

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 519.6

Обзорная статья

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-7-18>


Разрывный метод Галеркина и его реализация в программном комплексе RAMEG3D

В.Ф. Тишкин , М.Е. Ладонкина

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук, Российская Федерация,
г. Москва, Миусская пл., 4

✉ v.f.tishkin@mail.ru

Аннотация

В настоящее время метод Галеркина с разрывными базисными функциями (РМГ) или *Discontinuous Galerkin Method* (DGM) получил широкое распространение для решения сложных разномасштабных задач математической физики, имеющих важное прикладное значение. При его реализации важным является вопрос о выборе дискретной аппроксимации потоков для вязких членов уравнения Навье-Стокса.

Для успешного применения РМГ на трехмерных неструктурированных сетках необходимо сосредоточить внимание на построении лимитирующих функций, на выборе наилучших дискретных аппроксимаций диффузионных потоков и на применении неявных и итерационных методов решения полученных дифференциально-разностных уравнений.

Исследуются численные схемы первого порядка и схемы РМГ второго порядка с численными потоками Годунова, HLLC, Русанова-Лакса-Фридрихса и гибридными потоками. Для методов высокого порядка точности необходимо использовать схемы высокого порядка по времени.

В работе используется схема Рунге-Кутты третьего порядка. При решении уравнения Навье-Стокса разрывным методом Галеркина уравнения записываются в виде системы уравнений первого порядка.

Ключевые слова: разрывный метод Галеркина, уравнения Навье-Стокса, гибридные потоки, схема Рунге-Кутты, шаблон схемы.

Для цитирования. Тишкин В.Ф., Ладонкина М.Е. Разрывный метод Галеркина и его реализация в программном комплексе RAMEG3D. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):7–18. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-7-18>

Review article

The Discontinuous Galerkin Method and its Implementation in the RAMEG3D Software Package

Vladimir F Tishkin , Marina E Ladonkina

Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, 4, Miusskaya Sq., Moscow, Russian Federation

✉ v.f.tishkin@mail.ru

Abstract

Currently, the Discontinuous Galerkin Method (DGM) is widely used to solve complex multi-scale problems of mathematical physics that have important applied significance. When implementing it, the question of choosing a discrete approximation of flows for viscous terms of the Navier-Stokes equation is important.

It is necessary to focus on the construction of limiting functions, on the selection of the best discrete approximations of diffusion flows, and on the use of implicit and iterative methods for solving the obtained differential-difference equations for the successful application of DGM on three-dimensional unstructured grids.

First-order numerical schemes and second-order DGM schemes with Godunov, HLLC, Rusanov-Lax-Friedrichs numerical flows and hybrid flows are investigated. For high-order precision methods, it is necessary to use high-order time schemes.

The Runge-Kutta scheme of the third order is used in the work. The equations are written as a system of first-order equations, when solving the Navier-Stokes equation by the discontinuous Galerkin method.

Keywords: Discontinuous Galerkin Method (DGM), Navier-Stokes equations, hybrid flows, Runge-Kutta scheme, scheme template.

For citation. Tishkin VF, Ladonkina ME. The discontinuous Galerkin method and its implementation in the RAMEG3D software package. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):7–18. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-7-18>

Для получения качественного решения задач математической физики, имеющих важное прикладное значение, одним из основных требований является использование численных методов высокой точности. Это особенно актуально для решения сложных разномасштабных задач, в которых получить решение только измельчением сетки и методами первого порядка точности недостаточно.

Несколько последних десятилетий особенно активно развивается метод Галеркина с разрывными базисными функциями (РМГ) или *Discontinuous Galerkin Method* (DGM), первое упоминание о котором можно найти в [1]. Данный метод относится к численным методам повышенного порядка аппроксимации решения, т. к. обеспечивает заданный порядок точности, причем на неструктурированных сетках, может использоваться для сеток с произвольной формой ячеек, имеет компактный шаблон, состоящий из расчетной ячейки и одного слоя соседних ячеек. Существует два подхода для повышения точности получаемого решения. Один из них — измельчение сетки в областях существующих особенностей решения, второй подход — повышение порядка точности схемы. Применение разрывного метода Галеркина позволяет использовать сразу оба подхода: и повышение порядка точности метода за счет повышения порядка используемых полиномов, и локальное измельчение сетки (так называемая *hp*-адаптация) [2, 3].

Одним из важных вопросов при реализации метода является выбор сетки, на которой ищется решение. Несомненное преимущество РМГ — в возможности его применения на сетках произвольной структуры. В настоящее время разрывный метод Галеркина хорошо разработан как для структурированных [4], так и для неструктурированных [5] сеток. Существуют удачные программные реализации DGM для решения трехмерных задач на неструктурированных сетках, содержащих элементы только одного типа (тетраэдральные [5–8] или гексаэдральные [9]), а также для сеток произвольной структуры [10].

Очевидным недостатком метода является его чрезвычайно высокая вычислительная стоимость, но это покрывается компактным шаблоном и созданием эффективных параллельных программных комплексов. DGM обладает существенной вычислительной сложностью, поэтому встает вопрос о максимально эффективном использовании всех возможностей вычислительной техники. В мировых исследовательских центрах, занимающихся этой проблемой, ведутся работы по распараллеливанию реализаций РМГ на супер ЭВМ [11–13]. В [6] при решении уравнений Навье-Стокса РМГ использован новый сеточно-операторный подход к программированию задач математической физики, позволяющий компактно записывать и эффективно применять математические формулы, единообразно реализовывать подход на разных типах сеток и для различных вычислительных архитектур, в том числе и для графических ускорителей CUDA [14, 15].

Наряду с множеством преимуществ применения разрывного метода Галеркина существуют и некоторые сложности его реализации. Во-первых, для обеспечения монотонности решения, полученного данным методом, необходимо вводить ограничители наклона или лимитеры, в особенности в том случае, если решение содержит сильные разрывы. Наиболее широко используемым является лимитер Кокбурна [16]. Идея данного лимитера легко реализуется в многомерном случае на сетках произвольной структуры. Однако данный лимитер, как и все TVD лимитеры, снижает точность получаемого решения. В последнее время активно развиваются различные подходы к решению этой проблемы. Один из подходов к созданию лимитера повышенного порядка точности предложен в работах Кривоносовой [17]. Но данный лимитер хорошо работает только на структурированных сетках. Другие подходы к созданию лимитеров повышенного порядка точности изложены в [18–25].

Также важным при реализации DGM является вопрос о выборе дискретной аппроксимации потоков для вязких членов уравнения Навье-Стокса. Существует несколько видов таких аппроксимаций, наиболее часто используемых в реальных расчетах [26, 27], которые были исследованы в [28]. Тем не менее, вопрос оптимального выбора таких аппроксимаций остается открытым.

