

УДК 629.075, 519.5

Научная статья

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-6-1-41-52>

Соответствие биофизическим критериям нелинейных эффектов при возникновении каскада бифуркаций Фейгенбаума в моделях инвазионных процессов

А. Ю. Переварюха ✉

Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр РАН, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. 14-линия, 39

✉ madelf@rambler.ru

Аннотация

Введение. Обсуждается проблема создания комплекса критериев для практически обоснованного вычислительного моделирования ряда сложных биофизических процессов с выраженной стадийностью и критическими трансформациями, например, агрессивных инвазий. Известные модели обладают разнообразным поведением с возникновением бифуркаций по одинаковым сценариям, появлением циклов, сосуществование которых определяется теоремой Шарковского. В пределе усложнения циклического поведения в таких моделях часто сталкиваются с хаотизацией траектории, но при существовании бесконечного числа окон периодичности. Условия бесконечного каскада бифуркаций для итераций определены выполнением условий теоремы Сингера. Цель работы — показать, что большинство связанных сценариями хаотизации нелинейных эффектов не имеют экологической интерпретации предполагаются.

Материалы и методы. Методами оценки устойчивости стационарных состояний и циклических траекторий с применением теоремы Сингера о критерии возникновения бифуркаций для итерационных моделей анализируются связанные между собой нелинейные эффекты. Явления рассмотрены на примере каскадов появления циклов периода $p = 2^i + 1$, $i \rightarrow \infty$ и каскада циклов $p = 2^i - 1$, $i \rightarrow 0$ «удвоения» или «ополовинивания» периода, возникающих в часто применявшихся для оптимизации промысла экологических моделях.

Результаты исследования. На основе модельных и реальных примеров подтверждается, что сосуществование нелинейных эффектов оказывается противоречиво, если результаты моделирования интерпретируются в области биокibernетики. При прогнозировании динамики инвазий или промысла биоресурсов с учетом регулирующего воздействия итерационные модели генерируют ненужные нелинейные режимы поведения, например, в случае известного сценария Фейгенбаума. Установлено, что связанные в один сценарий бифуркации не имеют объяснений в экологической реальности и не отображаются в наблюдаемых биофизических системах. Данные математические артефакты общие для нескольких, очень разных по своим теоретическим основам, биофизическим моделям. Хаотизация в реальной популяционной динамике имеет несколько иные свойства, чем можно получить в каскаде бифуркаций удвоения периода. Более соответствует динамике развития быстрых инвазий образование непритягивающего хаотического множества в форме странного репеллера.

Обсуждение и заключения. Показано, что для описания трансформаций биосистемных процессов с внешним воздействием как коллапса промысловой популяции адекватно использовать модели с возникновением альтернативных аттракторов. Данные модели лучше соответствуют переходам между состояниями популяций под действием промысла, чем модели с реализацией каскадов бифуркаций циклов, странных канторовских аттракторов и режимов хаоса в форме континуума неустойчивых траекторий всех периодов. Наиболее перспективны гибридные модели жизненного цикла со стадиями развития для существенной интерпретации в экологии и прогнозировании биосистем, так как они позволяют определять параметрические диапазоны функционирования, и исключать неприемлемые диапазоны параметров, где возникают избыточные нелинейные эффекты, которые не имеют обоснования для популяционных процессов. Анализ критериев адекватности базируется на сценариях деградации сложно структурированной популяции осетровых рыб бассейна Волги, трески у берегов Канады, вспышек численности инвазионных насекомых и распространению инвазивного гребневика *Mnemiopsis leidy* в Каспийском море.

Ключевые слова: динамические модели инвазий, каскад бифуркации Фейгенбаума, альтернативные аттракторы, сложные динамические процессы, регуляции воздействия для биосистем, гибридные вычислительные системы, параметрические диапазоны, теория сущностной интерпретации.

Благодарности. Автор выражает благодарность профессору Алле Валерьевне Никитиной за дружескую поддержку.

Финансирование. Работа выполнена в рамках Проекта РНФ № 23-21-00339 «Разработка методов сценарного моделирования экстремальных инвазионных процессов в экосистемах с учетом факторов противодействия на основе динамически переопределяемых вычислительных структур».

Для цитирования. Переварюха, А. Ю. Соответствие биофизическим критериям нелинейных эффектов при возникновении каскада бифуркаций Фейгенбаума в моделях инвазионных процессов / А. Ю. Переварюха // Computational Mathematics and Information Technologies. — 2023. — Т. 6, № 1. — С. 41–52.

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-6-1-41-52>

Original article

Correspondence to biophysical criteria of nonlinear effects in the occurrence of Feigenbaum bifurcation cascade in models of invasive processes

A. Yu. Perevaryukha ✉

St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, 39, 14-liniya str., St. Petersburg, Russian Federation

✉ madelf@rambler.ru

Abstract

Introduction. The problem of creating a set of criteria for practically substantiated computational modeling of a number of complex staged biophysical processes with pronounced stages and critical transformations, for example, aggressive invasions, is discussed. Known models have a variety of behavior with the occurrence of bifurcations according to the same scenarios, the appearance of cycles, the coexistence of which is determined by Sharkovskii's theorem. In the limit of complication of cyclic behavior in such models, they often encounter chaotization of the trajectory, but with the existence of an infinite number of periodicity windows. The conditions for an infinite cascade of bifurcations for iterations are determined by the fulfillment of the conditions of Singer's theorem. The purpose of this work is to show that most of the nonlinear effects associated with chaotization scenarios do not have an ecological interpretation, but we will propose ways to exclude non-interpretable parametric ranges.

