

УДК 519.6

Научная статья

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-6-1-22-26>**Об аналитическом решении для модели рекламы двух конкурирующих фирм**А. И. Сухинов  

Донской государственный технический университет, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

 sukhinov@gmail.com**Аннотация**

Введение. Критерием успешности рекламной кампании является максимальное извлечение прибыли от продаж с учетом затрат на ее проведение, при этом реализация однотипных товаров происходит в конкурентной обстановке. В работе исследуется модель прогнозирования массовых продаж двух однотипных товаров в зависимости от тактики рекламной кампании. Рассматривается, в первую очередь, распределение средств между отдельными видами рекламы: расходы на рекламную бумажную продукцию, баннеры, реклама в электронных средствах массовой информации (ЭСМИ).

Материалы и методы. Используется модель в виде задачи Коши для системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейными правыми частями, учитывающими: общее число потенциальных платежеспособных покупателей первого и второго товаров; интенсивность рекламной кампании, в основном, посредством ЭСМИ; положительное влияние на продажи взаимодействия уже купивших первый или второй вид товара с потенциальными покупателями, а также неформальную (на уровне покупателей) антирекламу.

Результаты исследования. Получено решение для случая постоянных коэффициентов, определяемых указанными выше факторами, для соответствующей задачи Коши в замкнутом виде.

Обсуждение и заключения. Полученные результаты могут быть использованы для «проигрывания» модельных ситуаций организации рекламы с целью определения условий извлечения наибольшей прибыли от продаж за вычетом расходов на рекламу.

Ключевые слова: модель прогнозирования продаж, задача Коши, расходы на рекламу, рекламная кампания, основные виды рекламы, продажи конкурирующих товаров.

Для цитирования. Сухинов, А. И. Об аналитическом решении для модели рекламы двух конкурирующих фирм / А. И. Сухинов // Computational Mathematics and Information Technologies. — 2023. — Т. 6, № 1. — С. 22–26.

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-6-1-22-26>

Original article

About the analytical solution for the advertising model of two competing firmsА. И. Sukhinov  

Don State Technical University, 1, Gagarin Square, Rostov-on-Don, Russian Federation

 sukhinov@gmail.com**Abstract**

Introduction. The criterion for the success of an advertising campaign is the maximum profit from sales, taking into account the costs of its implementation, while the sale of the same type of goods is sales occur in a competitive environment. The article examines a model for predicting mass sales of two similar products depending on the tactics of an advertising campaign. First of all, the distribution of funds between its separate types is considered: expenses for advertising paper products, banners and advertising in electronic media (EMM).

Materials and methods. The model is formulated in the form of a Cauchy problem for a system of two ordinary differential equations with nonlinear right-hand sides, taking into account: the total number of potential solvent buyers of the first and second goods; the intensity of the advertising campaign, mainly through EMM, the positive impact on sales of the interaction of those who have already bought the first or second type of goods with potential buyers, as well as informal (at the level of buyers) anti-advertising.

The results of the study. A solution is given for the case of constant coefficients determined by the above factors for the corresponding Cauchy problem in closed form.

Discussion and conclusions. The results obtained can be used to replay model situations of advertising organization in order to determine the conditions for extracting the greatest profit from sales minus advertising costs.

Keywords: sales forecasting model, Cauchy problem, advertising costs, advertising campaign, advertising main types, competing products sales.

For citation. Sukhinov, A. I. About the analytical solution for the advertising model of two competing firms / A. I. Sukhinov // Computational Mathematics and Information Technology. — 2023. — Vol. 6, no. 1. — P. 22–26. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-6-1-22-26>