Как известно, при повышении порядка точности схемы возникает жесткое ограничение на шаг по времени. Первоначально при расчетах DGM интегрирование по времени проводилось явными многошаговыми схемами Рунге-Кутты высокого порядка [16, 29, 30]. Но наиболее эффективный подход заключается в использовании неявных методов интегрирования по времени с целью ослабления ограничения на шаг по времени [31–36].

В настоящий момент известны программные реализации РМГ неявным методом для моделирования несжимаемых течений [37] и для решения уравнений Навье-Стокса [35].

Еще один момент, с которым пришлось столкнуться авторам при реализации РМГ на сетках с произвольной формой ячеек, — это необходимость осуществлять процедуру интегрирования [16] на ячейке произвольной

формы. Для этого делается преобразование исходной ячейки неправильной формы на референтную ячейку, для которой известно положение квадратурных точек [61]. При построении такого преобразования для случая тетраэдра, гексаэдра и треугольной призмы достаточно использовать полилинейное преобразование, которое переводит вершины ячейки в вершины исходной ячейки. Однако для четырехугольной пирамиды данный подход не дает желаемого результата, поскольку при его использовании получаем криволинейные боковые грани и ребра пирамиды, что не позволит ее правильно стыковать с тетраэдральными ячейками. Ниже в данной работе построено преобразование, которое позволяет избежать этого недостатка.

Для успешной реализации РМГ на трехмерных неструктурированных сетках необходимо сосредоточить внимание на нескольких моментах:

- на построении лимитирующих функций;
- на выборе наилучших дискретных аппроксимаций диффузионных потоков;
- на применении неявных и итерационных методов решения полученных дифференциально-разностных уравнений.

Для получения точного численного решения задач математической физики важно использовать качественную расчетную сетку и надежный высокоточный численный метод, а также быть уверенным, что выбранный метод полностью соответствует решаемой задаче. Например, известно, что при использовании разностных схем Годуновского типа в некоторых задачах, содержащих ударные волны, возникает развитие неустойчивости типа «карбункул» [38, 39]. Условия появления данного вида неустойчивости — это высокие числа Рейнольдса и низко диссипативный численный поток. В работе [40] замечено, что при таких условиях могут возникать и другие типы неустойчивостей. Одной из установленных причин возникновения данного типа неустойчивости являются используемые численные потоки [41–48]. Наиболее подвержены возникновению этой неустойчивости потоки, обладающие низкой диссипацией, а использование высоко диссипативных потоков позволяют избежать возникновения «карбункул»-неустойчивости. По этой причине было предпринято несколько попыток разработки новых методов, подавляющих развитие неустойчивостей, обеспечивающих низкую диссипацию [49–52]. В работе [53] проведено исследование подверженности ударно-волновой неустойчивости конкретных численных потоков, реализованных в программном комплексе PAMEG3D [54]. Данный тип неустойчивости проверяется на тестовых задачах из перечня Керка [40] в постановках, приведенных в работе [55].

В настоящей работе исследуются численные схемы первого порядка и схемы РМГ второго порядка с численными потоками Годунова [56], HLLC [57], Русанова-Лакса-Фридрихса [58, 59] и гибридными потоками [60], используемые в расчетах. Также приводятся основные формулы разработанного авторами гибридного потока.

1. Основные формулы разрывного метода Галеркина. Рассмотрим уравнения Навье-Стокса, записанные в виде системы уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \partial_t U + \nabla \cdot F(U) - \nabla \cdot G(U, \tau) &= 0, \\ \tau &= \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \hat{E}(\operatorname{div} v) + 2\mu S(v), \end{aligned} \quad (1)$$

$$S(v) = \frac{1}{2} \left(\nabla v + (\nabla v)^* \right),$$

$$q(U) = k \nabla T.$$

$$U = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E),$$

$$F(U) = (F_x(U), F_y(U), F_z(U)), \quad (2)$$

$$G(U, \tau) = (G_x(U, \tau), G_y(U, \tau), G_z(U, \tau)).$$

$$F_x(U) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uw, (E + p)u),$$

$$F_y(U) = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, \rho vw, (E + p)v),$$

$$F_z(U) = (\rho w, \rho vw, \rho w^2 + p, \rho wz, (E + p)w), \quad (3)$$

$$G_x(U, \tau) = (0, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + q_x),$$

$$G_y(U, \tau) = (0, \tau_{yx}, \tau_{yy}, \tau_{yz}, u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + q_y),$$

$$G_z(U, \tau) = (0, \tau_{zx}, \tau_{zy}, \tau_{zz}, u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} + q_z),$$

где ρ — плотность вещества; u, v, w — компоненты скорости v , ε — удельная внутренняя энергии и

$E = \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right)$ — полная энергия на единицу объема, p — давление вещества.

Систему уравнений (1) замыкает уравнение состояния, в данном случае уравнение состояния идеального газа $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ с показателем адиабаты γ .

Для каждой конкретной задачи система (1) дополняется подходящими начально-краевыми условиями.

Покроем область Ω , на которой ищется решение разрывным методом Галеркина, сеткой T_h . На каждом элементе T_j приближенное решение системы уравнений (1) будем искать в виде полиномов $P(x)$ степени N с зависящими от времени коэффициентами [1]:

$$\begin{aligned} U_h(x, t) &= \sum_{k=0}^{st} U_k(t) \phi_k(x), \\ q_{ih}(x, t) &= \sum_{k=0}^{st} q_{ik}(t) \phi_k(x), \\ \tau_{ijh}(x, t) &= \sum_{k=0}^{st} \tau_{ijk}(t) \phi_k(x), \quad i, j = x, y, z, \end{aligned} \quad (4)$$

где $st = 0, C_{N+3}^3 - 1$ — размерность пространства полиномов, а $\phi_k(x)$ — базисная функция.

Для методов высокого порядка точности необходимо использовать схемы высокого порядка по времени. В данной работе используется схема Рунге-Кутты третьего порядка [1].

При решении уравнения Навье-Стокса разрывным методом Галеркина уравнения записываются в виде системы уравнений первого порядка и решение происходит в два этапа. На первом этапе вычисляются компоненты градиента температуры и тензора вязких напряжений. Их аппроксимация, как и аппроксимация решения, в пределах ячейки сетки при реализации модального подхода находится в виде полиномов степени p с зависящими от времени коэффициентами. На границе элемента потоковые значения величин определяются по некоторому правилу от значений внутри элемента и от значений в соседней к данному элементу ячейке.

