

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ MATHEMATICAL MODELING



УДК 51-77

Обзорная статья

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-40-51>


Оптимальное управление в нейробиологических моделях информационного противоборства

А.П. Петров

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Российская Федерация, г. Москва, Миусская пл., 4

✉ petrov.alexander.p@yandex.ru

Аннотация

Рассматриваются две нейробиологические модели информационного противоборства. Для каждой из них предложено решение задачи оптимального управления. При этом предполагается, что Планировщик кампании ассоциируется с управляющим органом одной из противоборствующих партий и распределяет во времени доступный ему объем пропагандистского вещания. Таким образом, интенсивность пропагандистского вещания одной из сторон противоборства имеет смысл управления.

Целевой функционал отражает стремление Планировщика максимизировать численность своих сторонников в заданный момент времени при минимизации затрат в течение кампании.

Исследование задачи управления проводится аналитически, с помощью принципа максимума Понтрягина.

Получено оптимальное управление для различных комбинаций параметров.

Стратегия пропагандистской кампании, в зависимости от параметров системы, может быть как «нарастающей» (т. е. проходящей с неубывающей интенсивностью пропагандистского вещания), так и «убывающей» (проходящей с невозрастающей интенсивностью). При «нарастающей» кампании информация предоставляется только на финише, с тем, чтобы впечатление от этой информации не успело потерять силу. В основе стратегии «убывающей» кампании — межличностное общение. Сначала нужно убедить в своей позиции как можно больше индивидов, которые затем будут пересказывать ее собеседникам. Параметры системы определяют баланс между этими типами стратегий.

Ключевые слова: математическая модель, информационное противоборство, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина.

Для цитирования. Петров А.П. Оптимальное управление в нейробиологических моделях информационного противоборства. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):40–51. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-40-51>

Review article

Optimal Control in Neurological Models of Information Warfare

Alexander P Petrov

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, 4, Miusskaya Sq., Moscow, Russian Federation

✉ petrov.alexander.p@yandex.ru

Abstract

Two neurological models of information warfare are considered. For each of them, the optimal control problem is considered, assuming that the Campaign Planner is associated with the governing body of one of the belligerent parties and distributes the volume of propaganda broadcasting in time.

The cost functional reflects the Planner's desire to maximize the number of their supporters at a given time while minimizing costs during the campaign.

The problem is studied analytically, using the Pontryagin's maximum principle.

Optimal control is obtained for various combinations of parameters.

The "increasing" type of campaign is aimed at ensuring that for most individuals information is received immediately before the finish line, and that the impression of this information does not have time to weaken. In contrast, the strategy of a "decreasing" campaign implies a high role of interpersonal communication: it is based on convincing a significant number of individuals of their position at the very beginning, who will then retell it to their interlocutors.

Keywords: mathematical model, information warfare, optimal control, Pontryagin's maximum principle.

For citation. Petrov AP. Optimal control in neurological models of information warfare. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):40–51. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-40-51>

В статье рассматривается следующая задача. Рассмотрим информационную войну между двумя сторонами. Ассоциируя себя с одной из них, попытаемся максимизировать число наших сторонников в определенный момент времени, минимизируя при этом затраты на вещание в СМИ. Этот момент времени можно рассматривать как дату выборов. Вопрос в том, чтобы определить наиболее выгодную стратегию: например, следует ли начинать кампанию с низкой интенсивности пропаганды в средствах массовой информации и усиливать ее с течением времени. Или, наоборот, нужно начать кампанию с интенсивной пропаганды, а затем сократить ее. Или оптимальна какая-то более сложная, немонотонная стратегия. Для простоты предположим, что пропаганда другой стороны имеет постоянную интенсивность.

Для изучения данной проблемы в настоящей работе используется нейробиологическая модель информационного противоборства в социуме [1]. Заметим, что данная модель оперирует входными параметрами, некоторые из которых весьма трудно поддаются оцениванию. Поэтому с прикладной точки зрения анализ нацелен не столько на получение количественных результатов, сколько на выявление качественных закономерностей. Для этих выявленных закономерностей представлена прозрачная социологическая трактовка, допускающая практическое применение результатов. Полученные при этом выводы не противоречат интуиции, но являются, по мнению авторов, неочевидными и вряд ли могли бы быть получены на основании соображений общего характера, т. е. без применения методов математического моделирования.

Содержательно данная работа относится к такому направлению, как математическое моделирование информационных процессов в социуме [2–4]. В данной области информационные процессы изучаются методами анализа текстов [5, 6], сетевого анализа и динамики мнений [7–11] и т. д. При этом задача управления в постановке настоящей работы ранее не рассматривалась.

Модель информационного противоборства. Нейробиологическая модель информационного противоборства в социуме [1] (и ее применение [3]) основана на традиционной нейробиологической схеме [12, 13] и имеет вид:

$$\frac{d\psi}{dt} = c \left(2 \int_{-\psi}^{\infty} n(\varphi) d\varphi - N_0 \right) + u - b - a\psi. \quad (1)$$

Здесь параметры a , b , c , u положительны и их содержательный смысл определен в теории Рашевского [12, 13]. Они зависят как от стимулов, которые исходят из социальной среды, так и от внутренних параметров нейробиологической системы. Для целей настоящей работы важно, что u и b связаны с интенсивностью масс-медиа, поддерживающих Правую и Левую партии соответственно.

В самых общих чертах социологический смысл модели выбора позиций и уравнения (1) можно пояснить следующим образом. Предполагается, что в обществе, состоящем из N_0 индивидов, происходит информационная борьба двух сторон (партий):левой и Правой. Каждый индивид принимает решение о поддержке той или иной партии на основе своей установки и стимулов, поступающих из социальной среды.