Введение. С развитием новых электронных коммуникационных технологий лозунг «реклама — двигатель торговли» становится все более актуальным. На заре рекламных технологий основным источником рекламы являлась печатная продукция: буклеты и проспекты, статьи в газетах и журналах, плакаты и др. С появлением радио и телевидения возможности рекламы существенно возросли и, соответственно, значительно увеличились и затраты на нее. На современном этапе реклама стала неотъемлемой частью интернет-пространства. Она внедрилась во все социальные сети и, благодаря компьютерным и мультимедийным технологиям, превратилась во всепроникающую электронную цифровую среду (далее — электронные средства массовой информации). Если раньше издержки на рекламу могли составлять небольшую долю от себестоимости товара или услуги, то в настоящее время они доходят до 30 и более процентов от стоимости реализованных товаров и услуг. Прогнозирование продаж — весьма важный вопрос, который обусловлен тактикой рекламной кампании и распределением расходов между отдельными ее видами. Кроме того, важно принимать своевременное решение и о моменте прекращения рекламы, в особенности наиболее дорогостоящих ее видов, например, демонстрации рекламных роликов на центральных телевизионных каналах в прайм-тайм режиме. Основным критерий успешности рекламной кампании — извлечение максимальной прибыли от продаж с учетом затрат на ее проведение. Важным фактором последующей реализации однотипных, долговременно используемых товаров (например, iPhone), является формирование высокой потребительской репутации на продажах предыдущих поколений товаров. Их популярность определяется более высоким количеством проданных изделий и неформальной оценкой товара или услуги в среде покупателей. Как правило, продажи происходят в конкурентной обстановке и этот факт также подлежит учету. В настоящей работе предложена динамическая модель рекламной кампании при продажах двух конкурирующих однотипных товаров в виде задачи Коши (с начальными данными) для дифференциальных уравнений первого порядка с нелинейными правыми частями, которые учитывают основные виды рекламы и потенциальную емкость рынка. При некоторых упрощающих предположениях в замкнутом виде получено решение данной задачи, которая ранее для продаж одного вида товара неоднократно рассматривалась [1, 2] и приводила к решениям в виде логистических функций. Следует отметить, что данную модель можно развить и применять в других сферах деятельности, где идет конкурентная информационная борьба (выборы, формирование общественного мнения и т. д. [3, 4].

Материалы и методы. Дифференциальные уравнения, описывающие скорость изменения со временем числа покупателей, узнавших о товарах и купивших их, имеют вид:

$$\frac{dN_1}{dt} = [\alpha_{11}(t) + \alpha_{12}(t) \times N_1(t) - \alpha_{22}(t) \times N_2(t)] \times (N_0 - N_1 - N_2), \quad (1)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = [\alpha_{21}(t) + \alpha_{22}(t) \times N_2(t) - \alpha_{12}(t) \times N_1(t)] \times (N_0 - N_1 - N_2), \quad (2)$$

$$t > 0,$$

$$N_1(0) = N_{10}, \quad N_2(0) = N_{20}, \quad t = 0, \quad (3)$$

где t — время, прошедшее с начала рекламной кампании; $N_1(t)$ и $N_2(t)$ — число покупателей первого и второго товара, соответственно; N_0 — общее число потенциальных платежеспособных покупателей первого и второго

товара; $\alpha_{11}(t)$ и $\alpha_{21}(t)$ характеризует интенсивность рекламной кампании (в основном посредством ЭСМИ) первого и второго товара; $\alpha_{12}(t)$ характеризует положительный результат взаимодействия уже купивших первый товар с потенциальными покупателями; аналогичный смысл имеет коэффициент $\alpha_{22}(t)$ в уравнении (2), (эффект «сарафанного радио»).

Члены вида $\alpha_{22}(t) \times N_2$ и $\alpha_{12}(t) \times N_1$ в уравнениях (1) и (2), соответственно, показывают влияние антирекламы со стороны покупателей: в первом случае — отдавших предпочтение второму товару, а во втором случае — купивших первый товар, а не второй. Для получения решения в замкнутой (аналитической) форме все коэффициенты, входящие в систему (1), (2) считаются константами, т. е. $\alpha_{ij} = \text{const}$; $i, j = 1, 2$. Для прогнозов, приближенных к реальным, данные коэффициенты следует считать зависящими от времени. В этом случае необходимо применять численные методы интегрирования задачи (1)–(3).