На втором этапе определяются компоненты вектора консервативных переменных. При этом конвективные потоки могут быть рассчитаны при помощи различных вариантов точного или приближенного решения задачи Римана. Диффузионные потоки на границе элемента также могут быть рассчитаны различными способами, подробный анализ которых проведен в [63]. Для вычисления интегралов используются квадратурные формулы нужного порядка. Данный двухэтапный подход позволяет вычислять градиенты с тем же порядком точности, что и консервативные переменные, сохраняя компактность шаблона схемы.

2. Построение гибридного потока. В работе [60] построен гибридный численный поток, основная идея которого была предложена в работе [52]. Данный поток представляет собой линейную комбинацию одного из потоков (HLLC либо потока Годунова) и устойчивого потока Русанова-Лакса-Фридрихса (RLF).

Направление скачка скорости определяет нормаль к ударной волне: когда граница ячейки совпадает с фронтом ударной волны, используется поток Годунова ($\mathbf{F}^{\text{Godunov}}$), а когда граница раздела перпендикулярна ударной волне, применяется поток Русанова-Лакса-Фридрихса ($\mathbf{F}^{\text{RLF}}$). Таким образом, увеличивается диссипация в направлении, совпадающим с ударной волной, и устраняется неустойчивость:

$$\hat{\mathbf{F}} = \theta \mathbf{F}^{\text{HLLC}} + (1 - \theta) \mathbf{F}^{\text{RLF}}, \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \theta \mathbf{F}^{\text{Godunov}} + (1 - \theta) \mathbf{F}^{\text{RLF}}, \quad (6)$$

$$\text{где } \theta = \begin{cases} \frac{|\Delta u \cdot n|}{|\Delta u|} = \frac{|\Delta u_x + \Delta v n_y + \Delta w n_z|}{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2}}, & |\Delta u| > \varepsilon, \\ 1, & |\Delta u| \leq \varepsilon, \end{cases} \quad (7)$$

где ε — малая константа, чтобы избежать деления на ноль (например, $\varepsilon = 10^{-6}$); n — нормаль к границе ячейки, а $\Delta u = (u_L - u_R, v_L - v_R, w_L - w_R)$ — скачок вектора скорости через границу. Параметр θ вычисляется из нормали к границе ячейки и скачка скорости через поверхность границы ячейки.

Иной подход к построению гибридного потока заключается в добавлении диссипативного члена в областях, где это необходимо.

Для его построения перейдем в локальную систему координат с ортом $(\mathbf{n}, \mathbf{\tau}_1, \mathbf{\tau}_2)$, где $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности через которую считается поток; $\mathbf{\tau}_1, \mathbf{\tau}_2$ — любые единичные ортогональные друг другу векторы, лежащие на этой поверхности. Векторы $\mathbf{U}$ и $\mathbf{F}$ в этой системе координат (обозначенные индексом *) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^* &= (\rho, \rho(\mathbf{u}, \mathbf{n}), \rho(\mathbf{u}, \mathbf{\tau}_1), \rho(\mathbf{u}, \mathbf{\tau}_1), E)^T, \\ \mathbf{F}^*(\mathbf{U}) &= (\rho(\mathbf{u}, \mathbf{n}), \rho(\mathbf{u}, \mathbf{n})u_n + p, \rho(\mathbf{u}, \mathbf{n})u_{\tau_1}, \rho(\mathbf{u}, \mathbf{n})u_{\tau_2}, (E + p)(\mathbf{u}, \mathbf{n})). \end{aligned} \quad (8)$$

С целью получения нового потока, обладающего большей диссипацией, чем поток Годунова (HLLC), и меньшей диссипацией, чем поток RLF, выберем некоторую скорость W в исходной системе координат и перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся с этой скоростью.

Обозначим максимальную скорость $W_{\max}$, минимальную скорость — $W_{\min}$ (с учетом знака) волн, выработавшихся при распаде произвольного разрыва в случае использования потока Годунова (или при использовании по-

тока HLLC). Заметим, что если W будет больше, чем $W_{\max}$, то значения газодинамических величин будут совпадать с U^+ и после пересчета в исходную систему координат, этот поток будет равен, соответственно, для использования потока Годунова и потока HLLC:

$$\hat{F} = F^{*\text{Godunov}}(U^{*+}) - WU^{*+},$$

$$\hat{F} = F^{*\text{HLLC}}(U^{*+}) - WU^{*+}.$$

Соответственно, если $-W$ будет меньше $W_{\min}$, то значения газодинамических величин будут совпадать с U^- , и после пересчета в исходную систему координат этот поток будет равен:

$$\hat{F} = F^{*\text{Godunov}}(U^{*-}) + WU^{*-},$$

$$\hat{F} = F^{*\text{HLLC}}(U^{*-}) + WU^{*-}.$$

Взяв полусумму этих потоков, получим поток RLF. Если $W=0$, то, соответственно, получаются потоки Годунова (или HLLC).

Таким образом, если $0 < W < W_{\max}^*$, где $W_{\max}^* = \max(|W_{\max}|, |W_{\min}|)$ получаем новый поток, средний между потоком Годунова (HLLC) и потоком RLF и обладающего большей диссипацией, чем поток Годунова (HLLC) и меньшей диссипацией, чем поток RLF. Такого типа поток рассматривался в работе [62].

Используемый гибридный поток может быть получен следующим образом. Рассмотрим инерциальную систему координат, движущуюся со скоростью $W \cdot n$ относительно исходной системы, и вычислим поток Годунова или HLLC, который затем пересчитаем в исходной системе координат (рис. 1). Полученное в результате значение обозначим через U^{*+} . Аналогичную процедуру проведем со скоростью $-W \cdot n$ и соответствующее значение обозначим U^{*-} . Взяв полусумму таких потоков, приходим к формулам:

$$\hat{F} = \frac{F^{*\text{Godunov}}(U^{*+}) + F^{*\text{Godunov}}(U^{*-})}{2} - W \frac{U^{*+} + U^{*-}}{2}, \quad (9)$$

$$\hat{F} = \frac{F^{*\text{HLLC}}(U^{*+}) + F^{*\text{HLLC}}(U^{*-})}{2} - W \frac{U^{*+} + U^{*-}}{2}, \quad (10)$$

$$W = \theta W^*, \quad W^* = \max(|u+c|, |u-c|), \quad (11)$$

$$\theta = \begin{cases} M \leq M_{\min}, & W = W^*, \\ M_{\min} < M < M_{\max}, & W = \frac{M_{\max} - M}{M_{\max} - M_{\min}} W^*, \\ M \geq M_{\max}, & W = 0, \end{cases} \quad (12)$$

где W^* — максимум модулей собственных значений матрицы $\frac{\partial F^*(U)}{\partial U^*}$; θ — параметр [52].