Далее поочередно рассмотрим, что представляют собой эти стимулы и установка, а затем опишем механизм принятия решений.

Под стимулами в модели авторов понимается информационное влияние на индивида со стороны СМИ и других индивидов. Под этим влиянием с течением времени индивид может менять свою партийную принадлежность. При этом он и сам создает стимулы для других индивидов тем, что агитирует их за свою текущую партию. В результате возникает социальная динамика, описываемая уравнением (1). Если интенсивность пропаганды СМИ постоянна, то динамический процесс завершается формированием стационарного состояния. Довольно часто возможны несколько стационарных состояний, в этом случае от начального условия зависит то, какое из них достигается. Далее формулируется задача оптимального управления, в которой Планировщик отождествляется с одной из сторон противоборства (с Правой партией), причем интенсивность ее пропаганды через СМИ принимается в качестве управляющего параметра, а целевая функция учитывает эту интенсивность (как показатель расходов) и количество сторонников этой партии на заданный момент времени (окончание противоборства).

Теперь рассмотрим модель более подробно.

Каждый из N_0 индивидов характеризуется установкой (attitude), т. е. своей предрасположенностью φ к поддержке той или иной партии, связанной с его фундаментальной принадлежностью к определенной идеологии, предыдущим опытом, социальным состоянием и т. д. Эта величина предполагается постоянной на отрезке времени, в течение которого длится информационная борьба.

Тем самым предполагается, что имеется постоянное во времени, экзогенно заданное распределение индивидов по оси установок $n(\varphi)$, при этом отрицательная установка соответствует поддержке первой партии, положительная — поддержке второй партии, а абсолютное значение отражает силу поддержки.

Здесь функция $n(\varphi)$ равна нулю вне отрезка при $\varphi_{\min} \leq \varphi \leq \varphi_{\max}$ и далее будем полагать, что на этом отрезке функция $n(\varphi)$ положительна, кроме, быть может, конечного количества изолированных точек, в которых она обращается в ноль.

Очевидно:

$$N_0 = \int_{-\infty}^{\infty} n(\varphi) d\varphi.$$

Правило, по которому индивид относит себя к той или иной партии, можно выразить следующим образом: если сумма стимула и установки отрицательна, то индивид относит себя клевой партии, если положительна — к правой.

Рассматриваемый в данной работе вариант модели предполагает, что влияние масс-медиа равномерно распределено по обществу, в частности, это означает, что не учитывается селективное пользование СМИ (например, «консерваторы читают только консервативные газеты, либералы читают только либеральные газеты»). Стимул в поддержку некоторой партии, связанный с агитацией, проводимой сторонниками этой партии, принимается пропорциональным ее текущей численности.

Численности сторонников левой (L) и правой (R) партий равны, соответственно:

$$L(t) = \int_{\varphi_{\min}}^{-\psi(t)} n(\varphi) d\varphi, \quad (2.1)$$

$$R(t) = \int_{-\psi(t)}^{\varphi_{\max}} n(\varphi) d\varphi. \quad (2.2)$$

Начальное условие $\psi(0)$, необходимое для однозначного определения $\psi(t)$, находится из распределения индивидов между партиями в момент $t=0$ и имеет вид:

$$L(0) = \int_{-\psi(0)}^{\varphi_{\max}} n(\varphi) d\varphi \quad (3)$$

или, что то же самое:

$$R(0) = \int_{\varphi_{\min}}^{-\psi(0)} n(\varphi) d\varphi.$$

Здесь $L(0)$ (а также $R(0)$) является наблюдаемой величиной и каждое из этих равенств можно рассматривать как уравнение для $\psi(0)$, имеющее единственное решение, если функция $N(\varphi)$ положительна почти при всех φ .

Очевидно, $\psi(0) = \varphi_{\max}$, если $X(0) = 0$ и $\psi(0) = \varphi_{\min}$, если $Y(0) = 0$. Реалистическое предположение состоит в том, что $0 < X(0) < N_0$, так что $\varphi_{\min} < \psi(0) < \varphi_{\max}$.

Заметим, что, функция $\psi(t)$ может принимать значения в более широком диапазоне, вплоть до $-\infty < \psi < \infty$. Например, неравенство $\psi(t) > \varphi_{\max}$ соответствует ситуации, когда абсолютно все члены социума поддерживают первую партию, т. е. ее преимущество в интенсивности пропаганды настолько велико, что оно перевешивает установку даже самого радикального сторонника второй партии. Такая ситуация представляется малореалистичной. Поэтому в данном анализе будем выбирать области изменения параметров так, что $\varphi_{\min} < \psi(t) < \varphi_{\max}$ для всех $0 \leq t \leq T$.

Итак, функция $\psi(t)$ находится как решение начальной задачи (1), (3).

Рашевский [12, 13] анализировал стационарное уравнение, соответствующее (1) в случае $u=b=0$ (в терминах настоящей модели это соответствует процессу, проходящему в отсутствие пропаганды масс-медиа) и четной функции $n(\varphi)$. Он показал, что при достаточно малых значениях отношения c/a существует единственное стационарное решение, оно асимптотически устойчиво и соответствует равному распределению индивидов между партиями, т. е. $R(t) - L(t) \rightarrow 0$, при $t \rightarrow \infty$. Это соответствует тому случаю, когда реакцию каждого индивида существенно больше определяет его установка, чем мнение других индивидов. И, наоборот, при достаточно больших значениях c/a реакция индивида более определяется мнением других индивидов, чем его собственной

установкой. Вследствие этого равновесие между партиями неустойчиво: если одна из них имеет численное превосходство при $t=0$, то оно позволяет создать преимущество в силе стимула (т. е. в количестве агитирующих за нее индивидов), которое увеличивается с течением времени. В результате, устойчивые стационарные решения соответствуют ситуациям, в которых одна из партий приобретает существенное большинство. Именно такие случаи представляют наибольший интерес для анализа и именно им уделяется особое внимание в настоящей работе.