Materials and methods. Using methods for estimating the stability of stationary states and cyclic trajectories using Singer's theorem on the criterion for the occurrence of bifurcations for iterative models, we analyze interconnected nonlinear effects. The phenomena are considered on the example of cascades of the appearance of cycles of the period $p = 2^i + 1$, $i \rightarrow \infty$ and a cascade of cycles $p = 2^i - 1$, $i \rightarrow 0$ of “doubling” or “halving” the period, which occur in ecological models often used to optimize fishing.

Results. It is confirmed that the coexistence of nonlinear effects turns out to be contradictory if the simulation results are interpreted in the field of biocybernetics, on the basis of model and real examples. Iterative models generate unnecessary non-linear modes of behavior, when predicting the dynamics of invasions or harvesting bioresources, taking into account the regulatory impact, for example, in the case of the well-known Feigenbaum scenario. It has been established that bifurcations connected in one scenario have no explanation in ecological reality and are not reflected in the observed biophysical systems. These mathematical artifacts are common to several biophysical models that are very different in their theoretical foundations. Chaotization in real population dynamics has somewhat different properties than can be obtained in a cascade of period doubling bifurcations. The formation of a non-attractive chaotic set in the form of a strange repeller is more consistent with the dynamics of the development of fast invasions.

Discussion and conclusions. It is shown that to describe the transformations of biosystemic processes with external influence, as the collapse of a commercial population, it is adequate to use models with the emergence of alternative attractors. These models correspond better to the transitions between the states of populations under the influence of

fishing than models with the implementation of cascades of bifurcations of cycles, strange Cantor attractors and chaos regimes in the form of a continuum of unstable trajectories of all periods. The most promising are hybrid models of the life cycle with developmental stages for essential interpretation in ecology and forecasting of biosystems, as they allow to determine the parametric ranges of functioning and exclude unacceptable ranges of parameters where excessive non-linear effects occur, which have no justification for population processes. The analysis of the adequacy criteria is based on degradation scenarios for a complexly structured sturgeon population in the Volga basin, cod off the coast of Canada, outbreaks of invasive insects, and the spread of the invasive ctenophore *Mnemiopsis leidyi* in the Caspian Sea.

Keywords: dynamic models invasive processes; Feigenbaum bifurcation cascade; alternative attractors; complex dynamic processes, impact regulation for biosystems, hybrid computing systems, parametric ranges, theory of essential interpretation.

Acknowledgements. Gratitude towards Professor Alla Valeryevna Nikitina for friendly support

Funding information. The work was carried out within the framework of the Russian Science Foundation Project No. 23-21-00339 “Development of methods for scenario modeling of extreme invasive processes in ecosystems, taking into account counteraction factors based on dynamically redefined computational structures”.

For citation. Perevaryukha, A. Yu. Correspondence to biophysical criteria of nonlinear effects in the occurrence of the Feigenbaum bifurcation cascade in models of invasive processes / A. Yu. Perevaryukha // Computational Mathematics and Information Technologies — 2023. — Vol. 6, no. 1. — P. 41–52. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-6-1-41-52>

Введение. Для задач биологической кибернетики последовательно развивается метод организации базовой модели для анализа вариативности сценариев, быстро меняющихся процессов с пороговыми эффектами [1]. Нелинейные эффекты могут возникать в сугубо прикладной задаче прогнозирования ожидаемой величины ежегодного пополнения популяций, рассматриваемых с точки зрения эксплуатации биоресурсов. Базовые разработанные вычислительные модели были направлены на анализ воспроизводства каспийской севрюги после перекрытия нерестилищ. Модели реализовывались в форме системы уравнений, описывающей взаимосвязанные скорости убыли численности исходной генерации особей и средних темпов роста групп, которые формируют новое поколение. Используя вспомогательные уравнения как надстройку над гибридной структурой, в модели получилось учесть эффект быстрого увеличения скорости роста особей и дальнейшей его остановки при переходе к созреванию.

Прогнозирование поступления в промысловый запас новой последовательности смежных поколений, которые, по разным независимым факторам, могут оказаться существенно различной численности — ключевая задача ведения преосторожного промысла. В работе был использован метод расчета стадий развития и корректировки коэффициентов убыли, которые применяются в уравнении от самого первого этапа жизни, где численность исходного поколения предполагается $N(0)$. Этот момент трактуется как событие выхода личинок морских рыб или крабов из икринок. Динамика последовательного уменьшения исходной генерации описывается дифференциальным уравнением первого порядка, но с переопределяемой структурой правой части. Для фиксации переопределения схемы расчетов задается пространство событий на кадрированном по номерам событий замкнутом промежутке времени $[0, T]$.

Явление сокращения ежедневной убыли происходит последовательно на стадиях развития. В структуре базовой модели учитываются разные ключевые факторы смертности и уменьшения темпов убыли при взрослении. Предикативно-переопределяемая гибридная структура модели записывается так:

$$\frac{dN}{dt} = \begin{cases} -(\alpha w(t)N(t) + U[x]\beta)N(t), & t < \tau \\ -(\alpha_1 N(\tau) / w(\tau) + \beta)N(t), & t > \tau, \quad w(t) < w_{D2}, \\ -\alpha_2 w(t)N^2(t), & w(t) < w_{D3}, \end{cases} \quad (1)$$

где корректируемый по стадиям развития α — определенный плотностью коэффициент смертности от истощения жизненных ресурсов; β — коэффициент всегда присутствующей убыли от множества естественных факторов, которые не связаны с плотностью.