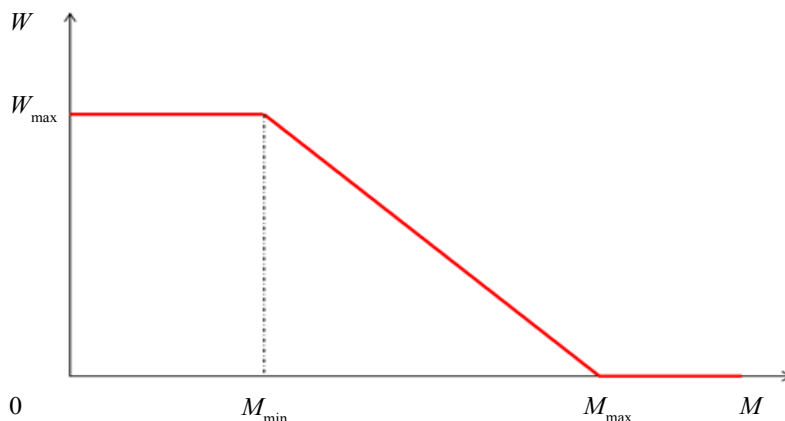


Рис. 1. Построенный гибридный поток, средний между потоком Годунова (HLLC) и потоком RLF

3. Численное интегрирование на произвольных ячейках. Рассмотрим преобразование произвольной четырехугольной пирамиды P с вершинами (x_i, y_i, z_i) $i = 1, 5$ в системе координат $0XYZ$ в правильную четырехугольную пирамиду P^* с вершинами $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$, $(0,5;0,5;1)$ в системе координат $0\alpha\beta\gamma$ (рис. 2). Основание пирамиды P переведем в основание пирамиды P^* с помощью билинейного преобразования:

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1\alpha + a_2\beta + a_3\alpha\beta, \\ y &= b_0 + b_1\alpha + b_2\beta + b_3\alpha\beta, \\ z &= c_0 + c_1\alpha + c_2\beta + c_3\alpha\beta, \end{aligned} \quad (13)$$

где коэффициенты $a_i, b_i, c_i, i = \overline{0,3}$ определяются в явном виде:

$$a_0 = x_1, a_1 = x_2 - x_1, a_2 = x_3 - x_1, a_3 = x_4 - x_3 - x_2 + x_1.$$

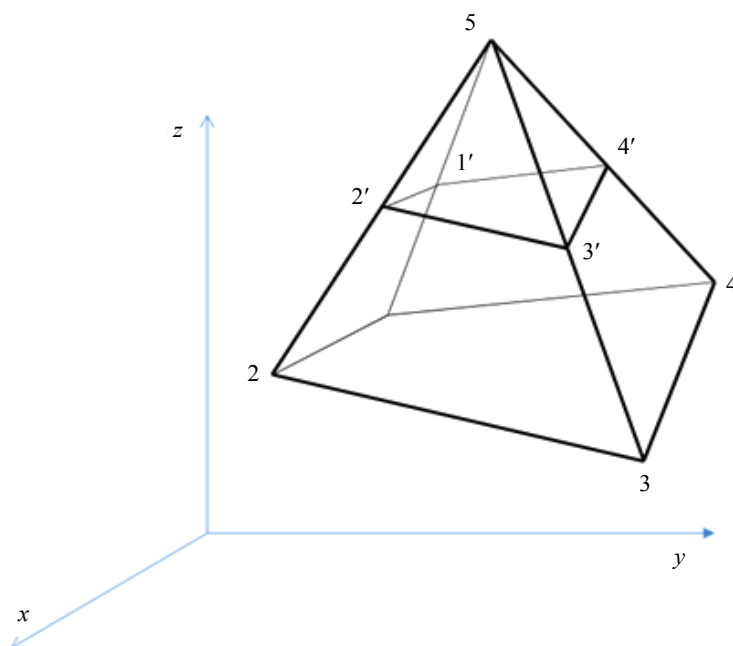


Рис. 2. Произвольная четырехугольная пирамида в пространстве

Построим произвольную пирамиду P' с вершиной в точке 5 (рис. 3) и основанием с вершинами в точках $1'-4'$, путем сжатия исходной пирамиды.

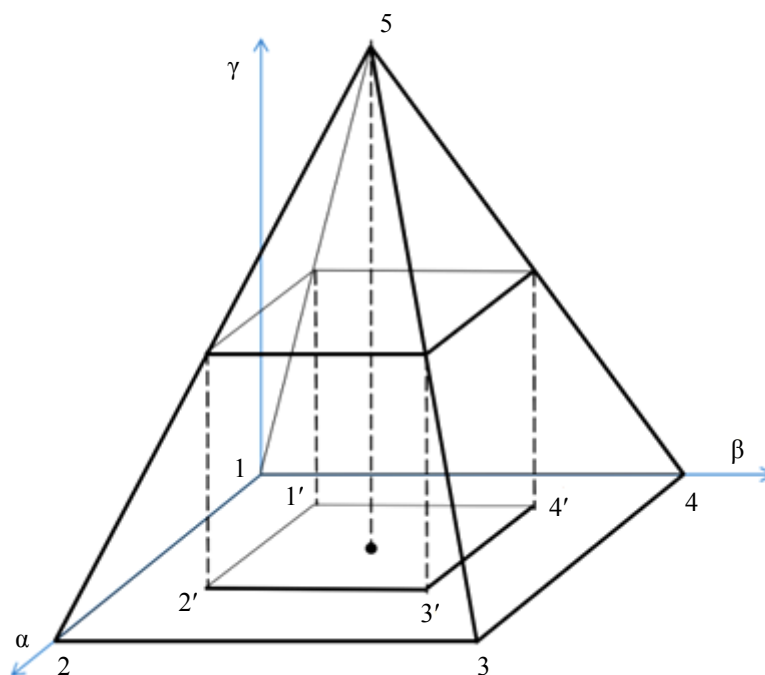


Рис. 3. Правильная четырехугольная пирамида

Координаты x'_i можно определить как:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(1-\gamma) + x_5\gamma, \\ x'_2 = x_2(1-\gamma) + x_5\gamma, \\ x'_3 = x_3(1-\gamma) + x_5\gamma, \\ x'_4 = x_4(1-\gamma) + x_5\gamma, \end{cases} \quad (14)$$

где коэффициент сжатия $\gamma \in [0,1]$.