Постановка задачи управления. Будем рассматривать процесс информационного противоборства на временном интервале $(0;T)$, где экзогенно заданный момент времени T можно условно трактовать как «день выборов». При этом интенсивность u пропагандистского вещания Правой партии принимается в качестве управления и имеет ограничение:

$$0 \leq u \leq u_m. \quad (4)$$

Целевой функционал отражает стремление Планировщика максимизировать численность своих сторонников в момент времени T при минимизации затрат в течение кампании:

$$J = -\frac{k}{2} \int_0^T u^2 dt + R(T) \rightarrow \max,$$

т. е.:

$$J = -\frac{k}{2} \int_0^T u^2 dt + \int_{-\psi(T)}^{\varphi_{\max}} n(\varphi) d\varphi \rightarrow \max. \quad (5)$$

При этом ограничимся случаем равномерного симметричного распределения: $\varphi_{\max} = -\varphi_{\min} = \varphi_m$ и $N(\varphi) = \text{const} > 0$, при $-\varphi_m < \varphi < \varphi_m$.

Решение задачи управления

А. Основные уравнения. Гамильтониан задачи оптимального управления (1)–(5) имеет вид:

$$H(\psi, p, u) = \left[c \left(2 \int_{-\psi(t)}^{\varphi_m} n(\varphi) d\varphi - N_0 \right) + u - b - a\psi \right] p - \frac{ku^2}{2}.$$

Следовательно:

$$\frac{d\psi}{dt} = c \left(2 \int_{-\psi}^{\varphi_m} n(\varphi) d\varphi - N_0 \right) + u - b - a\psi, \quad (6)$$

$$\frac{dp}{dt} = [-2cn(-\psi) + a]p, \quad (7.1)$$

$$p(T) = n(-\psi(T)). \quad (7.2)$$

Ближайшая цель состоит в том, чтобы максимизировать гамильтониан по управлению. Имеем:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = p - ku.$$

Эта производная обращается в ноль при:

$$u = \frac{p}{k}.$$

С учетом ограничения (4) получаем, что оптимальное управление имеет вид:

$$u^* = \begin{cases} 0, & p < 0, \\ p/k, & 0 \leq p \leq ku_m, \\ u_m, & p > ku_m. \end{cases} \quad (8)$$

С учетом того, что авторы ограничились случаем равномерного симметричного распределения: $N(\varphi) = \text{const} > 0$, при $-\varphi_m < \varphi < \varphi_m$, откуда:

$$\int_{-\psi}^{\varphi_m} n(\varphi) d\varphi = \begin{cases} 0, & \psi < -\varphi_m, \\ \frac{N_0}{2} \left(1 + \frac{\psi}{\varphi_m} \right), & -\varphi_m \leq \psi \leq \varphi_m, \\ N_0, & \psi > \varphi_m. \end{cases}$$

Стационарные решения дифференциального уравнения (6) находятся из уравнения:

$$f(\psi) = a\psi. \quad (9)$$

где

$$f(\psi) = \begin{cases} -cN_0 + u - b, & \psi < -\varphi_m, \\ cN_0 \frac{\psi}{\varphi_m} + u - b, & -\varphi_m \leq \psi \leq \varphi_m, \\ cN_0 + u - b, & \psi > \varphi_m. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что, если $a > cN_0 / \varphi_m$, то уравнение (9) имеет одно решение для любого постоянного u . Если же $a < cN_0 / \varphi_m$, то оно имеет три корня при $a\varphi_m - cN_0 < u - b < -a\varphi_m + cN_0$ и только один корень при $u - b < a\varphi_m - cN_0$ или $-a\varphi_m + cN_0 < u - b$ (в данной работе не рассматривается особый случай $a = cN_0 / \varphi_m$).

Для краткости записи введем обозначение:

$$\lambda = a - \frac{cN_0}{\varphi_m}. \quad (10)$$

Задачи (6), (7) принимают вид:

$$\frac{d\psi}{dt} = \begin{cases} -cN_0 + u - b - a\psi, & \psi < -\varphi_m, \\ -\lambda\psi + u - b, & -\varphi_m \leq \psi \leq \varphi_m, \\ cN_0 + u - b - a\psi, & \psi > \varphi_m. \end{cases} \quad (11)$$

$$\frac{dp}{dt} = \begin{cases} ap, & \psi < -\varphi_m, \\ \lambda p, & -\varphi_m \leq \psi \leq \varphi_m, \\ ap, & \psi > \varphi_m. \end{cases} \quad (12)$$

С учетом рассматриваемого случая, когда $-\varphi_m \leq \psi(t) \leq \varphi_m$ для всех t , имеем:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda\psi + u - b, \quad \psi(0) = \psi^0, \quad (13)$$

$$\frac{dp}{dt} = \lambda p, \quad p(T) = N_0 / 2\varphi_m. \quad (14)$$

Решение задачи (14) для сопряженного уравнения имеет вид:

$$p(t) = \frac{N_0}{2\varphi_m} \exp[\lambda(t - T)]. \quad (15)$$

Таким образом, функция $p(t)$ либо строго возрастает (если $\lambda > 0$), либо строго убывает (если $\lambda < 0$), либо постоянна (если $\lambda = 0$). Рассмотрим первые два варианта последовательно.

Б. Строго возрастающая функция $p(t)$

Будем полагать, что:

$$a - cN_0 / \varphi_m > 0. \quad (16)$$

Тогда могут иметь место три случая (рис. 1).

