

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

INFORMATION TECHNOLOGIES



УДК 519.6

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-3-22-30>


Задача поиска главных направлений точечного множества на плоскости и в пространстве

Н.К. Волосова¹, К.А. Волосов² , А.К. Волосова² , М.И. Карлов³,
Д.Ф. Пастухов⁴ , Ю.Ф. Пастухов⁴

¹ Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Российская Федерация

² Российский университет транспорта, г. Москва, Российская Федерация

³ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
г. Долгопрудный, Российская Федерация

⁴ Полоцкий государственный университет им. Евфросинии Полоцкой, г. Новополоцк, Республика Беларусь

dmitrij.pastuhov@mail.ru

Аннотация

Введение. Численно решается задача поиска главных направлений точечного множества на плоскости или в пространстве, то есть поиска ориентации экстремальной прямой, проходящей через центр тяжести множества и доставляющей минимум или максимум функционалу суммы квадратов расстояний от каждой точки множества до прямой. Данная задача является актуальной как вспомогательная для многих задач с интеллектуальными системами.

Материалы и методы. Задача поиска главных направлений на плоскости решена в явном виде для двух полярных углов направления экстремальных прямых соответственно для максимума и минимума функционала ошибок. Для вырожденности знаменателя приведенной формулы с симметричным расположением точек множества достаточно координату одной из точек изменить на 10^{-14} для корректности использования формулы и получения ответа с двойной точностью (добавление малой асимметрии в геометрию множества). Задача поиска главных направлений точечного множества в пространстве сведена к численному итерационному алгоритму методом градиентного спуска изменением углов ориентации прямой, проходящей через центр тяжести множества. Предложен минимальный компактный код программы поиска главных направлений в трехмерном случае на языке C++.

Результаты исследования. Для пространственного расположения точек в явном виде получена формула функционала ошибок и компонентов его градиента в азимутальном и полярном направлениях сферической системы координат. Экспериментально получена формула градиентного шага в зависимости от числа итераций цикла для получения двойной точности численного решения задачи с небольшим числом итераций. Оказалось, что достаточно 100 итераций для поиска экстремальных углов, при котором начальная ориентация отличается на $\pi/2$ от конечной ориентации по каждому углу.

Обсуждение. С двойной точностью численно решены задачи поиска главных направлений точечного множества на плоскости и в пространстве. Приведено два тестирующих примера, подтверждающих двойную точность решения задачи с наибольшим отклонением начальных углов ориентаций прямой. Оказалось, что как в формулах явного вида в двумерной задаче, так и в формулах трехмерного итерационного алгоритма появляются только коэффициенты в виде однородных сумм второго порядка, зависящие от координат точек множества. В первом случае это три, а во втором случае шесть коэффициентов.

Заключение. Метод градиентного спуска, несмотря на простоту алгоритма, обеспечивает корректность итерационных формул при любой начальной и промежуточной ориентации прямой, проходящей через центр тяжести множества точек в пространстве. Полученные формулы в явном виде для главных направлений точечного множества на плоскости и формулы градиентного спуска в трехмерном случае могут быть использованы в задачах анализа с применением интеллектуальных систем и нейронных сетей.

Ключевые слова: численные методы, метод градиентного спуска, градиент, сферическая система координат, искусственный интеллект, нейронные сети

Для цитирования. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Задача поиска главных направлений точечного множества на плоскости и в пространстве. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2026;10(3):22–30. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-3-22-30>

Original Theoretical Research

Determining the Principal Directions of a Point Set in the Plane and in Space

Natalya K. Volosova¹, Konstantin A. Volosov² , Aleksandra K. Volosova² , Mikhail I. Karlov³,

Dmitriy F. Pastukhov⁴ , Yuriy F. Pastukhov⁴ 

¹ Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

² Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation

³ Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russian Federation

⁴ Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk, Novopolotsk, Republic of Belarus

✉ dmitrij.pastuhov@mail.ru

Abstract

Introduction. The problem of determining the principal directions of a point set in the plane or in space is solved numerically. The task is to determine the orientation of an extremal line passing through the centroid of the set and minimizing or maximizing the functional defined as the sum of the squared distances from all points of the set to the line. This problem is relevant as an auxiliary component of many tasks involving intelligent systems.

Materials and Methods. For a point set in the plane, the principal-direction problem is solved explicitly for two polar angles specifying the directions of the extremal lines corresponding to the maximum and minimum of the error functional. If the denominator in the resulting formula degenerates because the points are arranged symmetrically, changing one coordinate of a single point by 10^{-14} is sufficient to break the symmetry, make the formula applicable, and obtain a double-precision result. For a point set in three-dimensional space, the problem is reduced to a numerical iterative algorithm based on gradient descent with respect to the orientation angles of a line passing through the centroid of the set. A minimal compact C++ implementation for determining the principal directions in the three-dimensional case is proposed.

