константа полунасыщения аммонием	0,2000	
K_{Si}	константа полунасыщения кремнием	3,0000	
Цикл фосфора			
K_{PD}	удельная скорость автолиза <i>POP</i>	0,0150	1/сут
K_{PN}	коэффициент фосфатофикации <i>POP</i>	0,0200	1/сут
K_{DN}	коэффициент фосфатофикации <i>DOP</i>	0,1000	1/сут
s_P	нормировочный коэффициент	0,0100	
Цикл азота			
K_{42}	удельная скорость окисления аммония до нитритов	0,9000	1/сут
K_{23}	удельная скорость окисления нитритов до нитратов	2,5000	1/сут
K_{psi}	коэффициент ингибирования аммония	1,4600	1/сут
s_N	нормировочный коэффициент	0,0160	
Цикл кремния			
S_{Si}	нормировочный коэффициент	0,0230	
Растворенный кислород			
s_O	нормировочный коэффициент	0,0500	
$\gamma_{O_2}^{(1)}$	коэффициент потребления кислорода для первой стадии нитрификации	0,0500	1/сут
$\gamma_{O_2}^{(2)}$	коэффициент потребления кислорода для второй стадии нитрификации	0,0015	1/сут
C_{O_2eq}	равновесная концентрация кислорода ¹	9,1000	мг/л
Диоксид углерода			
s_C	нормировочный коэффициент	0,0020	1/сут
C_{CO_2eq}	равновесная концентрация углекислого газа	1,5000	мг/л

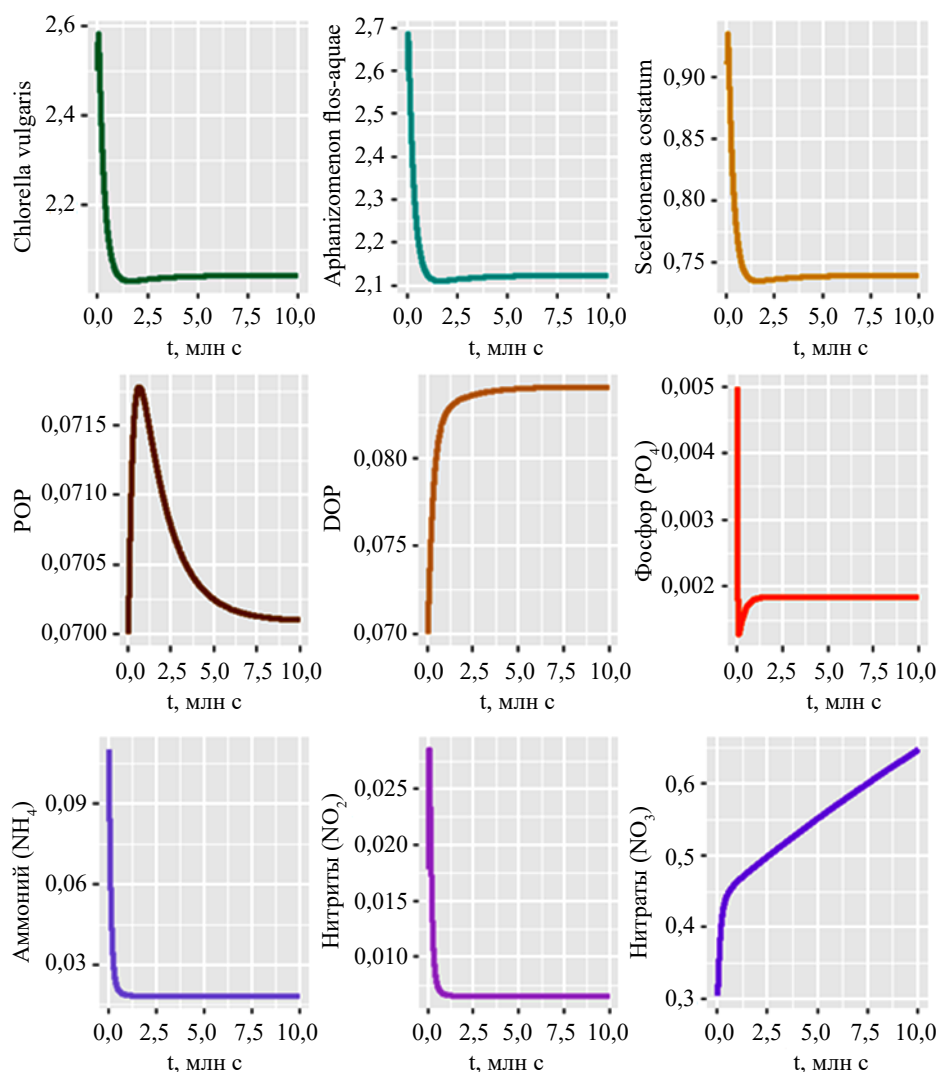
¹ Для простоты равновесная концентрация кислорода была рассчитана на основании эмпирической формулы зависимости от температуры: $C_{CO_2eq}(T) = 14,6 - 0,42 \cdot T + 0,008 \cdot T^2$, $T = T_{опт} = 25^\circ \text{C}$.

