

ТОМ 7, №2, 2023

eISSN 2587-8999

РЕЦЕНЗИРУЕМЫЙ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Computational Mathematics and Information Technology

Вычислительная
математика /
Computational
Mathematics

Математическое
моделирование /
Mathematical Modelling

Информационные
технологии /
Information Technologies



www.cmit-journal.ru
DOI 10.23947/2587-8999



Computational Mathematics and Information Technologies

Рецензируемый научно-теоретический журнал (издаётся с 2017 года)

eISSN 2587-8999

DOI: 10.23947/2587-8999

Том 7, № 2, 2023

Журнал «Computational Mathematics and Information Technologies» ориентирован на фундаментальные и прикладные исследования по следующим научным разделам:

1. Вычислительная математика
2. Математическое моделирование
3. Информационные технологии

<i>Индексация:</i>	РИНЦ, CrossRef, КиберЛенинка
<i>Наименование органа, зарегистрировавшего издание</i>	Свидетельство о регистрации средства массовой информации ЭЛ № ФС 77 – 66529 от 21 июля 2016 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
<i>Учредитель и издатель</i>	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ).
<i>Периодичность</i>	4 выпуска в год
<i>Адрес учредителя и издателя</i>	344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1.
<i>E-mail</i>	CMIT-EJ@yandex.ru
<i>Телефон</i>	+7(863) 273–85–14
<i>Сайт</i>	https://cmit-journal.ru
<i>Дата выхода в свет</i>	25.06.2023





Computational Mathematics and Information Technologies

Peer-reviewed scientific and theoretical journal (published since 2017)

eISSN 2587-8999

DOI: 10.23947/2587-8999

Vol. 7, no. 2, 2023

The scope of “Computational Mathematics and Information Technologies” is focused on fundamental and applied research according to the following scientific sections:

1. Computational Mathematics
2. Mathematical Modelling
3. Information Technologies

Indexing:

Russian Scientific Citation Index, Crossref, Cyberleninka

*Name of the body that
registered the
publication*

Mass media registration certificate ЭЛ № ФС 77-66529 dated July 21, 2016 issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media.

*Founder and
publisher*

Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education Don State Technical University (DSTU).

Periodicity

Quarterly (4 issues per year)

*Address of the
founder and publisher*

Gagarin Sq. 1, Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation.

E-mail

CMIT-EJ@yandex.ru

Telephone

+7(863) 273–85–14

Website

<https://cmit-journal.ru>

Date of publication

25.06.2023



Редакционная коллегия

Главный редактор — Сухинов Александр Иванович — член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Россия): [MathSciNet](#), [eLibrary.ru](#), [ORCID](#), [ResearcherID](#), [Scopus](#), sukhinov@gmail.com, spu-40.4@donstu.ru

Заместитель главного редактора — Якобовский Михаил Владимирович — член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия): [eLibrary.ru](#), [ORCID](#)

Ответственный секретарь — Петров Александр Пхоун Чжо, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия): [eLibrary.ru](#), [ИСТИНА](#), [ORCID](#), [ResearcherID](#), [Scopus](#)

Воеводин Владимир Валентинович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (Москва, Россия)

Гасилов Владимир Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Гущин Валентин Анатольевич, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт автоматизации проектирования РАН (Москва, Россия)

Марчук Владимир Иванович, доктор технических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Россия)

Петров Игорь Борисович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Московский физико-технический институт (государственный университет) (Москва, Россия)

Поляков Сергей Владимирович, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Поспелов Игорь Гермогенович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Вычислительный центр РАН (Москва, Россия)

Тишкин Владимир Федорович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва

Четверушкин Борис Николаевич, академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор, научный руководитель Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Чистяков Александр Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Россия)

Editorial Board

Editor-in-Chief — Alexander I Sukhinov, Corresponding member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russia): [MathSciNet](#), [eLibrary.ru](#), [ORCID](#), [ResearcherID](#), [Scopus](#), sukhinov@gmail.com, spu-40.4@donstu.ru

Deputy Chief Editor — Mikhail V Yakobovskii — Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia: [eLibrary.ru](#), [ORCID](#)

Executive Secretary — Alexander P Petrov Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head Scientist Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia): [eLibrary.ru](#), [ИСТИНА](#), [ORCID](#), [ResearcherID](#), [Scopus](#)

Vladimir V Voevodin, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Vladimir A Gasilov, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Valentin A Gushchin, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Institute of Computer Aided Design, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Vladimir I Marchuk, Dr.Sci. (Eng.), Professor, Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia

Igor B Petrov, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Moscow, Russia

Sergey V Polyakov, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Igor G Pospelov , Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Computing Center of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Vladimir F Tishkin, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Boris N Chetverushkin, Academician of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Alexander E Chistyakov, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Don State Technical University, Russia