Results. For a spatial point set, an explicit expression is obtained for the error functional and for the components of its gradient in the azimuthal and polar directions of a spherical coordinate system. An empirical formula for the gradient step is obtained as a function of the number of iterations, enabling a double-precision numerical solution with a relatively small number of iterations. It is shown that 100 iterations are sufficient to determine the extremal angles even when the initial orientation differs from the final orientation by $\pi/2$ for each angle.

Discussion. The principal-direction problems for point sets in the plane and in space are solved numerically with double precision. Two test examples confirm double-precision accuracy for cases with the largest deviation between the initial and final line orientations. Both the explicit formulas for the two-dimensional problem and the formulas of the three-dimensional iterative algorithm involve only coefficients represented by homogeneous second-order sums that depend on the point coordinates. There are three such coefficients in the two-dimensional case and six in the three-dimensional case.

Conclusions. Despite its algorithmic simplicity, the gradient descent method yields well-defined iterative formulas for any initial and intermediate orientation of a line passing through the centroid of a point set in space. The explicit formulas obtained for the principal directions of a point set in the plane and the gradient-descent formulas for the three-dimensional case can be used in analysis problems involving intelligent systems and neural networks.

Keywords: numerical methods, gradient descent, gradient, spherical coordinate system, artificial intelligence, neural networks

For Citation. Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Karlov M.I., Pastukhov D.F., Pastukhov Yu.F. Determining the Principal Directions of a Point Set in the Plane and in Space. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2026;10(3):22–30. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2026-10-3-22-30>

Введение. Задачи с использованием нейронных сетей поражают большим числом областей науки, в которых они были поставлены и решены. В работе [1] авторы на основе экспериментальных данных физических полей во время шторма с использованием уравнений Навье-Стокса, крупновихревой модели турбулентности LES, ансамблевого вероятностного прогнозирования и машинного обучения создали нейронную модель прогнозирования штормов. В работах [2–14] нейронные сети используются авторами в задачах распознавания объектов для определения личности на фотографиях, глубины моря на лоцманских картах, контроля балансировки механической системы, номеров железнодорожных вагонов, класса пылевых зерен, сегментации сердечных артерий по коронарографическим снимкам и т. д. В ряде работ, в том числе в работе [4], А.В. Галабурдин применил нейронные сети для решения нелинейных краевых задач в областях сложной формы. Авторы работы [6] применили несколько архитектур нейронных сетей для распознавания конформационного состояния белка по данным дифракции на одиночных молекулах бактериородопсина. В работах [3, 10, 12, 13] авторы используют нейронные сети для анализа влияния электромагнитного излучения на скорость коррозии оборудования, выявления аномалий в киберсистемах, при моделировании сетевого вируса, при распознавании фальшивых эмоций. Постановка всех приведенных задач формулируется и решается только методами нейронной сети.

Однако можно выделить класс специальных задач, решаемых точно математическими методами, использующих нейронную сеть как готовый алгоритм. В данной работе решаются две задачи определения главных направлений точечного множества на плоскости и в пространстве. Координаты точек множества определяются нейронной сетью с помощью технических устройств, например, границу участка пожара в задымленном лесу по аэрофотоснимкам, положение рыб в море с помощью отраженных ультразвуковых волн при отлове рыбы. Для плоской задачи в данной работе получена формула поиска главных направлений. Для трехмерного случая расположения точек описан алгоритм в сферической системе координат поиска экстремальных направлений прямой, проходящей через центр тяжести множества.

Материалы и методы. Постановка задачи.

1. Задача поиска главных направлений точечного множества на плоскости.

Рассмотрим множество n точек на плоскости заданных своими координатами $(x_i, y_i, i = \overline{1, n})$. Определим координаты центра тяжести множества по формулам

$$x_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, y_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i. \quad (1)$$

Координаты каждой точки относительно центра тяжести множества равны

$$\bar{x}_i = x_i - x_0 = x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1, j \neq i}^n (x_i - x_j), \bar{y}_i = y_i - y_0 = y_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1, j \neq i}^n (y_i - y_j), i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

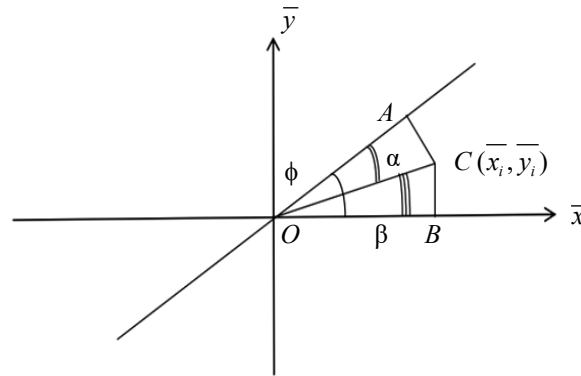


Рис. 1. Определение расстояния от точки $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, i = \overline{1, n})$ до прямой, проходящей через центр тяжести множества O под углом ϕ к оси $\bar{x}$

