

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 519.633

Научная статья

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-31-39>


Разностная схема второго порядка для решения класса дифференциальных уравнений дробного порядка

А.Х. Хибиев , А.А. Алиханов ✉, М. Шахбазисль, Р.А. Чернобровкин

Северо-Кавказский центр математических исследований, Северо-Кавказский федеральный университет, Российская Федерация, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 1

✉ aaalikhanov@gmail.com

Аннотация

Введение. Повышение точности при аппроксимации дробных интегралов, как известно, является одной из актуальных задач вычислительной математики. Цель настоящего исследования — создание и применение разностного аналога второго порядка для аппроксимации дробного интеграла Римана-Лиувилля. Его применение исследуется при решении некоторых классов дифференциальных уравнений дробного порядка. Разностный аналог предназначен для аппроксимации дробного интеграла с высокой точностью.

Материалы и методы. В работе рассматривается разностный аналог второго порядка для аппроксимации дробного интеграла Римана-Лиувилля, а также класс дифференциальных уравнений дробного порядка, который содержит дробную производную Капуто по времени порядка, принадлежащего интервалу (1, 2).

Результаты исследования. Для решения вышеупомянутых уравнений преобразованы исходные дифференциальные уравнения дробного порядка в новую модель, которая включает дробный интеграл Римана-Лиувилля. Это преобразование позволяет эффективно решать задачи с использованием соответствующих численных методов. Затем предложенный разностный аналог второго порядка аппроксимации применяется для решения преобразованной модельной задачи.

Обсуждение и заключения. Доказана устойчивость предложенной разностной схемы. Получена априорная оценка для рассматриваемой задачи, которая устанавливает единственность и непрерывную зависимость решения от входных данных. Для оценки точности схемы и проверки экспериментального порядка сходимости проведены расчеты для тестовой задачи.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение дробного порядка, производная Капуто, интеграл Римана-Лиувилля, разностная схема.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00363. <https://rscf.ru/project/22-21-00363/>

Для цитирования. Хибиев А.Х., Алиханов А.А., Шахбазисль М. и др. Разностная схема второго порядка для решения класса дифференциальных уравнений дробного порядка. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):31–39. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-31-39>

Original article

A Second-Order Difference Scheme for Solving a Class of Fractional Differential Equations

Aslanbek Kh Hibiev , Anatoly A Alikhanov ✉, Mohammad Shahbaziasl, Ruslan A Chernobrovkin

North-Caucasus Center for Mathematical Research, North-Caucasus Federal University, 1, Pushkin St., Stavropol, Russian Federation

✉ aaalikhanov@gmail.com

Abstract

Introduction. Increasing accuracy in the approximation of fractional integrals, as is known, is one of the urgent tasks of computational mathematics. The purpose of this study is to create and apply a second-order difference

analog to approximate the fractional Riemann-Liouville integral. Its application is investigated in solving some classes of fractional differential equations. The difference analog is designed to approximate the fractional integral with high accuracy.

Materials and Methods. The paper considers a second-order difference analogue for approximating the fractional Riemann-Liouville integral, as well as a class of fractional differential equations, which contains a fractional Caputo derivative in time of the order belonging to the interval (1, 2).

Results. To solve the above equations, the original fractional differential equations have been transformed into a new model that includes the Riemann-Liouville fractional integral. This transformation makes it possible to solve problems efficiently using appropriate numerical methods. Then the proposed difference analogue of the second order approximation is applied to solve the transformed model problem.

Discussion and Conclusions. The stability of the proposed difference scheme is proved. An a priori estimate is obtained for the problem under consideration, which establishes the uniqueness and continuous dependence of the solution on the input data. To evaluate the accuracy of the scheme and verify the experimental order of convergence, calculations for the test problem were carried out.

Keywords: Fractional differential equation, Caputo derivative, Riemann-Liouville integral, Difference scheme.

Founded information. The study was supported by the Russian Science Foundation grant no. 22-21-00363. <https://rscf.ru/project/22-21-00363/>

For citation. Hibiev AKh, Alikhanov AA, Shahbaziasl M, et al. A second-order difference scheme for solving a class of fractional differential equations. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):31–39. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-31-39>

Введение. Дробное исчисление (ДИ) — это раздел математики, который исследует и применяет производные и интегралы действительного и комплексного порядка. Хотя концепция возникла столетия назад, значительный интерес она вызвала только в конце 1960-х годов. Инженеры осознали ее потенциал для точного моделирования систем реального мира по сравнению с обычным исчислением целочисленного порядка [1]. Задержка с его принятием может быть объяснена различными факторами: отсутствие четкой интерпретации дробных производных, воспринимаемая адекватность целочисленного исчисления и присущая ДИ сложность [2]. В настоящее время ДИ стало областью, находящей широкое применение в различных сферах, включая инженерное дело и математику. Обширная литература подчеркивает активное использование ДИ во многих предметных областях: системы управления, акустика, медицинские и биологические науки, оптика, волны, финансы, экономика, обработка сигналов и многое другое [3, 4].

