

УДК 519.63

Научная статья

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-6-1-53-69>**Семейство методов обратных характеристик****И. Б. Петров**  , **Д. И. Петров**

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Российская Федерация, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9

✉ [petrov@mipt.ru](mailto:petrov@mipt.ru)**Аннотация**

**Введение.** Основной идеей сеточно-характеристического метода является учет характеристических свойств, систем уравнений гиперболического типа, конечной скорости распространения возмущений в моделируемой среде.

**Материалы и методы.** Простейшим уравнением гиперболического типа является одномерное линейное уравнение переноса. Для повышения порядка аппроксимации сеточно-характеристической схемы до второго, можно использовать схему Бима-Уорминга. Если использовать четырехточечный шаблон, то получим центральную схему Лакса-Вендроффа. Разностные схемы для линейного уравнения переноса можно получать, используя метод неопределенных коэффициентов.

**Результаты исследования.** Сеточно-характеристическая схема допускает консервативный вариант, актуальный, если внутри области интегрирования имеются разрывы (скачки уплотнения, ударные волны) при этом исходная система уравнений для матрицы с постоянными коэффициентами, в частных производных должна быть представлена в дивергентной форме.

**Обсуждение и заключения.** При численном решении трехмерной задачи построение производится аналогично, в случае верхней и нижней границ, после скалярного умножения схемы на собственные векторы получены соотношения аппроксимирующие с первым порядком точности условия совместимости.

**Ключевые слова:** сеточно-характеристический метод, уравнения гиперболического типа, уравнение переноса, схема Бима-Уорминга, схема Лакса-Вендроффа, метод неопределенных коэффициентов, условия совместимости.

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках проекта Российского научного фонда № 21-71-10015.

**Для цитирования.** Петров, И. Б. Семейство методов обратных характеристик / И. Б. Петров, Д. И. Петров // Computational Mathematics and Information Technologies. — 2023. — Т. 6, № 1. — С. 53–69.

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-6-1-53-69>

Original article

**A family of inverse characteristics methods****I. B. Petrov**  , **D. I. Petrov**

Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), 9, Institutsky Lane, Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation

✉ [petrov@mipt.ru](mailto:petrov@mipt.ru)**Abstract**

**Introduction.** The main idea of the grid-characteristic method is to take into account the characteristic properties, systems of hyperbolic equations, and the finite velocity of propagation of perturbations in the simulated media.

**Materials and methods.** The simplest hyperbolic equation is a one-dimensional linear transfer equation. To increase the order of approximation of the grid-characteristic scheme to the second, you can use the Bim-Warming scheme. If we use a four-point pattern, we get a central Lax-Vendroff scheme. Difference schemes for the linear transfer equation can be obtained using the method of indefinite coefficients.

**Results.** The grid-characteristic scheme admits a conservative variant, which is relevant if there are discontinuities (shock waves, shock waves) inside the integration domain, while the original system of equations for a matrix with constant coefficients, in partial derivatives, should be presented in a divergent form.

**Discussion and conclusions.** When numerically solving a three-dimensional problem, the construction is performed similarly, in the case of upper and lower bounds, after scalar multiplication of the scheme by eigenvectors, relations approximating the compatibility conditions with the first order of accuracy are obtained.

**Keywords:** grid-characteristic method, hyperbolic type equations, transfer equation, Beam-Warming scheme, Lax-Wendroff scheme, method of indefinite coefficients, compatibility conditions.

**Funding information.** The work was carried out within the framework of the Russian Science Foundation project No. 21-71-10015.

**For citation.** Petrov, I. B. Family of methods of inverse characteristics / I. B. Petrov, D. I. Petrov // Computational Mathematics and Information Technologies. — 2023. — Vol. 6, no. 1. — P. 53–69. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-6-1-53-69>

**Введение.** Основной идеей сеточно-характеристического метода является учет характеристических свойств, систем уравнений гиперболического типа, конечной скорости распространения возмущений в моделируемой среде. Обзоры соответствующих работ приведены в [1–6].

Простейшим уравнением гиперболического типа является одномерное линейное уравнение переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = \text{const}, \quad a > 0, \quad (1)$$

а простейшей разностной схемой, учитывающей характеристические свойства (1) — схема «уголок», или схема Куранта-Изаксона-Рисса:

$$u_m^{n+1} = (1 - \sigma) u_m^n + \sigma u_{m-1}^n, \quad \sigma = \frac{a\tau}{h}. \quad (2)$$

Эта схема учитывает направление характеристики данного уравнения и может быть получена путем линейной интерполяции численного решения по известным его значениям в узлах  $x_m, x_{m-1}$  расчетной сетки. Эту схему можно представить в следующих видах:

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \sigma \begin{cases} u_{m+1}^n - u_m^n, & a < 0, \\ u_m^n - u_{m-1}^n, & a > 0, \end{cases}$$

(разность выбирается с учетом наклона характеристики):

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{\tau}{h} \left[ a^+ (u_{m+1}^n - u_m^n) + a^- (u_m^n - u_{m-1}^n) \right],$$

где  $a^+ = 0,5(a + |a|)$ ,  $a^- = 0,5(a - |a|)$ ;  $u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{\sigma}{2} (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + \frac{|\sigma|}{2} (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n)$

(схема с явным выделением диссипативного слагаемого, обеспечивающего ее устойчивость):

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \sigma (\Phi_{m+1/2}^n - \Phi_{m-1/2}^n),$$

где

$$\Phi_{m+1/2}^n = \frac{1}{2} [a(u_{m+1}^n - u_m^n) - |a|(u_{m+1}^n - u_m^n)],$$

$$\Phi_{m-1/2}^n = \frac{1}{2} [a(u_m^n - u_{m-1}^n) - |a|(u_m^n - u_{m-1}^n)],$$

(потокковая форма).

В случае нелинейного уравнения переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f = \frac{u^2}{2}, \quad (3)$$

схема «уголок», учитывающая направления характеристик, может быть представлена в следующем виде:

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{\tau}{h} \begin{cases} f_{m+1}^n - f_m^n, & u_m^n < 0, \\ f_m^n - f_{m-1}^n, & u_m^n > 0. \end{cases}$$

Приведенная разностная схема имеет первый порядок аппроксимации по времени и координате. Для повышения порядка аппроксимации сеточно-характеристической схемы до второго, можно использовать схему Бима Уорминга, которая может быть получена на четырехточечном шаблоне  $\{x_{m-2}^n, x_{m-1}^n, x_m^n\}$  путем квадратической интерполяции решения на  $n$ -ом временном слое по узлам  $x_{m-2}^n, x_{m-1}^n, x_m^n$ :

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \sigma(u_m^n - u_{m-1}^n) - \frac{\sigma}{2}(1 - \sigma)(u_m^n - 2u_{m-1}^n + u_{m-2}^n). \quad (4)$$

Если использовать четырехточечный шаблон  $\{x_m^{n+1}, x_{m-1}^n, x_m^n, x_{m+1}^n\}$ , то получим центральную схему Лакса-Вендроффа:

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{\sigma}{2}(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + \frac{\sigma^2}{2}(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n). \quad (5)$$

Эта схема, как и схема Бима-Уорминга, имеет второй порядок аппроксимации по времени и пространству  $O(\tau^2 + h^2)$ , что проверяется разложением сеточных функций  $u_{m\pm 1}^n$  в ряд Тейлора, и является устойчивой при выполнении условия Куранта  $\tau \leq h/a$ , что можно получить, используя спектральный признак устойчивости Неймана. При добавлении точки  $x_{m-2}^n$  к шаблону, соответствующему схеме Лакса-Вендроффа, получим схему 3-го порядка аппроксимации на четырехточечном шаблоне  $\{x_m^{n+1}, x_{m-1}^n, x_m^n, x_{m+1}^n\}$ :

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{\sigma}{6}(2u_{m+1}^n + 3u_m^n - 6u_{m-1}^n + u_{m-2}^n) + \frac{\sigma^2}{2}(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) - \frac{\sigma^3}{6}(u_{m+1}^n + 3u_{m-1}^n - 3u_m^n - u_{m-2}^n). \quad (6)$$

Для повышения порядка точности схемы добавим к последнему шаблону точку  $x_{m+2}^n$ , при этом разностная схема 4-го порядка аппроксимации будет иметь вид:

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{\sigma}{12}(8u_{m+1}^n - 8u_{m-1}^n - u_{m+2}^n + u_{m-2}^n) + \frac{\sigma^2}{24}(16u_{m+1}^n - 30u_m^n + 16u_{m-1}^n - u_{m+2}^n - u_{m-2}^n) - \frac{\sigma^3}{12}(2u_{m-1}^n - 2u_{m+1}^n + u_{m+2}^n - u_{m-2}^n) + \frac{\sigma^4}{24}(6u_m^n - 4u_{m+1}^n - 4u_{m-1}^n + u_{m+2}^n + u_{m-2}^n). \quad (7)$$

Если рассматривается линейная акустическая система уравнений вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где  $u, p$  — локальная скорость среды и давление,  $\rho$  — плотность,  $c$  — скорость звука, то, как отмечалось во второй главе, ее можно привести к виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial t} + a \frac{\partial r}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial t} - a \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где  $r = u + \frac{p}{\rho a}$ ,  $s = u - \frac{p}{\rho a}$  — инварианты Римана.