Результаты исследования. Для решения поставленной задачи сложим уравнения (1) и (2):

$$\frac{d(N_1 + N_2)}{dt} = [\alpha_{11} + \alpha_{21}] \times (N_0 - (N_1 + N_2)). \quad (4)$$

Введем замену переменных в уравнении (4):

$$v(t) \equiv (N_0 - (N_1 + N_2)), \quad (5)$$

то получим уравнение с разделяющимися переменными вида

$$\frac{dv}{dt} = -[\alpha_{11} + \alpha_{21}] \times v, \quad t > 0, \quad (6)$$

с начальным условием

$$v(0) \equiv N_0 - (N_{10} + N_{20}), \quad t = 0, \quad (7)$$

решением которого будет функция

$$v(t) \equiv (N_0 - (N_{10} + N_{20})) \times \exp(-(\alpha_{11} + \alpha_{21})t), \quad t > 0. \quad (8)$$

Полученное решение позволяет получить обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) первого порядка относительно каждой из функций $N_1(t)$, $N_2(t)$. Если выразить $N_2(t)$ из соотношения (8), с учетом замены (5), получится:

$$N_2(t) = N_0 - N_1(t) - (N_0 - (N_{10} + N_{20})) \times \exp(-(\alpha_{11} + \alpha_{21})t). \quad (9)$$

Данное представление для $N_2(t)$ нужно подставить в уравнение (1) и прийти к ОДУ первого порядка относительно функции $N_1(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} = & [\alpha_{11} + \alpha_{12}N_1 - \alpha_{22}(N_0 - N_1 - (N_0 - (N_{10} + N_{20})) \exp(-(\alpha_{11} + \alpha_{21})t))] \times \\ & \times (N_0 - N_1 - (N_0 - N_1 - (N_0 - (N_{10} + N_{20})) \exp(-(\alpha_{11} + \alpha_{21})t))). \end{aligned}$$

Если привести подобные члены и перенести слагаемые, содержащие функцию $N_1(t)$ в левую часть, получится линейное относительно искомой функции ОДУ вида:

$$\frac{dN_1}{dt} + (\alpha_{12} + \alpha_{22})(N_0 - (N_{10} + N_{20})) \exp(-(\alpha_{11} + \alpha_{21})t) N_1 = \quad (10)$$

$$= -(\alpha_{11} + \alpha_{22}N_0 + \alpha_{22}(N_0 - (N_{10} + N_{20})) \exp(-(\alpha_{11} + \alpha_{21})t))(N_0 - (N_{10} + N_{20})) \exp(-(\alpha_{11} + \alpha_{21})t).$$

Для краткости записи введены обозначения:

$$N_{30} = N_0 - (N_{10} + N_{20}), \quad \alpha_3 = \alpha_{11} + \alpha_{21}, \quad \alpha_4 = \alpha_{12} + \alpha_{22}.$$

Тогда уравнение (10) примет вид:

$$\frac{dN_1}{dt} + \alpha_4 N_{30} \exp(-\alpha_3 t) N_1 = -(\alpha_{11} - \alpha_{22}N_0 + \alpha_{22}N_{30} \exp(-\alpha_3 t)) N_{30} \exp(-\alpha_3 t). \quad (11)$$

Решается данное уравнение методом вариации произвольной постоянной. Нетрудно найти решение однородного ОДУ — функцию $N_{01}(t)$:

$$\frac{dN_{01}}{dt} + \alpha_4 N_{30} \exp(-\alpha_3 t) N_{01} = 0, \quad N_{01}(t) = C \exp\left(\frac{\alpha_4}{\alpha_3} N_{30} \exp(-\alpha_3 t)\right), \quad (12)$$

где C полагается функцией, зависящей от времени, $C = C(t)$:

$$N_1(t) = C(t) N_{01}(t). \quad (13)$$

Для удобства дальнейших преобразований введена новая независимая переменная:

$$u = \exp(-\alpha_3 t). \quad (14)$$

Тогда:

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_1}{du} \frac{du}{dt} = -\alpha_3 \frac{dN_1}{du} \exp(-\alpha_3 t) = -\alpha_3 \frac{dN_1}{du} u. \quad (15)$$