Математические модели, основанные на дифференциальных уравнениях с производными целого порядка, оказались полезными при изучении динамики реальных систем. Однако эти модели имеют ограничения в захвате долговременной памяти или долговременных пространственных взаимодействий, которые присущи многим явлениям реального мира. Такое ограничение возникает из-за отсутствия этих признаков в производных целочисленного порядка [5]. Напротив, дробно-дифференциальные уравнения (ДДУ) дают значительное преимущество, поскольку они демонстрируют нелокальное поведение. Это подразумевает, что дробное исчисление служит мощным инструментом для учета памяти и эволюционных свойств, проявляемых широким спектром физических явлений и сложных систем [6, 7]. Следовательно, математические модели, основанные на ДДУ, более реалистичны и практичны по сравнению с классическими моделями целочисленного порядка [8].

Необходимость точного моделирования и понимания различных явлений и процессов в сочетании с эффективностью моделей ДДУ в захвате долговременной памяти и нелокальных взаимодействий подтолкнула к поиску эффективных численных или аналитических методов решения. Исследователи стремятся разработать инновационные методы, которые могут справиться со сложностями и вызовами, связанными с ДДУ, позволяя глубже понять исследуемые системы. Но получение аналитических решений для ДДУ, как правило, является сложной задачей, и точные решения часто включают представления бесконечных рядов, такие как функция Миттага-Леффлера, Н-функция Фокса или функция гиперболической геометрии, которые могут создавать трудности при вычислении [9]. Следовательно, растет интерес к разработке эффективных в вычислительном отношении численных алгоритмов для решения ДДУ. Они включают в себя множество высокопроизводительных вычислительных методов:

- методы конечных разностей;
- методы предиктора-корректора;
- методы конечных элементов;
- спектральные методы;
- методы граничных частиц;
- неявные бессеточные методы;
- методы Галеркина;
- методы конечных объемов;
- методы локальных радиальных базисных функций [10].

В последние несколько лет значительное внимание уделялось разработке численных методов решения одномерных временных ДДУ. Были опубликованы многочисленные исследования, направленные на изучение и продвижение этих численных подходов [11–13]. Yand и др. [14] применили дробный многоступенчатый метод Любича для численного решения дробного диффузионно-волнового уравнения путем преобразования исходной модели в эквивалентное интегро-дифференциальное уравнение. Они продемонстрировали, что их метод достигает временного порядка точности α для $1 \leq \alpha \leq 1,71832$. В работе [15] авторы представили метод порядка $3-\alpha$ для $0 < \alpha < 1$ для аппроксимации производной Капуто. Затем они предложили дискретную разностную схему, введя две новые переменные для преобразования исходного уравнения в систему уравнений более низкого порядка. Две неявные схемы с переменным направлением для решения двумерных нелинейных уравнений свёрхдиффузии с дробным временем представлены в работе [16]. Эти схемы основаны на эквивалентных интегро-дифференциальных уравнениях в частных производных исходной задачи. Дробный интеграл Римана-Лиувилля дискретизируется с использованием классического приближения первого порядка. Авторы доказывают, что обе схемы обладают точностью первого порядка по времени, обеспечивая сходимость численных решений. Khibiev и др. [13] разработали разностный аналог второго порядка для аппроксимации обобщенной производной Капуто. Они успешно применили этот разностный аналог для численного решения обобщенного уравнения дробной диффузии во времени, уделив особое внимание случаям с гладкими решениями.

Цель данной статьи — разработать разностный аналог второго порядка для аппроксимации дробного интеграла Римана-Лиувилля, а затем применить этот разностный аналог для решения класса ДДУ. Авторы вводят класс ДДУ, которые содержат дробную производную Капуто порядка $\alpha + 1$, где $0 < \alpha < 1$. Далее они преобразуют модель ДДУ в форму, которая включает дробный интеграл Римана-Лиувилля, и представляют априорную оценку для решения дифференциальной модели. Предлагается разностный аналог для аппроксимации дробного интеграла Римана-Лиувилля, а также оценивается погрешность усечения метода и применяется для решения новой модели ДДУ. Кроме того, исследуется устойчивость численного метода. Проводится численное моделирование с тем, чтобы подтвердить точность и эффективность предложенного метода для решения рассматриваемой ДДУ. Также исследуется экспериментальный порядок сходимости метода. И, наконец, приводится краткое заключение, обобщающее ключевые выводы и вклад исследования авторов.