Рассмотрим некоторую прямую, проходящую через центр тяжести множества O под углом ϕ к оси $\bar{x}$. Из рис. 1 видно, что угол ϕ равен сумме углов $\phi = \alpha + \beta$. Тогда расстояние $|OC|$ от начала координат O до точки $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ равно $\rho_i = \sqrt{\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2}$, а квадрат искомого расстояния от точки до прямой $|CA|$ найдем как

$$\begin{aligned} d_i^2 &= \rho_i^2 \sin^2 \alpha = \rho_i^2 \sin^2 (\phi - \beta) = \rho_i^2 (\sin(\phi) \cos(\beta) - \cos(\phi) \sin(\beta))^2 = \\ &= (\sin(\phi) (\rho_i \cos(\beta)) - \cos(\phi) (\rho_i \sin(\beta)))^2 = (\sin(\phi) \bar{x}_i - \cos(\phi) \bar{y}_i)^2. \end{aligned}$$

Если все точки множества лежат на радиальной (оптимальной) прямой, то сумма квадратов расстояний точек до оптимальной прямой равна нулю. Поэтому введем функционал ошибки в плоской задаче, который зависит от всех координат точек и от угла ϕ как от параметра:

$$E(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \phi) = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n (\sin(\phi) \bar{x}_i - \cos(\phi) \bar{y}_i)^2 \rightarrow \text{extr}_{\phi \in [0, 2\pi]}. \quad (3)$$

Возводя в квадрат выражение в круглых скобках, получим

$$\begin{aligned} E(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \phi) &= \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n (\sin(\phi) \bar{x}_i - \cos(\phi) \bar{y}_i)^2 = \sin^2(\phi) \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 - 2 \sin(\phi) \cos(\phi) \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \bar{y}_i + \cos^2(\phi) \sum_{i=1}^n \bar{y}_i^2 = \\ &= \sin^2(\phi) A - 2 \sin(\phi) \cos(\phi) B + \cos^2(\phi) C \rightarrow \text{extr}_{\phi \in [0, 2\pi]}, A = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2, B = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \bar{y}_i, C = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Дифференцируя функционал $E(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \phi)$ вида (4) по полярному углу ϕ , получим направления оптимальных (главных направлений) прямых, проходящих через центр тяжести точечного множества:

$$\partial E(\phi) / \partial \phi = 0 \Leftrightarrow 2 \sin(\phi) \cos(\phi) A + 2B(\sin^2(\phi) - \cos^2(\phi)) - 2 \cos(\phi) \sin(\phi) C = 0.$$

Последнее уравнение разделим на $\cos^2(\phi)$:

$$\tan(\phi)A + B(\tan^2(\phi) - 1) - \tan(\phi)C = 0 \Leftrightarrow B \tan^2(\phi) + (A - C)\tan(\phi) - B = 0. \quad (5)$$

Решая квадратное уравнение (5), получим оптимальные направления

$$\tan(\phi) = \frac{C - A \pm \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}}{2B}, \phi_{1,2} = \arctan\left(\frac{C - A \pm \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}}{2B}\right), \quad (6)$$

где $A = \sum_{i=1}^n \overline{x_i}^2$, $B = \sum_{i=1}^n \overline{x_i y_i}$, $C = \sum_{i=1}^n \overline{y_i}^2$.

Замечание 1. Числитель формулы (6) всегда определен, но ее знаменатель может обратиться в нуль, например, когда точки множества расположены симметрично относительно центра тяжести. В случае, когда $B = \sum_{i=1}^n \overline{x_i y_i} = 0$ можно искусственно разрушить симметрию расположения точек, если добавить к координате $\overline{x_i}$ или $\overline{y_i}$ малый параметр $\varepsilon = 10^{-12} - 10^{-14}$.

Пример 1. Симметричное множество из 8 точек, расположенных в вершинах прямоугольника или в точках пересечения прямоугольника с осями координат:

$$x_1 = -2, 0; y_1 = 1, 0 + \varepsilon; \varepsilon = 0, 0000000000000001; x_2 = 0, 0; y_2 = 1, 0; x_3 = 2, 0; y_3 = 1, 0; x_4 = 2, 0; y_4 = 0, 0; \\ x_5 = 2, 0; y_5 = -1, 0; x_6 = 0, 0; y_6 = -1, 0; x_7 = -2, 0; y_7 = -1, 0; x_8 = -2, 0; y_8 = 0, 0.$$