Концепция «репродуктивного потенциала» считается абстрактной для экологических моделей реального промысла и искусственного восполнения запасов. Есть основания полагать, что разумно перейти к естественному показателю средней плодовитости λ . Этот показатель можно оценивать по данным мониторинга, который проводился на основе исследований нереста рыб в бассейне Волги и Дона. Плодовитость задаст начальные условия для расчета первой формы правой части $N(0) = \lambda S$. Указанный в (1) промежуток τ — длительность первой стадии с эндогенным питанием. Это важный интервал для всех анадромных рыб. Для модели необходимы условия останковки расчетов. Используется показатель w_D — условный уровень развития. В расчетах модели при достижении w_D меняется выраженность факторов смертности. Экологически обусловленная корректировка параметров интерпретируется сменой мест обитания молоди в реке и избеганием хищников при уже самостоятельной миграции к морскому ареалу обитания.

Северюга Каспия поддерживалась искусственно. При выращивании осетровых рыб в переполненных прудах с высокой плотностью (это называется термином «зарыбление») вместо величины $w(\tau)$ в знаменателе для определенной формы было установлено действие запаздывания на финальной стадии развития $N(t - \zeta)$.

Важную роль выполняет динамически переопределяемый коэффициент $U[x]$. В (1) включена триггерная, динамически корректируемая функция, но с ограниченной областью для ее значений. Идея корректировать функцию у смежных поколений — это способ отразить влияние экстремальных условий. Часто, при прогнозировании успеха размножения или особых состояний биосистем, сталкиваются с пороговыми трансформациями, как в сценарии деградации структурированной по нерестовым группам популяции крупного хищника, камчатского краба у берегов Кадьякского архипелага в водах Аляски.

Цель данной статьи — определить, какие именно нелинейные эффекты из всего их многообразия в динамике траекторий биологических моделей стоит игнорировать при обсуждении результатов расчетов, а какие исключают описательные возможности при обсуждении экологических результатов. На основе полученных результатов можно решать задачи по адекватному истолкованию результатов вычислительного моделирования ситуаций, которые возникают при развитии инвазионных процессов и коллапсов биоресурсов. Задача моделирования состоит в поддержке принятия управляющих решений при регулировании воздействия на биосистемы, для чего проводится оценка состояния биосистем, но где не все параметры непосредственные характеристики видов. Задача практического применения моделей — найти узкие диапазоны параметров, которые не подходят для обоснования принятия решений.

Материалы и методы. Исходя из того, что жизненный цикл стандартной длины и у рыб, и у насекомых сопровождают структурные превращения, в гибридной структуре представлен метод диверсификации жизненного цикла по фиксированному набору этапов и уравнений модели для каждого этапа.

В данном исследовании используется оригинальная разновидность непрерывно-дискретной модели со специальной организацией времени. Проводится кадровое разбиение времени онтогенеза вида и создается иерархия вложенных непрерывных отрезков времени, концами которых будут дискретные события различных типов, что важно для анализа стадий инвазий видов.

Внутри общего промежутка для жизненного цикла создан перечень из пронумерованных событий, где, в зависимости от типа, используется верхний или нижний индекс в обозначении. Разбитое на кадры интервальное событийно-гибридное время формализуется с мультимножеством из упорядоченных элементов, объединенных в кортежи, число которых соответствует поколениям:

$$\bigcup_n \left\{ \partial L_n, \left\{ \bigcup_i [t_0, t^i, t^{i+1}, T] \right\}_n, \partial R_n \right\},$$

где нижними индексами заданы номера событий в фиксированном интервале общего промежутка времени, а верхними — начальные события каждого кадра.

В гибридно-событийном формате, у модельного времени с событиями, число n указывает номер кадра в перечне всех поколений. Запись времени с событийными компонентами оставляет исключенные из последовательности модельных кадров пограничные щели, имеющие служебное назначение в численных расчетах. В модификациях для инвазионных видов в новой среде целесообразно указывать кадры времени с плавающими границами, которые заданы функциями роста.

Модель с гибридным временем рассчитана на применение инструментальной среды моделирования, обладающей библиотекой численных методов с изменяющимся шагом интегрирования. Принципы анализа модели составят теория динамики итераций, имеющих экстремумы функций со шварцианом переменного знака (согласно работам Сингера и Шарковского).

Помимо использования гибридной модели (1), для описания ситуации коллапса запасов камчатского краба, гибридную структуру удалось привести к прогнозированию других сложных стадийных биофизических процессов — вспышек инвазионных видов и распространения новых инфекций. Проведено построение вычислительной модели для специфической ситуации в динамике опасных инвазионных насекомых, вызывающих пилообразные вспышки численности.

В рассматриваемом сценарии темпы весового прироста указаны в обратной зависимости от средней численности новой генерации особей. Однако невозможно использовать обратно пропорциональный метод. Для этого была выбрана форма дробно-степенной зависимости. Эта функция действует до перехода на активное питание. Повышенная убыль в этот период времени появляется из-за увеличения потребности в калориях для личинок с низкой подвижностью. Следует отметить, что инвазионные виды отличаются особенностями развития.

Модельная динамика численности генерации для инвазионного вида $N(t)$ на интервале событийного модельного времени рассчитывается объединенными в систему уравнениями с явной триггерной функцией:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -(\alpha w(t)N(t) + \Theta(S)\beta)N(t), \\ \frac{dw}{dt} = \frac{g}{\sqrt{N^k(t)} + \zeta}, \end{cases} \quad (2)$$

где S — величина нерестовой части промыслового запаса; $w(t)$ — фиксированное значение для размерного развития генерации; g — временно константный параметр, учитывающий ограниченность количества доступных калорий; ζ — параметр, ограничивающий темп развития вне зависимости от $N(t)$; λ — средняя плодовитость нерестовой части промыслового запаса, определяющая начальные условия расчета (1) как $w(0) = w_0$, $N(0) = \lambda S$; α и β — мгновенные коэффициенты убыли. Расчеты проводятся для времени онтогенеза, определяемого как «интервал уязвимости». Это специфичный для каждого вида отрезок времени.