С учетом соотношения (14) записывается равенство (12) в виде:

$$N_1(u) = C(u) \exp\left(\frac{\alpha_4}{\alpha_3} N_{30} u\right) \quad (16)$$

и уравнение (11) с учетом равенств (14)–(16) будет выглядеть так:

$$-\alpha_3 \frac{dN_1}{du} + \alpha_4 N_{30} N_1 u = [\alpha_{11} - \alpha_{22} N_0 + \alpha_{22} N_{30} u] N_{30} u.$$

Если сократить обе части последнего равенства на функцию u , не равную нулю (см. (14)), и подставить (16) в полученное уравнение, то ОДУ для $C(u)$ будет таким:

$$\frac{dC}{du} = [\alpha_{11} - \alpha_{22} N_0 + \alpha_{22} N_{30} u] N_{30} \exp\left(-\frac{\alpha_4}{\alpha_3} N_{30} u\right). \quad (17)$$

Решение данного уравнения с разделяющимися переменными не представляет труда, поскольку $C(u)$ можно представить как сумму легко берущихся интегралов

$$I_1 = \int [\alpha_{11} - \alpha_{22} N_0] N_{30} \exp\left(-\frac{\alpha_4}{\alpha_3} N_{30} u\right) du = (\alpha_{22} N_0 - \alpha_{11}) \frac{\alpha_3}{\alpha_4} \exp\left(-\frac{\alpha_4}{\alpha_3} N_{30} u\right) \quad (18)$$

и интеграла I_2 , который вычисляется однократным применением формулы интегрирования по частям

$$I_2 = \int \alpha_{22} (N_{30})^2 u \exp\left(-\frac{\alpha_4}{\alpha_3} N_{30} u\right) du = -\frac{\alpha_3 \alpha_{22} N_{30} u}{\alpha_4} \exp\left(-\frac{\alpha_4}{\alpha_3} N_{30} u\right) - \frac{\alpha_3 \alpha_{22}}{\alpha_4^2} \exp\left(-\frac{\alpha_4}{\alpha_3} N_{30} u\right). \quad (19)$$

При сложении (18) и (19) образуется формула для расчета коэффициента $C(u)$:

$$C(u) = ((\alpha_{22} N_0 - \alpha_{11}) \frac{\alpha_3}{\alpha_4} - \frac{\alpha_3 \alpha_{22} N_{30} u}{\alpha_4} - \frac{\alpha_3^2 \alpha_{22}}{\alpha_4^2}) \exp\left(-\frac{\alpha_4}{\alpha_3} N_{30} u\right). \quad (20)$$

Если подставить выражение (20) для $C(u)$ в равенство (16), то получится общее решение для функции N_1 , которое после умножения на некоторую константу K , определенную таким образом, чтобы удовлетворить начальному условию $N_1(0) = N_{10}$, дает решение для функции N_1 , входящей в задачу Коши:

$$N_1(u) = C(u) \exp\left(\frac{\alpha_4}{\alpha_3} N_{30} u\right),$$

$$C(u) = K((\alpha_{22} N_0 - \alpha_{11}) \frac{\alpha_3}{\alpha_4} - \frac{\alpha_3 \alpha_{22} N_{30} u}{\alpha_4} - \frac{\alpha_3^2 \alpha_{22}}{\alpha_4^2}) \exp\left(-\frac{\alpha_4}{\alpha_3} N_{30} u\right).$$

В итоге последние два равенства будут иметь вид:

$$N_1(u) = K((\alpha_{22} N_0 - \alpha_{11}) \frac{\alpha_3}{\alpha_4} - \frac{\alpha_3 \alpha_{22} N_{30} u}{\alpha_4} - \frac{\alpha_3^2 \alpha_{22}}{\alpha_4^2}), \quad (21)$$

где

$$u = \exp(-\alpha_3 t), N_{30} = N_0 - (N_{10} + N_{20}), \alpha_3 = \alpha_{11} + \alpha_{21}, \alpha_4 = \alpha_{12} + \alpha_{22}. \quad (22)$$

Чтобы закончить формирование решения для функции $N_1(t)$, следует определить константу K , исходя из начального условия (3) для $N_1(0)$. Несложные вычисления приводят к следующему равенству:

$$K = N_{10} / ((\alpha_{22} N_0 - \alpha_{11}) \frac{\alpha_3}{\alpha_4} - \frac{\alpha_3 \alpha_{22} N_{30}}{\alpha_4} - \frac{\alpha_3^2 \alpha_{22}}{\alpha_4^2}). \quad (23)$$

Определение функции $N_2(t)$ из равенства (5), в случае найденной функции $N_1(t)$, не представляет труда, так как:

$$N_2(t) = N_0 - N_1(t) - (N_0 - (N_{10} + N_{20})) \times \exp(-(\alpha_{11} + \alpha_{21})t).$$

Замечание.