Программа, в которой все функции и аргументы заданы в формуле (6) с двойной точностью, написана на языке C++, получила следующие значения углов главных направлений (углы $\alpha = -\pi/2$ и $\alpha = \pi/2$ дают одну и ту же ось y):

$$\alpha_1 = -1,5707963267948954, \\ \alpha_2 = 0,0000000000000000, \\ \pi/2 = 1,5707963267948966.$$

Главные направления совпадают с направлениями координатных осей фактически с двойной точностью. Найдем оптимальные направления аналитическим расчетом:

$$E(\overline{x_i}, \overline{y_i}, \phi = 0) = 2 \cdot 0^2 + 6 \cdot 1^2 = 6 = E_{\min}, E(\overline{x_i}, \overline{y_i}, \phi = \pi/2) = 2 \cdot 0^2 + 6 \cdot 2^2 = 24 = E_{\max}.$$

2. Задача поиска главных направлений точечного множества в пространстве.

Рассмотрим прямую, проходящую через центр тяжести трехмерного точечного множества определяемого формулами

$$x_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, y_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, z_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i, \overline{x_i} = x_i - x_0, \overline{y_i} = y_i - y_0, \overline{z_i} = z_i - z_0, i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Координаты каждой точки в системе, связанной с центром тяжести множества (x_0, y_0, z_0) , обозначим как $(\overline{x_i}, \overline{y_i}, \overline{z_i}), i = \overline{1, n}$. На указанной прямой, ориентированной под углами (θ, ϕ) в сферической системе координат и проходящей через центр тяжести точку O напомним вектор $\mathbf{k}$ единичной длины, как показано на рис. 2.

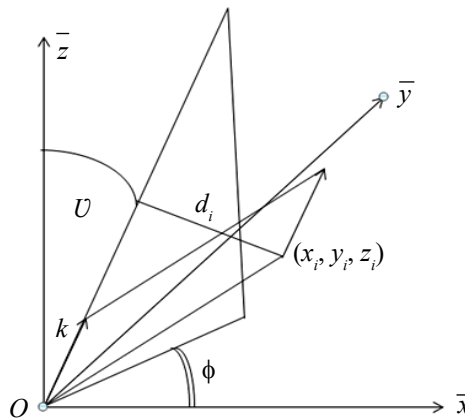


Рис. 2. Определение расстояния от точки $(\overline{x_i}, \overline{y_i}, \overline{z_i}), i = \overline{1, n}$ до прямой, проходящей через центр тяжести множества O и ориентированной под углами (θ, ϕ) в сферической системе координат

Радиус-вектор, направленный из центра O в точку $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i, i = \overline{1, n})$, и единичный вектор $\bar{k}$ образуют параллелограмм, площадь которого можно определить в декартовой системе координат, с одной стороны, векторным произведением

$$\bar{S} = \bar{k} \times \bar{\rho}_i = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \bar{x}_i & \bar{y}_i & \bar{z}_i \end{vmatrix} = i(\sin \theta \sin \phi \bar{z}_i - \cos \theta \bar{y}_i) - j(\sin \theta \cos \phi \bar{z}_i - \cos \theta \bar{x}_i) + k(\sin \theta \cos \phi \bar{y}_i - \sin \theta \sin \phi \bar{x}_i). \quad (8)$$

С другой стороны, площадь параллелограмма $|\bar{S}| = |\bar{k}| d_i = 1 \cdot d_i = d_i$, где d_i — расстояние от точек $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i, i = \overline{1, n})$ до выделенной прямой (θ, ϕ) в сферической системе координат. Не изменяя функционала ошибки (равного сумме квадратов расстояний от точек до прямой), получаем задачу на экстремум (9):

$$E(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i, \theta, \phi) = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n (\sin \theta \sin \phi \bar{z}_i - \cos \theta \bar{y}_i)^2 + (\sin \theta \cos \phi \bar{z}_i - \cos \theta \bar{x}_i)^2 + (\sin \theta \cos \phi \bar{y}_i - \sin \theta \sin \phi \bar{x}_i)^2 \rightarrow \text{extr}_{\theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi]}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} E(\theta, \phi) &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \phi) \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 + (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \sum_{i=1}^n \bar{y}_i^2 + (\sin^2 \theta \sin^2 \phi + \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \sum_{i=1}^n \bar{z}_i^2 + \\ &\quad - 2 \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \bar{y}_i - 2 \cos \phi \sin \theta \cos \theta \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \bar{z}_i - 2 \sin \phi \sin \theta \cos \theta \sum_{i=1}^n \bar{y}_i \bar{z}_i = \\ &= (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 + (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi) \sum_{i=1}^n \bar{y}_i^2 + \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) \sum_{i=1}^n \bar{z}_i^2 - \sin^2 \theta \sin 2\phi \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \bar{y}_i - \\ &\quad - \sin 2\theta \left(\cos \phi \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \bar{z}_i + \sin \phi \sum_{i=1}^n \bar{y}_i \bar{z}_i \right) \Leftrightarrow \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} E(\theta, \phi) &= (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi) A + (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi) B + \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) C - \sin^2 \theta \sin 2\phi D - \\ &\quad - \sin 2\theta (\cos \phi E + \sin \phi F) \rightarrow \text{extr}_{\theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi]}, \end{aligned}$$

$$\text{где } A = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2, B = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i^2, C = \sum_{i=1}^n \bar{z}_i^2, D = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \bar{y}_i, E = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \bar{z}_i, F = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i \bar{z}_i.$$