Содержание

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Разрывный метод Галеркина и его реализация в программном комплексе РАМЕГ3D	7
<i>В.Ф. Тишкин, М.Е. Ладонкина</i>	
Численная реализация сеточных уравнений гидродинамики мелководных водоёмов с использованием трехдиагонального предобуславливателя в областях сложной формы	19
<i>В.Н. Литвинов, А.М. Атаян, Н.Н. Грачева, Н.Б. Руденко, Н.Ю. Богданова</i>	
Разностная схема второго порядка для решения класса дифференциальных уравнений дробного порядка	31
<i>А.Х. Хибиев, А.А. Алиханов, М. Шахбазиасль, Р.А. Чернобровкин</i>	

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Оптимальное управление в нейробиологических моделях информационного противоборства	40
<i>А.П. Петров</i>	
Моделирование и анализ динамики квази-2D-турбулентности в мелководных водоемах	52
<i>С.В. Проценко, Е.А. Проценко</i>	
Моделирование движения автомобильного транспорта с использованием макро- и микроскопических моделей	60
<i>М.А. Трапезникова, А.А. Чечина, Н.Г. Чурбанова</i>	
Существование и единственность решения начально-краевой задачи транспорта многокомпонентных наносов прибрежных морских систем	73
<i>В.В. Сидорякина</i>	

Contents

COMPUTATIONAL MATHEMATICS

The Discontinuous Galerkin Method and its Implementation in the RAMEG3D Software Package	7
<i>VF Tishkin, ME Ladonkina</i>	

Numerical Realization of Shallow Water Bodies' Hydrodynamics Grid Equations using Tridiagonal Preconditioner in Areas of Complex Shape	19
<i>VN Litvinov, AM Atayan, NN Gracheva, NB Rudenko, NYu Bogdanova</i>	

A Second-Order Difference Scheme for Solving a Class of Fractional Differential Equations	31
<i>AKh Khibiev, AA Alikhanov, M ShahbaziAsl, RA Chernobrovkin</i>	

MATHEMATICAL MODELLING

Optimal Control in Neurological Models of Information Warfare	40
<i>AP Petrov</i>	

Modeling and Analysis of Quasi-2D Turbulence Dynamics in Shallow Waters	52
<i>SV Protsenko, EA Protsenko</i>	

Simulation of Vehicular Traffic using Macro- and Microscopic Models	60
<i>MA Trapeznikova, AA Chechina, NG Churbanova</i>	

Existence and Uniqueness of the Initial-Boundary Value Problem Solution of Multicomponent Sediments Transport in Coastal Marine Systems	73
<i>VV Sidoryakina</i>	

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 519.6

Обзорная статья

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-7-18>

Разрывный метод Галеркина и его реализация в программном комплексе RAMEG3D



В.Ф. Тишкин , М.Е. Ладонкина

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук, Российская Федерация,
г. Москва, Миусская пл., 4

✉ v.f.tishkin@mail.ru

Аннотация

В настоящее время метод Галеркина с разрывными базисными функциями (РМГ) или *Discontinuous Galerkin Method* (DGM) получил широкое распространение для решения сложных разномасштабных задач математической физики, имеющих важное прикладное значение. При его реализации важным является вопрос о выборе дискретной аппроксимации потоков для вязких членов уравнения Навье-Стокса.

Для успешного применения РМГ на трехмерных неструктурированных сетках необходимо сосредоточить внимание на построении лимитирующих функций, на выборе наилучших дискретных аппроксимаций диффузионных потоков и на применении неявных и итерационных методов решения полученных дифференциально-разностных уравнений.

Исследуются численные схемы первого порядка и схемы РМГ второго порядка с численными потоками Годунова, HLLC, Русанова-Лакса-Фридрихса и гибридными потоками. Для методов высокого порядка точности необходимо использовать схемы высокого порядка по времени.

В работе используется схема Рунге-Кутты третьего порядка. При решении уравнения Навье-Стокса разрывным методом Галеркина уравнения записываются в виде системы уравнений первого порядка.

Ключевые слова: разрывный метод Галеркина, уравнения Навье-Стокса, гибридные потоки, схема Рунге-Кутты, шаблон схемы.

Для цитирования. Тишкин В.Ф., Ладонкина М.Е. Разрывный метод Галеркина и его реализация в программном комплексе RAMEG3D. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):7–18. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-7-18>

Review article

The Discontinuous Galerkin Method and its Implementation in the RAMEG3D Software Package

Vladimir F Tishkin , Marina E Ladonkina

Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, 4, Miusskaya Sq., Moscow, Russian Federation

✉ v.f.tishkin@mail.ru

Abstract

Currently, the Discontinuous Galerkin Method (DGM) is widely used to solve complex multi-scale problems of mathematical physics that have important applied significance. When implementing it, the question of choosing a discrete approximation of flows for viscous terms of the Navier-Stokes equation is important.

It is necessary to focus on the construction of limiting functions, on the selection of the best discrete approximations of diffusion flows, and on the use of implicit and iterative methods for solving the obtained differential-difference equations for the successful application of DGM on three-dimensional unstructured grids.

First-order numerical schemes and second-order DGM schemes with Godunov, HLLC, Rusanov-Lax-Friedrichs numerical flows and hybrid flows are investigated. For high-order precision methods, it is necessary to use high-order time schemes.