Материалы и методы. В этом разделе представлен конкретный класс ДДУ с начальным значением, а также предлагается методология эффективного решения этих моделей. В исследовании ведется поиск новой эффективной и точной численной схемы для аппроксимации решений следующих ДДУ с начальными условиями:

$$\partial_{0t}^{\alpha+1} y(t) + \kappa y(t) = g(t), \quad (1)$$

$$y(0) = y_0, \quad y_i(0) = y_1, \quad (2)$$

где κ — положительная константа, $0 < \alpha < 1$ и $0 < t \leq T$.

Существует множество определений производных и интегральных операторов в контексте дробного исчисления. Некоторые широко используемые определения включают производную Капуто и производную Римана-Лиувилля. Эти определения различаются тем, как они описывают поведение функции в дробном порядке. В производной Капуто дробная производная определяется путем учета дифференцирования функции в дробном порядке при сохранении начальных условий. Это делает его особенно подходящим для моделирования реальных процессов, где начальные условия имеют решающее значение для определения поведения системы [17, 1]. По этой причине в настоящем исследовании используется дробная производная в уравнении (1) в смысле Капуто. Этот выбор продиктован совместимостью производной *Caputo* с реальными приложениями и ее способностью точно фиксировать начальные условия системы. Производная Капуто определяется следующим образом:

$$\partial_{0t}^{\alpha+1} y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\eta)^{-\alpha} y''(\eta) d\eta, \quad 0 < \alpha < 1,$$

где α представляет дробный порядок, а $\Gamma(\cdot)$ обозначает гамма-функцию.

Используя производную Капуто, можно эффективно фиксировать поведение системы в дробном порядке и учитывать влияние прошлой истории на текущее состояние. Это определение позволяет моделировать различные явления реальной жизни, где начальные условия играют решающую роль в определении динамики системы [18, 2].

Применяя оператор дробного интегрирования Римана-Лиувилля порядка α , обозначаемый $D_{0t}^{-\alpha} y(t)$ к обеим сторонам модели (1), получим:

$$\frac{dy}{dt} + \kappa D_{0t}^{-\alpha} y = f(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (3)$$

где $f(t) = D_{0t}^{-\alpha} g(t) + y_1$, и оператор дробного интегрирования Римана-Лиувилля определяется как:

$$D_{0t}^{-\alpha} y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} y(\xi) d\xi. \quad (4)$$

Модель (3) подчиняется начальному условию $y(0)=y_0$. В уравнении (3), когда t приближается к 0, имеем $y_t(0)=f(0)=y_1$. Следовательно, второе начальное условие в уравнении (2) может быть выведено.

Априорная оценка для решения дифференциальной задачи. Следующая теорема представляет априорную оценку для решения дифференциальной задачи (3), которая дает ценную информацию о поведении и свойствах решения, позволяя лучше понять и проанализировать модель. Прежде чем изложить основную теорему, важно ввести следующее следствие, которое вытекает из результатов, представленных в [19].

Следствие 1. Для любой функции $y(t)$, абсолютно непрерывной на $[0, T]$, имеет место следующее неравенство:

$$\int_0^t y(s) D_{0s}^{-\alpha} y(s) ds \geq 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Теорема 1. Решение $y(t)$ задачи (3) удовлетворяет следующей априорной оценке:

$$y^2(t) \leq C_1 \left(y_0^2 + \int_0^t f^2(s) ds \right), \quad C_1 = \max\{2, 4T\}.$$

Доказательство. Умножая уравнение (3) на $y(t)$, затем изменяя переменную t на s и интегрируя по временным переменным от 0 до t , получаем:

$$\int_0^t y(s) y'(s) ds + \kappa \int_0^t y(s) D_{0s}^{-\alpha} y(s) ds = \int_0^t y(s) f(s) ds. \quad (5)$$

Из следствия 1 и того факта, что $\kappa > 0$, второй член левой части (5) неотрицателен и может быть опущен. Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (y^2(t) - y_0^2) &\leq \int_0^t \left(\varepsilon y^2(s) + \frac{1}{4\varepsilon} f^2(s) \right) ds, \\ y^2(t) &\leq 2\varepsilon \int_0^t y^2(s) ds + y_0^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t f^2(s) ds. \end{aligned} \quad (6)$$

Чтобы завершить доказательство, нужно оценить интеграл $\int_0^t y^2(s) ds$. Проинтегрируем уравнение (6) относительно переменной t от 0 до t . Установим $\varepsilon = \frac{1}{(4T)}$, принимая во внимание следующее неравенство:

$$\int_0^t d\xi \int_0^\xi y^2(s) ds = \int_0^t (t-s) y^2(s) ds \leq T \int_0^t y^2(s) ds,$$

можем прийти к следующему выводу:

$$\int_0^t y^2(s) ds \leq 2Ty_0^2 + 4T^2 \int_0^t f^2(s) ds. \quad (7)$$

Теперь, подставив уравнение (7) в уравнение (6) и установив $\varepsilon = \frac{1}{(4T)}$, можно завершить доказательство.