Случай 1 (рис. 1 а): $ku_m \geq p(T)$, т. е.:

$$N_0 / 2\varphi_m \leq ku_m.$$

Случай 2 (рис. 1 б): $p(0) < ku_m < p(T)$, т. е.:

$$\frac{N_0}{2\varphi_m} \exp[-\lambda T] < ku_m < \frac{N_0}{2\varphi_m}.$$

Случай 3 (рис. 1 в): $ku_m \leq p(0)$, т. е.:

$$ku_m \leq \frac{N_0}{2\varphi_m} \exp[-\lambda T].$$

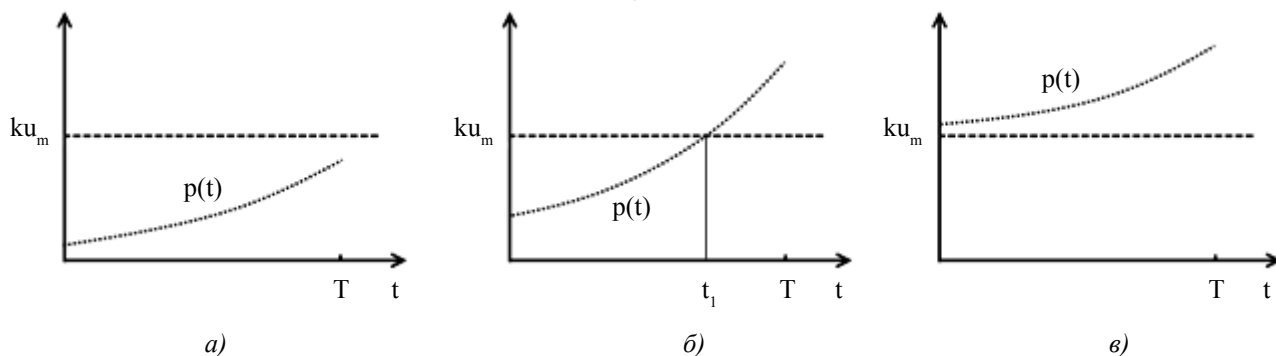


Рис. 1. Три варианта расположения функции $y=p(t)$ относительно прямой $y=ku_m$: случаи 1–3

Рассмотрим каждый из этих случаев.

Случай 1. $\lambda > 0$, $ku_m \geq p(T)$.

Тогда $p(t) \leq ku_m$ при всех $t \in [0; T]$. Тогда из формулы (8) следует, что:

$$u^*(t) = \frac{N_0}{2k\varphi_m} \exp[\lambda(t - T)]. \quad (17)$$

Подставляя это в (13), получаем:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda\psi + \frac{N_0}{2k\varphi_m} \exp[\lambda(t - T)] - b, \quad (18)$$

Решение этой задачи Коши имеет вид:

$$\psi(t) = \frac{N_0 \exp[\lambda(t - T)]}{4\lambda k\varphi_m} - \frac{b}{\lambda} + \left[\psi^0 - \frac{N_0 \exp[-\lambda T]}{4\lambda k\varphi_m} + \frac{b}{\lambda} \right] \exp[-\lambda t], \quad (19)$$

при $0 \leq t \leq T$.

Случай 2. $\lambda > 0$, $p(0) < ku_m < p(T)$.

Тогда существует точка $t_1 \in (0; T)$, такая, что $p(t_1) = ku_m$ (рис. 1 б). Другими словами, t_1 определяется путем приравнивания функции $p(t)$, даваемой выражением (15), к величине ku_m . Имеем для этой величины уравнение $N_0 / (2\varphi_m) \exp[\lambda(t_1 - T)] = ku_m$, т. е.:

$$t_1 = T - \frac{1}{\lambda} \ln \frac{N_0}{2\varphi_m ku_m}. \quad (20)$$

Вычисленное таким образом t_1 положительно ввиду условия $p(0) < ku_m < p(T)$, определяющего Случай 2 (неположительность t_1 означала бы, что $p(0) > ku_m$, т. е. имеет место Случай 3).

Для оптимального управления получаем:

$$u^* = \begin{cases} p(t)/k, & 0 \leq t \leq t_1, \\ u_m, & t_1 < t \leq 1. \end{cases}$$

Подставив $u=u^*$ в уравнение (13), получим для функции $\psi(t)$ задачу Коши с правой частью, заданной отдельно на отрезках $0 \leq t \leq t_1$ и $t_1 \leq t \leq 1$:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda\psi + \frac{N_0}{2k\varphi_m} \exp[\lambda(t - T)] - b, \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad \psi(0) = \psi^0, \quad (21)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda\psi + u_m - b, \quad t_1 \leq t \leq 1, \quad \psi(t_1 + 0) = \psi(t_1 - 0). \quad (22)$$

Последовательно решая задачи (21), (22), получаем:

$$\psi(t) = \frac{N_0 \exp[\lambda(t - T)]}{4\lambda k\varphi_m} - \frac{b}{\lambda} + \left[\psi^0 - \frac{N_0 \exp[-\lambda T]}{4\lambda k\varphi_m} + \frac{b}{\lambda} \right] \exp[-\lambda t], \quad 0 \leq t \leq t_1; \quad (23)$$

$$\psi(t) = \frac{u_m - b}{\lambda} + \left[\psi(t_1) - \frac{u_m - b}{\lambda} \right] \exp[-\lambda(t - t_1)], \quad t_1 \leq t \leq 1. \quad (24)$$

Случай 3. $\lambda > 0$, $ku_m \leq p(0)$.