Для агрессивных инвазионных видов этот интервал зависит от условий сопротивления среды и времени адаптации биотического окружения.

При незначительном количестве повторно размножающихся особей численно из (2) находится величина на нерестовой части промыслового запаса $S = N(T)$. Учет дополнительного размножения приведет к формированию вектора из компонентов нерестующих поколений. Тогда нужно рассчитать исходную генерацию так: $N(0) = \lambda_1 S_1 + \dots + \lambda_i S_i$. Для задачи моделирования инвазии насекомых вредителей выберем альтернативную ситуативную функцию триггерного действия: $\Theta(S) = 1 + \exp(-cS^2)$, $\lim_{S \rightarrow \infty} \Theta(S) \rightarrow 1$. Цель этой функции — отразить действие известного эффекта агрегированной группы, что важно для инвазионных процессов. Чужеродные опасные вредители, проникшие в новый ареал, генерируют локальную вспышку при переходе критического порога их численности. Тогда высокая активность проявляется в форме повторяющихся пиков [2]. Для модели предложена вычислительная система — предикативно переопределяемая гибридная структура уравнений с запаздыванием.

Биокибернетика развивает методики активного вмешательства и подавления инвазионных процессов. Регулируемое противодействие агрессивно размножающемуся виду в биологическом сообществе вырабатывается с запаздыванием. Ситуация приводит к резкому переходу в фазу депрессии численности вселенца. Для остановки распространения вредоносного инвазивного вида проводится специальная интродукция вида-антагониста, но эффективность такого метода подавления на практике непостоянная.

Модель исследуется при представлении вычислительного сценария с набором параметров, начальных значений и алгоритмом выработки решений об изменении воздействия для дискретного времени. С использованием вычислительных экспериментов можно описать реальный сценарий исхода для ситуации, которая приводит к коллапсу биофизическую систему при контролируемом уровне воздействия. Модельный сценарий в работе [3] задает логику принятия управленческих решений по изменению уровня внешнего давления на естественную

популяцию. Моделирование показало, что переход процесса в колебательный режим приводит к выбору рискованного режима управления. Также было установлено, что динамика реальных водных популяции имеет точку порогового сокращения эффективности восполнения биоресурсов, которую невозможно предсказать, опираясь на данные статистики.

Результаты исследования. Ранее разработанный авторами модельный сценарий для коллапса камчатского краба Аляски использует трансформации фазового портрета итераций, которые получили обоснование на графиках с данными. При наличии несвязных границ областей притяжения альтернативных аттракторов и странного хаотического репеллера приводят к тому, что из-за хаотических режимов в детерминированной модели возникают эффекты неопределенности.

В результате последовательного численного решения уравнений определяется динамическая структура, где дискретная составляющая траектории «гибридной» непрерывно-дискретной модели исследуется в вычислительной среде как итерация отображения с несколькими экстремумами. Модели с гибридным временем рассчитаны на сценарное исследование с учетом логики принятия регулирующих воздействий на биосистемы решений, которую применяют эксперты. Для описанного ранее поведения траектории гибридной модели в виде переходной хаотизации и изменения границ областей притяжения аттракторов удалось подобрать экологическую интерпретацию на примере коллапсов трех популяций осетровых рыб Каспия.

Свойства описанного в [3] модельного сценария для эксплуатируемых водных биоресурсов с хаотическим режимом динамики подтверждаются автором на примере вылова океанических видов ракообразных. Итерационные модели подчиняются фундаментальным теоремам нелинейной динамики, что составляет сущность проблемы их применения в управлении биосистемами. Можно предположить, что нелинейный эффект (бифуркация, кризис аттрактора или стохастическое размытие для сепаратрисы) гипотетически интересен для описания популяционных процессов. Однако нельзя исключить ситуацию, что эффекту сопутствует и другой метаморфоз фазового портрета, для которого невозможно подобрать никакого биологического объяснения.

Применяемые экспертами при формировании управляющего воздействия методы прогнозирования и оценки состояния биосистемы требуют отдельного анализа. В экспертных методиках экологии построение регрессионных моделей и поиск корреляционных взаимосвязей происходит на основании данных мониторинга. Для построения кривых зависимости в репродуктивном процессе инвазионных видов, которые включают величины R в зависимости от нерестового запаса S , предлагались преобразования исходных данных мониторинга и построение регрессионных кривых. В [5] для прогнозирования динамики популяций автор предложил функцию оценки эффективности воспроизводства:

$$f(S) = aS \exp(-bS), \quad (3)$$

которую затем логарифмировал следующим образом:

$$\ln R - \ln S = \ln a - bS. \quad (4)$$

и построил кривую с использованием регрессии $\ln R / S$ на S для геометрической и арифметической средней. Метод не может предсказывать колебаний с большой амплитудой, так как точки должны были бы сгруппироваться в некотором радиусе от пересечения с биссектрисой координатного угла [6].

Движение точек траектории во времени для динамической системы в диссипативном случае представляется движением в фазовом пространстве к аттрактору, подмножеству фазового пространства $A \subseteq M$, инвариантному относительно эволюции: $\psi^{(t)}(A) = A$ для всех $t \in T$. Также существует окрестность U множества A , в которой для всех $y \in U$ выполняется $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi^{(t)}(y) = A$. В случае используемых динамических систем выделяют три топологические разновидности аттракторов [7]. Регулярным аттрактором для отображения интервала $\Psi: I \rightarrow I$ считается состояние равновесия с неподвижной точкой x^* : $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi^{(t)}(y) = x^*$ и устойчивый цикл. Для биологии этот режим периодических автоколебаний можно считать выраженным приблизительно периодическими флуктуациями, когда период может «плавать» в некотором диапазоне.