Аналогичное преобразование сделаем в референтной пирамиде с тем же коэффициентом сжатия. Получившееся основание сжатой пирамиды переведем в основание референтной пирамиды. Координаты этих точек в системе координат $0\alpha\beta$ равны:

$$\begin{aligned}
1' &\rightarrow \alpha = \frac{\gamma}{2}, \beta = \frac{\gamma}{2}, \\
2' &\rightarrow \alpha = 1 - \frac{\gamma}{2}, \beta = \frac{\gamma}{2}, \\
3' &\rightarrow \alpha = 1 - \frac{\gamma}{2}, \beta = 1 - \frac{\gamma}{2}, \\
4' &\rightarrow \alpha = \frac{\gamma}{2}, \beta = 1 - \frac{\gamma}{2}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Используя преобразование (13)–(15), можно записать координаты точек x'_i :

$$\begin{cases}
x'_1 = a_0 + a_1 \frac{\gamma}{2} + a_2 \frac{\gamma}{2} + a_3 \frac{\gamma^2}{4} = x_1(1-\gamma) + x_5\gamma, \\
x'_2 = a_0 + a_1 \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) + a_2 \frac{\gamma}{2} + a_3 \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \frac{\gamma}{2} = x_2(1-\gamma) + x_5\gamma, \\
x'_3 = a_0 + a_1 \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) + a_2 \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) + a_3 \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)^2 = x_3(1-\gamma) + x_5\gamma, \\
x'_4 = a_0 + a_1 \frac{\gamma}{2} + a_2 \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) + a_3 \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \frac{\gamma}{2} = x_4(1-\gamma) + x_5\gamma.
\end{cases} \tag{16}$$

Решая эту систему уравнений (16), можем выразить коэффициенты преобразования (13):

$$\begin{aligned}
a_3 &= \frac{x_4 - x_2 - x_3 + x_1}{1-\gamma}, \\
a_1 &= (x_2 - x_1) - \frac{\gamma}{2(1-\gamma)}(x_4 - x_2 - x_3 + x_1), \\
a_2 &= (x_3 - x_1) - \frac{\gamma}{2(1-\gamma)}(x_4 - x_2 - x_3 + x_1), \\
a_0 &= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}(1-\gamma) + \gamma x_5 - \frac{x_2 - 2x_1 + x_3}{2} + \frac{2\gamma - 1}{4(1-\gamma)}(x_4 - x_2 - x_3 + x_1).
\end{aligned}$$

В итоге получаем преобразование для координаты x :

$$\begin{aligned}
x &= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}(1-\gamma) + \gamma x_5 - \frac{x_2 - 2x_1 + x_3}{2} + \frac{2\gamma - 1}{4(1-\gamma)}(x_4 - x_2 - x_3 + x_1) + \\
&\quad + \left[(x_2 - x_1) - \frac{\gamma}{2(1-\gamma)}(x_4 - x_2 - x_3 + x_1) \right] \alpha + \\
&\quad + \left[(x_4 - x_1) - \frac{\gamma}{2(1-\gamma)}(x_4 - x_2 - x_3 + x_1) \right] \beta + \\
&\quad + \left[\frac{x_4 - x_2 - x_3 + x_1}{1-\gamma} \right] \alpha\beta.
\end{aligned}$$

Аналогично получаем преобразование для координат y, z .

Список литературы

1. Reed W.H., Hill T.R. *Triangular mesh methods for the neutron transport equation*. Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-UR-73-79. USA; 1973. <https://www.osti.gov/servlets/purl/4491151>
2. Волков А.В. Особенности применения метода Галеркина к решению пространственных уравнений Навье-Стокса на неструктурированных гексаэдральных сетках. *Ученые записки ЦАГИ*. 2009;XL(6).
3. Nastase R. and Mavriplis D.J. High-order discontinuous Galerkin methods using an hp-multigrid approach. *Journal of Computational Physics*. 2006; 213:330–357.
4. Босняков С.М., Михайлов С.В., Подаруев В.Ю. и др. Нестационарный разрывный метод Галеркина высокого порядка точности для моделирования турбулентных течений. *Математическое моделирование*. 2018;30(5):37–56.
5. Krasnov M.M. et al. Numerical solution of the Navier-Stokes equations by discontinuous Galerkin method. *Journal of Physics: Conference Series: Conf. Ser.* 2017;815(1).
6. Краснов М.М., Кучугов П.А., Ладонкина М.Е. и др. Разрывный метод Галеркина на трехмерных тетраэдральных сетках. Использование операторного метода программирования. *Математическое Моделирование*. 2017;29(2):3–22.
7. Краснов М.М., Ладонкина М.Е. Разрывный метод Галёркина на трёхмерных тетраэдральных сетках. Применение шаблонного метапрограммирования языка C++. *Программирование*. 2017;3:41–53.

8. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Использование разрывного метода Галёркина при решении задач гидродинамики. *Математическое моделирование*. 2014;26(1):17–32. Ladonkina M.E., Neklyudova O.A., Tishkin V.F. Application of the RKDG method for gas dynamics problems. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2014;6(4):397–407.
9. Волков А.В. Особенности применения метода Галеркина к решению пространственных уравнений Навье-Стокса на неструктурированных гексаэдральных сетках. *Ученые записки ЦАГИ*. 2009; XL(6).
10. Yasue K., Furudate M., Ohnishi N., et al. Implicit discontinuous Galerkin method for RANS simulation utilizing pointwise relaxation algorithm. *Communications in Computational Physics*. 2010;7(3):510–533.
11. Klockner A., Warburton T., Hesthaven J.S. Nodal discontinuous Galerkin methods on graphics processors. *Journal of Computational Physics*. 2009;228(21):7863–7882.
12. Lou J., Xia Y., Luo L., et al. *OpenACC-based GPU Acceleration of a p-multigrid Discontinuous Galerkin Method for Compressible Flows on 3D Unstructured Grids*. 53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting, AIAA SciTech Forum, (AIAA 2015-0822).
13. Chan J., et al. GPU-accelerated discontinuous Galerkin methods on hybrid meshes. *Journal of Computational Physics*. 2015:318.
14. Краснов М.М. Операторная библиотека для решения трехмерных сеточных задач математической физики с использованием графических плат с архитектурой CUDA. *Математическое моделирование*. 2015;27(3):109–120.
15. Краснов М.М. Параллельный алгоритм вычисления точек гиперплоскости фронта вычислений. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2015;55(1):145–152.
16. Cockburn. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection-Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations. *Lecture Notes in Mathematics*. 1998;1697:151–268.
17. Krivodonova L. Limiters for high-order discontinuous Galerkin methods. *Journal of Computational Physics*. 2007; 226(1):276–296.
18. Shu C.-W. High order WENO and DG methods for time-dependent convection-dominated PDEs: A brief survey of several recent developments. *Journal of Computational Physics*. 2016;316:598–613.
19. Luo H., Baum J.D., Lohner R.A. Hermite WENO-based limiter for discontinuous Galerkin method on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*. 2007;225(1):686–713.
20. Zhu J., Zhong X., Shu C.-W., et al. Runge-Kutta discontinuous Galerkin method using a new type of WENO limiters on unstructured meshes. *Journal of Computational Physics*. 2013;248:200–220.
21. Dumbser M. Arbitrary high order PNPM schemes on unstructured meshes for the compressible Navier–Stokes equations. *Computers & Fluids*. 2010;39(1):60–76.
22. Peraire J., Persson P.-O. *Adaptive High-Order Methods in Computational Fluid Dynamics*. V.2 of Advances in CFD, chap.5 — High-Order Discontinuous Galerkin Methods for CFD. World Scientific Publishing Co; 2011.
23. Волков А.В., Ляпунов С.В. Монотонизация метода конечного элемента в задачах газовой динамики. *Ученые записки ЦАГИ*. 2009;XL(4):15–27.
24. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Построение лимитера для разрывного метода Галеркина на основе усреднения решения. *Математическое моделирование*. 2018;30(5):99–116.
25. Haga T., Sawada K. *An improved slope limiter for high-order spectral volume methods solving the 3D compressible Euler equations*; 2009.
26. Bassi F., Rebay S. Numerical evaluation of two discontinuous Galerkin methods for the compressible Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2002;40:197–207.
27. Cockburn, Shu C.-W. The local discontinuous Galerkin method for time dependent convection diffusion system. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1998;35(6):2440–2463.
28. Власенко В.В., Волков А.В., Трошин А.И. Выбор метода аппроксимации вязких членов в методе Галеркина с разрывными базисными функциями. *Ученые записки ЦАГИ*. 2013;XLIV(3).
29. Gottlieb S., Shu C.-W., Tadmor E. Strong stability-preserving high-order time discretization methods. *SIAM Review*. 2001;43(1):89–112.
30. Spiteri Raymond J., Ruuth Steven J. A New Class of Optimal High-Order Strong Stability-Preserving Time Discretization Methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2002;40(2):469–491.
31. Rasetarinera P., Hussaini M.Y. An efficient implicit discontinuous spectral Galerkin method. *Journal of Computational Physics*. 2001;172:718–738.
32. Hartmann R. Adaptive discontinuous Galerkin methods with shock-capturing for the compressible Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2006;51:1131–1156.
33. Hartmann R., Houston P. Symmetric interior penalty DG methods for the compressible Navier-Stokes equations I: Method formulation. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*. 2006;3:1–20.
34. Dolejší V. Semi-implicit interior penalty discontinuous Galerkin methods for viscous compressible flows. *Computer Physics Communications*. 2008;4:231–274.
35. Yasue K., Furudate M., Ohnishi N. et al. Implicit discontinuous Galerkin method for RANS simulation utilizing pointwise relaxation algorithm. *Computer Physics Communications*. 2010;7(3):510–533.

36. Jameson A., Yoon S. Lower-upper implicit schemes with multiple grids for the Euler equations. *AIAA Journal*. 1987;25:929–935.
37. Proc. ECCOMAS Thematic Conference: European Conf. on High Order Nonlinear Numerical Methods for Evolutionary PDEs: *Theory and Applications HONOM*. 2017;27.03–31.03.
38. Peery K.M., Imlay S.T. Blunt body flow simulations. *AIAA Paper*. 1988;88–2924.
39. Родионов А.В. Искусственная вязкость для подавления ударно-волновой неустойчивости в схемах типа Годунова повышенной точности. ФГУП «Российский федеральный ядерный центр ВНИИЭФ». 2018;116:51с.
40. Quirk J.J. A contribution to the great Riemann solver debate. *ICASE Report*. 1992;92–64. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 1994;18:555–574.
41. Родионов А.В. Разработка методов и программ для численного моделирования неравновесных сверхзвуковых течений в приложении к аэрокосмическим и астрофизическим задачам. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Саров; 2019.
42. Pandolfi M., D'Ambrosio D. Numerical instabilities in Upwind Methods: Analysis and Cures for the “Carbuncle” Phenomenon. *Journal of Computational Physics*. 2001;166:271–301.
43. Dumbser M., Moschetta J.-M., Gressier J. A matrix stability analysis of the carbuncle phenomenon. *Journal of Computational Physics*. 2004;197:647–670.
44. Roe P., Nishikawa H., Ismail F., et al. On carbuncles and other excrescences. *AIAA Paper*. 2005;2005–4872.
45. Menart J.A., Henderson S.J. Study of the issues of computational aerothermodynamics using a Riemann solver. *AFRL Report*. 2008; 2008–3133.
46. Kitamura K., Shima E. Towards shock-stable and accurate hypersonic heating computations: A new pressure flux for AUSM-family schemes. *Journal of Computational Physics*. 2013;245:62–83.
47. Xie W., Li W., Li H., et al. On numerical instabilities of Godunov-type schemes for strong shocks. *Journal of Computational Physics*. 2017;350:607–637.
48. Gressier J., Moschetta J.-M. Robustness versus accuracy in shock-wave computations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2000;33:313–332.
49. Nishikawa H., Kitamura K. Very simple, carbuncle-free, boundary-layer-resolving, rotated-hybrid Riemann solvers. *Journal of Computational Physics*. 2008;227:2560–2581.
50. Guo S., Tao W.-Q. Numerical Heat Transfer, Part B: *Fundamentals*. 2018; 73:33–47.
51. Hu L.J., Yuan L. A robust hybrid hllc-force scheme for curing numerical shock instability. *Applied Mechanics and Materials*. 2014;577:749–753.
52. Ferrero A., D'Ambrosio D. An Hybrid Numerical Flux for Supersonic Flows with Application to Rocket Nozzles. *17TH International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics*. Rhodes, Greece; 2019, 23–28 September.
53. Краснов М.М., Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А. и др. О влиянии выбора численного потока на решение задач с ударными волнами разрывным методом Галеркина. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2022;91:21 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2022-91>
54. Краснов М.М., Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф. Программный комплекс РАМЕГ3D для численного моделирования задач аэротермодинамики на высокопроизводительных вычислительных системах. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № RU2021615026. 02.04.2021.
55. Родионов А.В. Разработка методов и программ для численного моделирования неравновесных сверхзвуковых течений в приложении к аэрокосмическим и астрофизическим задачам. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Саров; 2019.
56. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. *Математический сборник*. 1959;47(89):3:271–306.
57. Toro E.F. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Springer, Third Edition. 2010.
58. Русанов В.В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1961;1(2):267–279.
59. Lax P.D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1954;7(1):159–193.
60. Краснов М.М., Кучугов П.А., Ладонкина М.Е. и др. Разрывный метод Галёркина на трёхмерных тетраэдральных сетках. Использование операторного метода программирования. *Математическое моделирование*. 2017;29(2):3–22,529–543.
61. Мысовских И.П. *Интерполяционные кубатурные формулы*. Москва: Наука; 1981.
62. Woodward P., Colella Ph. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *Journal of Computational Physics*. 1984;54(1):115–173.
63. Arnold D.N., Brezzi F., Cockburn B. et al. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2002;29:1749–1779.