The Runge-Kutta scheme of the third order is used in the work. The equations are written as a system of first-order equations, when solving the Navier-Stokes equation by the discontinuous Galerkin method.

Keywords: Discontinuous Galerkin Method (DGM), Navier-Stokes equations, hybrid flows, Runge-Kutta scheme, scheme template.

For citation. Tishkin VF, Ladonkina ME. The discontinuous Galerkin method and its implementation in the RAMEG3D software package. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):7–18. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-7-18>

Для получения качественного решения задач математической физики, имеющих важное прикладное значение, одним из основных требований является использование численных методов высокой точности. Это особенно актуально для решения сложных разномасштабных задач, в которых получить решение только измельчением сетки и методами первого порядка точности недостаточно.

Несколько последних десятилетий особенно активно развивается метод Галеркина с разрывными базисными функциями (РМГ) или *Discontinuous Galerkin Method* (DGM), первое упоминание о котором можно найти в [1]. Данный метод относится к численным методам повышенного порядка аппроксимации решения, т. к. обеспечивает заданный порядок точности, причем на неструктурированных сетках, может использоваться для сеток с произвольной формой ячеек, имеет компактный шаблон, состоящий из расчетной ячейки и одного слоя соседних ячеек. Существует два подхода для повышения точности получаемого решения. Один из них — измельчение сетки в областях существующих особенностей решения, второй подход — повышение порядка точности схемы. Применение разрывного метода Галеркина позволяет использовать сразу оба подхода: и повышение порядка точности метода за счет повышения порядка используемых полиномов, и локальное измельчение сетки (так называемая *hp*-адаптация) [2, 3].

Одним из важных вопросов при реализации метода является выбор сетки, на которой ищется решение. Несомненное преимущество РМГ — в возможности его применения на сетках произвольной структуры. В настоящее время разрывный метод Галеркина хорошо разработан как для структурированных [4], так и для неструктурированных [5] сеток. Существуют удачные программные реализации DGM для решения трехмерных задач на неструктурированных сетках, содержащих элементы только одного типа (тетраэдральные [5–8] или гексаэдральные [9]), а также для сеток произвольной структуры [10].

Очевидным недостатком метода является его чрезвычайно высокая вычислительная стоимость, но это покрывается компактным шаблоном и созданием эффективных параллельных программных комплексов. DGM обладает существенной вычислительной сложностью, поэтому встает вопрос о максимально эффективном использовании всех возможностей вычислительной техники. В мировых исследовательских центрах, занимающихся этой проблемой, ведутся работы по распараллеливанию реализаций РМГ на супер ЭВМ [11–13]. В [6] при решении уравнений Навье-Стокса РМГ использован новый сеточно-операторный подход к программированию задач математической физики, позволяющий компактно записывать и эффективно применять математические формулы, единообразно реализовывать подход на разных типах сеток и для различных вычислительных архитектур, в том числе и для графических ускорителей CUDA [14, 15].

Наряду с множеством преимуществ применения разрывного метода Галеркина существуют и некоторые сложности его реализации. Во-первых, для обеспечения монотонности решения, полученного данным методом, необходимо вводить ограничители наклона или лимитеры, в особенности в том случае, если решение содержит сильные разрывы. Наиболее широко используемым является лимитер Кокбурна [16]. Идея данного лимитера легко реализуется в многомерном случае на сетках произвольной структуры. Однако данный лимитер, как и все TVD лимитеры, снижает точность получаемого решения. В последнее время активно развиваются различные подходы к решению этой проблемы. Один из подходов к созданию лимитера повышенного порядка точности предложен в работах Кривоносовой [17]. Но данный лимитер хорошо работает только на структурированных сетках. Другие подходы к созданию лимитеров повышенного порядка точности изложены в [18–25].

Также важным при реализации DGM является вопрос о выборе дискретной аппроксимации потоков для вязких членов уравнения Навье-Стокса. Существует несколько видов таких аппроксимаций, наиболее часто используемых в реальных расчетах [26, 27], которые были исследованы в [28]. Тем не менее, вопрос оптимального выбора таких аппроксимаций остается открытым.

Как известно, при повышении порядка точности схемы возникает жесткое ограничение на шаг по времени. Первоначально при расчетах DGM интегрирование по времени проводилось явными многошаговыми схемами Рунге-Кутты высокого порядка [16, 29, 30]. Но наиболее эффективный подход заключается в использовании неявных методов интегрирования по времени с целью ослабления ограничения на шаг по времени [31–36].

В настоящий момент известны программные реализации РМГ неявным методом для моделирования несжимаемых течений [37] и для решения уравнений Навье-Стокса [35].