В случае неодновременного старта продаж товаров (например, продажи второго вида стартуют не в начальный момент времени, а при $t = T$), необходимо определить $N_1(T)$, исходя из известного решения для логистической модели рекламной кампании продажи одного вида товара [1], затем изменить правые части ОДУ (1) и (2) и начальные условия (3):

$$\begin{aligned}\frac{dN_1(t)}{dt} &= [\alpha_{11}(t) + \alpha_{12}(t) \times N_1(t) - \alpha_{22}(t) \times N_2(t)] \times (N_0 - N_1(t) - N_1(T) - N_2(t)), \\ \frac{dN_2}{dt} &= [\alpha_{21}(t) + \alpha_{22}(t) \times N_2(t) - \alpha_{12}(t) \times N_1(t)] \times (N_0 - N_1(t) - N_1(T) - N_2(t)), \\ &t > T,\end{aligned}$$

$$N_{10} = N_1(T), N_2(T) = N_{20}, t = T.$$

Таким образом, приведено решение для случая постоянных коэффициентов, определяемых следующими факторами: общее число потенциальных платежеспособных покупателей первого и второго товаров; интенсивность рекламной кампании, в основном, посредством ЭСМИ; положительное влияние на продажи взаимодействия уже купивших первый или второй вид товара с потенциальными покупателями, неформальную (на уровне покупателей) антирекламу, для соответствующей задачи Коши в замкнутом виде.

Заключение и обсуждения. Полученные результаты могут быть использованы для «проигрывания» модельных ситуаций организации рекламы с целью определения условий извлечения наибольшей прибыли от продаж за вычетом расходов на рекламу. Для прогнозов, приближенных к реальным, следует отказаться от предположения $\alpha_{ij} = \text{const}$; $i, j = 1, 2$ и данные коэффициенты считать зависящими от времени. Тогда необходимо применять численные методы интегрирования задачи (1)–(3). Кроме того, определение этих коэффициентов в прогностических моделях представляет отдельную задачу математической статистики [3, 4], для которой, например, можно использовать данные опросов на выходе из мест массовых продаж товаров (торговых центров). По сути, этот подход близок к технологии exit polls, применяемой на выборах. Указанные аспекты исследования станут предметом будущих работ по данной тематике.

Список литературы

1. Самарский, А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. — 2-е изд., испр. — Москва : Физматлит, 2001. — 320 с.
2. Петров, А. А. Опыт математического моделирования экономики / А. А. Петров, И. Г. Поспелов, А. А. Шанин. — Москва : Энергоиздат, 1996. — 544 с.
3. Петухов, А. Ю. Моделирование и анализ социально-политических процессов в республике Беларусь осенью 2020 года / А. Ю. Петухов, Д. И. Каминченко // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. — 2021. — Т. 64. — С. 214–223. <https://doi.org/10.17223/1998863X/64/20>
4. Petrov, A. Modeling the Spread of a Message in a Population with Differential Receptivity / A. Petrov // Lecture Notes in Networks and Systems (LNNS). — 2022. — Vol. 503. — P. 35–40. https://doi.org/10.1007/978-3-031-09073-8_4

Поступила в редакцию 09.02.2023.

Поступила после рецензирования 02.03.2023.

Принята к публикации 03.03.2023.

Об авторе:

Сухинов Александр Иванович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, директор НИИ Математического моделирования и прогнозирования сложных систем, Донской государственной технической университет (РФ, 344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [MathSciNet](#), [eLibrary.ru](#), [ORCID](#), [ResearcherID](#), [ScopusID](#).

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.