В этом случае сеточно-характеристический метод может быть представлен в следующем виде:

$$\begin{cases} r_m^{n+1} = (1 - \sigma) \cdot r_m^n + \sigma r_{m-1}^n, \\ s_m^{n+1} = (1 - \sigma) \cdot s_m^n + \sigma s_{m+1}^n. \end{cases} \quad (10)$$

Соответствующий шаблон имеет вид:

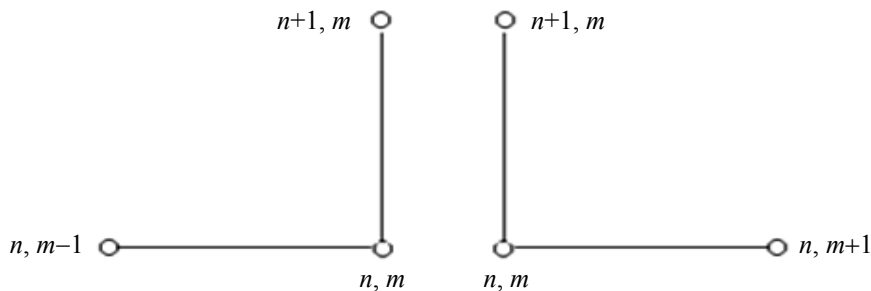


Рис. 1. Шаблон сеточно-характеристического метода для линейной акустической системы уравнений

Приведенные разностные схемы можно получить следующим образом.

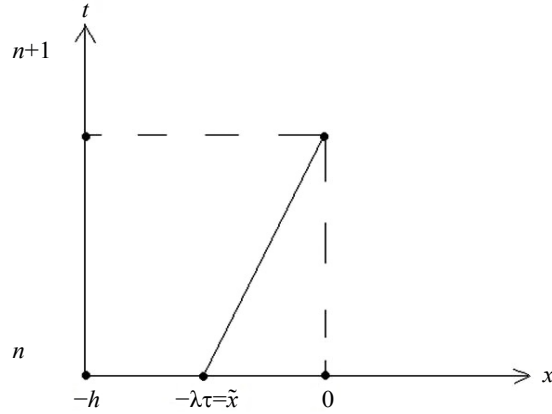


Рис. 2. Двухточечный шаблон ( $x_n = 0, x_{n-1} = -h$ )

На рис. 2 представлен двухточечный шаблон ( $x_n = 0, x_{n-1} = -h$ ), на котором, в случае схемы 1-го порядка, строится полином 1-го порядка  $P_1(x) = a_1x + a_0$ , коэффициенты которого находятся из условий:

$$u_m^n = a_1x_m + a_0, \quad u_{m-1}^n = a_1x_{m-1} + a_0,$$

$$a_1 = (u_m^n - u_{m-1}^n) / h, \quad a_0 = u_m^n.$$

Тогда получается:

$$P(x) = \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} x + u_m^n.$$

Поскольку  $u_m^{n+1} = u(\tilde{x}) = u(-\lambda\tau)$ , то получается схема «левый уголок» (или КИР):

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \sigma(u_m^n - u_{m-1}^n).$$

Если к этому шаблону добавить точку  $x_{m+1}^n$  то получается полином второго порядка:  $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ , коэффициенты которого находятся аналогичным образом (из условий прохождения полинома  $P(x)$  через значения функции в узлах шаблона):

$$a_2 = (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) / 2h^2,$$

$$a_1 = (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) / 2h,$$

$$a_0 = u_m^n.$$

В этом случае получается схема Лакса-Вендроффа. При добавлении к данному шаблону точки  $x_{m-2}^n$ , получается полином третьего порядка:  $P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  с коэффициентами, которые находятся из тех же условий:

$$a_3 = (u_{m+1}^n + 3u_m^n - 3u_{m-1}^n - u_{m-2}^n) / 6h^3,$$

$$a_2 = (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) / 2h^2,$$

$$a_1 = (2u_{m+1}^n + 3u_m^n - 6u_{m-1}^n + u_{m-2}^n) / 6h,$$

$$a_0 = u_m^n.$$

В результате получается схема Русанова третьего порядка точности. Если добавить к шаблону точку  $x_{m+2}^n$ , то получается полином четвертой степени:  $P_4(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  с коэффициентами:

$$a_4 = (6u_{m+1}^n - 4u_m^n - 4u_{m-1}^n + u_{m-2}^n) / 24h^4,$$

$$a_3 = (2u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m+2}^n + u_{m-2}^n) / 12h^3,$$

$$a_2 = (16u_{m+1}^n - 30u_m^n + 16u_{m-1}^n - u_{m+2}^n - u_{m-2}^n) / 24h^2,$$

$$a_1 = (8u_{m+1}^n - 8u_m^n - u_{m+2}^n + u_{m-2}^n) / 12h,$$

$$a_0 = u_m^n$$

и, соответственно, схему четвертого порядка аппроксимации.



Разностные схемы для линейного уравнения переноса также можно получать, используя метод неопределенных коэффициентов.

Например, на шаблоне  $\{(t^n, x_{m+1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_{m-2}), (t^n, x_{m-3})\}$  можно представить все линейные схемы с неопределенными коэффициентами  $\{\alpha_j^0; j = -2, -1, 0, 1\}$  в следующем виде:

$$u_m^{n+1} = \alpha_{-2}^0 u_{m-2}^n + \alpha_{-1}^0 u_{m-1}^n + \alpha_0^0 u_m^n + \alpha_1^0 u_{m+1}^n.$$

После разложения сеточных функций в ряд Тейлора:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \tau (u_t')_m^n + \frac{\tau^2}{2} (u_{tt}'')_m^n + \frac{\tau^3}{6} (u_{ttt}''')_m^n + O(\tau^4),$$

$$u_{m+1}^n = u_m^n + h (u_x')_m^n + \frac{h^2}{2} (u_{xx}'')_m^n + \frac{h^3}{6} (u_{xxx}''')_m^n + O(h^4),$$

$$u_{m+1}^n = u_m^n + h (u_x')_m^n + \frac{h^2}{2} (u_{xx}'')_m^n + \frac{h^3}{6} (u_{xxx}''')_m^n + O(h^4),$$

$$u_{m-2}^n = u_m^n + 2h (u_x')_m^n + 2h (u_{xx}'')_m^n - \frac{4h^3}{3} (u_{xxx}''')_m^n + O(h^4),$$

принимая во внимание следствия линейного уравнения переноса:

$$u_t' = -\lambda u_x', \quad u_{tt}'' = \lambda^2 u_{xx}'', \quad u_{ttt}''' = -\lambda^3 u_{xxx}''',$$

$$u_{tx}' = -\lambda u_{xx}', \quad u_{ttx}'' = \lambda^2 u_{xxx}'', \quad u_{tttx}''' = -\lambda^3 u_{xxxx}'''$$

и приравнявая коэффициенты в левой и правой частях уравнения (10), можно получить условия аппроксимации:

$$\begin{cases} \lambda_{-2}^0 + \lambda_{-1}^0 + \lambda_0^0 + \lambda_1^0 = 1, \\ 2\lambda_{-2}^0 + \lambda_{-1}^0 - \lambda_1^0 = \sigma, \end{cases} \quad (11)$$

– для схемы первого порядка:

$$\begin{cases} \lambda_{-2}^0 + \lambda_{-1}^0 + \lambda_0^0 + \lambda_1^0 = 1, \\ 2\lambda_{-2}^0 + \lambda_{-1}^0 - \lambda_1^0 = \sigma, \\ 4\lambda_{-2}^0 + \lambda_{-1}^0 + \lambda_1^0 = \sigma^2, \end{cases} \quad (12)$$

– для схемы второго порядка:

$$\begin{cases} \lambda_{-2}^0 + \lambda_{-1}^0 + \lambda_0^0 + \lambda_1^0 = 1, \\ 2\lambda_{-2}^0 + \lambda_{-1}^0 - \lambda_1^0 = \sigma, \\ 4\lambda_{-2}^0 + \lambda_{-1}^0 + \lambda_1^0 = \sigma^2, \\ 8\lambda_{-2}^0 + \lambda_{-1}^0 - \lambda_1^0 = \sigma^3, \end{cases} \quad (13)$$

– для схемы четвертого порядка точности.

Если найти все неопределенные коэффициенты из (13) и подставить их в (10), то можно найти первое дифференциальное приближение схемы:

$$u_t' + \lambda u_x' = \frac{u_{xx}''}{24} \lambda (\lambda^4 \tau^3 + 2\lambda^2 \tau h + \lambda^2 h^2 - 2h^3), \quad (14)$$

т. е. на рассмотренном шаблоне можно построить разностные схемы не выше третьего порядка аппроксимации (полагая  $O(\tau^3 + h^3)$ ).