Обозначение	Название	Величина	Единица измерения
Начальные концентрации			
q_1	начальная концентрация зеленых водорослей	2,5000	мг/л
q_2	начальная концентрация сине-зеленых водорослей	2,6000	мг/л
q_3	начальная концентрация диатомовых водорослей	0,9100	мг/л
q_{PO_4}	начальная концентрация фосфатов	0,0050	мг/л
q_{POP}	начальная концентрация взвешенного органического фосфора	0,0700	мг/л
q_{DOP}	начальная концентрация растворённого органического фосфора	0,0700	мг/л
q_{NO_3}	начальная концентрация нитратов	0,3040	мг/л
q_{NO_2}	начальная концентрация нитритов	0,0178	мг/л

На рис. 1 представлены результаты моделирования стационарного режима системы ОДУ в предположении, что развитие фитопланктона лимитируется фосфором, азотом и кремнием. Функции лимитирования рассчитываются на основании (6)–(8).

По результатам вычислительных экспериментов видно, что при указанных в таблице 2 значениях начальных концентраций и параметров уравнений наступают стационарные режимы для системы ОДУ (2), (10)–(17), (19), описывающей случай пространственно-равномерного распределения субстанций.

С течением времени динамика становится гладкой и колебания уменьшаются, пока не наступит стационарное состояние. Для нитратов на рис. 1 наблюдается рост концентрации, но она не превышает значения 10^{-6} мг/л. Также падение концентрации диоксида углерода на рис. 1 не превышает 10^{-5} мг/л. Эти результаты иллюстрируют стабильное распределение водорослей и кислорода в водоёме, достигаемое моделью.



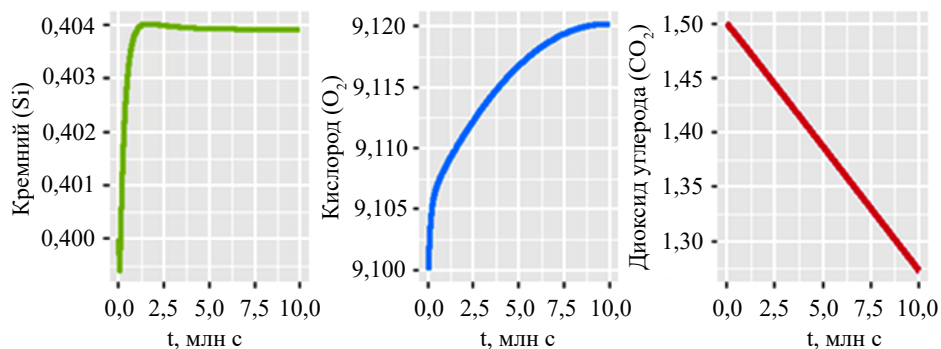


Рис. 1. Стационарные режимы модели динамики фитопланктона

Сценарий дефицита кремния. На основании уточненных параметров модели рассмотрим несколько сценариев динамики фитопланктона с учётом трансформации биогенных соединений, взвешенных и растворённых веществ, в том числе кислорода и углекислого газа. В качестве первого сценария рассмотрим случай малой концентрации кремния. Параметры модели и начальные концентрации задавались на основании таблицы 2, кроме концентрации кремния, которая задавалась $q_{si} = 0,01$ мг/л. Результаты моделирования представлены на рис. 2. Как видно из полученных результатов, недостаток кремния значительно сказался на концентрации диатомовых водорослей, которая к концу периода моделирования не превышает $2 \cdot 10^{-9}$ мг/л. При этом значения концентраций зеленой и сине-зеленой водорослей выше, чем на рис. 1 (при начальной концентрации кремния $q_{si} = 0,4$ мг/л).