В этом случае $p(t) \geq ku_m$ для всех $t \in [0; T]$, в частности $p(T) = N_0 / 2\varphi_m > ku_m$. Из (8) следует, что оптимальное управление тогда имеет вид:

$$u^*(t) = u_m, \quad t \in [0; T]. \quad (25)$$

Подставив $u=u^*$ в уравнение (13), получим для функции $\psi(t)$ задачу Коши:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda\psi + u_m - b, \quad \psi(0) = \psi^0,$$

решение которой имеет вид:

$$\psi(t) = \frac{u_m - b}{\alpha} + \left[\psi^0 - \frac{u_m - b}{\alpha} \right] \exp[-\alpha t]. \quad (26)$$

В. Строго убывающая функция $p(t)$

Будем полагать, что:

$$\lambda = a - cN_0 / \varphi_m < 0. \quad (27)$$

Для удобства перепишем формулу (15):

$$p(t) = \frac{N_0}{2\varphi_m} \exp[\lambda(t - T)].$$

Могут иметь место три случая (рис. 2).

Случай 4 (рис. 2 а): $ku_m \geq p(0)$, т. е.:

$$ku_m \geq \frac{N_0}{2\varphi_m} \exp[-\lambda T].$$

Случай 5 (рис. 2 б): $p(T) < ku_m < p(0)$, т. е.:

$$\frac{N_0}{2\varphi_m} < ku_m < \frac{N_0}{2\varphi_m} \exp[-\lambda T].$$

Случай 6 (рис. 2 в): $ku_m \leq p(T)$, т. е.:

$$ku_m \leq \frac{N_0}{2\varphi_m}.$$

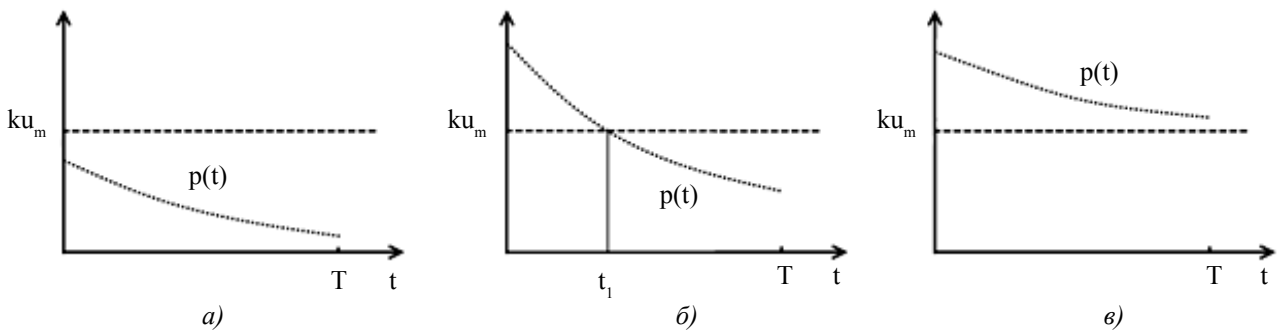


Рис. 2. Три варианта расположения функции $y=p(t)$ относительно прямой $y=ku_m$: случаи 4–6

Рассмотрим эти случаи последовательно.

Случай 4. $\lambda < 0$, $p(0) \leq ku_m$.

Таким образом, $\frac{N_0}{2\varphi_m} \exp[-\lambda T] \leq ku_m$. В этом случае $p(t) \leq ku_m$ для всех $t \in [0; T]$. Тогда из (8) следует, что:

$$u^*(t) = \frac{N_0}{2k\varphi_m} \exp[\lambda(t - T)]. \quad (28)$$

Подставив $u=u^*$ в уравнение (13), получим для функции $\psi(t)$ задачу Коши:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda\psi + \frac{N_0}{2k\varphi_m} \exp[\lambda(t - T)] - b, \quad \psi(0) = \psi^0. \quad (29)$$

Ее решение при $0 \leq t \leq T$ имеет вид:

$$\psi(t) = \frac{N_0 \exp[\lambda(t - T)]}{4\lambda k\varphi_m} - \frac{b}{\lambda} + \left[\psi^0 - \frac{N_0 \exp[-\lambda T]}{2\lambda k\varphi_m} + \frac{b}{\lambda} \right] \exp[-\lambda t]. \quad (30)$$

Случай 5. $\lambda < 0$, $p(T) < ku_m < p(0)$.

Таким образом, $N_0 / (2\varphi_m) < ku_m < N_0 / (2\varphi_m) \exp[-\lambda T]$. Тогда существует точка $t_1 \in (0; T)$, такая, что $p(t_1) = ku_m$. Т. е. t_1 определяется путем приравнивания функции $p(t)$, даваемой формулой (15), к величине ku_m . Получим:

$$t_1 = T - \frac{1}{\lambda} \ln \frac{N_0}{2\varphi_m ku_m}. \quad (31)$$

Тогда оптимальное управление имеет вид:

$$u^* = \begin{cases} u_m, & 0 \leq t \leq t_1, \\ p(t)/k, & t_1 < t \leq T. \end{cases} \quad (32)$$

Подставим это в (13). Получим:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda\psi + u_m - b, \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad \psi(0) = \psi^0. \quad (33)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda\psi + \frac{N_0}{2k\varphi_m} \exp[\lambda(t - T)] - b, \quad t_1 \leq t \leq T, \quad \psi(t_1 + 0) = \psi(t_1 - 0). \quad (34)$$

Решив данные задачи на соответствующих интервалах времени, получаем:

$$\psi(t) = \frac{u_m - b}{\lambda} + \left[\psi^0 - \frac{u_m - b}{\lambda} \right] \exp[-\lambda t], \quad (35)$$

$$\psi = \left\{ \frac{\frac{N_0}{2k\phi_m} \exp[\alpha(t - T)]}{2\alpha} - \frac{b}{a} \right\} + C \exp[-\alpha(t - T)], \quad (36)$$

где

$$C = \frac{u_m - b}{\alpha} \exp[\alpha(t_1 - T)] + \left[\psi^0 - \frac{u_m - b}{\alpha} \right] \exp[-\alpha T] - \exp[\alpha(t_1 - T)] \left\{ \frac{N_0 \exp[\alpha(t_1 - T)]}{4\alpha k\phi_m} - \frac{b}{\alpha} \right\}. \quad (37)$$

Случай 6. $\lambda < 0$, $ku_m \leq p(T)$.