В дискретно-непрерывных моделях гибридного типа наблюдается серия касательных бифуркаций с появлением устойчивых циклов периодов [8] $p \neq 2^i$ при последовательном увеличении, начиная с $a_1 = e^2$. В том случае, если одномерное отображение $R_{j+1} = \psi(R_j)$ при значении управляющего параметра $a = \hat{a}$ имеет цикл периода

$p = 3$, то оно при этом же значении управляющего параметра $a = d$ имеет бесконечное множество циклов всех других периодов. А. Н. Шарковский [9] доказал, что если отображение $\Psi: I \rightarrow I$ имеет цикл $p = n$, то $\Psi: I \rightarrow I$ также имеет циклы со всевозможными периодами при этом же значении управляющих параметров, предшествующими числу $p = n \in \mathbb{N}^+$ среди целых чисел, выписанных в специальном порядке, который завершает число 3 [10].

Найденный в расчетах цикл «три» означает периодическое окно среди хаотических вариантов динамики. Следовательно, появление цикла периода «три» странно для биологической модели.

С целью установить нужные для биологической модели свойства выбрана функциональная итерация класса гладкости C^2 отрезка прямой R^1 , которая задается функцией $f(x)$. Данная экологическая функция будет интерпретироваться как связь между нерестовым стадом и образовавшимся пополнением. Пусть неподвижная точка отображения зависит от используемых при прогнозировании состояния биоресурсов коэффициентов:

$$x^* = x^*(a, b), \text{ но } f'_x(x^*) = p(a), f'_x \neq 0, \text{ если } x \neq c, f''(c) \neq 0.$$

В рассмотренном выше примере для зависимости $f(x; x \neq c)$ всюду определен дифференциальный инвариант, знак которого сохраняется для всех итераций:

$$S_f = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

В случае функции (1) существуют следующие свойства:

$$\begin{aligned} f'(x) &= ae^{-bx}(1-bx), \\ f''(x) &= abe^{-bx}(bx-2), \\ f'''(x) &= ab^2e^{-bx}(3-bx). \end{aligned}$$

В общем виде n -ая производная выражается: $f^{(n)}(x) = a(-1)^n b^{n-1} e^{-bx}(bx-n)$

Знак дифференциального инварианта для всех итераций будет выглядеть так: $f(f(\dots(x)\dots)) \equiv f^n(x)$. Очевидно, что свойство $S_f < 0$ сохраняется $x \in \mathfrak{R}$, так как для $f(S) = aS \exp(-bS)$ выражение примет вид:

$$S_f = b^2 \frac{-b^2 x^2 + 4bx - 6}{2(1-bx)^2}.$$

Положение стационарной точки для функции (1) зависит от двух параметров (критерий устойчивости — однопараметрическая функция), а x^* теряет устойчивость:

$$f'(x^*) = -1, \text{ где критерий устойчивости}$$

$$f'(x^*) = ae^{-b \frac{\ln a}{b}} - b \frac{\ln a}{b} ae^{-b \frac{\ln a}{b}} = \frac{a(1 - \ln a)}{e^{\ln a}} = 1 - \ln a.$$

При $a = e^2, f'(x^*) = -1$ для второй итерации $f^2(x)$ свойства в теряющей устойчивость стационарной точке x^* :

$$\frac{df^2(x^*)}{dx} = 1,$$

$$\frac{d^2 f^2(x)}{dx^2} = \frac{df'(f(x))f'(x)}{dx} = f''(f(x))(f'(x))^2 + f'(f(x))f''(x),$$

$$\frac{d^2 f^2(x^*)}{dx^2} = f'(x^*)f''(x^*)(f'(x^*) + 1) = 0.$$

В данном случае показатель шварциана у второй итерации всегда тождественен третьей производной в этой точке:

$$S_{f^2(x^*)} = \frac{d^3 f^2(x^*)}{dx^3}.$$

Каскад бифуркаций удвоения периода цикла с соответствующими периодическими окнами реализуется бесконечно, если для знака шварциана выполняется $S_f < 0$. Тогда $df^2(x)/dx$ при ae^2 имеет в x^* локальный максимум и только тогда происходит бифуркация с появлением у старшей итерации двух новых точек пересечения, причем $S_f < 0$ — критерий реализации бесконечного каскада бифуркаций, указанного Митчеллом Фейгенбаумом удвоения периода цикла.

Хаотизация через каскад Фейгенбаума является следствием фундаментальной теоремы из [11], где установлено что отображение унимодальной функции с $S_f < 0$ может иметь не более одной устойчивой траектории, и данная траектория является ω -предельным множеством для экстремума $c: f'(c) = 0$. Проблема в том, что для биосистем этот каскад часто возникает в моделях, но реальными данными он не обоснован.

Модель биокibernетики (3), с математической точки зрения, классифицируется как SU -отображение. Модель (1) отличается от объектов, исследованных М. Фейгенбаумом в работах по универсальности и теории ренормализации, наличием точки перегиба $f''(x_s) = 0, x_s = 2/b$ и точек, где обращаются в ноль все старшие производные. Свойство $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow 0$ для (1) означает, что хаотический аттрактор может увеличиваться неограниченно, так как не возникнет явления «граничный кризис аттрактора».