References

1. Reed WH, Hill TR. Triangular mesh methods for the neutron transport equation . Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-UR-73-79. USA; 1973. <https://www.osti.gov/servlets/purl/4491151>
2. Volkov AV. Features of application of the Galerkin method to the solution of spatial Navier-Stokes equations on unstructured hexahedral grids. *Scientific Notes of TsAGI*. 2009;XL(6). (In Russ.).
3. Nastase R, Mavriplis DJ. High-order discontinuous Galerkin methods using an hp-multigrid approach. *Journal of Computational Physics*. 2006;213:330–357.
4. Bosnyakov SM, Mikhailov SV, Podaruyev VYu, et al. Unsteady discontinuous Galerkin method of high order accuracy for modeling turbulent flows. *Mathematical Modeling*. 2018;30(5):37–56. (In Russ.).
5. Krasnov MM, et al. Numerical solution of the Navier-Stokes equations by discontinuous Galerkin method. *Journal of Physics: Conference Series*. 2017;815(1).
6. Krasnov MM, Kuchugov PA, Ladonkina ME, et al. Discontinuous Galerkin method on three-dimensional tetrahedral grids. Using the operator programming method. *Mathematical Modeling*. 2017;29(2):3–22. (In Russ.).
7. Krasnov MM, Ladonkina ME. Discontinuous Galerkin method on three-dimensional tetrahedral grids. Application of template metaprogramming of the C++ language. *Programming*. 2017;3:41–53. (In Russ.).
8. Ladonkina ME, Neklyudova OA, Tishkin VF. Application of the RKDG method for gas dynamics problems. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2014;26(1):17–32. (In Russ.).
9. Volkov AV. Features of application of the Galerkin method to the solution of spatial Navier-Stokes equations on unstructured hexahedral grids. *Scientific Notes of TsAGI*. 2009;XL(6). (In Russ.).
10. Yasue K, Furudate M, Ohnishi N., et al. Implicit discontinuous Galerkin method for RANS simulation utilizing pointwise relaxation algorithm. *Communications in Computational Physics*. 2010;7(3):510–533.
11. Klockner A, Warburton T, Hesthaven JS. Nodal discontinuous Galerkin methods on graphics processors. *Journal of Computational Physics*. 2009;228(21):7863–7882.
12. Lou J, Xia Y, Luo L, et al. OpenACC-based GPU Acceleration of a p-multigrid Discontinuous Galerkin Method for Compressible Flows on 3D Unstructured Grids. *53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting, AIAA SciTech Forum*, (AIAA 2015-0822).
13. Chan J, et al. GPU-accelerated discontinuous Galerkin methods on hybrid meshes. *Journal of Computational Physics*. 2015:318.
14. Krasnov MM. Operator library for solving three-dimensional grid problems of mathematical physics using graphics cards with CUDA architecture. *Mathematical Modeling*. 2015;27(3):109–120. (In Russ.).
15. Krasnov MM. Parallel algorithm for calculating hyperplane points of the computing front. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2015;55(1):145–152. (In Russ.).
16. Cockburn. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations. *Lecture Notes in Mathematics*. 1998;1697:151–268.
17. Krivodonova L. Limiters for high-order discontinuous Galerkin methods. *Journal of Computational Physics*. 2007; 226(1):276–296.
18. Shu C-W. High order WENO and DG methods for time-dependent convection-dominated PDEs: A brief survey of several recent developments. *Journal of Computational Physics*. 2016;316:598–613.
19. Luo H, Baum JD, Lohner RA. Hermite WENO-based limiter for discontinuous Galerkin method on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*. 2007;225(1):686–713.
20. Zhu J, Zhong X, Shu C-W, et al. Runge-Kutta discontinuous Galerkin method using a new type of WENO limiters on unstructured meshes. *Journal of Computational Physics*. 2013;248:200–220.
21. Dumbser M. Arbitrary high order PNPM schemes on unstructured meshes for the compressible Navier–Stokes equations. *Computers & Fluids*. 2010;39(1):60–76.
22. Peraire J, Persson P-O. *Adaptive High-Order Methods in Computational Fluid Dynamics*. V.2 of Advances in CFD, chap.5 - High-Order Discontinuous Galerkin Methods for CFD. World Scientific Publishing Co; 2011.
23. Volkov AV, Lyapunov CV. Monotonization of the finite element method in problems of gas dynamics. *Scientific Notes of TsAGI*. 2009;XL(4):15–27. (In Russ.).
24. Ladonkina ME, Neklyudova OA, Tishkin VF. Construction of a limiter for the discontinuous Galerkin method based on averaging the solution. *Mathematical Modeling*. 2018;30(5):99–116. (In Russ.).
25. Haga T, Sawada K. *An improved slope limiter for high-order spectral volume methods solving the 3D compressible Euler equations*; 2009.
26. Bassi F, Rebay S. Numerical evaluation of two discontinuous Galerkin methods for the compressible Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2002;40:197–207.
27. Cockburn, Shu C-W. The local discontinuous Galerkin method for time dependent convection diffusion system. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1998;35(6):2440–2463.
28. Vlasenko VV, Volkov AV, Troshin AI. The choice of the method of approximation of viscous terms in the Galerkin method with discontinuous basis functions. *Scientific Notes of TsAGI*. 2013;XLIV(3).