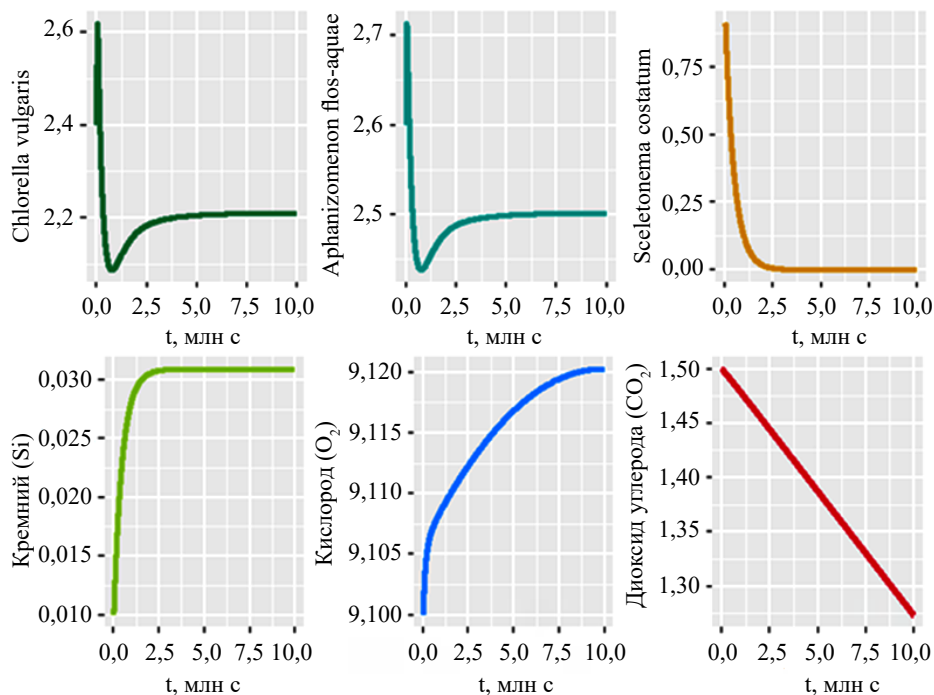


Рис. 2. Стационарные режимы модели динамики фитопланктона в случае дефицита кремния

Сценарий дефицита азота. В качестве второго сценария рассмотрим случай дефицита азота. Параметры модели и начальные концентрации задавались на основании таблицы 2, кроме концентрации нитратов, нитритов и аммония, которые задавались $q_{NO_2} = 0,001$ мг/л, $q_{NO_3} = 0,001$ мг/л, $q_{NH_4} = 0,01$ мг/л.

Результаты моделирования представлены на рис. 3. Недостаток соединений азота существенно снизил биомассу всех трех видов фитопланктона (до $7,7 \cdot 10^{-5}$ мг/л, $8 \cdot 10^{-5}$ мг/л и $2,8 \cdot 10^{-5}$ мг/л для зеленой, синезеленой и диатомовых водорослей соответственно), а также повлиял на концентрации других биогенных и растворенных веществ.