Еще один момент, с которым пришлось столкнуться авторам при реализации РМГ на сетках с произвольной формой ячеек, — это необходимость осуществлять процедуру интегрирования [16] на ячейке произвольной

формы. Для этого делается преобразование исходной ячейки неправильной формы на референтную ячейку, для которой известно положение квадратурных точек [61]. При построении такого преобразования для случая тетраэдра, гексаэдра и треугольной призмы достаточно использовать полилинейное преобразование, которое переводит вершины ячейки в вершины исходной ячейки. Однако для четырехугольной пирамиды данный подход не дает желаемого результата, поскольку при его использовании получаем криволинейные боковые грани и ребра пирамиды, что не позволит ее правильно стыковать с тетраэдральными ячейками. Ниже в данной работе построено преобразование, которое позволяет избежать этого недостатка.

Для успешной реализации РМГ на трехмерных неструктурированных сетках необходимо сосредоточить внимание на нескольких моментах:

- на построении лимитирующих функций;
- на выборе наилучших дискретных аппроксимаций диффузионных потоков;
- на применении неявных и итерационных методов решения полученных дифференциально-разностных уравнений.

Для получения точного численного решения задач математической физики важно использовать качественную расчетную сетку и надежный высокоточный численный метод, а также быть уверенным, что выбранный метод полностью соответствует решаемой задаче. Например, известно, что при использовании разностных схем Годуновского типа в некоторых задачах, содержащих ударные волны, возникает развитие неустойчивости типа «карбункул» [38, 39]. Условия появления данного вида неустойчивости — это высокие числа Рейнольдса и низко диссипативный численный поток. В работе [40] замечено, что при таких условиях могут возникать и другие типы неустойчивостей. Одной из установленных причин возникновения данного типа неустойчивости являются используемые численные потоки [41–48]. Наиболее подвержены возникновению этой неустойчивости потоки, обладающие низкой диссипацией, а использование высоко диссипативных потоков позволяют избежать возникновения «карбункул»-неустойчивости. По этой причине было предпринято несколько попыток разработки новых методов, подавляющих развитие неустойчивостей, обеспечивающих низкую диссипацию [49–52]. В работе [53] проведено исследование подверженности ударно-волновой неустойчивости конкретных численных потоков, реализованных в программном комплексе PAMEG3D [54]. Данный тип неустойчивости проверяется на тестовых задачах из перечня Керка [40] в постановках, приведенных в работе [55].

В настоящей работе исследуются численные схемы первого порядка и схемы РМГ второго порядка с численными потоками Годунова [56], HLLC [57], Русанова-Лакса-Фридрихса [58, 59] и гибридными потоками [60], используемые в расчетах. Также приводятся основные формулы разработанного авторами гибридного потока.

1. Основные формулы разрывного метода Галеркина. Рассмотрим уравнения Навье-Стокса, записанные в виде системы уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \partial_t U + \nabla \cdot F(U) - \nabla \cdot G(U, \tau) &= 0, \\ \tau &= \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \hat{E}(\operatorname{div} v) + 2\mu S(v), \end{aligned} \quad (1)$$

$$S(v) = \frac{1}{2} \left(\nabla v + (\nabla v)^* \right),$$

$$q(U) = k \nabla T.$$

$$U = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E),$$

$$F(U) = (F_x(U), F_y(U), F_z(U)), \quad (2)$$

$$G(U, \tau) = (G_x(U, \tau), G_y(U, \tau), G_z(U, \tau)).$$

$$F_x(U) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uw, (E + p)u),$$

$$F_y(U) = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, \rho vw, (E + p)v),$$

$$F_z(U) = (\rho w, \rho vw, \rho wv, \rho w^2 + p, (E + p)w), \quad (3)$$

$$G_x(U, \tau) = (0, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + q_x),$$

$$G_y(U, \tau) = (0, \tau_{yx}, \tau_{yy}, \tau_{yz}, u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + q_y),$$

$$G_z(U, \tau) = (0, \tau_{zx}, \tau_{zy}, \tau_{zz}, u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} + q_z),$$

где ρ — плотность вещества; u, v, w — компоненты скорости v , ε — удельная внутренняя энергии и

$E = \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right)$ — полная энергия на единицу объема, p — давление вещества.

Систему уравнений (1) замыкает уравнение состояния, в данном случае уравнение состояния идеального газа $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ с показателем адиабаты γ .

Для каждой конкретной задачи система (1) дополняется подходящими начально-краевыми условиями.

Покроем область Ω , на которой ищется решение разрывным методом Галеркина, сеткой T_h . На каждом элементе T_j приближенное решение системы уравнений (1) будем искать в виде полиномов $P(x)$ степени N с зависящими от времени коэффициентами [1]:

$$\begin{aligned} U_h(x, t) &= \sum_{k=0}^{st} U_k(t) \phi_k(x), \\ q_{ih}(x, t) &= \sum_{k=0}^{st} q_{ik}(t) \phi_k(x), \\ \tau_{ijh}(x, t) &= \sum_{k=0}^{st} \tau_{ijk}(t) \phi_k(x), \quad i, j = x, y, z, \end{aligned} \quad (4)$$

где $st = 0, C_{N+3}^3 - 1$ — размерность пространства полиномов, а $\phi_k(x)$ — базисная функция.