Вывод разностной схемы для аппроксимации ДДУ. Цель этого подраздела — ввести разностный аналог, который эффективно аппроксимирует дробный интеграл Римана-Лиувилля. Впоследствии используем этот разностный аналог для разработки надежной и точной разностной схемы второго порядка, специально разработанной для аппроксимации модели (3).

Чтобы построить разностный метод аппроксимации дробного интеграла Римана-Лиувилля (4) для целого числа N и заданного времени T , дискретизируем интервал $[0, T]$ на равные промежутки времени $t_j = j\tau$, $j=0, 1, \dots, N$, где $\tau = \frac{T}{N}$ — длина временного шага. Для краткости обозначений запишем численное решение $y(t_j)$ в точке t_j через y^j . Чтобы аппроксимировать дробный интеграл Римана-Лиувилля при $t=t_{j+1}$, где $j=1, 2, \dots, N$, используем метод трапеций:

$$\begin{aligned} D_{0t_{j+1}}^{-\alpha} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{j+1}} (t_{j+1} - \xi)^{\alpha-1} y(\xi) d\xi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^j \int_{t_s}^{t_{s+1}} (t_{j+1} - \xi)^{\alpha-1} y(\xi) d\xi \approx \\ &\approx \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^j \int_{t_s}^{t_{s+1}} (t_{j+1} - \xi)^{\alpha-1} \left(y(t_{s+1}) \frac{\xi - t_s}{\tau} + y(t_s) \frac{t_{s+1} - \xi}{\tau} \right) d\xi = \\ &= \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \left(\sum_{s=0}^j c_{j-s}^{(\alpha)} y^{s+1} + c_{j+1}^{-(\alpha)} y^0 \right) = \Delta_{0t_{j+1}}^{-\nu} y, \end{aligned} \quad (8)$$

в котором $c_0^{(\alpha)}=1$ и

$$c_s^{(\alpha)} = (s+1)^{\alpha+1} - 2s^{\alpha+1} + (s-1)^{\alpha+1},$$

$$c_s^{-(\alpha)} = (\alpha+1)(s+1)^\alpha - ((s+1)^{\alpha+1} - s^{\alpha+1}).$$

Ошибка усечения оператора $\Delta_{0t_{j+1}}^{-v}$ в (8) характеризуется следующей леммой.

Лемма 1. Предположим, что $y(t) \in C^2[0, t_{j+1}]$. Для любого $v \in (0, 1)$, $\Delta_{0t_{j+1}}^{-v}$ и определено формулой (8). Тогда имеем:

$$\left| D_{0t_{j+1}}^{-v} y(t) - \Delta_{0t_{j+1}}^{-v} y \right| = O(\tau^2).$$

Доказательство. Из формулы остатка интерполяции Лагранжа следует, что:

$$\begin{aligned} \left| D_{0t_{j+1}}^{-v} y(t) - \Delta_{0t_{j+1}}^{-v} y \right| &\leq \sum_{s=0}^j \int_{t_s}^{t_{s+1}} (t_{j+1} - \xi)^{v-1} \left| \frac{C^2}{2} (t_{s+1} - \xi)(\xi - t_s) \right| d\xi \leq \\ &\leq \frac{C_2}{8} \tau^2 \sum_{s=0}^j \int_{t_s}^{t_{s+1}} (t_{j+1} - \xi)^{v-1} d\xi = \frac{C_2}{8} \tau^2 \int_0^{t_{j+1}} (t_{j+1} - \xi)^{v-1} d\xi \leq \frac{C_2 T^v}{8} \tau^2 = O(\tau^2), \end{aligned}$$

где $C_2 = \max_{0 \leq t \leq T} |y''(t)|$.

Чтобы достичь желаемого порядка сходимости предлагаемого метода, используем конечно-разностную формулу второго порядка для аппроксимации первого производного члена в уравнении (3). Это приближение задается формулой:

$$\frac{d}{dt} y(t_{j+1}) = \frac{3y(t_{j+1}) - 4y(t_j) + y(t_{j-1}))}{2\tau} + O(\tau^2), \quad j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (9)$$

Справедливость этого приближения может быть легко подтверждена применением теоремы Тейлора.