В случае шаблона общего вида множество разностных схем может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} &= \sum \lambda_j^i(\sigma) u_{m+j}^{n+i}, \\ i &= 1, 0, -1, \dots; j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Условия аппроксимации первого порядка в этом случае можно записать в виде:

$$\sum_{i,j} \alpha_j^i = 1, \quad \sum_{i,j} (j - i\sigma) \cdot \alpha_j^i(\sigma) = -\sigma.$$

Условия аппроксимации второго и более высокого порядков будут иметь вид:

$$\sum (j - i\sigma)^p \cdot \alpha_j^i = (-\sigma)^p; p = 2, 3, \dots$$

Так, для четырехточечного шаблона и двухслойной явной разностной схемы:

$$\{t^{n+1}, x_m; t^n, x_{m-2}; t^n, x_{m-1}; t^n, x_m; t^n, x_{m+1}\}$$

можно представить все семейство линейных разностных схем с неопределенными коэффициентами:

$$L_j^0, (j = -2, -1, 0, 1)$$

в следующем виде:

$$u_m^{n+1} = L_{-2}^0 \cdot u_{m-2}^n + L_{-1}^0 \cdot u_{m-1}^n + L_0^0 \cdot u_m^n + L_1^0 \cdot u_{m+1}^n. \quad (16)$$

Условия аппроксимации первого, второго и третьего порядка на решениях задачи есть линейные относительно неопределенных коэффициентов равенства:

$$\begin{cases} \alpha_{-2}^0 + \alpha_{-1}^0 + \alpha_0^0 + \alpha_1^0 = 1, \\ 2\alpha_{-2}^0 + \alpha_{-1}^0 - \alpha_1^0 = \sigma, \\ 4\alpha_{-2}^0 + \alpha_{-1}^0 + \alpha_1^0 = \sigma^2, \\ 8\alpha_{-2}^0 + \alpha_{-1}^0 - \alpha_1^0 = \sigma^3. \end{cases}$$

Эти условия можно легко получить, если разложить все значения проекции точного решения задачи при подстановке в ряд Тейлора относительно любой точки нашего сеточного шаблона, например,  $(t^n, x_m)$ :

$$\begin{cases} u_m^{n+1} = u_m^n + \tau(u_t)_m^n + \frac{\tau^2}{2}(u_{tt})_m^n + \frac{\tau^3}{6}(u_{ttt})_m^n + O(\tau^4), \\ \alpha_1^0 u_{m+1}^n = \alpha_1^0 \left( u_m^n + h(u_x)_m^n + \frac{h^2}{2}(u_{xx})_m^n + \frac{h^3}{6}(u_{xxx})_m^n + O(h^4) \right), \\ \alpha_0^0 u_m^n = \alpha_0^0 u_m^n, \\ \alpha_{-1}^0 u_{m-1}^n = \alpha_{-1}^0 \left( u_m^n - h(u_x)_m^n + \frac{h^2}{2}(u_{xx})_m^n + \frac{h^3}{6}(u_{xxx})_m^n + O(h^4) \right), \\ \alpha_{-2}^0 u_{m-2}^n = \alpha_{-2}^0 \left( u_m^n - 2h(u_x)_m^n + 2h^2(u_{xx})_m^n - \frac{4h^3}{3}(u_{xxx})_m^n + O(h^4) \right) \end{cases}$$

Также нужно воспользоваться следствиями уравнения:

$$u_t = -\lambda u_t, u_{tt} = \lambda^2 u_{xx}, u_{tx} = -2\lambda u_{xx},$$

$$u_{ttt} = -\lambda^3 u_{xxx}, u_{ttx} = \lambda^2 u_{xxx}, u_{txx} = -\lambda u_{xxx}.$$

С использованием эти выражений можно избавиться от частных производных по времени, выражая через пространственные производные:

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \lambda\tau(u_x)_m^n + \frac{\lambda^2\tau^2}{2}(u_{xx})_m^n - \frac{\lambda^3\tau^3}{6}(u_{xxx})_m^n + O(\tau^4).$$

Приравнявая значения  $u_m^n, (u_x)_m^n, (u_{xx})_m^n, (u_{xxx})_m^n$ , в левой и правой частях получаем условия аппроксимации.

При  $\alpha_{-2}^0 = 0$  выводится разностная схема Лакса-Вендроффа, при  $\alpha_{-2}^0 = \frac{\sigma}{2}(\sigma - 1)$  — схема Бима-Уорминга, при  $\alpha_{-2}^0 = \frac{\sigma}{6}(\sigma^2 - 1)$  — единственная на рассматриваемом шаблоне схема третьего порядка аппроксимации (Рунсана).

### Результаты исследования.

Предлагается рассмотреть случай линейной системы уравнений переноса вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (17)$$

где  $A(n \times m)$  — матрица с постоянными элементами и действительными собственными числами  $\lambda, i = 1, \dots, n$ . Тогда эта матрица представляется в виде:

$$A = \Omega^{-1} \Lambda \Omega,$$

где  $\Lambda$  — диагональная матрица, состоящая из собственных чисел:  $\Lambda = \text{diag} \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} = \text{diag} \{\lambda_i\}; i = 1$ , которые определяются из уравнения:  $\det(A - \lambda E) = 0$ ,

где  $E$  — единичная матрица;  $\Omega$  — матрица, строками которой являются левые собственные векторы матрицы  $A$  с точностью до их длины из системы линейных однородных уравнений

$$\omega_i(A - \lambda_i E) = 0; i = 1, \dots, n.$$

В этом случае (17) записывается в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Omega^{-1} \Lambda \Omega \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

затем эту систему умножим на  $\Omega$ :

$$\Omega \frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda \Omega \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (18)$$

При введении переменных Римана  $w = \Omega u$  последнее уравнение представляется в виде:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (19)$$

откуда видно, что система распадается на отдельные уравнения, точными решениями которых являются бегущие волны:

$$w_i = w_i(x - \lambda_i t); i = 1, \dots, n.$$

Функции  $w_i$  называются инвариантами Римана системы (17);  $\lambda_i$  являются скоростями распространения возмущений в среде. Общее решение рассматриваемой системы дифференциальных уравнений в частных производных есть сумма  $n$  бегущих волн, каждая из которых распространяется со своей характеристической скоростью  $\lambda_i$ :

$$U = \sum_{i=1}^n b_i^2 w_i(x - \lambda_i t).$$

Следует отметить, что если векторы  $b_i$  нормализованы, т. е.  $|b_i| = 1$ , то величины  $w_i$  можно интерпретировать как амплитуды соответствующих бегущих волн.

Можно представить (18) в скалярном виде:

$$\omega_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i \omega_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0, i = 1, \dots, n. \quad (20)$$

Далее в области интегрирования  $\{t \geq 0, 0 \leq x \leq X\}$  вводится разностная сетка

$$\{t^n = n\tau; n = 0, 1, \dots; x_i = (m-1)h; m = 1, \dots, M; X = (M-1)h\}$$

и проводится аппроксимация (20) с помощью конечно-разностных соотношений с учетом наклона характеристик:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \lambda_i$$

(или с учетом знака  $\lambda_i$ ):

$$\omega_i \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} \mp \lambda_i \omega_i \frac{u_{m\pm 1}^n - u_m^n}{h} + \omega_i f = 0, i = 1, \dots, n. \quad (21)$$

Последнее соотношение может быть представлено в матричном виде, если положить:

$$|\Lambda| = \{|\lambda_i|\}, \Lambda^+ = \frac{1}{2}(\Lambda + |\Lambda|), \Lambda^- = \frac{1}{2}(\Lambda - |\Lambda|): \quad (22)$$

$$\Omega(u_m^{n+1} - u_m^n) - \sigma \Lambda^+ \Omega(u_{m-1}^n - u_m^n) + \sigma \Lambda^- \Omega(u_{m+1}^n - u_m^n) + \tau \Omega f = 0.$$

Поскольку матрица  $\Omega$  не вырождена, то полученную разностную схему можно представить в следующем виде:

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \sigma A(u_{m+1/2}^n - u_{m-1/2}^n) - \tau f + \frac{\sigma}{2} \Omega^{-1} |\Lambda| \Omega(u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n), \quad (23)$$

$$u_{m\pm 1/2}^n = \frac{1}{2}(u_{m\pm 1}^n + u_m^n).$$

В этой схеме явно выделено слагаемое:

$$\frac{\sigma}{2} \Omega^{-1} |\Lambda| \Omega(u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n),$$

которое обеспечивает ее устойчивость при выполнении условия КФЛ (Куранта-Фридрихса-Леви):

$$\sigma \leq \frac{1}{\max |\lambda_i|}.$$

Можно сказать, что в исходную систему вводится дополнительный «диссипативный» член, обеспечивающий монотонность полученной схемы первого порядка аппроксимации, но являющийся также нефизичным источником, имеющим разностное происхождение (аппроксимационная вязкость).

Эта разностная схема, при ее обобщении на многомерный случай, принадлежит к классу положительно определенных по Фридрихсу схем, что видно из следующего ее представления:

$$u_m^{n+1} = (E - \sigma \Omega^{-1} |\Lambda| \Omega) u_m^n + \sigma \Omega^{-1} \Lambda^+ \Omega u_{m-1}^n - \sigma \Omega^{-1} \Lambda u_{m-1}^n - \tau f.$$

Рассматриваемый численный метод можно также представить в следующем виде:

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \sigma (\Omega^{-1} \Lambda \Omega) \Delta u + \sigma^\beta (\Omega^{-1} |\Lambda|^\beta \Omega) \Delta^2 u,$$

где

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \sigma (\Omega^{-1} \Lambda \Omega) \Delta u + \sigma^\beta (\Omega^{-1} |\Lambda|^\beta \Omega) \Delta^2 u,$$

Эта схема имеет первый порядок аппроксимации при  $\beta = 1$  и второй — при  $\beta = 2$ .

Можно представить данную схему, как схему с весовым коэффициентом  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ):

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \sigma (\Omega^{-1} \Lambda \Omega) \Delta u + 2\sigma (\Omega^{-1} |\Lambda|^\beta \Omega) \Delta^2 u + (1 - \alpha) \sigma^2 (\Omega^{-1} \Lambda \Omega) \Delta^2 u.$$

При  $\alpha = 1$  получается схема первого порядка аппроксимации, при  $\alpha = 0$  — второго. При  $0 < \alpha < 1$  получается схема, имеющая формально первый порядок, но, при надлежащем выборе значения  $\alpha$ , позволяющая улучшить описание численных решений с большими градиентами за счет уменьшения аппроксимации вязкости [7].