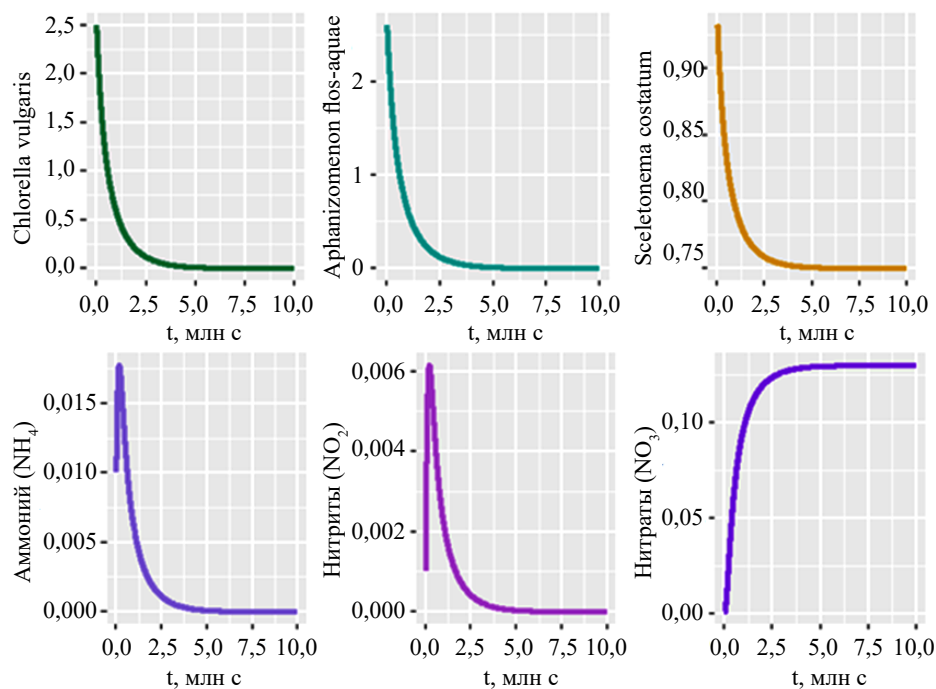


Рис. 3. Стационарные режимы модели динамики фитопланктона в случае дефицита азота

Сценарий дефицита фосфора. В качестве третьего сценария рассмотрим случай дефицита фосфора. Параметры модели и начальные концентрации задавались на основании таблицы 2, кроме концентрации фосфатов и взвешенного и растворённого органического фосфора: $q_{PO_4} = 0,0005$ мг/л, $q_{POP} = 0,007$ мг/л, $q_{DOP} = 0,007$ мг/л.

Результаты моделирования представлены на рис. 4. Недостаток соединений фосфора снизил биомассу всех трех видов фитопланктона, но не так сильно, как при недостатке азота.

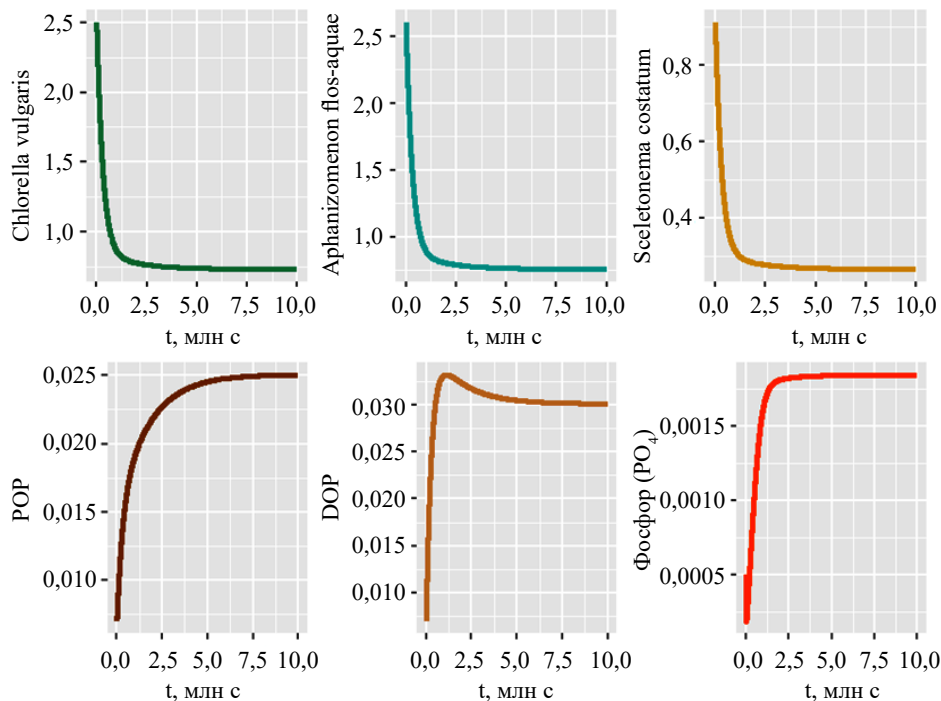


Рис. 4. Стационарные режимы модели динамики фитопланктона в случае дефицита фосфора