В однородной области $\Omega = \{t_j: j=0, 1, \dots, N\}$ рассматриваем дробно-дифференциальную модель (3) в точке t_{j+1} , где $j=1, 2, \dots, N-1$. Применяя предложенную разностную схему (8), а также аппроксимацию (9) к модели (3), предлагаем следующую разностную схему:

$$\frac{3y^{j+1} - 4y^j + y^{j-1}}{2\tau} + \kappa \Delta_{0t_{j+1}}^{-\alpha} y = f(t_{j+1}), \quad (10)$$

$$y^0 = y_0. \quad (11)$$

На начальном временном шаге t_1 оцениваем значение y^1 , используя теорему Тейлора следующим образом:

$$y^1 = y_0 + \tau y_1 + O(\tau^2). \quad (12)$$

Принимая во внимание лемму 1 и уравнения (9) и (12), можно заключить следующее: если решение дифференциальной модели (3) удовлетворяет условию гладкости $y(t) \in C_t^2(\Omega)$, то разностная схема (10)–(11) демонстрирует порядок точности $O(\tau^2)$.

Теоретический анализ предложенной разностной схемы. Рассмотрим ошибку $z^j = Y^j - y^j$, где $Y^j = y(t_j)$. Подставляя $y^j = z^j + Y^j$ в модель (3), получаем задачу для ошибки следующим образом:

$$\frac{3z^{j+1} - 4z^j + z^{j-1}}{2\tau} + \kappa \Delta_{0t_{j+1}}^{-\alpha} z = R_i^{j+1}, \quad (13)$$

$$z^0 = u_0, \quad z^1 = \mu,$$

где

$$R_i^{j+1} = -\frac{3Y^{j+1} - 4Y^j + Y^{j-1}}{2\tau} - \kappa \Delta_{0t_{j+1}}^{-\alpha} Y + f(t_{j+1}) = O(\tau^2),$$

$$\mu = -y^1 + y_0 + \tau y_1 = O(\tau^2).$$

Прежде чем представить основную теорему об устойчивости предложенной разностной схемы, важно ввести следующие две леммы.

Лемма 2 [6]. Для любых вещественных констант r_0, r_1 таких, что $r_0 \geq \max\{r_1, -3r_1\}$, и $\{v_j\}_{j=0}^{j=N}$ выполняется следующее неравенство:

$$v_{j+1}(r_0 v_{j+1} - (r_0 - r_1)v_j - r_1 v_{j-1}) \geq E_{j+1}(r_0, r_1) - E_j(r_0, r_1), \quad j = 1, \dots, N-1,$$

где

$$E_j(r_0, r_1) = \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_0 - r_1}{2}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_0 + 3r_1}{2}} \right)^2 v_j^2 + \\ + \left(\sqrt{\frac{r_0 - r_1}{2}} v_j - \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_0 - r_1}{2}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_0 + 3r_1}{2}} \right) v_{j-1} \right)^2.$$

Лемма 3 [20]. Предположим, что последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ вещественных чисел удовлетворяет следующим свойствам:

$$a_n \geq 0, a_n - a_{n+1} \geq 0, a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geq 0.$$

Пусть $c_0 = \frac{a_0}{2}$ и $c_j = a_j$ для $j \geq 1$. Тогда:

$$\sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^s c_{s-k} \xi_s \xi_k \geq 0, \forall (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in R^n.$$

Теорема 2. Разностная схема (3) безусловно устойчива и для ее решения справедлива следующая априорная оценка:

$$(z^{j+1})^2 \leq C_3 \left(\sum_{s=1}^j (R^{s+1})^2 \tau + \mu^2 \right),$$

где C_3 — положительная константа, не зависящая от τ и h .

Доказательство основано на подходе, аналогичном подходу теоремы 1. Умножив уравнение (13) на $z^{j+1}\tau$ и заменив j на s , суммируем по s от 1 до j и используем результаты из леммы 2 и леммы 3. Из-за сходства методологии подробное доказательство здесь опущено для краткости.

Результаты исследования. Чтобы оценить производительность численного метода и получить представление о его сходимости, проводится полный набор численных экспериментов. Основная цель состоит в том, чтобы проанализировать численные ошибки путем сравнения точного решения с вычисленным численным решением. Кроме того, исследуется порядок сходимости численного алгоритма в зависимости от размера шага τ . Экспериментальные порядки сходимости (ЕОС) рассчитываются с использованием следующих соотношений:

$$\text{ЕОС} = \log_{\tau_1/\tau_2} \frac{E(\tau_1)}{E(\tau_2)},$$

где максимальная абсолютная погрешность $E(\tau)$ вычисляется по формуле:

$$E(\tau) = \max_{1 \leq j \leq N} |y(t_j) - y^j|,$$

с размером шага τ .

Пример 1. Рассмотрим модель (3) с точным аналитическим решением, заданным следующим выражением: $y(t) = t^2 + t^{3+\alpha}$. Соответствующий исходный член и начальные условия для данной задачи могут быть получены следующим образом:

$$f(t) = 2t + (3 + \alpha)t^{2+\alpha} + \kappa \frac{2}{\Gamma(3 + \alpha)} t^{\alpha+2} + \kappa \frac{\Gamma(4 + \alpha)}{\Gamma(4 + 2\alpha)} t^{3+2\alpha}, y(0) = y_t(0) = 0.$$

Задача решается с помощью представленной разностной схемы (10).