Для методов высокого порядка точности необходимо использовать схемы высокого порядка по времени. В данной работе используется схема Рунге-Кутты третьего порядка [1].

При решении уравнения Навье-Стокса разрывным методом Галеркина уравнения записываются в виде системы уравнений первого порядка и решение происходит в два этапа. На первом этапе вычисляются компоненты градиента температуры и тензора вязких напряжений. Их аппроксимация, как и аппроксимация решения, в пределах ячейки сетки при реализации модального подхода находится в виде полиномов степени p с зависящими от времени коэффициентами. На границе элемента потоковые значения величин определяются по некоторому правилу от значений внутри элемента и от значений в соседней к данному элементу ячейке.

На втором этапе определяются компоненты вектора консервативных переменных. При этом конвективные потоки могут быть рассчитаны при помощи различных вариантов точного или приближенного решения задачи Римана. Диффузионные потоки на границе элемента также могут быть рассчитаны различными способами, подробный анализ которых проведен в [63]. Для вычисления интегралов используются квадратурные формулы нужного порядка. Данный двухэтапный подход позволяет вычислять градиенты с тем же порядком точности, что и консервативные переменные, сохраняя компактность шаблона схемы.

2. Построение гибридного потока. В работе [60] построен гибридный численный поток, основная идея которого была предложена в работе [52]. Данный поток представляет собой линейную комбинацию одного из потоков (HLLC либо потока Годунова) и устойчивого потока Русанова-Лакса-Фридрихса (RLF).

Направление скачка скорости определяет нормаль к ударной волне: когда граница ячейки совпадает с фронтом ударной волны, используется поток Годунова (F^{Godunov}), а когда граница раздела перпендикулярна ударной волне, применяется поток Русанова-Лакса-Фридрихса (F^{RLF}). Таким образом, увеличивается диссипация в направлении, совпадающим с ударной волной, и устраняется неустойчивость:

$$\hat{F} = \theta F^{\text{HLLC}} + (1 - \theta) F^{\text{RLF}}, \quad (5)$$

$$\hat{F} = \theta F^{\text{Godunov}} + (1 - \theta) F^{\text{RLF}}, \quad (6)$$

$$\text{где } \theta = \begin{cases} \frac{|\Delta u \cdot n|}{|\Delta u|} = \frac{|\Delta u_x + \Delta v n_y + \Delta w n_z|}{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2}}, & |\Delta u| > \varepsilon, \\ 1, & |\Delta u| \leq \varepsilon, \end{cases} \quad (7)$$

где ε — малая константа, чтобы избежать деления на ноль (например, $\varepsilon = 10^{-6}$); n — нормаль к границе ячейки, а $\Delta u = (u_L - u_R, v_L - v_R, w_L - w_R)$ — скачок вектора скорости через границу. Параметр θ вычисляется из нормали к границе ячейки и скачка скорости через поверхность границы ячейки.

Иной подход к построению гибридного потока заключается в добавлении диссипативного члена в областях, где это необходимо.

Для его построения перейдем в локальную систему координат с ортом (n, τ_1, τ_2) , где n — вектор внешней нормали к поверхности через которую считается поток; τ_1, τ_2 — любые единичные ортогональные друг другу векторы, лежащие на этой поверхности. Векторы U и F в этой системе координат (обозначенные индексом $*$) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} U^* &= (\rho, \rho(u, n), \rho(u, \tau_1), \rho(u, \tau_1), E)^T, \\ F^*(U) &= (\rho(u, n), \rho(u, n)u_n + p, \rho(u, n)u_{\tau_1}, \rho(u, n)u_{\tau_2}, (E + p)(u, n)). \end{aligned} \quad (8)$$

С целью получения нового потока, обладающего большей диссипацией, чем поток Годунова (HLLC), и меньшей диссипацией, чем поток RLF, выберем некоторую скорость W в исходной системе координат и перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся с этой скоростью.

Обозначим максимальную скорость $W_{\max}$, минимальную скорость — $W_{\min}$ (с учетом знака) волн, выработавшихся при распаде произвольного разрыва в случае использования потока Годунова (или при использовании по-

тока HLLC). Заметим, что если W будет больше, чем $W_{\max}$, то значения газодинамических величин будут совпадать с U^+ и после пересчета в исходную систему координат, этот поток будет равен, соответственно, для использования потока Годунова и потока HLLC:

$$\hat{F} = F^{*\text{Godunov}}(U^{*+}) - WU^{*+},$$

$$\hat{F} = F^{*\text{HLLC}}(U^{*+}) - WU^{*+}.$$

Соответственно, если $-W$ будет меньше $W_{\min}$, то значения газодинамических величин будут совпадать с U^- , и после пересчета в исходную систему координат этот поток будет равен:

$$\hat{F} = F^{*\text{Godunov}}(U^{*-}) + WU^{*-},$$

$$\hat{F} = F^{*\text{HLLC}}(U^{*-}) + WU^{*-}.$$

Взяв полусумму этих потоков, получим поток RLF. Если $W=0$, то, соответственно, получаются потоки Годунова (или HLLC).