Сеточно-характеристическая схема допускает также консервативный вариант, актуальный, если внутри области интегрирования имеются разрывы (скачки уплотнения, ударные волны). При этом исходная система уравнений для матрицы с постоянными коэффициентами в частных производных должна быть представлена в дивергентной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} (A u) = \frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (24)$$

где  $A = \frac{\partial \Phi}{\partial u}$ ;  $\Phi = Au$ ;  $\Phi = Au$ ; поскольку рассматриваемая система является гиперболической, то:  $A = \Omega^{-1} \Lambda \Omega$ .

В таком случае разностная схема, обладающая свойством консервативности, т. е. обеспечивающая выполнение законов сохранения, может быть представлена в следующем виде:

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \sigma (\Phi_{m+1/2}^n - \Phi_{m-1/2}^n) + \sigma [D_{m+1/2} (u_{m+1}^n - u_m^n) / h - D_{m-1/2} (u_m^n - u_{m-1}^n) / h], \quad (25)$$

где  $\Phi_{m\pm 1/2}^n = \frac{1}{2} (\Phi_{m\pm 1}^n + \Phi_m^n)$ .

Понятно, что в полученной разностной схеме помимо физических потоков через границы ячеек  $x_{m\pm 1/2}$  имеются также и потоки разностного происхождения

$$Du_{xx}^n, \text{ где } D = \frac{h}{2} \Omega^{-1} |\Lambda| \Omega.$$

Однако для соседних ячеек на их общей границе, они равны и противоположны по знаку. Поэтому, внутри области интегрирования схема консервативна, что проверяется их сложением по всей области.

Нужно отметить, что среди схем первого порядка аппроксимации данная схема имеет минимальную аппроксимационную вязкость. В случае трех независимых переменных  $\{t, x, y\}$  консервативная и неконсервативная схемы будут иметь, соответственно, следующий вид:

$$\begin{aligned} u_{ml}^{n+1} = & u_{ml}^n - \frac{\tau}{h_1} (\Phi_{m\pm 1/2,l}^n - \Phi_{m-1/2,l}^n) - \frac{\tau}{h_2} (G_{m,l+1/2}^n - G_{m,l-1/2}^n) - \frac{\tau}{h_1} \cdot \\ & \cdot [D_{m+1/2,l}^1 (u_{m+1,l}^n - u_{ml}^n) / h_1 - D_{m-1/2,l}^1 (u_{ml}^n - u_{m-1,l}^n) / h_1] + \\ & + \frac{\tau}{h_2} [D_{m,l+1/2}^2 (u_{m,l+1}^n - u_{ml}^n) / h_2 - D_{m,l-1/2}^2 (u_{ml}^n - u_{m,l-1}^n) / h_2], \\ u_{m,l}^{n+1} = & u_{m,l}^n + \frac{\tau}{h_1} [\Omega_1^{-1} \Lambda_1^+ \Omega_1 (u_{m-1,l}^n - u_{ml}^n) - \Omega_1^{-1} \Lambda_1^- \Omega_1 (u_{m+1,l}^n - u_{ml}^n)] + \\ & + \frac{\tau}{h_2} [\Omega_2^{-1} \Lambda_2^+ \Omega_2 (u_{m,l-1}^n - u_{ml}^n) - \Omega_2^{-1} \Lambda_2^- \Omega_2 (u_{m,l+1}^n - u_{ml}^n)], \end{aligned} \quad (26)$$

где  $D^k = \frac{h_k}{2} \Omega_k^{-1} |\Lambda_k| \Omega_k$ ;  $k = 1, 2$ ;

матрицы  $\Lambda_k$ ,  $\Lambda_k^\pm$ ,  $\Omega_k$ , как и в одномерном случае, состоят из собственных значений и собственных векторов матриц  $A_k$ ; в области интегрирования  $\{t \geq 0; x \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y\}$  введена разностная сетка

$$\{t^n = n\tau, n = 0, 1, \dots; x_n = (m-1)h_1; m = 1, \dots, M; y_l = (l-1)h_2; l = 1, \dots, L; X = (M-1)h_1, Y = (L-1)h_2\}.$$

Аналогично строятся и разностные схемы для трех переменных.

Следует вернуться к соотношению (18), которое можно представить в скалярном виде:

$$\omega_i \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_i \omega_i \frac{\partial u}{\partial x} = \omega_i \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, i = 1, \dots, n, \quad (27)$$

где каждая компонента вектора:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial u}{\partial x} \quad (28)$$

является уравнением переноса для соответствующей компоненты вектора  $u$ :

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial u_j}{\partial x} = 0; j = 1, \dots, n.$$

Причем для каждого из этих уравнений можно построить уже известную схему:

$$u_{j,m}^{n+1} = \sum_{\mu, \nu} \alpha_\mu^\gamma(\tau, h, \lambda_i) u_{j,m+\mu}^{n+\gamma} = \sum_{\mu, \nu} \alpha_\mu^\gamma(\sigma_i) u_{j,m+\mu}^{n+\gamma}. \quad (29)$$

Далее нужно заменить вектор (28) его разностной аппроксимацией:

$$\omega_i \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \left[ \omega_i u_m^{n+1} - \sum_{\mu, \nu} \alpha_\mu^\nu(\sigma_i) \omega_i u_{m+\mu}^{n+\gamma} \right], i = 1, \dots, n, \quad (30)$$

при этом очевидно, что каждое уравнение в (30) есть  $i$ -ая компонента вектора:

$$\Omega \frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda \Omega \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad (31)$$

т. е.

$$\Omega \frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda \Omega \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} \omega_i u_m^{n+1} - \sum_{\mu, \nu} \alpha_\mu^\nu(\sigma_i) \omega_i u_{m+\mu}^{n+\gamma} \\ \omega_n u_m^{n+1} - \sum_{\mu} \alpha_\mu^\gamma(\sigma_n) \omega_n u_{m+\mu}^{n+\gamma} \end{cases}.$$

При умножении полученного соотношения на матрицу  $\Omega^{-1}$ , получается общий вид разностной схемы для численного решения системы уравнений гиперболического типа (17):

$$u_m^{n+1} = \sum_{\mu, \gamma} \Omega^{-1} B_\mu^\gamma \Omega u_{m+\mu}^{n+\gamma}, \quad (32)$$

где  $B_\mu^\gamma = \text{diag}\{\alpha_\mu^\gamma(\sigma_i)\}$  — диагональная матрица с компонентами, являющимися коэффициентами  $\alpha_\mu^\gamma$ , определяющими конкретный вид схемы.

Например, в случае рассмотрения разностной сеточно-характеристической схемы, получится (22), (23), (24):

$$\text{или, в другом виде, } u_m^{n+1} = (\Omega^{-1} E \Omega) u_m^n + \frac{\sigma}{2} (\Omega^{-1} \Lambda^+ \Omega) (u_{m-1}^n - u_m^n) - \sigma (\Omega^{-1} \Lambda^- \Omega) (u_{m+1}^n - u_m^n); \quad (33)$$

для полученной ранее для скалярного уравнения схемы Лакса-Вендроффа (5):

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{\sigma}{2} (\Phi_{m-1}^n - \Phi_{m+1}^n) + \frac{\sigma^2}{2} (\Omega^{-1} |\Lambda| \Omega) (u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n). \quad (34)$$

Сеточно-характеристические параметрические схемы более высоких порядков аппроксимации могут быть представлены в следующем виде:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{\sigma}{2} (\Phi_{m-1}^n - \Phi_{m+1}^n) + \frac{\sigma^2}{2} (\Omega^{-1} \Lambda^2 \Omega) (u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) + \\ + \frac{\sigma}{2} (\Omega^{-1} G \Lambda \Omega) (u_{m-2}^n - 2u_{m-1}^n + u_m^n - u_{m+1}^n + u_{m+2}^n) + \frac{\sigma}{2} (\Omega^{-1} G |\Lambda| \Omega) (u_{m-2}^n - 4u_{m-1}^n + 6u_m^n - 4u_{m+1}^n + u_{m+2}^n), \quad (35)$$

где  $G = \text{diag}\{g_i(\sigma_i)\}$ ,  $i = 1, \dots, n$  — диагональная параметрическая матрица.

Данная схема также может быть представлена как схема «предиктор-корректор»:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_m^n &= u_m^n + \frac{\sigma}{2}(\Phi_{m-1}^n - \Phi_{m+1}^n) + \frac{\sigma}{2}(\Omega^{-1}|\Lambda|\Omega)(u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n), \\ u_m^{n+1} &= u_m^n + \Omega^{-1}\left(\frac{\sigma^2}{2}\Lambda^2 - \frac{\sigma}{2}|\Lambda|\right)\Omega(u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) + \\ &+ \Omega^{-1}G\Omega[(\tilde{u}_m^n - 2\tilde{u}_m^n + \tilde{u}_{m-1}^n) - (u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n)].\end{aligned}$$

Так, при

$$g_i = \frac{\sigma_i^2 - 1}{6}$$

получается схема 3-го порядка точности (аналог схемы Русанова).