В таблице 1 представлены результаты, полученные при варьировании значений длины шага τ , отображающие максимальную погрешность и экспериментальные порядки сходимости (ЭПС) для различных значений $\kappa=4$, в момент времени $T = 1$. Таблица показывает, что метод демонстрирует превосходную точность даже для очень малых размеров сетки, а ЭПС неизменно достигает ожидаемого значения 2 во всех случаях.

Приступаем к исследованию долговременной эффективности предложенного метода схемы с целью дальнейшей оценки точности и надежности схемы. В таблице 2 показаны максимальная погрешность и ЭПС для различных значений α при $\kappa = 2$ в момент времени $T = 10$. Таблица является дополнительным доказательством высокой точности метода даже для длительных временных интервалов и очень малых размеров ячеек. Значение ЭПС неизменно остается равным 2, что указывает на надежность метода в точном решении проблемы. Эти результаты подтверждают эффективность и надежность численной схемы авторов в точном решении рассматриваемой задачи в различных временных диапазонах.

Обсуждение и заключения. В этом исследовании представлен числовой аналог второго порядка для аппроксимации дробного интеграла Римана-Лиувилля и продемонстрирована его эффективность при решении класса обычных ДДИ. Преобразовав исходные затухания в модель, которая включает дробный интеграл Римана-Лиувилля, авторы смогли расширить применимость предложенного ими метода для решения модели. Кроме того, они установили априорные оценки для решения, которые демонстрируют уникальность и непрерывную зависимость

его от входных данных. Также исследован анализ устойчивости предложенной разностной схемы. Проведено численное моделирование для оценки точности, эффективности и долгосрочной надежности предложенного метода. Моделирование демонстрирует эффективность метода при решении ДДИ даже для длительных временных интервалов и с небольшими размерами ячеек. Также исследован экспериментальный порядок сходимости, подтверждающий ожидаемый экспериментальный порядок сходимости, равный 2 для различных случаев.

Таблица 1

Максимальная погрешность и экспериментальные порядки сходимости для примера 1 при уменьшении размера временной сетки $\tau = T/N$, для $\alpha = 0,1; 0,5; 0,9$, при $\kappa = 4$, в момент времени $T = 1$

$\tau = T/N$	$\alpha = 0,1$		$\alpha = 0,5$		$\alpha = 0,9$	
N	$E(\tau)$	CO	$E(\tau)$	CO	$E(\tau)$	CO
80	2,1178e-04		2,2420e-04		3,9043e-04	
160	5,4976e-05	1,9457	5,7336e-05	1,9673	9,8674e-05	1,9843
320	1,4126e-05	1,9604	1,4501e-05	1,9833	2,4799e-05	1,9924
640	3,5885e-06	1,9769	3,6458e-06	1,9918	6,2161e-06	1,9962
1280	9,0518e-07	1,9871	9,1379e-07	1,9963	1,5560e-06	1,9981
2560	2,2750e-07	1,9923	2,2870e-07	1,9984	3,8926e-07	1,9991

Таблица 2

Долговременная производительность предложенной схемы для решения примера 1 с уменьшением размера временной сетки $\tau = T/N$, для $\alpha = 0,1; 0,5; 0,9$, при $\kappa = 2$, в момент времени $T = 10$

	$\alpha = 0,1$		$\alpha = 0,5$		$\alpha = 0,9$	
N	$E(\tau)$	CO	$E(\tau)$	CO	$E(\tau)$	CO
80	3,1602e-02		3,1247e-01		1,1045e+00	
160	8,8350e-03	1,8387	7,9023e-02	1,9834	2,7524e-01	2,0046
320	2,4257e-03	1,8648	1,9915e-02	1,9884	6,8737e-02	2,0016
640	6,5691e-04	1,8846	5,0069e-03	1,9919	1,7177e-02	2,0006
1280	1,7599e-04	1,9002	1,2567e-03	1,9943	4,2936e-03	2,0002
2560	4,6740e-05	1,9128	3,1505e-04	1,9960	1,0733e-03	2,0001