Область изменения переменных (θ, ϕ) конечна, является прямоугольником $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$, поэтому численно решить экстремальную задачу (10) без ограничений можно методом градиентного спуска [15, 16]. Запишем компоненты градиента функционала $E(\theta, \phi)$:

$$\begin{aligned} E_\theta(\theta, \phi) &= -2A \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi - 2B \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi + C \sin 2\theta - 2D \sin \theta \cos \theta \sin 2\phi - \\ &\quad - 2 \cos 2\theta (\cos \phi E + \sin \phi F) = \sin 2\theta (C - A \cos^2 \phi - B \sin^2 \phi) - D \sin 2\theta \sin 2\phi - 2 \cos 2\theta (\cos \phi E + \sin \phi F), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} E_\phi(\theta, \phi) &= A \sin 2\phi \sin^2 \theta - B \sin 2\phi \sin^2 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos 2\phi D - \sin 2\theta (-\sin \phi E + \cos \phi F) = \\ &= (A - B) \sin 2\phi \sin^2 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos 2\phi D + \sin 2\theta (\sin \phi E - \cos \phi F). \end{aligned} \quad (12)$$

Итерационная формула градиентного спуска в задаче на минимум с использованием формул (10), (11), (12) примет вид

$$\begin{cases} \theta^{m+1} = \theta^m - h E_\theta(\theta^m, \phi^m), m = 0, 1, 2, \dots, N, \\ \phi^{m+1} = \phi^m - h E_\phi(\theta^m, \phi^m), \end{cases} \quad (13)$$

где $h = \pi / (5N)$ — формула градиентного шага; N — число итераций. В качестве начальной точки — углов ориентации можно выбрать центр прямоугольника $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$:

$$\theta^0 = \frac{\pi}{2}, \phi^0 = \pi. \quad (14)$$

Замечание 2. Слагаемые формул (11), (12), (13) определены (также определены все коэффициенты A, B, C, D, E, F точечного множества в (10)) и конечны при различных углах ориентации прямой с вектором $\bar{k}$. Поэтому алгоритм (11), (12), (13) поиска минимума функционала (10) корректен при всех углах ориентации.

Приведем код программы на распространенном языке C++, в котором все функции и аргументы заданы с двойной точностью. В программе переменные x, y равны переменным θ, ϕ соответственно в формулах (10), (11), (12), (13):

```

#include<stdio.h>
#include<math.h>
double EE(double x, double y, double A, double B, double C, double D, double E, double F)
{ return(1.0-cos(2.0*x))*C/2.0+(1.0-sin(x)*sin(x)*sin(y)*sin(y))*B+(1.0-sin(x)*sin(x)*cos(y)*cos(y))*A-
sin(2.0*x)*(F*sin(y)+E*cos(y))-sin(2.0*y)*sin(x)*sin(x)*D; }
double Ex(double x, double y, double A, double B, double C, double D, double E, double F)
{ return sin(2.0*x)*(C-B*sin(y)*sin(y)-A*cos(y)*cos(y))-2.0*cos(2.0*x)*(F*sin(y)+E*cos(y))-sin(2.0*y)*sin(2.0*x)*D; }
double Ey(double x, double y, double A, double B, double C, double D, double E, double F)
{ return sin(2.0*y)*sin(x)*sin(x)*(A-B)-sin(2.0*x)*(F*cos(y)-E*sin(y))-2.0*cos(2.0*y)*sin(x)*sin(x)*D; }
int const n=10, m=100;
int main()
{ int i; double x,y,h,x1[n+1],y1[n+1],z1[n+1],x0,y0,z0;
double x2[n+1],y2[n+1],z2[n+1],s1,s2,s3,s4,s5,s6; double A,B,C,D,E,F,pi;
pi=2.0*asin(1.0);h=pi/double(5*m); s1=0.0;s2=0.0;s3=0.0;
for(i=0;i<=n;i++)
{ y1[i]=double(i);x1[i]=0.0;z1[i]=0.0; s1=s1+x1[i];s2=s2+y1[i];s3=s3+z1[i]; }
x0=s1/double(n+1);y0=s2/double(n+1);z0=s3/double(n+1);
s1=0.0;s2=0.0;s3=0.0;s4=0.0;s5=0.0;s6=0.0;
for(i=0;i<=n;i++)
{ x2[i]=x1[i]-x0;y2[i]=y1[i]-y0;z2[i]=z1[i]-z0;s1=s1+x2[i]*x2[i]; s2=s2+y2[i]*y2[i]; s3=s3+z2[i]*z2[i]; s4=s4+z2[i]
*y2[i];s5=s5+z2[i]*x2[i];s6=s6+x2[i]*y2[i]; }
A=s1;B=s2;C=s3;F=s4; E=s5;D=s6; x=pi*0.1;y=pi*0.9;
printf("inicial teta=%.16lf fi=%.16lf\n",x,y);
for(i=0;i<=m;i++)
{ x=x-h*Ex(x,y,A,B,C,D,E,F); y=y-h*Ey(x,y,A,B,C,D,E,F); }
printf("end teta=%.16lf fi=%.16lf\n",x,y);
printf("exact teta=%.16lf fi=%.16lf\n",pi/2.0,pi/2.0); printf("E=%.16lf\n",EE(x,y,A,B,C,D,E,F)); }