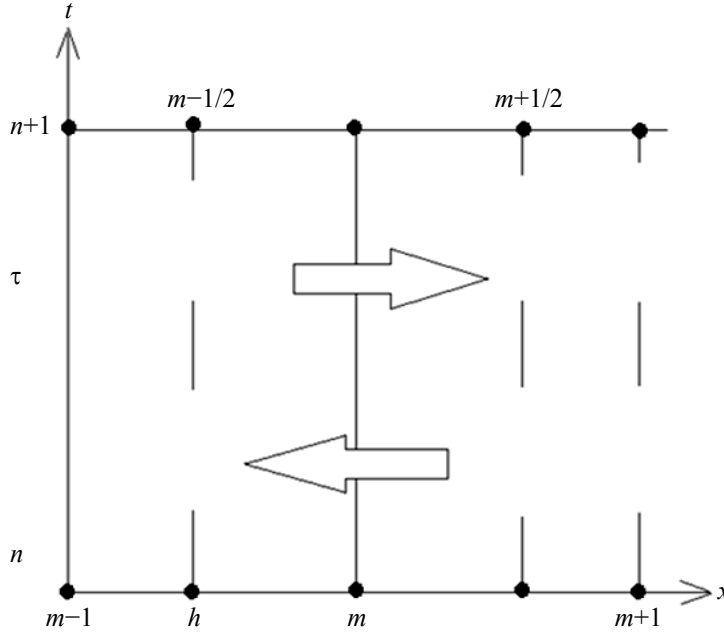


Рис. 2. Схема предиктор-корректор

Сеточно-характеристический метод может быть представлен также как метод потоков, или как интегро-интерполяционный метод, если уравнение (23) будет записано в интегральной форме:

$$\iint_s \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dt \cdot dx = \oint_{\Gamma} (u dx - \Phi dt) = 0, \quad (36)$$

и далее будет аппроксимироваться последний интеграл:

$$\int_{x-1/2}^{x+1/2} u^{n+1} dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi_{m+1/2}^{n+1/2} dt - \int_{x_{m-1/2}}^{x_{m+1/2}} u^n dx - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi_{m-1/2}^{n+1/2} dt = 0.$$

Из последнего равенства следует, если проведется аппроксимация интегралов методом средних, получится:

$$u_m^{n+1}h - \Phi_{m+1/2}^{n+1/2} - u_m^n h - \Phi_{m-1/2}^{n+1/2}\tau = 0 \quad (37)$$

(интегро-интерполяционный метод),

или же:

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \sigma \left( \Phi_{m+1/2}^{n+1/2} - \Phi_{m-1/2}^{n+1/2} \right) \quad (38)$$

(метод потоков).

Стоит отметить, что в зарубежной литературе эти методы получили название методов конечных объемов. Понятно, что (38) представляет собой семейство численных методов, свойства которых зависят от способа вычисления потоков  $\Phi_{m\pm 1/2}^{n+1/2}$ ; например, линейного уравнения переноса (1) потоки могут быть вычислены следующим образом, но с полуцелым верхним индексом

$$\begin{aligned}\Phi_{m+1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [a(u_{m+1/2}^n - u_m^n) - |a|(u_{m+1}^n - u_m^n)] + \frac{1}{2} [a(u_{m+1/2}^{n+1} - u_m^{n+1}) - |a|(u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1})] \right\}, \\ \Phi_{m-1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [a(u_m^n - u_{m-1}^n) - |a|(u_m^n - u_{m-1}^n)] + \frac{1}{2} [a(u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}) - |a|(u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1})] \right\}.\end{aligned} \quad (39)$$

Аналогично в потоковой форме могут быть представлены методы (33), (34) и др.

В двумерном случае сеточно-характеристический метод первого порядка аппроксимации может быть представлен в следующем виде [2]:

$$u_{ml}^{n+1} = u_{ml}^n + b_{1ml}^n + b_{2ml}^n + \tau f_{ml}^n, \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} b_{1ml}^n &= \sigma_1 \left[ \left( \Omega_1^{-1} \Lambda_1^+ \Omega_1 \right)_{ml}^n (u_{m-1,l} - u_{ml})^n - \left( \Omega_1^{-1} \Lambda_1^- \Omega_1 \right)_{ml}^n (u_{m+1,l} - u_{ml})^n \right], \\ b_{2ml}^n &= \sigma_2 \left[ \left( \Omega_2^{-1} \Lambda_2^+ \Omega_2 \right)_{ml}^n (u_{m-1,l} - u_{ml})^n - \left( \Omega_2^{-1} \Lambda_2^- \Omega_2 \right)_{ml}^n (u_{m+1,l} - u_{ml})^n \right], \\ \Lambda_k^+ &= \frac{1}{2} (\Lambda_k + |\Lambda_k|), \quad \Lambda_k^- = \frac{1}{2} (\Lambda_k - |\Lambda_k|), \quad |\Lambda_k| = \{ |\lambda_i^k| \}, \quad \Lambda_k = \{ \lambda_i^k \}, \end{aligned}$$

$i = 1, \dots, N$  — диагональные матрицы;  $\lambda_i^k$  — их собственные числа;  $\Omega_k = \{ \omega_{ij}^k \}$  — неособенные матрицы, строками которых являются линейно-независимые собственные левые векторы  $\omega_i^k$  матриц  $A_k$ .

Для матриц  $A_k = \{ a_{ij}^k \}$ , в случае системы уравнений механики деформируемого твердого тела:  $\lambda_i^k = \tilde{v}_i^k + y_i^k$ ,  $i = 1, \dots, 7$ ,  $k = 1, 2$ .

Используя обычные кинематические соотношения для компонент симметричного тензора скоростей деформаций [8] в фиксированной в пространстве криволинейной ортогональной системе координат  $x_1$  и  $x_2, x_3$ :

$$e_{mn} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{H_n} \frac{\partial v_m}{\partial x_n} + \frac{1}{H_m} \frac{\partial v_n}{\partial x_m} \right) + \frac{1}{H_n} \left[ \delta_{mn} \left( \sum_{s=1}^3 \frac{v_s}{H_s} \frac{\partial H_m}{\partial x_s} \right) - \frac{1}{2H_n} \left( v_m \frac{\partial H_m}{\partial x_n} + \frac{\partial H_m}{\partial x_m} \right) \right],$$

$m, n = 1, 2, 3$ .

Выбирая определяющие соотношения в виде:

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dt} = \frac{d\sigma_{ij}}{dt} + \frac{v_1}{H_1} \frac{d\sigma_{ij}}{dx_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{d\sigma_{ij}}{dx_2} + \frac{v_3}{H_3} \frac{d\sigma_{ij}}{dx_3} = \sum_{m,n=1}^3 q_{ijmn} e_{mn}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

нужно записать замкнутую систему двумерных нестационарных уравнений в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = f.$$

Строго говоря, вместо субстанциональной производной  $d\sigma_{ij}/dt$  следует использовать, так называемую, производную Яуманна для компонент девiatorа тензора напряжений типа:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{d}S}{dt} &= \frac{dS}{dt} - \sum_{k=1}^3 (S_{ik} \omega_{jk} + S_{jk} \omega_{ik}), \\ \omega_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk}, \end{aligned}$$

что обеспечивает нулевую скорость изменения напряженного состояния частицы при ее вращении как жесткого целого.

Здесь символ  $u = \{v_1, v_2, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, T\}$  — вектор искоемых переменных, включающий компоненты  $v_1, v_2$  вектора скорости  $V$  (по осям —  $x_1, x_2$  соответственно), отличные от нуля компоненты  $\sigma_{ij}$  симметричного тензора напряжений и температуру  $T$ ;  $f(t, x_1, x_2, u) = \{f_1, f_2, f_{11}, f_{12}, f_{22}, f_{33}, f_T\}$  — вектор правых частей со следующими компонентами в криволинейной ортогональной системе координат  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\begin{aligned} f_1 &= F_1 + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})}{H_1 H_2} + \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + \frac{(\sigma_{11} - \sigma_{33})}{H_1 H_3} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x_2} \left( \frac{2}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} \right) \right] - \frac{v_2}{H_1 H_2} \left( v_1 \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right), \\ f_2 &= F_2 + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{(\sigma_{22} - \sigma_{33})}{H_2 H_3} + \frac{\partial H_3}{\partial x_2} + \frac{(\sigma_{22} - \sigma_{11})}{H_2 H_1} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x_1} \left( \frac{2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \right) \right] - \frac{v_1}{H_2 H_1} \left( v_2 \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \right), \\ f_{ij} &= \frac{q_{ij11} v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_2} - \frac{(q_{ij12} - q_{ij21})}{2 H_1 H_2} \left( v_1 \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) + \frac{q_{ij22} v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + \frac{q_{ij33}}{H_3} \left( \frac{v_1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} \right) - \frac{\sigma_{ij} \gamma Q}{\rho c}, \\ f_T &= \frac{1}{\rho c} \left[ \frac{\sigma_{11} v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\sigma_{22}}{H_1 H_2} + \left( v_1 \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\sigma_{ij22} v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + \frac{\sigma_{33}}{H_3} \left( \frac{v_1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} \right) + Q \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $F_1, F_2$  — компоненты вектора массовых сил, с  $T$  — внутренняя энергия для термоупругой среды,  $c$  — удельная теплоемкость материала,  $T$  — температура,  $Q$  — объемная плотность источников тепла,  $H_i, i=1, 2, 3$  — коэффициенты Ляме, характеризующие выбираемую ортогональную криволинейную систему координат,  $\rho$  — плотность, определяемая уравнением состояния твердого тела, например:

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = -(3K)^{-1} \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii} - 3\alpha T,$$

$\rho_0$  — плотность материала в недеформируемом состоянии,  $K$  — коэффициент объемного сжатия.