29. Gottlieb S, Shu C-W, Tadmor E. Strong stability-preserving high-order time discretization methods. *SIAM Review*. 2001;43(1):89–112.
30. Spiteri Raymond J, Ruuth Steven J. A New Class of Optimal High-Order Strong Stability-Preserving Time Discretization Methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2002;40(2):469–491.
31. Rasetarinera P, Hussaini MY. An efficient implicit discontinuous spectral Galerkin method. *Journal of Computational Physics*. 2001;172:718–738.
32. Hartmann R. Adaptive discontinuous Galerkin methods with shock-capturing for the compressible Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2006;51:1131–1156.
33. Hartmann R, Houston P. Symmetric interior penalty DG methods for the compressible Na-vier-Stokes equations I: Method formulation. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*. 2006;3:1–20.
34. Dolejší V. Semi-implicit interior penalty discontinuous Galerkin methods for viscous compressible flows. *Computer Physics Communications*. 2008;4:231–274.
35. Yasue K, Furudate M, Ohnishi N, et al. Implicit discontinuous Galerkin method for RANS simulation utilizing pointwise relaxation algorithm. *Computer Physics Communications*. 2010;7(3):510–533.
36. Jameson A, Yoon S. Lower-upper implicit schemes with multiple grids for the Euler equations. *AIAA Journal*. 1987;25:929–935.
37. Proc. ECCOMAS Thematic Conference: European Conf. on High Order Nonlinear Numerical Methods for Evolutionary PDEs: *Theory and Applications HONOM*. 2017;27.03–31.03.
38. Peery KM, Imlay ST. Blunt body flow simulations. *AIAA Paper*. 1988;88–2924.
39. Rodionov AV. *Artificial viscosity for suppression of shock-wave instability in Godunov-type schemes of increased accuracy*. Russian Federal Nuclear Center VNIIEF. 2018;116:51 p. (In Russ.).
40. Quirk JJ. A contribution to the great Riemann solver debate. ICASE Report 1992;92–64. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 1994;18:555–574.
41. Rodionov AV. *Development of methods and programs for numerical simulation of nonequilibrium supersonic flows in application to aerospace and astrophysical problems*. Dissertation for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences Sarov; 2019. (In Russ.).
42. Pandolfi M, D'Ambrosio D. Numerical instabilities in Upwind Methods: Analysis and Cures for the “Carbuncle” Phenomenon. *Journal of Computational Physics*. 2001;166:271–301.
43. Dumbser M, Moschetta J-M, Gressier J. A matrix stability analysis of the carbuncle phenomenon. *Journal of Computational Physics*. 2004;197:647–670.
44. Roe P, Nishikawa H, Ismail F, et al. On carbuncles and other excrescences. *AIAA Paper*. 2005;2005–4872.
45. Menart JA, Henderson SJ. Study of the issues of computational aerothermodynamics using a Riemann solver. *AFRL Report*. 2008; 2008–3133.
46. Kitamura K, Shima E. Towards shock-stable and accurate hypersonic heating computations: A new pressure flux for AUSM-family schemes. *Journal of Computational Physics*. 2013;245:62–83.
47. Xie W, Li W, Li H, et al. On numerical instabilities of Godunov-type schemes for strong shocks. *Journal of Computational Physics*. 2017;350:607–637.
48. Gressier J, Moschetta J-M. Robustness versus accuracy in shock-wave computations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2000;33:313–332.
49. Nishikawa H, Kitamura K. Very simple, carbuncle-free, boundary-layer-resolving, rotated-hybrid Riemann solvers. *Journal of Computational Physics*. 2008;227:2560–2581.
50. Guo S, Tao W-Q. *Numerical Heat Transfer*, Part B: Fundamentals. 2018; 73:33–47.
51. Hu LJ, Yuan L. A robust hybrid hllc-force scheme for curing numerical shock instability. *Applied Mechanics and Materials*. 2014;577:749–753.
52. Ferrero A, D'Ambrosio D. An Hybrid Numerical Flux for Supersonic Flows with Application to Rocket Nozzles. *17TH International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics*. Rhodes, Greece; 2019, 23–28 September.
53. Krasnov MM, Ladonkina ME, Neklyudova OA, et al. On the influence of the choice of numerical flow on the solution of problems with shock waves by the discontinuous Galerkin method. *Preprints of IPM named after M.V.Keldysh*. 2022;91:21 p. (In Russ.). <https://doi.org/10.20948/prepr-2022-91>
54. Krasnov MM, Ladonkina ME, Tishkin VF. *RAMEG3D software package for numerical simulation of aerothermodynamics problems on high-performance computing systems*. Certificate of state registration of the computer program. No. RU2021615026, 02.04.2021. (In Russ.).
55. Rodionov AV. *Development of methods and programs for numerical simulation of nonequilibrium supersonic flows in application to aerospace and astrophysical problems*. Dissertation for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences Sarov; 2019. (In Russ.).
56. Godunov K. The difference method of the calculation of the explosive solutions of the equalization of hydrodynamics. *Mathematical Collection*. 1959;47(89):3:271–306. (In Russ.).
57. Toro EF. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Springer, Third Edition. 2010.

58. Rusanov VV. Calculation of interactions with stationary shock waves. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1961;I(2):267–279. (In Russ.).
59. Lax PD. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1954;7(1): 159–193.
60. Krasnov MM, Kuchugov PA, Ladonkina ME, et al. Discontinuous Galerkin method on three-dimensional tetrahedral grids. Using the operator programming method. *Mathematical Modeling*. 2017;29(2):3–22,529–543. (In Russ.).
61. Mysovskikh IP. *Interpolation cubature formulas*. Moscow: Nauka; 1981. (In Russ.).
62. Woodward P, Colella Ph. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *Journal of Computational Physics*. 1984;54(1):115–173.
63. Arnold DN, Brezzi F, Cockburn B, et al. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2002;29:1749–1779.

Об авторах:

Тишкин Владимир Федорович, член-корреспондент РАН, профессор, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук (125047, РФ, г. Москва, Миусская пл., 4), доктор физико-математических наук, [ORCID](#), tishkin@imamod.ru, v.f.tishkin@mail.ru

Ладонкина Марина Евгеньевна, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук (125047, РФ, г. Москва, Миусская пл., 4), кандидат физико-математических наук, [ORCID](#), ladonkina@imamod.ru

Поступила в редакцию 05.04.2023.

Поступила после рецензирования 24.05.2023.

Принята к публикации 25.05.2023.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Vladimir F Tishkin, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences (4, Miusskaya Sq., Moscow, 125047, RF), Doctor of Physical and Mathematical Sciences, [ORCID](#), tishkin@imamod.ru, v.f.tishkin@mail.ru

Marina E Ladonkina, Senior Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences (4, Miusskaya Sq., Moscow, 125047, RF), Candidate of Physical and Mathematical Sciences, [ORCID](#), ladonkina@imamod.ru

Received 05.04.2023.

Revised 24.05.2023.

Accepted 25.05.2023.

Conflict of interest statement

The authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.