Сценарий обилия биогенных веществ. В качестве четвертого сценария рассмотрим случай обилия соединений всех биогенных веществ. Параметры модели задавались на основании таблицы 2. Начальные концентрации веществ: $q_1 = 2,5$ мг/л; $q_2 = 2,6$ мг/л; $q_3 = 0,91$ мг/л; $q_{PO_4} = 0,05$ мг/л; $q_{POP} = 0,7$ мг/л; $q_{DOP} = 0,7$ мг/л; $q_{NO_3} = 0,09$ мг/л; $q_{NO_2} = 0,17$ мг/л; $q_{NH_4} = 0,8$ мг/л; $q_{Si} = 2$ мг/л; $q_{O_2} = 9,1$ мг/л; $q_{CO_2} = 2,5$ мг/л.

Результаты моделирования представлены на рис. 5. Как и стоило ожидать, обилие биогенных веществ ведет к ускоренному росту всех трех видов фитопланктона. Итоговые концентрации веществ: $q_1 = 15,14$ мг/л; $q_2 = 15,75$ мг/л; $q_3 = 5,51$ мг/л; $q_{PO_4} = 0,0018$ мг/л; $q_{POP} = 0,52$ мг/л; $q_{DOP} = 0,624$ мг/л; $q_{NO_3} = 4,786$ мг/л; $q_{NO_2} = 0,052$ мг/л; $q_{NH_4} = 0,145$ мг/л; $q_{Si} = 1,89$ мг/л; $q_{O_2} = 9,44$ мг/л; $q_{CO_2} = 0,819$ мг/л.