В соответствии с предполагаемой здесь двумерностью деформируемого состояния, перемещения материальных точек в направлении  $x_3$  отсутствуют и  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = v_3 = 0, \partial / \partial x_3 = 0$ . Матрицы  $A_k = \{a_{ij}^k\}, k=1, 2, i=1, \dots, 7$  при этом имеют вид:

$$A_1 = \frac{1}{H_1} \begin{vmatrix} v_1 & 0 & -1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_1 & 0 & -1/\rho & 0 & 0 & 0 \\ -q_{111} & -(q_{112} + q_{121})/2 & v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{121} & -(q_{122} + q_{221})/2 & 0 & v_1 & 0 & 0 & 0 \\ q_{221} & -(q_{221} + q_{222})/2 & 0 & 0 & v_1 & 0 & 0 \\ q_{331} & -(q_{332} + q_{331})/2 & 0 & 0 & 0 & v_1 & 0 \\ -\sigma_{11}/\rho_1 & -\sigma_{11}/\rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 \end{vmatrix},$$

$$A_2 = \frac{1}{H_2} \begin{vmatrix} v_2 & 0 & -1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 & -1/\rho & 0 & 0 & 0 \\ -(q_{112} + q_{121})/2 & -q_{111} & v_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(q_{122} + q_{221})/2 & -q_{121} & 0 & v_2 & 0 & 0 & 0 \\ -(q_{222} + q_{222})/2 & -q_{221} & 0 & 0 & v_2 & 0 & 0 \\ q_{331} & -(q_{332} + q_{331})/2 & 0 & 0 & 0 & v_2 & 0 \\ -\sigma_{12}/\rho_2 & -\sigma_{22}/\rho_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_2 \end{vmatrix}.$$

Для принятой в настоящей работе модели Прандтля — Рейсса компоненты тензора четвертого ранга  $q_{ijkl}$  упругопластического материала имеют вид [8]:

$$q_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} - \frac{\gamma \sigma_{ij} \delta_{ij}}{\rho c} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{jk} \delta_{il}) - \frac{I \mu \mu_{ij} S_{kl}}{k},$$

где  $\lambda, \mu$  — параметры Ляме,  $k$  — предел текучести на сдвиг,  $\delta_{mn}$  — символы Кронекера, девиатор тензора напряжений

$$S_{mn} = \sigma_{mn} - \delta_{mn} \frac{1}{3} \sum_{s=1}^3 \sigma_{ss},$$

$\gamma = (3\lambda + 2\mu) \alpha$  ( $\alpha$  — коэффициент линейного расширения материала при нагреве).

$I$  определяется из условия пластичности Мизеса

$$I = \begin{cases} 0 & \text{при } S = S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2 + S_{12}^2 < 2k^2, \\ 1 & \text{при } S \geq 2k^2. \end{cases}$$

Определяющие соотношения при  $I = 0$  являются обычным «законом Гука» для упругих изотропных материалов. При  $y = 0, Q = 0$  в первые 6 уравнений не входит температура и их можно решать независимо от уравнения энергии:

$$y_1^k = -y_7^k = \left[ a_k + (a_k^2 - 4d_k)^{1/2} \right]^{1/2}, \quad y_2^k = -y_6^k = \left[ a_k - (a_k^2 - 4d_k)^{1/2} \right]^{1/2}, \quad y_3^k = -y_4^k = y_5^k = 0.$$

$$a_k = a_{13}^k a_{31}^k + a_{14}^k a_{41}^k + a_{24}^k a_{42}^k + a_{25}^k a_{52}^k,$$

$$d_k = a_{13}^k a_{24}^k \left( (a_{31}^k a_{42}^k - a_{32}^k a_{41}^k) \right) + a_{14}^k a_{25}^k \left( (a_{41}^k a_{32}^k - a_{42}^k a_{31}^k) \right) + a_{13}^k a_{25}^k \left( (a_{31}^k a_{32}^k - a_{32}^k a_{31}^k) \right),$$

$k = 1, 2,$



$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} \omega_1^1 \\ \omega_2^1 \\ \omega_3^1 \\ \omega_4^1 \\ \omega_5^1 \\ \omega_6^1 \\ \omega_7^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \omega_{12}^1 & \omega_{13}^1 & \omega_{14}^1 & \omega_{15}^1 & 0 & 0 \\ \omega_{21}^1 & 1 & \omega_{23}^1 & \omega_{24}^1 & \omega_{25}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{32}^1 & \omega_{34}^1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{43}^1 & \omega_{44}^1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{53}^1 & \omega_{54}^1 & 0 & 0 & 1 \\ \omega_{61}^1 & 1 & -\omega_{23}^1 & -\omega_{24}^1 & -\omega_{25}^1 & 0 & 0 \\ 1 & \omega_{12}^1 & -\omega_{13}^1 & -\omega_{14}^1 & -\omega_{15}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Omega_2 = \begin{pmatrix} \omega_{11}^2 & 1 & \omega_{13}^2 & \omega_{14}^2 & \omega_{15}^2 & 0 & 0 \\ 1 & \omega_{22}^2 & \omega_{23}^2 & \omega_{24}^2 & \omega_{25}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \omega_{34}^2 & \omega_{35}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{44}^2 & \omega_{45}^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{54}^2 & \omega_{55}^2 & 0 & 1 \\ 1 & \omega_{22}^2 & -\omega_{23}^2 & -\omega_{24}^2 & -\omega_{25}^2 & 0 & 0 \\ \omega_{11}^2 & 1 & -\omega_{13}^2 & -\omega_{14}^2 & -\omega_{15}^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь:

$$\omega_{12}^1 = \frac{(y_1^1 - \alpha_1^1)}{\alpha_2^1}, \quad \omega_{21}^1 = \frac{\alpha_2^1}{(y_2^1)^2 - \alpha_1^1},$$

$$\omega_{11}^1 = \frac{\alpha_2^2}{(y_1^2)^2 - \alpha_1^2}, \quad \omega_{12}^1 = \frac{(y_2^2) - \alpha_1^2}{\alpha_2^2},$$

$$\alpha_i^k = a_{13}^k a_{31}^k + a_{14}^k a_{41}^k, \quad \alpha_2^k = a_{24}^k a_{41}^k + a_{25}^k a_{51}^k, k = 1, 2,$$

$$\omega_{i3}^1 = \frac{a_{13}^k \omega_{i1}^k}{y_i^k}, \quad \omega_{i4}^1 = \frac{a_{14}^k \omega_{i1}^k + a_{24}^k \omega_{i2}^k}{y_i^k},$$

$$\omega_{i5}^1 = \frac{a_{25}^k \omega_{i2}^k}{y_i^k}, i = 1, 2,$$

$$\omega_{i3}^k = \frac{a_{42}^k \beta_{i1}^1 - a_{41}^k \beta_{i2}^1}{a_{32}^k \beta_{i2}^1 - a_{41}^k \beta_{i2}^1}, \quad \omega_{i4}^k = \frac{a_{32}^k \beta_{i1}^1 - a_{31}^k \beta_{i2}^1}{a_{31}^k \beta_{i2}^1 - a_{32}^k \beta_{i4}^1},$$

$$\omega_{i4}^2 = \frac{a_{52}^k \beta_{i1}^2 - a_{51}^k \beta_{i2}^2}{a_{51}^k \beta_{i2}^2 - a_{52}^k \beta_{i4}^2}, \quad \omega_{i5}^k = \frac{a_{42}^k \beta_{i1}^2 - a_{41}^k \beta_{i2}^2}{a_{52}^k \beta_{i1}^2 - a_{51}^k \beta_{i4}^2},$$

$$\beta_{ij}^1 = a_{5j}^1 \omega_{i5}^1 + a_{6j}^1 \omega_{i6}^1 + a_{7j}^1 \omega_{i7}^1,$$

$$\beta_{ij}^2 = a_{3j}^2 \omega_{i3}^2 + a_{6j}^2 \omega_{i6}^2 + a_{7j}^2 \omega_{i7}^2, \quad j = 1, 2, \quad i = 3, 4, 5,$$

$$\Omega_k^{-1} = \{p_{ij}^k\}.$$

В этом случае для обратных матриц:

$$\Omega_k^{-1} = \begin{pmatrix} p_{11}^k & p_{12}^k & 0 & 0 & 0 & p_{12}^k & p_{11}^k \\ p_{21}^k & p_{22}^k & 0 & 0 & 0 & p_{22}^k & p_{21}^k \\ p_{31}^k & p_{32}^k & p_{33}^k & 0 & 0 & -p_{32}^k & -p_{31}^k \\ p_{41}^k & p_{42}^k & p_{43}^k & 0 & 0 & -p_{42}^k & -p_{41}^k \\ p_{51}^k & p_{52}^k & p_{53}^k & 0 & 0 & -p_{52}^k & -p_{51}^k \\ p_{61}^k & p_{62}^k & p_{63}^k & 1 & 0 & -p_{62}^k & -p_{61}^k \\ p_{71}^k & p_{72}^k & p_{73}^k & 0 & 1 & -p_{72}^k & -p_{71}^k \end{pmatrix},$$