В этом случае $p(t)/k \geq u_m$ для всех $t \in [0; T]$. Из (8) следует, что оптимальное управление имеет вид:

$$u^*(t) = u_m \text{ для всех } t \in [0; T]. \quad (38)$$

Подставив это в (13), получаем задачу Коши:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda\psi + u_m - b, \quad \psi(0) = \psi^0, \quad (39)$$

решением которой является функция:

$$\psi(t) = \frac{u_m - b}{\alpha} + \left[\psi^0 - \frac{u_m - b}{\alpha} \right] \exp[-\alpha t]. \quad (40)$$

Основные выводы настоящего раздела:

– при достаточно высоких значениях параметра релаксации a и/или достаточно малых значениях интенсивности передачи информации при межличностной коммуникации (параметр c) оптимальная стратегия является неубывающей (рис. 1);

– в обратном случае оптимальная стратегия является невозрастающей (рис. 2).

Расширенная модель: социум, состоящий из двух групп. Данный раздел посвящен анализу модели, рассматривающей социум более подробно по сравнению с моделью из предыдущего раздела. Основная цель — установить, сохраняется ли для этой более сложной модели вывод предыдущего раздела о влиянии параметров a , c на характер оптимальной кампании.

Модель имеет вид:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = f_1(\psi_1, \psi_2, u) - a\psi_1, \quad (41)$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = f_2(\psi_1, \psi_2, u) - a\psi_2, \quad (42)$$

$$J(n, u) = -\frac{k}{2} \int_0^T u^2 dt + \int_{-\psi_1(T)}^{\phi_m} n_1(\phi) d\phi + \int_{-\psi_2(T)}^{\phi_m} n_2(\phi) d\phi \rightarrow \max, \quad (43)$$

где

$$f_1(\psi_1, \psi_2, u) = c \left[\gamma \left(2 \int_{-\psi_1}^{\phi_m} n_1(\phi) d\phi - N_1 \right) + (1 - \gamma) \left(2 \int_{-\psi_2}^{\phi_m} n_2(\phi) d\phi - N_2 \right) \right] + (u - b),$$

$$f_2(\psi_1, \psi_2, u) = c \left[(1 - \gamma) \left(2 \int_{-\psi_1}^{\phi_m} n_1(\phi) d\phi - N_1 \right) + \gamma \left(2 \int_{-\psi_2}^{\phi_m} n_2(\phi) d\phi - N_2 \right) \right] + (u - b)$$

и по-прежнему имеет место ограничение:

$$0 \leq u \leq u_m. \quad (44)$$

Здесь предполагается, что система состоит из двух групп индивидов. Каждая из них характеризуется своим распределением $n_1(\phi)$, $n_2(\phi)$. При этом каждый индивид более общается с членами своей группы, чем чужой, что описывается параметром γ (при этом $\gamma=1$ соответствует тому, что межгрупповая коммуникация отсутствует,

а $\gamma=0,5$ соответствует однородной коммуникации, когда группы фактически отсутствуют. Далее будем полагать, что $0,5 < \gamma < 1$). Обозначим численность первой группы через N_1 , численность второй группы — через N_2 . Положим, что распределения индивидов по установке внутри каждой из групп аналогичны распределению из модели, рассмотренной в предыдущем разделе. Другими словами, распределения являются равномерными на некотором экзогенно заданном интервале $(-\varphi_m, \varphi_m)$, так что:

$$\int_{-\psi}^{\varphi_m} n_i(\varphi) d\varphi = \begin{cases} 0, & \psi < -\varphi_m, \\ \frac{N_i}{2} \left(1 + \frac{\psi}{\varphi_m} \right), & -\varphi_m \leq \psi \leq \varphi_m, \\ N_i, & \psi > \varphi_m, \end{cases}$$

(здесь и в формулах (45): $i=1,2$). Имеем для численностей сторонников Правой илевой партий в первой и группах:

$$R_i(t) = \int_{-\psi_i(t)}^{\varphi_m} n_i(\varphi) d\varphi, \quad (45.1)$$

$$L_i(t) = \int_{-\varphi_m}^{-\psi_i(t)} n_i(\varphi) d\varphi. \quad (45.2)$$

Кроме того, здесь предполагается, что группы в равной степени подвержены медийной пропаганде каждой из партий.

С учетом выбранного вида функций $f_i(\psi_1, \psi_2, u)$, $n_i(\varphi)$ формулы (41)–(43) принимают вид:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = c \left[\gamma N_1 \frac{\psi_1}{\varphi_m} + (1-\gamma) N_2 \frac{\psi_2}{\varphi_m} \right] + (u-b) - a\psi_1, \quad -\varphi_m \leq \psi_1 \leq \varphi_m, \quad (46)$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = c \left[(1-\gamma) N_1 \frac{\psi_1}{\varphi_m} + \gamma N_2 \frac{\psi_2}{\varphi_m} \right] + (u-b) - a\psi_2, \quad -\varphi_m \leq \psi_2 \leq \varphi_m, \quad (47)$$

$$J(n, u) = -\frac{k}{2} \int_0^T u^2 dt + \frac{N_1}{2} \frac{\varphi_m + \psi_1(T)}{\varphi_m} + \frac{N_2}{2} \frac{\varphi_m + \psi_2(T)}{\varphi_m} \rightarrow \max. \quad (48)$$