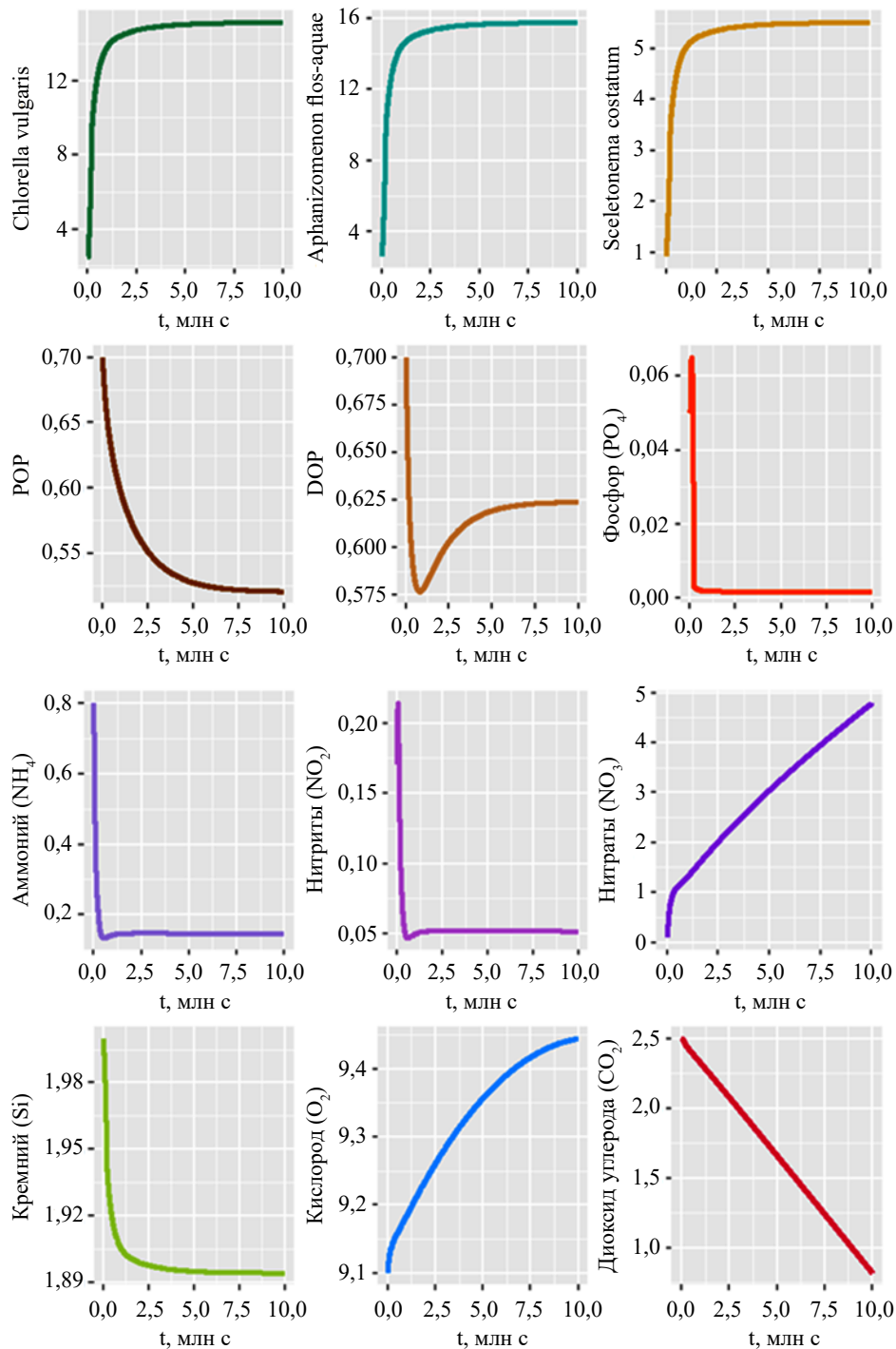


Рис. 5. Стационарные режимы модели динамики планктона в случае обилия биогенных веществ

Обсуждение. В ходе проведенного исследования была рассмотрена комплексная математическая модель динамики планктона с учётом трансформации биогенных соединений, взвешенных и растворённых веществ, в том числе кислорода и углекислого газа. Модель отличается высокой степенью детализации биогеохимических циклов, что позволяет адекватнее описывать процессы в реальных водных экосистемах.

Основным результатом работы является качественное исследование стационарных решений данной модели. Рассмотрены различные сценарии концентраций биогенных веществ. Полученные решения согласуются с данными натурных экспериментов.

Установлено, что ключевыми факторами, определяющими структуру планктонного сообщества в равновесии, являются соотношение биогенных элементов. Скорость газообмена с атмосферой и процессы нитрификации, зависящие от O_2 , являются критическими обратными связями, стабилизирующими или дестабилизирующими систему.

Заключение. Результаты исследования позволяют прогнозировать последствия антропогенного воздействия на водоемы. Например, модель предсказывает, что для перевода системы в более благоприятное состояние (например, с доминированием диатомей) может потребоваться комплекс мер, включающий сокращение поступления соединений фосфора, управление стоком кремния и усиление перемешивания воды для улучшения кислородного режима.

Перспективы дальнейших исследований связаны с усложнением модели за счет включения зоопланктона, детализации процессов светопроницаемости, учета пространственной неоднородности, а также с проведением валидации модели на натурных данных.