Таким образом, если $0 < W < W_{\max}^*$, где $W_{\max}^* = \max(|W_{\max}|, |W_{\min}|)$ получаем новый поток, средний между потоком Годунова (HLLC) и потоком RLF и обладающего большей диссипацией, чем поток Годунова (HLLC) и меньшей диссипацией, чем поток RLF. Такого типа поток рассматривался в работе [62].

Используемый гибридный поток может быть получен следующим образом. Рассмотрим инерциальную систему координат, движущуюся со скоростью $W \cdot n$ относительно исходной системы, и вычислим поток Годунова или HLLC, который затем пересчитаем в исходной системе координат (рис. 1). Полученное в результате значение обозначим через U^{*+} . Аналогичную процедуру проведем со скоростью $-W \cdot n$ и соответствующее значение обозначим U^{*-} . Взяв полусумму таких потоков, приходим к формулам:

$$\hat{F} = \frac{F^{*\text{Godunov}}(U^{*+}) + F^{*\text{Godunov}}(U^{*-})}{2} - W \frac{U^{*+} + U^{*-}}{2}, \quad (9)$$

$$\hat{F} = \frac{F^{*\text{HLLC}}(U^{*+}) + F^{*\text{HLLC}}(U^{*-})}{2} - W \frac{U^{*+} + U^{*-}}{2}, \quad (10)$$

$$W = \theta W^*, \quad W^* = \max(|u+c|, |u-c|), \quad (11)$$

$$\theta = \begin{cases} M \leq M_{\min}, & W = W^*, \\ M_{\min} < M < M_{\max}, & W = \frac{M_{\max} - M}{M_{\max} - M_{\min}} W^*, \\ M \geq M_{\max}, & W = 0, \end{cases} \quad (12)$$

где W^* — максимум модулей собственных значений матрицы $\frac{\partial F^*(U)}{\partial U^*}$; θ — параметр [52].

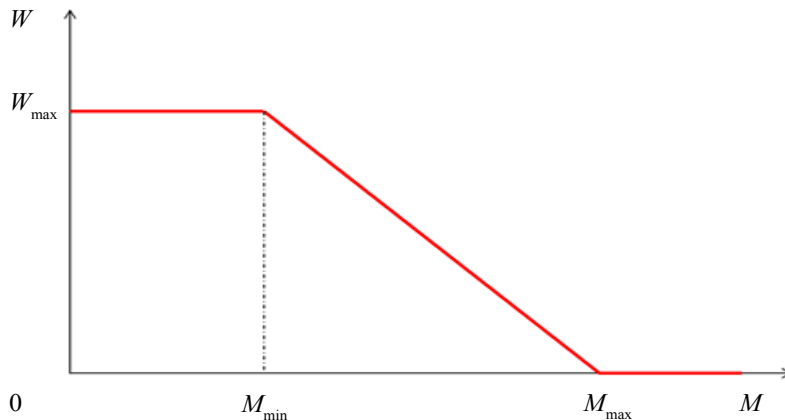


Рис. 1. Построенный гибридный поток, средний между потоком Годунова (HLLC) и потоком RLF

3. Численное интегрирование на произвольных ячейках. Рассмотрим преобразование произвольной четырехугольной пирамиды P с вершинами (x_i, y_i, z_i) $i = 1, 5$ в системе координат $0XYZ$ в правильную четырехугольную пирамиду P^* с вершинами $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$, $(0,5;0,5;1)$ в системе координат $0\alpha\beta\gamma$ (рис. 2). Основание пирамиды P переведем в основание пирамиды P^* с помощью билинейного преобразования:

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1\alpha + a_2\beta + a_3\alpha\beta, \\ y &= b_0 + b_1\alpha + b_2\beta + b_3\alpha\beta, \\ z &= c_0 + c_1\alpha + c_2\beta + c_3\alpha\beta, \end{aligned} \quad (13)$$

где коэффициенты $a_i, b_i, c_i, i = \overline{0,3}$ определяются в явном виде:

$$a_0 = x_1, a_1 = x_2 - x_1, a_2 = x_3 - x_1, a_3 = x_4 - x_3 - x_2 + x_1.$$

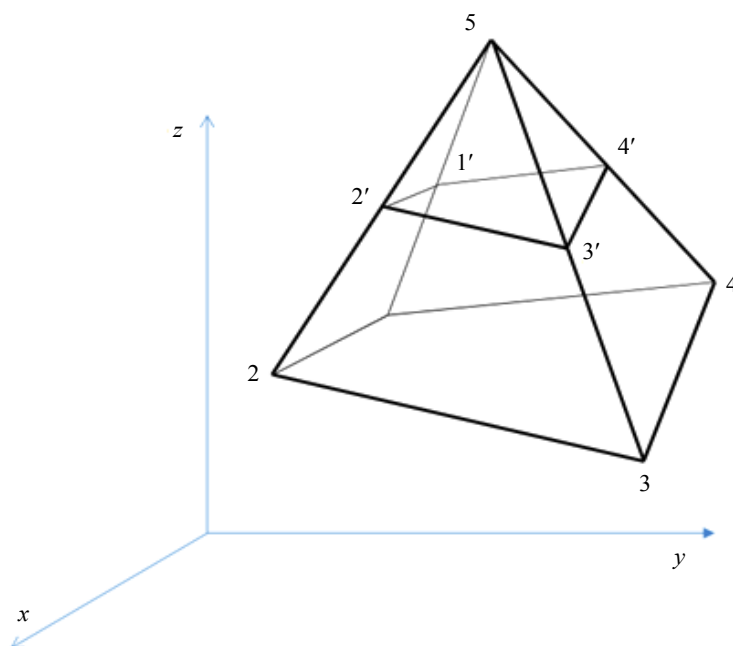


Рис. 2. Произвольная четырехугольная пирамида в пространстве

Построим произвольную пирамиду P' с вершиной в точке 5 (рис. 3) и основанием с вершинами в точках $1'-4'$, путем сжатия исходной пирамиды.

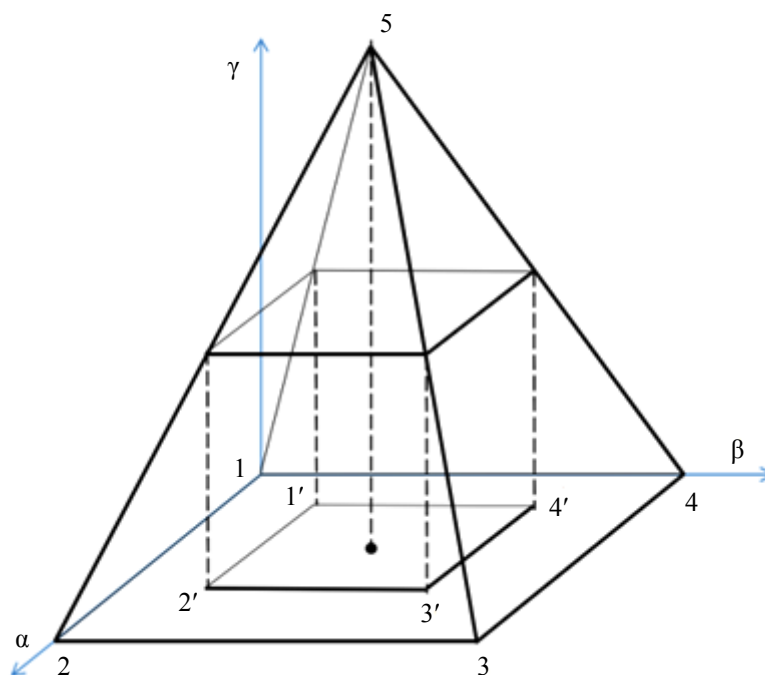


Рис. 3. Правильная четырехугольная пирамида

Координаты x'_i можно определить как:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(1-\gamma) + x_5\gamma, \\ x'_2 = x_2(1-\gamma) + x_5\gamma, \\ x'_3 = x_3(1-\gamma) + x_5\gamma, \\ x'_4 = x_4(1-\gamma) + x_5\gamma, \end{cases} \quad (14)$$

где коэффициент сжатия $\gamma \in [0,1]$.

Аналогичное преобразование сделаем в референтной пирамиде с тем же коэффициентом сжатия. Получившееся основание сжатой пирамиды переведем в основание референтной пирамиды. Координаты этих точек в системе координат $0\alpha\beta$ равны:

$$\begin{aligned}
1' &\rightarrow \alpha = \frac{\gamma}{2}, \beta = \frac{\gamma}{2}, \\
2' &\rightarrow \alpha = 1 - \frac{\gamma}{2}, \beta = \frac{\gamma}{2}, \\
3' &\rightarrow \alpha = 1 - \frac{\gamma}{2}, \beta = 1 - \frac{\gamma}{2}, \\
4' &\rightarrow \alpha = \frac{\gamma}{2}, \beta = 1 - \frac{\gamma}{2}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Используя преобразование (13)–(15), можно записать координаты точек x'_i :

$$\begin{cases}
x'_1 = a_0 + a_1 \frac{\gamma}{2} + a_2 \frac{\gamma}{2} + a_3 \frac{\gamma^2}{4} = x_1(1-\gamma) + x_5\gamma, \\
x'_2 = a_0 + a_1 \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) + a_2 \frac{\gamma}{2} + a_3 \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \frac{\gamma}{2} = x_2(1-\gamma) + x_5\gamma, \\
x'_3 = a_0 + a_1 \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) + a_2 \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) + a_3 \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)^2 = x_3(1-\gamma) + x_5\gamma, \\
x'_4 = a_0 + a_1 \frac{\gamma}{2} + a_2 \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) + a_3 \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \frac{\gamma}{2} = x_4(1-\gamma) + x_5\gamma.
\end{cases} \tag{16}$$