Часто на практике применяют иную функцию воспроизводства как альтернативную модель теории формирования поколений биоресурсов с предельной биомассой промыслового запаса K и степенью b знаменателей:

$$f(x) = \frac{ax}{1 + \left(\frac{x}{K}\right)^b}, \quad (5)$$

где $a > 1$ интерпретируется как репродуктивный потенциал, K — величина экологической ниши и ограниченной лимитирующей емкости среды. Степень воздействия экологического лимитирования со стороны среды в (5) определяется b . Была проанализирована итерация модели (5) с точки зрения теории бифуркаций отображений на R^1 . Точка равновесия для итераций (5) имеет свойства:

$$x^* = K \sqrt[b]{a-1},$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{(K^b + x^b)aK^b - ab(Kx)^b}{(K^b + x^b)^2},$$

$$\frac{df(x^*)}{dx} = \frac{a - ba + b}{a} > 0 \text{ при } b < 1.$$

В вычислительных экспериментах на основе определения знака показателей Ляпунова установлено наличие хаотических свойств для итераций (5). В ограниченном диапазоне значений параметра a , которые можно применить к инвазионным популяциям, бифуркации удвоения периода возникают при изменении b . При $b < 1$ экстремумов у функции нет, при $b = 2$ функция имеет критическую точку $x = K$. Производная 2-го порядка в критической точке:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -\frac{a}{4K},$$

Так, (5) имеет максимум при данных условиях. В случае (5) исследуется параметрическая зависимость для аналитического анализа бифуркаций с достаточно гибкими свойствами. Можно избежать каскада, а также дополнительных нелинейных эффектов, внутренних кризисов хаотического аттрактора, окон периодичности и перемежаемости. Все эти явления тут можно аккуратно исключить из моделирования биосистем, оставив только нужные циклы.

Биофизическая и промысловая интерпретация нелинейных эффектов в этих двух моделях взаимно исключают их адекватность. Рассмотрев изменение поведения модели (3), можно сформулировать гипотезу «репродуктивной сложности». Якобы увеличение репродуктивного потенциала в биосистеме приводит к появлению флуктуаций численности, что в пределе выражается колебаниями аperiodического характера. Однако такие колебания должны в среднем иметь возрастающую амплитуду. Соответственно, усредненный минимум хаотических колебаний (среднее значение минимальной точки за период) будет стремиться к нулю. Для биосистем это означает деградацию и разрушение. В альтернативной модели возникновение каскада циклов периода 2^n происходит при увеличении степени действия лимитирующих факторов среды.

Одна из двух моделей всегда будет принципиально неадекватна. Альтернативная гипотеза сущностной биофизической интерпретации в том, что каскад бифуркаций (как и ряд других сложных нелинейных эффектов и внутреннего и граничного кризиса хаотического аттрактора с явлением перемежаемости) для SU -отображений не имеет биофизической интерпретации.

Обсуждение и заключения. Необходимо отметить, что для ряда моделей существуют сопутствующие нелинейные эффекты, которые по ряду причин нежелательны и излишни. Такие эффекты не находят подтверждения в анализе данных наблюдений и их нужно исключать из обсуждения.

Популяционная цикличность — интереснейший, многообразный и далеко не полностью исследованный биологический феномен. Цикличность наблюдается и в лабораторном аквариуме при постоянстве условий, и в открытом океане (в том числе климатически обусловленная). Научная проблема установления физических причин возникновения длиннопериодических колебаний у многих видов далека от разрешения. Исследования в этой области продолжают международные коллективы. Стоит отметить некоторые не совсем очевидные аспекты проблемы описания цикличности, интересные с точки зрения системного анализа.

Популяционные циклы (пусть и не в строго периодическом математическом смысле замкнутой траектории) могут быть краткие (недельные) в лабораторных условиях. Существуют примеры длинных, даже вековых периодов колебаний, не соотносящихся с длиной жизненного цикла самого вида. Экстремальное, по своим последствиям для лесных экосистем, явление происходит со знаменитыми колебаниями численности вредителя еловой листовёртки *Choristoneura fumiferana* в лесах Северной Америки от Атлантического до Тихого океана.

Так как явление популяционных циклов хорошо описано у многих видов, то моделировать цикличность, свойственную ряду природных популяций, пробовали различными математическими методами, дискретными и непрерывными моделями. Возможность получения циклического поведения для простой модели вида $x_{n+1} = \psi(x_n; a)$ позитивно оценивается многими авторами. Однако циклы, возникающие при увеличении параметра a , отличаются не только периодом, но и порядком обхода составляющих их точек, то есть циклы у итераций с одинаковым по длине (количеству составляющих цикл точек) периодом могут быть качественно разные — это одно из отличий поведения дискретных моделей.

На рис. 1. показана циклическая траектория $x_{n+1} = ax_n \exp(-bx_n)$, состоящая из четырех точек. В сценарии вычислений между крайними верхней и нижней точками цикла оказались две другие точки цикла. Полученный в вычислительном эксперименте порядок обхода четырех циклических точек, когда траектория переходит из верхней ветви в нижнюю, универсален на всем протяжении каскада. После удвоения точки появляются симметрично в верхних и нижних ветвях вплоть до резкого слияния всех «раздвоившихся» ветвей циклических точек в канторовский аттрактор. Порядок обхода ветвей, которые формируют циклические точки, теряется только с формированием канторовской структуры после объединения ветвей, которые образовались при первом удвоении периода.

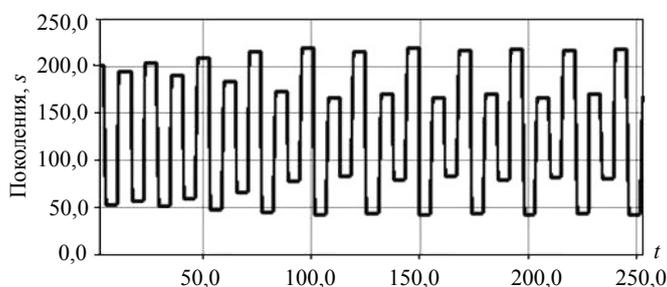


Рис. 1. Циклическая динамика модели (3) периодом цикла «четыре»

Установление свойств образования циклов было воспринято позитивно ввиду подтверждения предсказательных возможностей таких моделей для популяций с неперекрывающимися поколениями. Подобное мнение продолжает существовать, несмотря на доказательство универсального характера таких бифуркаций для унимодальных функций.