```

Рассмотрим **пример 2**. Одиннадцать точек расположены на оси y с единичным интервалом, первая совпадает с началом координат $x_i = 0, y_i = i, z_i = 0, i = \overline{0,10}$. Начальные значения углов ориентации прямой в радианной мере равны $\theta^0 = x = \pi \cdot 0,1, \phi^0 = y = \pi \cdot 0,9$.

Программа с начальной ориентацией углов возвращает конечную ориентацию. Также видно, что конечная ориентация совпадает с точным решением с двойной точностью около 15 значащих цифр. Число итераций равно N (m в программе) = 100, во время цикла по формуле (13) по каждому углу прямая изменила начальную ориентацию почти на угол $\pi/2$, то есть алгоритм (10), (11), (12), (13) применим в широком диапазоне начальной ориентации исходной прямой. Формула (10) — значение функционала служит для проверки численного решения задачи, — в случае если прямая проходит через все точки множества, функционал $E(\theta^N, \phi^N) = 0$ (с любыми начальными значениями θ^0, ϕ^0 в примере 2):

```

inicial teta=0.3141592653589793 fi=2.8274333882308138
end teta=1.5707963267948966 fi=1.5707963267948966
exact teta=1.5707963267948966 fi=1.5707963267948966
E=0.0000000000000000.

```

Отметим также, что в градиентном методе (10), (11), (12), (13) число итераций больше ($N = 100$) чем, например, в матричной формуле касательных Ньютона. Но в матричной формуле Ньютона вычисляется обратная матрица к матрице Якоби системы уравнений и в случае равенства нулю определителя матрицы Якоби использование формулы Ньютона некорректно. В то же время алгоритм градиентного спуска (10), (11), (12), (13) корректен для всех углов ориентации, несмотря на меньшую скорость сходимости невязки задачи к нулю.

Результаты исследования. Решена задача поиска главных направлений множества точек, расположенных на плоскости или в пространстве. В постановке задачи координаты всех точек известны. Численное решение задач оптимальных направлений двумерного точечного множества дано формулой (6), направлений трехмерного точечного множества описывается алгоритмом (10), (11), (12), (13) с двойной точностью.

Обсуждение

1. Для точечного множества на плоскости получена ориентация главных направлений прямых, проходящих через центр тяжести — формула (6).

2. Коэффициенты формулы (6) являются однородными суммами второго порядка относительно заданных координат точек.

3. Методом градиентного спуска для точечного множества в пространстве получен алгоритм (10), (11), (12), (13) поиска главных направлений в сферической системе координат.

4. Шесть коэффициентов A, B, C, D, E, F алгоритма (10), (11), (12), (13) являются однородными суммами второго порядка относительно известных координат точек.

5. Функционал ошибок в задаче на экстремум равен сумме квадратов расстояний от каждой точки до прямой.

6. В данной задаче актуально каждое направление с минимальным и максимальным значением функционала ошибок. Например, для области, охваченной пожаром в лесу, направление минимума функционала — направление выброса воды, а направление максимума функционала — направление кратчайшего маршрута эвакуации людей и животных из горящей области.

7. В двух тестовых примерах экстремальные направления найдены численно с двойной точностью.

Заключение. Метод градиентного спуска, несмотря на простоту алгоритма, обеспечивает корректность итерационных формул при любой начальной и промежуточной ориентации прямой, проходящей через центр тяжести множества точек в пространстве. Полученные формулы в явном виде для главных направлений точечного множества на плоскости и формулы градиентного спуска в трехмерном случае могут быть использованы в задачах анализа с применением интеллектуальных систем и нейронных сетей.