Список литературы / References

1. Дебольская Е.И., Якушев Е.В., Сухинов А.И. Формирование заморов и анаэробных условий в Азовском море. *Водные ресурсы*. 2005;32(2):171–183.
2. Debol'skaya E.I., Yakushev E.V., Sukhinov A.I. Formation of Fish Kills and Anaerobic Conditions in the Sea of Azov. *Water Resources*. 2005;32(2):151–162. <https://doi.org/10.1007/s11268-005-0020-5>
3. Chistyakov A.E., Nikitina A.V., Ougolnitsky G.A., Puchkin M.V., Semenov I.S., Sukhinov A.I., Usov A.B. A Differential Game Model of Preventing Fish Kills in Shallow Waterbodies. *Game Theory and Applications*. 2015;17:37–48.
4. Белова Ю.В., Чистяков А.Е. Моделирование динамики концентрации вредоносных видов фитопланктона в Таганрогском заливе Азовского моря. *Безопасность техногенных и природных систем*. 2025;9(4):284–293. <https://doi.org/10.23947/2541-9129-2025-9-4-284-293>
5. Belova Yu.V., Chistyakov A.E. Modeling the Dynamics of Harmful Phytoplankton Species Concentration in Taganrog Bay of the Azov Sea. *Safety of Technogenic and Natural Systems*. 2025;9(4):284–293. <https://doi.org/10.23947/2541-9129-2025-9-4-284-293>
6. Di Toro, D.M. Applicability of cellular equilibrium and monod theory to phytoplankton growth kinetics. *Ecological Modelling*. 1980;8:201–218. [https://doi.org/10.1016/0304-3800\(80\)90038-1](https://doi.org/10.1016/0304-3800(80)90038-1)
7. Абакумов А.И., Пак С.Я. Моделирование процесса фотосинтеза и оценка динамики биомассы фитопланктона на основе модели Друпэ. *Математическая биология и биоинформатика*. 2021;16(2):380–393. <https://doi.org/10.17537/2021.16.380>
8. Abakumov A.I., Pak S.Ya. Modeling the Photosynthesis Process and Assessing The Dynamics of Phytoplankton Biomass based on the Droop Model. *Mathematical Biology and Bioinformatics*. 2021;16(2):380–393. (In Russ.) <https://doi.org/10.17537/2021.16.380>
9. Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. *Динамические системы и модели биологии*. Москва: Физматлит; 2010. 400 с.
10. Bratus A.S., Novozhilov A.S., Platonov A.P. *Dynamic Systems and Models of Biology*. Moscow: Fizmatlit; 2010. 400 p. (In Russ.)
11. Hutchinson G.E. Marginalia – Eutrophication. *American Scientist*. 1973;61:269–279.
12. Pannard A., Souchu P., Chauvin C., Delabuis M., Gascuel-Oudoux C., Jeppesen E. Why are There so Many Definitions of Eutrophication? *Ecological Monographs*. 2024;94:1616. <https://doi.org/10.1002/ecm.1616>
13. Dumlu E., Şebnem E. Application of the WASP Model for Assessment of Aeration Impact on Water Quality of Porsuk River, Turkey. *Scientific Research Communications*. 2022;2(2). <https://doi.org/10.52460/src.2022.008>
14. Trancoso A.R., Braunschweig F., Chambel Leitão P., Obermann M., Neves R. An Advanced Modelling Tool for Simulating Complex River Systems. *Science of The Total Environment*. 2009;407(8):3004–3016. <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2009.01.015>
15. Yakushev E., Mikhailovsky G. Mathematical modeling of the influence of marine biota on the carbon dioxide ocean-atmosphere exchange in high latitudes. *Air-Water Gas Transfer; selected papers from the Third International Symposium*. 1995:37–48.
16. Franks P.J.S. NPZ Models of Plankton Dynamics: Their Construction, Coupling to Physics, and Application. *Journal of Oceanography*. 2002;58(2):379–387. <https://doi.org/10.1023/A:1015874028196>
17. Сухинов А.И., Белова Ю.В. Математическая модель трансформации форм фосфора, азота и кремния в движущейся турбулентной водной среде в задачах динамики планктонных популяций. *Инженерный вестник Дона*. 2015;37(3):50.
18. Sukhinov A.I., Belova Yu.V. The mathematical model of transformation of phosphorus, nitrogen and silicon forms in the moving turbulent water environment in problems of dynamics of planktonic populations. *Engineering journal of Don*. 2015;37(3):50. (In Russ.)
19. Белова Ю.В., Атаян А.М., Чистяков А.Е., Стражко А.В. Исследование стационарных решений задачи динамики фитопланктона с учетом трансформации соединений фосфора, азота и кремния. *Вестник Донского государственного технического университета*. 2019;19(1):4–12. <https://doi.org/10.23947/1992-5980-2019-19-1-4-12>
20. Belova Yu.V., Atayan A.M., Chistyakov A.E., Strazhko A.V. Study on stationary solutions to the problem of phytoplankton dynamics considering transformation of phosphorus, nitrogen and silicon compounds. *Vestnik of Don State Technical University*. 2019;19(1):4–12. <https://doi.org/10.23947/1992-5980-2019-19-1-4-12>
21. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Кузнецова И.Ю., Атаян А.М., Никитина А.В. Регуляризованная разностная схема для решения задач гидродинамики. *Математическое моделирование*. 2022;34(2):85–100. <https://doi.org/10.20948/mm-2022-02-07>

Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Kuznetsova I.Yu., Atayan A.M., Nikitina A.V. Regularized difference scheme for solving hydrodynamic problems. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2022;14:745–754. <https://doi.org/10.1134/S2070048222050155>

16. Сухинов А.И., Белова Ю.В., Кузнецова И.Ю., Атаян А.М., Чистяков А.Е. Математические модели и методы прогнозирования процессов биологической кинетики с учетом влияния кислородного режима. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование*. 2025;18(2):52–65. <https://doi.org/10.14529/mmp250205>

Sukhinov A.I., Belova Yu.V., Kuznetsova I.Yu., Atayan A.M., Chistyakov A.E. Mathematical models and methods of forecasting biological kinetics processes considering the oxygen regime. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*. 2025;18(2):52–65. <https://doi.org/10.14529/mmp250205>

17. UNESCO Progress on oceanographic tables and standards 1983–1986: work and recommendations of the UNESCO/SCOR/ICES/IAPSO Joint Panel. *UNESCO Technical Papers in Marine Science*. 1986;50:9.

18. Lyahin Yu.I. Estimation of CO₂ exchange rate between sea water and atmospheric air. *Okeanologiya*. 1975;15(3):458–464.

19. Vasala V., Maksyutov S. Simulation and assimilation of global ocean pCO₂ and air-sea CO₂ fluxes using ship observations of surface ocean pCO₂ in a simplified biogeochemical offline model. *Tellus B*. 2010;62(5):821–840. <https://doi.org/10.1111/j.1600-0889.2010.00495.x>

20. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Белова Ю.В., Кузнецова И.Ю. Аналитическое и численное исследование задачи динамики планктонных популяций при наличии микропластика. *Математическое моделирование*. 2024;36(3):95–114. <https://doi.org/10.20948/mm-2024-03-07>

Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Belova Yu.V., Kuznetsova I.Yu. Analytical and numerical study of the problem of the plankton population dynamics in the presence of microplastics. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2024;16(5):717–729. <https://doi.org/10.1134/S2070048224700352>

Об авторах:

Инна Юрьевна Кузнецова, старший преподаватель кафедры математики и информатики Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID](#), [SPIN-код](#), [ResearcherID](#), [ScopusID](#), ikuznecova@donstu.ru

Юлия Валериевна Белова, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID](#), [SPIN-код](#), [ScopusID](#), yvbelova@yandex.ru

Заявленный вклад авторов:

И.Ю. Кузнецова: формулирование основной концепции исследования; осуществление научно-исследовательского процесса, включая проведение вычислительных экспериментов; создание и подготовка рукописи: визуализация результатов исследования и полученных данных; оформление графических материалов.

Ю.В. Белова: формулирование целей и задач исследования; создание и подготовка рукописи: критический анализ черновика рукописи; корректировка выводов; доработка текста.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Inna Yu. Kuznetsova, Senior Lecturer, Department of Mathematics and Computer Science, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), [ResearcherID](#), [ScopusID](#), ikuznecova@donstu.ru

Yulia V. Belova, Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics and Computer Science at the Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), [ScopusID](#), yvbelova@yandex.ru

Contributions of the authors:

I.Yu. Kuznetsova: ideas; conducting a research and investigation process, specifically performing the computational experiments; preparation, creation of the published work, specifically visualization; making graphic materials.

Yu.V. Belova: formulation of overarching research goals and aims; preparation, creation of the published work, specifically critical review; conclusions correction; text revision.

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 25.03.2026

Поступила после рецензирования / Reviewed 28.04.2026

Принята к публикации / Accepted 27.05.2026