Гамильтониан имеет вид:

$$H(\psi_1, \psi_2, p_1, p_2, u) = \left\{ c \left[\gamma N_1 \frac{\psi_1}{\varphi_m} + (1-\gamma) N_2 \frac{\psi_2}{\varphi_m} \right] + (u-b) - a\psi_1 \right\} p_1 + \\ + \left\{ c \left[(1-\gamma) N_1 \frac{\psi_1}{\varphi_m} + \gamma N_2 \frac{\psi_2}{\varphi_m} \right] + (u-b) - a\psi_2 \right\} p_2 - \frac{ku^2}{2}.$$

Ближайшая цель состоит в том, чтобы максимизировать гамильтониан по управлению. Здесь:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = p_1 + p_2 - ku.$$

Эта функция имеет максимум при:

$$u = \frac{p_1 + p_2}{k}.$$

С учетом ограничения (44) получаем оптимальное управление, которое имеет вид:

$$u^* = \begin{cases} 0, & p_1 + p_2 < 0, \\ (p_1 + p_2)/k, & 0 \leq p_1 + p_2 \leq ku_m, \\ u_m, & p_1 + p_2 > ku_m. \end{cases} \quad (49)$$

Сопряженная система имеет вид:

$$\frac{dp_1}{dt} = -\left(\frac{\gamma c N_1}{\varphi_m} - a \right) p_1 - \frac{(1-\gamma) c N_1}{\varphi_m} p_2, \quad p_1(T) = \frac{N_1}{2\varphi_m}, \\ \frac{dp_2}{dt} = -\frac{(1-\gamma) c N_2}{\varphi_m} p_1 - \left(\frac{\gamma c N_2}{\varphi_m} - a \right) p_2, \quad p_2(T) = \frac{N_2}{2\varphi_m}.$$

Нетрудно видеть, что ввиду положительности значений $p_1(T)$, $p_2(T)$ функции $p_1(t)$, $p_2(t)$ положительны при $0 \leq t \leq T$. Очевидно также, что каждая из производных dp_1/dt , dp_2/dt положительна при достаточно больших значениях параметра a и/или малых значениях параметра c и отрицательна в обратном случае. Следовательно, оптимальное управление, даваемое формулой (49), является неубывающим при достаточно высоких значениях параметра релаксации a и невозрастающим при достаточно малых его значениях. Тем самым модель данного раздела сохраняет основное свойство более простой модели, рассмотренной в предыдущем разделе.

Дадим содержательную трактовку полученным результатам. Из полученных формул для обеих рассмотренных моделей следует, что параметры влияют на оптимальную стратегию следующим образом:

- параметр релаксации a : большие значения способствуют нарастающей кампании, малые значения — убывающей;
- продолжительность противоборства T и интенсивность b вещания оппонирующей партии не влияет на выбор стратегии (при условии, что эта интенсивность является постоянной);
- интенсивность передачи информации через межличностную коммуникацию (параметр c), численность социума, а также консолидированность группы параметр $\varphi_{\max}$: большие значения способствуют убывающей кампании, малые значения — нарастающей.

Информация распространяется через СМИ и путем межличностной коммуникации (слухов): от индивида к индивиду. При этом влияние информации на конкретного индивида после того, как он ее получит, постепенно уменьшается, поэтому он может быть «перевербован» более свежей информацией противника.

Соответственно, «нарастающая» кампания ориентирована на то, чтобы для большинства индивидов информация была получена непосредственно перед финишем, а впечатление от нее не успело ослабнуть. Обратная сторона такой стратегии состоит в том, индивиды не успеют широко распространить полученную информацию «из уст в уста», ведь каждый акт межличностной коммуникации требует определенного времени. В противоположность этому, стратегия «убывающей» кампании подразумевает эффективную роль межличностного взаимодействия и основана на том, чтобы в самом ее начале убедить в своей позиции значительное количество индивидов, которые затем будут пересказывать ее другим. У этой стратегии также есть обратная сторона: с течением времени интерес индивидов к данной позиции будет угасать, так что к концу кампании противник может «перевербовать» их за счет более интенсивного вещания. Таким образом, полученные в работе выводы не являются очевидными, но и не противоречат интуиции.

Список литературы

1. Петров А.П., Маслов А.И., Цаплин Н.А. Моделирование выбора позиций индивидами при информационном противоборстве в социуме. *Математическое моделирование*. 2015;27(12):137–148. <http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=3684>
2. Mikhailov A.P., Pronchev G.B., Proncheva O.G. Mathematical Modeling of Information Warfare in Techno-Social Environments. Troussov A., Maruev S. “Techno-Social Systems for Modern Economical and Governmental Infrastructures”. *IGI Global*. 2019:174–210. <https://www.doi.org/10.4018/978-1-5225-5586-5>, <https://www.igi-global.com/chapter/mathematical-modeling-of-information-warfare-in-techno-social-environments/208385>
3. Прончева О.Г. О влиянии степени поляризации общества на исход информационного противоборства. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2016;75. 29 с. <https://www.doi.org/10.20948/prepr-2016-75>, <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-75>
4. Прончев Г.Б. О проблемах информационной безопасности использования информационно-коммуникационных технологий и искусственного интеллекта в цифровом здравоохранении. *Социально-гуманитарные знания*. 2022;2:100–107. <https://www.doi.org/10.34823/SGZ.2022.2.51777>
5. Boldyreva A., Alexandrov M., Koshulko O., et al. *Queries to Internet as a tool for analysis of the regional police work and forecast of the crimes in regions*. In: Proc. of 14-th Mexican Intern. Conf. on Artif. Intell. (MICAI-2016). Springer Cham, LNAI. 2017;10061(25):290–302. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62434-1_25
6. Boldyreva A., Sobolevskiy O., Alexandrov M., et al. *Creating collections of descriptors of events and processes based on Internet queries*. In: Proc. of 14-th Mexican Intern. Conf. on Artif. Intell. (MICAI-2016). Springer Cham, LNAI. 2017;10061(26):303–314. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62434-1_26
7. Губанов Д.А., Новиков Д.А. Модели совместной динамики мнений и действий в онлайн-социальных сетях. Ч. 1. *Исходные данные и первичный анализ. Проблемы управления*. 2023;2:37–53.
8. Губанов Д.А. Методы анализа информационного влияния в активных сетевых структурах. *Автоматика и телемеханика*. 2022;5:87–101.
9. Chartishvili A.G., Kozitsin I.V., Goiko V.L., et al. *On an approach to measure the level of polarization of individuals' opinions*. Twelfth International Conference “Management of large-scale system development” (MLSD). 2019;1–5. <https://doi.org/10.1109/MLSD.2019.8911015>