где:

$$p_{11}^1 = p_{22}^1 = \frac{(\Delta_2^1)}{2}, \quad p_{12}^1 = -\frac{\omega_{12}^1}{2\Delta_2^1}, \quad p_{21}^1 = -\frac{\omega_{21}^1}{2\Delta_2^1}, \quad \Delta_2^1 = 1 - \omega_{12}^1 \omega_{21}^1.$$

$$p_{31}^1 = \frac{\omega_{25}^1 \omega_{34}^1 - \omega_{14}^1 \omega_{25}^1}{2\Delta_1^1}, \quad p_{32}^1 = \frac{\omega_{14}^1 - \omega_{15}^1 \omega_{34}^1}{2\Delta_1^1},$$

$$p_{33}^1 = \frac{\omega_{15}^1 \omega_{24}^1 - \omega_{14}^1 \omega_{25}^1}{2\Delta_1^1}, \quad p_{41}^1 = \frac{\omega_{23}^1 - \omega_{25}^1 \omega_{33}^1}{2\Delta_1^1},$$

$$\begin{aligned}
 p_{42}^1 &= \frac{\omega_{15}^1 \omega_{33}^1 - \omega_{13}^1}{2\Delta_1^1}, & p_{43}^1 &= \frac{\omega_{25}^1 \omega_{13}^1 - \omega_{15}^1 \omega_{23}^1}{\Delta_1^1}, \\
 p_{51}^1 &= \frac{\omega_{24}^1 \omega_{33}^1 - \omega_{23}^1 \omega_{34}^1}{2\Delta_1^1}, & p_{52}^1 &= \frac{\omega_{13}^1 \omega_{24}^1 - \omega_{14}^1 \omega_{33}^1}{2\Delta_1^1}, \\
 p_{53}^1 &= \frac{\omega_{14}^1 \omega_{23}^1 - \omega_{13}^1 \omega_{24}^1}{\Delta_1^1}, \\
 p_{i1}^1 &= \left[ \omega_{i-2,3}^1 (\omega_{24}^1 - \omega_{25}^1 \omega_{34}^1) - \omega_{i-2,4}^1 (\omega_{23}^1 - \omega_{25}^1 \omega_{33}^1) \right] (2\Delta_1^1)^{-1}, \\
 p_{i2}^1 &= \left[ \omega_{i-2,4}^1 (\omega_{13}^1 - \omega_{15}^1 \omega_{33}^1) - \omega_{i-2,3}^1 (\omega_{14}^1 - \omega_{15}^1 \omega_{34}^1) \right] (2\Delta_1^1)^{-1}, \\
 p_{i3}^1 &= \left[ \omega_{i-2,3}^1 (\omega_{14}^1 \omega_{25}^1 - \omega_{15}^1 \omega_{24}^1) - \omega_{i-2,4}^1 (\omega_{13}^1 \omega_{25}^1 - \omega_{15}^1 \omega_{23}^1) \right] (\Delta_1^1)^{-1}, \\
 \Delta_1^1 &= \omega_{15}^1 (\omega_{24}^1 \omega_{33}^1 - \omega_{23}^1 \omega_{34}^1) + \omega_{25}^1 (\omega_{13}^1 \omega_{34}^1 - \omega_{14}^1 \omega_{33}^1) + (\omega_{14}^1 \omega_{23}^1 - \omega_{13}^1 \omega_{24}^1).
 \end{aligned}$$

И, аналогично:

$$\begin{aligned}
 p_{43}^2 &= \frac{\omega_{23}^2 \omega_{23}^2 - \omega_{13}^2 \omega_{25}^2}{\Delta_1^2}, & p_{54}^1 &= \frac{\omega_{23}^2 \omega_{34}^2 - \omega_{24}^2}{2\Delta_1^2}, \\
 p_{52}^2 &= \frac{\omega_{14}^2 - \omega_{13}^2 \omega_{34}^2}{2\Delta_1^2}, & p_{53}^1 &= \frac{\omega_{13}^2 \omega_{24}^2 - \omega_{23}^2 \omega_{14}^2}{\Delta_1^2}, \\
 p_{i1}^2 &= \left[ \omega_{i-2,3}^2 (\omega_{24}^2 - \omega_{25}^2 \omega_{34}^2) - \omega_{i-2,4}^2 (\omega_{25}^2 - \omega_{23}^2 \omega_{35}^2) \right] (2\Delta_1^2)^{-1}, \\
 p_{i2}^2 &= \left[ \omega_{i-2,4}^2 (\omega_{15}^2 - \omega_{13}^2 \omega_{35}^2) - \omega_{i-2,5}^2 (\omega_{14}^2 - \omega_{13}^2 \omega_{34}^2) \right] (2\Delta_1^2)^{-1}, \\
 p_{i3}^1 &= \left[ \omega_{i-2,4}^2 (\omega_{13}^2 \omega_{25}^2 - \omega_{15}^2 \omega_{23}^2) - \omega_{i-2,5}^2 (\omega_{14}^2 \omega_{23}^2 - \omega_{13}^2 \omega_{24}^2) \right] (\Delta_1^2)^{-1}, \\
 & i = 6, 7, \\
 \Delta_1^2 &= \omega_{13}^2 (\omega_{24}^2 \omega_{35}^2 - \omega_{25}^2 \omega_{34}^2) + \omega_{23}^2 (\omega_{15}^2 \omega_{34}^2 - \omega_{14}^2 \omega_{35}^2) + (\omega_{14}^2 \omega_{25}^2 - \omega_{15}^2 \omega_{24}^2).
 \end{aligned}$$

При построении расчетных формул на границах прямоугольной (в координатах  $t, x_1, x_2$ ) области интегрирования ограничимся рассмотрением только верхней ( $x_2 = 0$ ) и нижней ( $x_2 = 1$ ) границ, имея в виду, что остальные границы ( $x_1 = 0, x_{1*}$ ) часто являются плоскостью (или осью) симметрии или периодичности решения либо выбираются таким образом, чтобы за рассматриваемое время  $t \leq t_1$  возмущения не достигали этих границ. Обобщение на случай более сложных условий на границах не представляет принципиальных трудностей и аналогично рассматриваемому ниже.

При умножении скалярно на собственные векторы  $(\omega^2)_{ml}^n$  получатся соотношения:

$$\begin{aligned}
 (\omega_i^2)_{ml}^n u_{ml}^{n+1} &= B_i^2 = (\omega_i^2)_{ml}^n (u_{ml}^n + \tau f_{ml}^n) \pm \\
 &\pm \frac{\tau}{h_2} (\lambda_i^2)_{ml}^n (\omega_i^2)_{ml}^n (u_{m,l \mp 1}^n + u_{ml}^n), i = 1, \dots, 7,
 \end{aligned}$$

аппроксимирующие с первым порядком точности условия совместности вдоль линий пересечения характеристических поверхностей системы и координатной плоскости  $x_1 = x_{1m}$  (с уравнениями  $dx_2 = \lambda^2_i dt$ ):

$$\omega_i^2 u_i + \lambda_i^2 \omega_{x_2}^2 u_{x_2} = \omega_i^2 (f - A_1 u_{x_2}), i = 1, \dots, 7.$$

Как известно, число граничных условий для гиперболической системы уравнений типа определяется числом отрицательных (положительных) собственных значений матрицы  $Au$  на верхней (соответственно, нижней) границе области интегрирования. В рассматриваемых ниже задачах на верхней границе  $x_1 = 0$  имеет место  $\lambda_7^2 < \lambda_6^2 < 0$ , на нижней границе  $x_2 = 0$  — соответственно,  $\lambda_7^2 > \lambda_1^2 > 0$  и; следовательно, на каждой из этих границ требуется постановка двух граничных условий, которые записываются в виде:

$$\begin{aligned}
 \Phi_i(t, x_1, u_1, \dots, u_7) &= 0, i = 1, 2 \text{ при } x_2 = 0, \\
 \Phi_i(t, x_1, u_1, \dots, u_7) &= 0, i = 1, 6, 7 \text{ при } x_2 = 1,
 \end{aligned}$$

причем необходимо, чтобы  $\det \Omega_- \neq 0, \det \Omega_+ \neq 0$ ,

где, соответственно,  $\Omega_- = \|\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 \bar{\omega}_3 \dots \bar{\omega}_7\|^T$ ,  $\Omega_+ = \|\omega_1 \dots \omega_5 \bar{\omega}_6 \bar{\omega}_7\|^T$ .

Здесь  $\bar{\omega}_i = \{\partial \phi_i / \partial u_1, \dots, \partial \phi_i / \partial u_7\}$ ,  $i = 1, 2, 6, 7$ , а  $i = 1, \dots, 7$  — собственные векторы матрицы  $A_2$ . Для рассматриваемых ниже задач граничные условия выбирались полулинейными и после их аппроксимации имели вид:

$$\phi_i = \bar{\omega}_i(t^{n+1}, x_{1m}) u_{ml}^{n+1} - g_i(t^{n+1}, x_{1m}) = 0, \\ i = 1, 2 \text{ при } x_2 = 0, i = 6, 7 \text{ при } x_2 = 1.$$

Возможная схема расщепления для случая двух переменных:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} = 0:$$

$$\beta_1 \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \beta_1^{-1} A \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \beta_2 \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \beta_2^{-1} B \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0,$$

$$\beta_1 + \beta_2 = 1, \beta \geq 0, \beta_2 \geq 0; u_{ml}^{n+1} = \beta_1 u_{1ml}^{n+1} + \beta_2 u_{2ml}^{n+1},$$

где  $u_{1ml}^{n+1}$  и  $u_{2ml}^{n+1}$  находятся из численного решения двух одномерных систем уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \beta_1^{-1} A \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ и } \frac{\partial u}{\partial t} + \beta_2^{-1} B \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

В случае пространственной динамической задачи:  $\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 A_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$

матрицы имеют вид:  $r_{ijkl} = \frac{1}{2}(q_{ijkl} + q_{jikl})$ ,  $l \neq k$ ;

$u = \{v_1, v_2, v_3, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{33}, U\}$  — вектор-столбец искомых величин.