Циклические изменения плотности характерны для мелких млекопитающих арктических островов и часто у них наблюдались, но циклы не сохраняются и легко разрушаются любым внешним возмущением [12]. Помимо длины периода p , циклы итераций $x_{n+1} = \psi(x_n)$ различаются между собой взаимным расположением составляющих их точек при обходе. На типичном примере динамики арктического грызуна видим, что популяционные циклы — монотонные перестановки с возрастанием (рис. 2). Основной пик у грызунов приходится на конец четырехлетнего периода колебаний численности грызунов, и такие циклы с максимумом в конце можно получить в порядке теоремы Шарковского, но другими математическими методами.

На примере более длинных циклов степных грызунов в современном Казахстане очевидно, что существует стадия минимума численности, стадия быстрого роста и пика, которая сменяется продолжительной депрессией с минимальным состоянием. Для многих насекомых-вредителей наблюдаются затухающие «пилообразные» серии пиков численности [13].

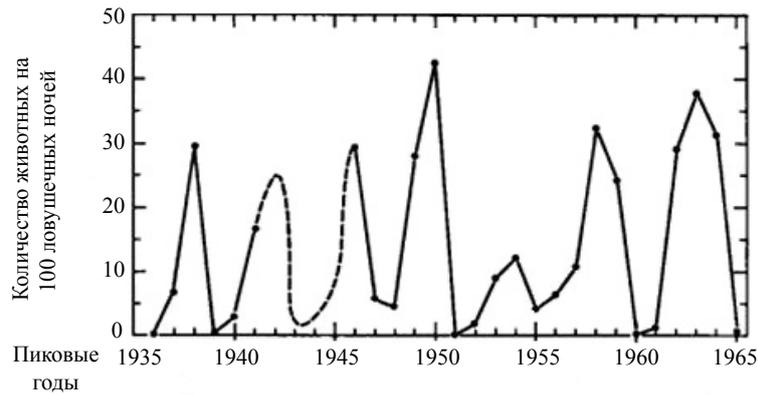


Рис. 2. Четырехлетняя цикличность в динамике популяции арктических млекопитающих по данным мониторинга [12]

Серии популяционных вспышек — это тоже форма циклических изменений, но такая динамика не отражается дискретными итерационными моделями. Серии колебаний получили описание на основе непрерывных моделей с запаздыванием в работе [14].

Биофизические модели в природопользовании, не учитывающие эффект агрегированной группы (или фактор наличия критической низкой численности сообщества), практически выходят за рамки возможности интерпретации результатов моделирования в экологии. Есть ряд других примеров, где принципы экологии не согласуются со свойствами математического аппарата [15]. Известно, чем больше видов в экосистеме, тем она стабильнее [16], что означает способность продолжительное время сохранять неизменным свое состояние [17]. Но при увеличении размерности фазового пространства математических моделей только усложняется возможность поведения траектории.

Задачи регулирования биофизических процессов становятся только сложнее из-за непредвиденных возмущений, потому актуально развитие вычислительных методов анализа нелинейности ситуаций с описанием логики воздействия. Эволюционно сложившиеся долгие режимы функционирования трофических цепей, к которым относятся регулярные циклы популяций, разрушаются без поддержания видового разнообразия [19]. Избыточная эксплуатация ценных популяций нарушает регуляторные механизмы, поддерживающие баланс соотношения видов, что приводит к занятию экологической ниши вредными вселенцами и распространению инвазивного гребневика *Mnemiopsis leidy* [20].

Относительное положение экстремумов у функций, которые используют для связи основных величин репродуктивного процесса относительно стационарных точек — важная характеристика для динамики, так как влияет на характер границ областей притяжения аттракторов и возникновения альтернативных циклов. Для найденных сценариев перехода к аperiodической динамике и обратно к регулярной еще не разработано обобщенного строго математического описания в объяснении свойств перехода к хаосу.

Ошибки при оптимизации влекут явление структурного коллапса, которое нужно своевременно определять по характерным признакам. Оптимизация для экономики регионов несет риск, согласно теории максимального поддерживаемого изъятия, реализуемого в течение неопределенного периода времени в практике ее применения и для популяций. Коллапс запасов означает долгую остановку промысла и депрессию отрасли экономики. Регулируемый промысел ведет к неожиданной деградации биоресурсов достаточно часто. Математически это отражает случай, когда неустойчивое равновесие в модели представляется точкой-репеллером. В экологической реальности инвазионных процессов это размытая область, а не точка [21], так как результируется действие стохастических факторов, которые невозможно учесть непосредственно.

Сложность управления биосистемами при неопределенности стохастического воздействия в том, что кризисные ситуации разнообразны в ключевых признаках и вызываются часто непредвиденными факторами гидрологии. Подобные примеры моделей показаны в исследованиях А. В. Никитиной [22] для анализа воздействия чужеродной инвазивной биоты, активно поражающей сложившиеся в долгой изоляции донные биосистемы Азовского и Каспийского морей [23] из-за строительства каналов и активного судоходства.