10. Kozitsin I.V. A general framework to link theory and empirics in opinion formation models. *Scientific reports*. 2022;12:5543.
11. Чхартишвили А.Г. Задача нахождения медианного предпочтения индивидов в стохастической модели. *Автоматика и телемеханика*. 2021;5:139–150.
12. Rashevsky N. *Outline of a Physico-mathematical Theory of Excitation and Inhibition*. Protoplasma; 1933.
13. Рашевский Н. Две модели: подражательное поведение и распределение статуса. Под ред. Г.В. Осипова. *Математические методы в современной буржуазной социологии. Сборник статей*. Москва: Прогресс; 1966. С. 175–197.

References

1. Petrov AP, Maslov AI, Tsaplin NA. Modeling of the choice of positions by individuals in the information confrontation in society. *Mathematical modeling*. 2015;27(12):137–148. (In Russ.). <http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=3684>
2. Mikhailov AP, Pronchev GB, Proncheva OG. Mathematical Modeling of Information Warfare in Techno-Social Environments. Troussov A., Maruev S. “Techno-Social Systems for Modern Economical and Governmental Infrastructures”. *IGI Global*. 2019:174–210. <https://www.doi.org/10.4018/978-1-5225-5586-5>, <https://www.igi-global.com/chapter/mathematical-modeling-of-information-warfare-in-techno-social-environments/208385>
3. Proncheva OG. On the influence of the degree of polarization of society on the outcome of the information confrontation. *Preprints of the IPM named after M. V. Keldysh*. 2016;75. 29 p. (In Russ.). <https://www.doi.org/10.20948/prepr-2016-75>, <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-75>
4. Pronchev GB. On the problems of information security of the use of information and communication technologies and artificial intelligence in digital healthcare. *Social and humanitarian knowledge*. 2022;2:100–107. (In Russ.). <https://www.doi.org/10.34823/SGZ.2022.2.51777>
5. Boldyreva A, Alexandrov M, Koshulko O, et al. *Queries to Internet as a tool for analysis of the regional police work and forecast of the crimes in regions*. In: Proc. of 14-th Mexican Intern. Conf. on Artif. Intell. (MICAI-2016). Springer Cham, LNAI. 2017;10061(25):290–302. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62434-1_25
6. Boldyreva A, Sobolevskiy O, Alexandrov M, et al. *Creating collections of descriptors of events and processes based on Internet queries*. In: Proc. of 14-th Mexican Intern. Conf. on Artif. Intell. (MICAI-2016). Springer Cham, LNAI. 2017;10061(26):303–314. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62434-1_26
7. Gubanov DA, Novikov DA. Models of joint dynamics of opinions and actions in online social networks. Part 1. Initial data and primary analysis. *Management problems*. 2023;2:37–53. (In Russ.).
8. Gubanov DA. Methods of analyzing information influence in active network structures. *Automation and telemechanics*. 2022;5:87–101. (In Russ.).
9. Chartishvili AG, Kozitsin IV, Goiko VL, et al. *On an approach to measure the level of polarization of individuals' opinions*. Twelfth International Conference “Management of large-scale system development” (MLSD). 2019;1–5. <https://doi.org/10.1109/MLSD.2019.8911015>
10. Kozitsin IV. A general framework to link theory and empirics in opinion formation models. *Scientific reports*. 2022;12:5543.
11. Chkhartishvili AG. The problem of finding the median preference of individuals in a stochastic model. *Automation and telemechanics*. 2021;5:139–150. (In Russ.).
12. Rashevsky N. *Outline of a Physico-mathematical Theory of Excitation and Inhibition*. Protoplasma; 1933.
13. Rashevsky N. Two models: imitative behavior and status distribution. Edited by GV Osipov. *Mathematical methods in modern bourgeois sociology. Collection of articles*. Moscow: Progress; 1966. pp. 175–197. (In Russ.).

Об авторе:

Петров Александр Пхоун Чжо, ведущий научный сотрудник Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (РФ, 125047, г. Москва, Миусская пл., 4), доктор физико-математических наук, [ORCID](https://orcid.org/), eLibrary.ru, [ИСТИНА](https://istina.ru/), [ResearcherID](https://researcherid.com/), [ScopusID](https://scopusid.com/), petrov.alexander.p@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.04.2023.

Поступила после рецензирования 30.05.2023.

Принята к публикации 31.05.2023.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

About the Author:

Alexander Phoun Zho Petrov, Leading Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences (4, Miusskaya Sq., Moscow, 125047, RF), Dr. (Physical and Mathematical Sciences), [ORCID](#), [eLibrary.ru](#), [ИСТИНА](#), [ResearcherID](#), [ScopusID](#), petrov.alexander.p@yandex.ru

Received 24.04.2023.

Revised 30.05.2023.

Accepted 31.05.2023.

Conflict of interest statement

The author does not have any conflict of interest.

The author has read and approved the final manuscript.