Список литературы

1. Asl M.S., Javidi M., Yan Y. High order algorithms for numerical solution of fractional differential equations. *Advances in Difference Equations*. SpringerOpen. 2021;2021(1):1–23.
2. Asl M.S., Javidi M. An improved PC scheme for nonlinear fractional differential equations: Error and stability analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Elsevier; 2017;324:101–117.
3. Roohi M., Aghababa P., Haghighi A.R. Switching adaptive controllers to control fractional-order complex systems with unknown structure and input nonlinearities. *Complexity*. Wiley Online Library; 2015;21(2):211–223.
4. Taheri M., et al. A Finite-time Sliding Mode Control Technique for Synchronization Chaotic Fractional-order Laser Systems With Application on Encryption of Color Images. *Optik*. Elsevier; 2023:170948.
5. Zaslavsky G., Edelman M., Tarasov V. Dynamics of the chain of forced oscillators with long-range interaction: From synchronization to chaos. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. American Institute of Physics. 2007;17(4):043124.
6. Alikhanov A.A., Huang C. A high-order L2 type difference scheme for the time-fractional diffusion equation. *Applied Mathematics and Computation*. Elsevier; 2021;411:126545.
7. Asl M.S., Javidi M. Novel algorithms to estimate nonlinear FDEs: applied to fractional order nutrient-phytoplankton-zooplankton system. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Elsevier; 2018;339:193–207.
8. Kumar V., Kumari N. Stability and bifurcation analysis of fractional-order delayed prey–predator system and the effect of diffusion. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. World Scientific; 2022;32(01): 2250002.
9. Deng W. Short memory principle and a predictor–corrector approach for fractional differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Elsevier; 2007;206(1):174–188.
10. Xie J., Deng D., Zheng H. Fourth-order difference solvers for nonlinear delayed fractional sub-diffusion equations with variable coefficients. *International Journal of Modelling and Simulation*. Taylor & Francis; 2017;37(4):241–251.
11. Li C., He C. Fractional-order diffusion coupled with integer-order diffusion for multiplicative noise removal. *Computers and Mathematics with Applications*. Elsevier; 2023;136:34–43.

12. Xu Y., et al. A novel meshless method based on RBF for solving variable-order time fractional advection-diffusion-reaction equation in linear or nonlinear systems. *Computers and Mathematics with Applications*. Elsevier; 2023;142:107–120.
13. Khibiev A., Alikhanov A. A., Huang C. A second-order difference scheme for generalized time-fractional diffusion equation with smooth solutions. *Computational Methods in Applied Mathematics*. 2023.
14. Yang J., et al. Numerical solution of fractional diffusion-wave equation based on fractional multistep method. *Applied Mathematical Modelling*. Elsevier; 2014;38(14):3652–3661.
15. Sun Z., Wu X. A fully discrete difference scheme for a diffusion-wave system. *Applied Numerical Mathematics*. Elsevier; 2006;56(2):193–209.
16. Huang J., et al. Alternating direction implicit schemes for the two-dimensional time fractional nonlinear super-diffusion equations. *Journal of Computational Mathematics*. 2019;37(3).
17. Asl M.S., Javidi M., Ahmad B. New predictor-corrector approach for nonlinear fractional differential equations: error analysis and stability. *Journal of Applied Analysis and Computation*. 2019;9(4):1527–1557.
18. Asl M.S., Javidi M. Numerical evaluation of order six for fractional differential equations: stability and convergence. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*. The Belgian Mathematical Society; 2019;26(2):203–221.
19. Vabishchevich P.N. Numerical solution of the Cauchy problem for Volterra integrodifferential equations with difference kernels. *Applied Numerical Mathematics*. Elsevier; 2022;174:177–190.
20. McLean W.V. Thomée Numerical solution of an evolution equation with a positive-type memory term. *The ANZIAM Journal*. Cambridge University Press; 1993;35(1):23–70.