Список литературы

1. Perevaryukha, A. Y. An iterative continuous-event model of the population outbreak of a phytophagous hemipteran / A. Y. Perevaryukha // *Biophysics*. — 2016. — Vol. 61, no. 2. — P. 334–341.
2. Robeva, R. The spruce budworm and forest: a qualitative comparison of ODE and Boolean models/ R. Robeva, D. Murrugarra // *Letters in Biomathematics*. — 2016. — Vol. 3, iss. 1. — P. 72–92.
3. Perevaryukha, A. Y. Hybrid model of the collapse of the commercial crab *Paralithodes camtschaticus* (Decapoda, Lithodidae) population of the kodiak archipelago / A. Y. Perevaryukha // *Biophysics*. — 2022. — Vol. 67, no. 2. — P. 300–319.
4. Березовская, Ф. С. Бифуркации бегущих волн в популяционных моделях с таксисом/ Ф. С. Березовская, Г. П. Карев // *Успехи физических наук*. — 1999. — № 9. — С. 1011–1025.
5. Ricker, W. Stock and recruitment / W. Ricker // *Journal Fisheries research board of Canada*. — 1954. — No. 11. — P. 559–623.
6. Perevaryukha, A. Y. A model of development of a spontaneous outbreak of an insect with aperiodic dynamics / A. Y. Perevaryukha // *Entomological Review*. — 2015. — Vol. 95, no. 3. — P. 397–405.
7. Guckenheimer, J. Sensitive dependence on initial conditions for one dimensional maps / J. Guckenheimer // *Communications in Mathematical Physics*. — 1979. — Vol. 70. — P. 133–160.
8. Feigenbaum M. J. Universal behavior in nonlinear systems / M. J. Feigenbaum // *Physica*. — 1983. — Vol. 7, no. 1–3. — P. 16–39.
9. Sharkovskii, A. N. Coexistence cycles of continuous map of the line into itself / A. N. Sharkovskii // *International Journal of Bifurcation & Chaos*. — 1995. — Vol. 5. — P. 1263–1273.
10. Шарковский, А. Н. О притягивающих и притягивающихся множествах/ А. Н. Шарковский // *Доклады АН СССР*. — 1965. — Т. 160. — С. 1036–1038.
11. Singer, D. Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval / D. Singer // *SIAM Journal of Applied Mathematics*. — 1978. — No. 35. — P. 260–268.
12. Krebs, C. J. Population Cycles in Small Mammals/ C. J. Krebs // *Advances in Ecological Research*. — 1974. — Vol. 8. — P. 267–399
13. Royama, T. Analysis of spruce budworm outbreak cycles in New Brunswick, Canada, since 1952 / T. Royama, W. E. MacKinnon, E. G. Kettela, N. E. Carter, L. K. Hartling // *Ecology*. — 2005. — Vol. 86. — P. 1212–1224.
14. Perevaryukha, A. Y. A continuous model for oscillating outbreaks of the population of a phytophagous moth, the tent caterpillar, *Malacosoma disstria* (Lepidoptera, Lasiocampidae) / A. Y. Perevaryukha // *Biophysics*. — 2020. — Vol. 65, no. 1. — P. 118–130.
15. Courchamp, F. Allee Effects in Ecology and Conservation / F. Courchamp, B. Ludek, J. Gascoigne // *Oxford University Press : New York*. — 2008. — 266 p.
16. Братусь, А. С. Динамические системы и модели биологии/ А. С. Братусь, А. С. Новожилов, А. П. Платонов. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 400 с.
17. Базыкин, А. Д. Модель экосистемы трех трофических уровней с учетом существования нижней критической плотности популяции продуцента /А. Д. Базыкин, Е. А. Апонина // *Проблемы экологического мониторинга и моделирования экосистем*. — 1981. — Т. 4. — С. 186–203.
18. Perevaryukha, A. Y. A continuous model of three scenarios of the infection process with delayed immune response factors / A. Y. Perevaryukha // *Biophysics*. — 2021. — Vol. 66, no. 2. — P. 327–348.
19. Veshchev, P. V. Efficiency of natural reproduction of sturgeons in the Lower Volga under current conditions / P. V. Veshchev, G. I. Guteneva // *Russian Journal of Ecology*. — 2012. — Vol. 43, no. 2. — P. 142–147
20. Perevaryukha, Y. N. Comparative immunochemical analysis of intraspecies distinctions of serum proteins of starred sturgeon *Acipenser stellatus* (Acipenseriformes, Acipenseridae) from the Caspian basin / Y. N. Perevaryukha, P. P. Geraskin, T. Y. Perevaryukha // *Journal of Ichthyology*. — 2011. — Vol. 51, no. 5. — P. 392–397.
21. Дубровская, В. А. О критериях обоснованности для анализа нелинейных эффектов в моделях эксплуатируемых популяций / В. А. Дубровская // *Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы*. — 2016. — № 48. — С. 74–83.

22. Никитина, А. В. Моделирование динамики численности рыбных популяций в акватории Таганрогского залива / А. В. Никитина // Известия Южного федерального университета. Технические науки. — 2009. — № 7. — С. 169–173.

23. Nikitina, A. V. Optimal control of sustainable development in the biological rehabilitation of the Azov Sea / A. V. Nikitina, A. I. Sukhinov, G. A. Ugolnitsky, A. B. Usov, A. E. Chistyakov, M. V. Puchkin, I. S. Semenov // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2017. — Vol. 9. — P. 101–107.

Поступила в редакцию 10.02.2023.

Поступила после рецензирования 02.03.2023.

Принята к публикации 03.03.2023.

Об авторе:

Переварюха Андрей Юрьевич, к.т.н., ст. науч. сотрудник лаборатории Прикладной информатики СПб ФИЦ РАН (РФ, 199178, г. Санкт-Петербург, ул. 14-линия, 39) [SPIN-код: 6070-5310](#), [ScopusID](#), [ORCID](#)

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.