$$A_1 = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 & -1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_1 & 0 & 0 & -1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_1 & 0 & 0 & -1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q_{1111} & -r_{1112} & 0 & v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q_{1211} & -r_{1212} & 0 & 0 & v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q_{1311} & -r_{2212} & 0 & 0 & 0 & v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q_{2211} & -r_{1312} & 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 & 0 & 0 & 0 \\ -q_{2311} & -r_{3212} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 & 0 & 0 \\ -q_{3311} & -r_{3312} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 & 0 \\ -\sigma_{11}/\rho & -\sigma_{12}/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} v_2 & 0 & 0 & -1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 & 0 & -1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_2 & 0 & 0 & -1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_{1112} & -q_{1122} & 0 & v_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_{1212} & -q_{1232} & 0 & 0 & v_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_{1312} & -q_{1322} & 0 & 0 & 0 & v_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_{1222} & -q_{2222} & 0 & 0 & 0 & 0 & v_2 & 0 & 0 & 0 \\ -r_{2312} & -q_{2322} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_2 & 0 & 0 \\ -r_{3312} & -q_{3322} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_2 & 0 \\ -\sigma_{12}/\rho & -\sigma_{22}/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_2 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} v_3 & 0 & 0 & -1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_3 & 0 & 0 & -1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 & 0 & 0 & -1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_{1113} & -r_{1123} & -q_{1133} & v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_{1213} & -r_{1223} & -q_{1233} & 0 & v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_{1313} & -r_{1323} & -q_{1333} & 0 & 0 & v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_{2213} & -r_{2223} & -q_{2233} & 0 & 0 & 0 & v_3 & 0 & 0 & 0 \\ -r_{2313} & -r_{2323} & -q_{2333} & 0 & 0 & 0 & 0 & v_3 & 0 & 0 \\ -r_{3313} & -r_{3323} & -q_{3333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_3 & 0 \\ -\sigma_{13}/\rho & -\sigma_{23}/\rho & -\sigma_{33}/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_3 \end{pmatrix}.$$

Одна из возможных сеточно-характеристических схем для численного решения приведенной системы может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned}
 u_{mlp}^{n+1} &= u_{mlp}^n - \sigma_1 \Omega_1^{-1} \Lambda_1 \Delta_m u + \sigma_1^\gamma \Omega_1 |\Lambda_1|^\gamma \Omega_1 \Delta_m^2 u - \sigma_2 \Omega_2^{-1} \Lambda_1 \Delta_l u + \\
 &+ \sigma_2^\gamma \Omega_2 |\Lambda_2|^\gamma \Omega_2 \Delta_l^2 u - \sigma_3 \Omega_3^{-1} \Lambda_1 \Delta_p u + \sigma_3^\gamma \Omega_3 |\Lambda_3|^\gamma \Omega_3 \Delta_p^2 u, \\
 u_m &= 0,5(u_{m+1,l,p}^n - u_{m-1,l,p}^n), \\
 u_l &= 0,5(u_{m,l,p+1}^n - u_{m,l,p-1}^n), \\
 u_m^2 &= 0,5(u_{m+1,l,p}^n - 2u_{mlp}^n + u_{m-1,l,p}^n), \\
 u_l^2 &= 0,5(u_{m,l,p+1}^n - 2u_{mlp}^n + u_{m,l,p-1}^n), \\
 u_p^2 &= 0,5(u_{m,l,p+1}^n - 2u_{mlp}^n + u_{m,l,p-1}^n), \\
 h_k &(\tau h_k \text{ — шаги по времени и трем координатам; } k=1, 2, 3), \text{ или} \\
 u_{mlp}^{n+1} &= u_{mlp}^n + \sigma_1 \left[ (\Omega_1^{-1} \Lambda_1^+ \Delta_m)_{mlp}^- \Delta_m^- u - (\Omega_1^{-1} \Lambda_1^+ \Omega_1)_{mlp}^+ \Delta_m^+ u \right]^n + \\
 &+ \sigma_2 \left[ (\Omega_2^{-1} \Lambda_2^+ \Delta_m)_{mlp}^- \Delta_m^- u - (\Omega_2^{-1} \Lambda_2^+ \Omega_2)_{mlp}^+ \Delta_m^+ u \right]^n + \sigma_3 \left[ (\Omega_3^{-1} \Lambda_3^+ \Delta_m)_{mlp}^- \Delta_m^- u - (\Omega_3^{-1} \Lambda_3^+ \Omega_3)_{mlp}^+ \Delta_m^+ u \right]^n, \\
 \Delta_l^\pm &= u_{m,l\pm 1,p} - u_{mlp}, \\
 \Delta_p^\pm &= u_{m,l,p\pm 1} - u_{mlp}.
 \end{aligned}$$

Схема имеет первый порядок точности при  $\gamma = 1$  (что и было реализовано в работе), второй — при  $\gamma = 2$ ; здесь явно выделен «демпфирующий» (вязкий) член, придающий схеме устойчивость и положительную (по Фридрихсу [5]) определенность (или монотонность — в одномерном случае); при реализации нет необходимости находить матрицы  $\Lambda_k^\pm$ ; схему несложно гибридизировать (т. е., например, полагать  $\gamma = 1$  в областях с большими градиентами параметров течения и  $\gamma = 2$  — в «гладких» областях). Преимущество записи сеточно-характеристической схемы состоит в уменьшении количества арифметических действий.

**Обсуждение и заключения.** Построение численного алгоритма в граничных точках подробно описано в [8] для двумерного случая. При численном решении трехмерной задачи построение производится аналогично; так, например, в случае верхней и нижней границ, после скалярного умножения схемы на собственные векторы  $(\omega^3)_i^n$  получим соотношения:

$$\begin{aligned}
 &+ \sigma_2 \left[ (\Omega_2^{-1} \Lambda_2^+ \Omega_2)_{mlp}^- \Delta_l^- u - (\Omega_2^{-1} \Lambda_2^+ \Omega_2)_{mlp}^+ \Delta_l^+ u \right]^n \pm \sigma_3 (\lambda_i^3)_{mlp}^n (\omega_i^3)_{mlp}^n \Delta_l^\pm u; \quad i = 1, \dots, I, \\
 &+ \sigma_2 \left[ (\Omega_2^{-1} \Lambda_2^+ \Omega_2)_{mlp}^- \Delta_l^- u - (\Omega_2^{-1} \Lambda_2^+ \Omega_2)_{mlp}^+ \Delta_l^+ u \right]^n \pm \sigma_3 (\lambda_i^3)_{mlp}^n (\omega_i^3)_{mlp}^n \Delta_l^\pm u; \quad i = 1, \dots, I,
 \end{aligned}$$

аппроксимирующие с первым порядком точности условия совместности

$$\omega_i^3 u_i + \lambda_i^3 \omega_i^3 u'_{\eta_3} = -\omega_i^3 (A_1 u'_{\eta_1} + A_2 u'_{\eta_2}).$$

В случае одномерной системы уравнений газодинамики:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

вектор искомых функций и матрица  $A$  имеют следующий вид [2]:

$$u = \begin{Bmatrix} \rho \\ u \\ \varepsilon \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{Bmatrix} u & p & 0 \\ \rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial s} & u & \rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \\ 0 & p/\rho & u \end{Bmatrix},$$

где  $\rho$  — плотность,  $u$  — скорость,  $\varepsilon$  — плотность внутренней энергии газа.

Собственно, значения матрицы имеют вид:

$$\lambda_1 = u + c; \quad \lambda_2 = u; \quad \lambda_3 = u - c,$$

где  $c$  — скорость звука в газе; матрицы из собственных векторов, собственно, будут:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial \rho} & \rho c & \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \\ p & 0 & -\rho^2 \\ p & -\rho e & \frac{\partial p}{\partial \rho} \end{Bmatrix}.$$

### Список литературы

1. Рождественский, Б. Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. — Москва : Наука, 1968. — 546 с.
2. Магомедов, К. М. Сеточно-характеристические методы / К. М. Магомедов, А. С. Холодов / 2-е изд. — Москва : Юрайт, 2017 г., — 312 с.
3. Куликовский, А. Г. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений / А. Г. Куликовский, Н. А. Погорелов, А. Ю. Семенов. — Москва : Физматлит, 2012 г. — 656 с.
4. Favorskaya, A. V. Innovation in Wavt Processes Modeling and Decision Making Grid-Charakteristic Method and Applications / A. V. Favorskaya, I. B. Petrov // Springer. — 2018. — 270 p.
5. Fridrichs, K. O. Symmetrics hyperbolic linear differential equation / K. O. Fridrichs // Communications on Pure and Applied Mathematics — 1954. — Vol. 7, no. 2. — P. 345—392.
6. Годунов, С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики / С. К. Годунов // Математический сборник. — 1959. — Т. 47 (89), вып. 3. — С. 271–306.
7. Петров, И. Б. Об использовании гибридизированных сеточно-характеристических схем для численного решения трехмерных задач динамики деформируемого твердого тела / И. Б. Петров, А. Г. Тарасов, А. С. Холодов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1990. — Т. 30, № 8. — С. 1237–1244.
8. Петров, И. Б. Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом / И. Б. Петров, А. С. Холодов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1990. — Т. 30, № 8. — С. 1237–1244.

Поступила в редакцию 02.02.2023.

Поступила после рецензирования 01.03.2023.

Принята к публикации 02.03.2023.

*Об авторах:*

**Петров Игорь Борисович**, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (РФ, 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9), [Math-Net.ru](http://Math-Net.ru), [MathsciNet](http://MathsciNet), [eLibrary.ru](http://eLibrary.ru), [ORCID](http://ORCID), [ResearchGate](http://ResearchGate), [petrov@mipt.ru](mailto:petrov@mipt.ru)

**Петров Дмитрий Игоревич**, кандидат физико-математических наук, лаборатория прикладной вычислительной геофизики МФТИ, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (РФ, 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9), [Math-Net.ru](http://Math-Net.ru), [eLibrary.ru](http://eLibrary.ru)

*Конфликт интересов:*

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

*Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*