Список литературы / References

1. Сухинов А.И., Проценко С.В., Проценко Е.А., Панасенко Н.Д. Гибридное моделирование экстремальных штормовых процессов и рисков судоходства в Азовском море на основе трёхмерной гидродинамики и методов машинного обучения. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(4):10–21. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-4-10-21>
- Sukhinov A.I., Protsenko S.V., Protsenko E.A., Panasenko N.D. Hybrid modeling of extreme storm processes and shipping risks in the Sea of Azov based on three-dimensional hydrodynamics and machine learning methods. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(4):10–21. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-4-10-21>
2. Захарова А.А., Небаба С.Г. Применение метода вычитания фона и алгоритма Виолы-Джонса для увеличения скорости трекинга лиц в системе распознавания личности. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2018;2(1):25–32. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2018-2-1-25-32>
- Zakharova A. A., Nebaba S. G. Application of the background subtraction method and the Viola-Jones algorithm to increase the speed of face tracking in a personality recognition system. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2018; 2(1):25–32. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2018-2-1-25-32>
3. Хуснуллин Ш.Р., Коледина К.Ф., Алимбекова С.Р., Ишмуратов Ф.Г. Машинное обучение в анализе влияния электромагнитного поля на скорость коррозии и солеотложения нефтепромыслового оборудования. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;6(1):70–76. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-6-1-70-76>
- Khusnullin Sh.R., Koledina K.F., Alimbekova S.R., Ishmuratov F.G. Machine learning in the analysis of the influence of the electromagnetic field on the rate of corrosion and scaling of oilfield equipment. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;6(1):70–76. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-6-1-70-76>
4. Галабурдин А.В. Применение нейронных сетей для решения нелинейных краевых задач для областей сложной формы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):35–42. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-35-42>
- Galaburdin A.V. Application of neural networks for solving nonlinear boundary value problems for areas of complex shape. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):35–42. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-35-42>
5. Рахимбаева Е.О., Алышов Т.А., Белова Ю.В. Автоматическое распознавание значений глубины на лоцманских картах с использованием методов глубокого обучения. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(1):52–60. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-52-60>
- Rakhimbaeva E.O., Alyshov T.A., Belova Yu.V. Automatic recognition of depth values on pilot maps using deep learning methods. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(1):52–60. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-52-60>
6. Армеев Г.А., Кирпичников М.П., Кобельков Г.М., Кудрявцев А.В., Ложников М.А., Новоселецкий В.Н. и др. Применение нейронных сетей для распознавания конформационных изменений в структуре белка по рентгеновским дифрактограммам его одиночных молекул на примере фотоцикла бактериородопсина. *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*. 2022;26(1):24–34.
- Armeev G.A., Kirpichnikov M.P., Kobelkov G.M., Kudryavtsev A.V., Lozhnikov M.A., Novoseletskiy V.N. et al. Application of neural networks to recognize conformational changes in the structure of a protein from X-ray diffraction patterns of its single molecules using the example of the photocycle of bacteriorhodopsin. *Intelligent systems. Theory and applications*. 2022;26(1):24–34. (In Russ.)
7. Кирилловых С.А., Юрков К.А. Нейросетевой подход к реализации агента анализа подсистемы балансировки TriadBalance. *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2010;1(1):98–105.
- Kirillovich S.A., Yurkov K.A. Neural network approach to the implementation of the analysis agent of the TriadBalance balancing subsystem. *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2010;1(1):98–105. (In Russ.)
8. Чернопяттов А.В. Нейросетевая система распознавания номеров железнодорожных вагонов. *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2013;4(23):96–102.
- Chernopyatov A.V. Neural network system for recognizing numbers of railway cars. *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2013;4(23):96–102. (In Russ.)