References

1. Asl MS, Javidi M, Yan Y. High order algorithms for numerical solution of fractional differential equations. *Advances in Difference Equations*. SpringerOpen. 2021;2021(1):1–23.
2. Asl MS, Javidi M. An improved PC scheme for nonlinear fractional differential equations: Error and stability analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Elsevier; 2017;324:101–117.
3. Roohi M, Aghababa P, Haghighi AR. Switching adaptive controllers to control fractional-order complex systems with unknown structure and input nonlinearities. *Complexity*. Wiley Online Library; 2015;21(2):211–223.
4. Taheri M, et al. A Finite-time Sliding Mode Control Technique for Synchronization Chaotic Fractional-order Laser Systems With Application on Encryption of Color Images. *Optik*. Elsevier; 2023:170948.
5. Zaslavsky G, Edelman M, Tarasov V. Dynamics of the chain of forced oscillators with long-range interaction: From synchronization to chaos. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. American Institute of Physics. 2007;17(4):043124.
6. Alikhanov AA, Huang C. A high-order L2 type difference scheme for the time-fractional diffusion equation. *Applied Mathematics and Computation*. Elsevier; 2021;411:126545.
7. Asl MS, Javidi M. Novel algorithms to estimate nonlinear FDEs: applied to fractional order nutrient-phytoplankton-zooplankton system. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Elsevier; 2018;339:193–207.
8. Kumar V, Kumari N. Stability and bifurcation analysis of fractional-order delayed prey–predator system and the effect of diffusion. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. World Scientific; 2022;32(01): 2250002.
9. Deng W. Short memory principle and a predictor–corrector approach for fractional differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Elsevier; 2007;206(1):174–188.
10. Xie J, Deng D, Zheng H. Fourth-order difference solvers for nonlinear delayed fractional sub-diffusion equations with variable coefficients. *International Journal of Modelling and Simulation*. Taylor & Francis; 2017;37(4):241–251.
11. Li C, He C. Fractional-order diffusion coupled with integer-order diffusion for multiplicative noise removal. *Computers and Mathematics with Applications*. Elsevier; 2023;136:34–43.
12. Xu Y, et al. A novel meshless method based on RBF for solving variable-order time fractional advection-diffusion-reaction equation in linear or nonlinear systems. *Computers and Mathematics with Applications*. Elsevier; 2023;142:107–120.
13. Khibiev A, Alikhanov AA, Huang C. A second-order difference scheme for generalized time-fractional diffusion equation with smooth solutions. *Computational Methods in Applied Mathematics*. 2023.
14. Yang J, et al. Numerical solution of fractional diffusion-wave equation based on fractional multistep method. *Applied Mathematical Modelling*. Elsevier; 2014;38(14):3652–3661.
15. Sun Z, Wu X. A fully discrete difference scheme for a diffusion-wave system. *Applied Numerical Mathematics*. Elsevier; 2006;56(2):193–209.
16. Huang J, et al. Alternating direction implicit schemes for the two-dimensional time fractional nonlinear super-diffusion equations. *Journal of Computational Mathematics*. 2019;37(3).
17. Asl MS, Javidi M, Ahmad B. New predictor-corrector approach for nonlinear fractional differential equations: error analysis and stability. *Journal of Applied Analysis and Computation*. 2019;9(4):1527–1557.
18. Asl MS, Javidi M. Numerical evaluation of order six for fractional differential equations: stability and convergence. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*. The Belgian Mathematical Society; 2019;26(2):203–221.

19. Vabishchevich PN. Numerical solution of the Cauchy problem for Volterra integrodifferential equations with difference kernels. *Applied Numerical Mathematics*. Elsevier; 2022;174:177–190.

20. McLean WV. Thomée Numerical solution of an evolution equation with a positive-type memory term. *The ANZIAM Journal*. Cambridge University Press; 1993;35(1):23–70.

Об авторах:

Хибиев Асланбек Хизирович, стажер-исследователь отдела вычислительных методов, Северо-Кавказский центр математических исследований, Северо-Кавказский федеральный университет (355017, РФ, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 1), [ORCID](#), akhibiev@gmail.com

Алиханов Анатолий Алиевич, проректор по НИР И ИД, доцент, Северо-Кавказский центр математических исследований, Северо-Кавказский федеральный университет (355017, РФ, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 1), кандидат физико-математических наук, [ScopusID](#), [ORCID](#), aaalikhanov@gmail.com

Шахбазисль Мохаммад, научный сотрудник, Северо-Кавказский центр математических исследований, Северо-Кавказский федеральный университет (355017, РФ, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 1)

Чернобровкин Руслан Алексеевич, лаборант отдела вычислительных методов, Северо-Кавказский центр математических исследований, Северо-Кавказский федеральный университет (355017, РФ, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 1)

Поступила в редакцию 06.04.2023.

Поступила после рецензирования 19.05.2023.

Принята к публикации 22.05.2023.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Aslanbek Kh Khibiev, Trainee researcher of the Computational Methods, Department North Caucasus Center for Mathematical Research, North Caucasus Federal University (1, Pushkin St., Stavropol, 355017, RF), [ORCID](#), akhibiev@gmail.com

Anatoly A Alikhanov, Vice-Rector for Research and Innovation, Associate Professor, North Caucasus Center for Mathematical Research, North Caucasus Federal University (1, Pushkin St., Stavropol, 355017, RF), Candidate of Physical and Mathematical Sciences, [ScopusID](#), [ORCID](#), aaalikhanov@gmail.com

Mohammad Shahbaziasl, Researcher, North Caucasus Center for Mathematical Research, North Caucasus Federal University (1, Pushkin St., Stavropol, 355017, RF)

Ruslan A Chernobrovkin, Laboratory Assistant of the Computational Methods Department, North Caucasus Center for Mathematical Research, North Caucasus Federal University (1, Pushkin St., Stavropol, 355017, RF)

Received 06.04.2023.

Revised 19.05.2023.

Accepted 22.05.2023.

Conflict of interest statement

The authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.