9. Ханжина Н.Е., Замятина Е.Б. Использование классических методов и нейронных сетей для распознавания пыльцевых зерен. *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2014;4(27):111–119. Khanzhina N.E., Zamyatina E.B. Using classical methods and neural networks for recognizing pollen grains. *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2014;4(27):111–119. (In Russ.)
10. Чернышов Ю.Ю. Применение автокодировщиков для выявления аномалий в киберфизических системах. *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2022;4(59):89–94. <https://doi.org/10.17072/1993-0550-2022-4-89-94> Chernyshov Yu.Yu. Application of autoencoders to detect anomalies in cyber-physical systems. *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2022;4(59):89–94. (In Russ.) <https://doi.org/10.17072/1993-0550-2022-4-89-94>
11. Иванова К.В., Сальников А.Ф., Мормуль Р.В. Искусственный интеллект для контроля передачи данных в тактическом звене управления с использованием многослойного и многопоточного шифрования геопространственной обстановки. *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2023;2(61):65–71. <https://doi.org/10.17072/1993-0550-2023-2-65-71> Ivanova K.V., Salnikov A.F., Mormul R.V. Artificial intelligence for monitoring data transmission at the tactical control level using multi-layer and multi-stream encryption of the geospatial situation. *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2023;2(61):65–71. (In Russ.) <https://doi.org/10.17072/1993-0550-2023-2-65-71>
12. Бузмакова М.М., Воробьев Е.А. Моделирование распространения сетевого вируса в локальной компьютерной сети методами теории перколяции. *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2024;2(65):54–60. <https://doi.org/10.17072/1993-0550-2024-2-54-60> Buzmakova M.M., Vorobyov E.A. Modeling the spread of a network virus in a local computer network using percolation theory methods. *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2024;2(65):54–60. (In Russ.) <https://doi.org/10.17072/1993-0550-2024-2-54-60>
13. Быков И.В., Ротанева Н.Ю., Шкарапута А.П. Применение математических методов в искусственной нейронной сети для распознавания в голосе «фальшивых» эмоций. *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2024;4(67):104–116. <https://doi.org/10.17072/1993-0550-2024-4-104-116> Bykov I.V., Rotaneva A.P., Shkaraputa N.Yu. Application of mathematical methods in an artificial neural network for recognizing “fake” emotions in the voice. *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2024;4(67):104–116. (In Russ.) <https://doi.org/10.17072/1993-0550-2024-4-104-116>
14. Бочкарев В.А., Усынин А.А., Осипов А.Д., Аухадиев М.Р., Шаров Р.В., Барулина М.А. Модели сегментации сердечных артерий по коронарографическим снимкам. *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2025;2(69):65–87. <https://doi.org/10.17072/1993-0550-2025-2-65-87> Bochkarev V.A., Usynin A.A., Osipov A.D., Aukhadiyev M.R., Sharov R.V., Barulina M.A. Models of segmentation of cardiac arteries based on coronary angiographic images. *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2025;2(69):65–87. (In Russ.) <https://doi.org/10.17072/1993-0550-2025-2-65-87>
15. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы: учебное пособие для студентов физико-математических специальностей высших учебных заведений*. Москва: Бином. Лаборатория знаний; 2011. 636 с. Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Numerical methods: a textbook for students of physics and mathematics specialties of higher educational institutions*. Binom. lab. Knowledge; 2011. 636 p. (In Russ.)
16. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. *Сборник задач по оптимизации: Теория. Примеры. Задачи*. Москва: Физматлит; 2008. 256 с. Alekseev V.M., Galeev E.M., Tikhomirov V.M. *Collection of optimization problems: Theory. Examples. Problems*. Moscow: FIZMATLIT; 2008. 256 p. (In Russ.)

Об авторах:

Наталья Константиновна Волосова, аспирант Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана (105005, Российская Федерация, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, стр. 1), navalosova@yandex.ru

Константин Александрович Волосов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Российская Федерация, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9152-1234), [SPIN-код](https://spina.org.ru/SPIN-код), konstantinvolosov@yandex.ru

Александра Константиновна Волосова, кандидат физико-математических наук, начальник аналитического отдела ООО «Трамплин» Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Российская Федерация, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9152-1234), [SPIN-код](https://spina.org.ru/SPIN-код), alya01@yandex.ru

Михаил Иванович Карлов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Московского физико-технического института (141701, ГСП-4, Российская Федерация, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9), [SPIN-код](https://orcid.org/0000-0001-9152-1234), karlov.mipt@gmail.com

Дмитрий Феликсович Пастухов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9152-1234), [SPIN-код](https://spina.org.ru/SPIN-код), dmitrij.pastuhov@mail.ru

Юрий Феликсович Пастухов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), [ORCID](#), [SPIN-код](#), pulsar1900@mail.ru

Заявленный вклад авторов:

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Natalya K. Volosova, Post-graduate Student of Bauman Moscow State Technical University (5–1, 2nd Baumanskaya St., Moscow, 105005, Russian Federation), navalosova@yandex.ru

Konstantin A. Volosov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics of the Russian University of Transport (9–9, Obraztsova St., Moscow, GSP-4, 127994, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), konstantinvolosov@yandex.ru

Aleksandra K. Volosova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Chief Analytical Department “Tramplin” LLC, Russian University of Transport (9–9, Obraztsova St., Moscow, GSP-4, 127994, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), alya01@yandex.ru

Mikhail I. Karlov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (9, Institutsky Lane, GSP-4, Dolgoprudny, 141701, Russian Federation), [SPIN-code](#), karlov.mipt@gmail.com

Dmitriy F. Pastukhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (29, Blokhin St., Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), [ORCID](#), [SPIN-code](#), dmitrij.pastuhov@mail.ru

Yuriy F. Pastukhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (29, Blokhin St., Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), [ORCID](#), [SPIN-code](#), pulsar1900@mail.ru

Contributions of the authors:

All authors have made an equivalent contribution to the preparation of the publication.

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 12.02.2026

Поступила после рецензирования / Reviewed 26.03.2026

Принята к публикации / Accepted 14.05.2026