Решая эту систему уравнений (16), можем выразить коэффициенты преобразования (13):

$$\begin{aligned}
a_3 &= \frac{x_4 - x_2 - x_3 + x_1}{1-\gamma}, \\
a_1 &= (x_2 - x_1) - \frac{\gamma}{2(1-\gamma)}(x_4 - x_2 - x_3 + x_1), \\
a_2 &= (x_3 - x_1) - \frac{\gamma}{2(1-\gamma)}(x_4 - x_2 - x_3 + x_1), \\
a_0 &= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}(1-\gamma) + \gamma x_5 - \frac{x_2 - 2x_1 + x_3}{2} + \frac{2\gamma - 1}{4(1-\gamma)}(x_4 - x_2 - x_3 + x_1).
\end{aligned}$$

В итоге получаем преобразование для координаты x :

$$\begin{aligned}
x &= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}(1-\gamma) + \gamma x_5 - \frac{x_2 - 2x_1 + x_3}{2} + \frac{2\gamma - 1}{4(1-\gamma)}(x_4 - x_2 - x_3 + x_1) + \\
&\quad + \left[(x_2 - x_1) - \frac{\gamma}{2(1-\gamma)}(x_4 - x_2 - x_3 + x_1) \right] \alpha + \\
&\quad + \left[(x_4 - x_1) - \frac{\gamma}{2(1-\gamma)}(x_4 - x_2 - x_3 + x_1) \right] \beta + \\
&\quad + \left[\frac{x_4 - x_2 - x_3 + x_1}{1-\gamma} \right] \alpha\beta.
\end{aligned}$$

Аналогично получаем преобразование для координат y, z .

Список литературы

1. Reed W.H., Hill T.R. *Triangular mesh methods for the neutron transport equation*. Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-UR-73-79. USA; 1973. <https://www.osti.gov/servlets/purl/4491151>
2. Волков А.В. Особенности применения метода Галеркина к решению пространственных уравнений Навье-Стокса на неструктурированных гексаэдральных сетках. *Ученые записки ЦАГИ*. 2009;XL(6).
3. Nastase R. and Mavriplis D.J. High-order discontinuous Galerkin methods using an hp-multigrid approach. *Journal of Computational Physics*. 2006; 213:330–357.
4. Босняков С.М., Михайлов С.В., Подаруев В.Ю. и др. Нестационарный разрывный метод Галеркина высокого порядка точности для моделирования турбулентных течений. *Математическое моделирование*. 2018;30(5):37–56.
5. Krasnov M.M. et al. Numerical solution of the Navier-Stokes equations by discontinuous Galerkin method. *Journal of Physics: Conference Series: Conf. Ser.* 2017;815(1).
6. Краснов М.М., Кучугов П.А., Ладонкина М.Е. и др. Разрывный метод Галеркина на трехмерных тетраэдральных сетках. Использование операторного метода программирования. *Математическое Моделирование*. 2017;29(2):3–22.
7. Краснов М.М., Ладонкина М.Е. Разрывный метод Галёркина на трёхмерных тетраэдральных сетках. Применение шаблонного метапрограммирования языка C++. *Программирование*. 2017;3:41–53.

8. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Использование разрывного метода Галёркина при решении задач гидродинамики. *Математическое моделирование*. 2014;26(1):17–32. Ladonkina M.E., Neklyudova O.A., Tishkin V.F. Application of the RKDG method for gas dynamics problems. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2014;6(4):397–407.
9. Волков А.В. Особенности применения метода Галеркина к решению пространственных уравнений Навье-Стокса на неструктурированных гексаэдральных сетках. *Ученые записки ЦАГИ*. 2009; XL(6).
10. Yasue K., Furudate M., Ohnishi N., et al. Implicit discontinuous Galerkin method for RANS simulation utilizing pointwise relaxation algorithm. *Communications in Computational Physics*. 2010;7(3):510–533.
11. Klockner A., Warburton T., Hesthaven J.S. Nodal discontinuous Galerkin methods on graphics processors. *Journal of Computational Physics*. 2009;228(21):7863–7882.
12. Lou J., Xia Y., Luo L., et al. *OpenACC-based GPU Acceleration of a p-multigrid Discontinuous Galerkin Method for Compressible Flows on 3D Unstructured Grids*. 53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting, AIAA SciTech Forum, (AIAA 2015-0822).
13. Chan J., et al. GPU-accelerated discontinuous Galerkin methods on hybrid meshes. *Journal of Computational Physics*. 2015:318.
14. Краснов М.М. Операторная библиотека для решения трехмерных сеточных задач математической физики с использованием графических плат с архитектурой CUDA. *Математическое моделирование*. 2015;27(3):109–120.
15. Краснов М.М. Параллельный алгоритм вычисления точек гиперплоскости фронта вычислений. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2015;55(1):145–152.
16. Cockburn. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection-Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations. *Lecture Notes in Mathematics*. 1998;1697:151–268.
17. Krivodonova L. Limiters for high-order discontinuous Galerkin methods. *Journal of Computational Physics*. 2007; 226(1):276–296.
18. Shu C.-W. High order WENO and DG methods for time-dependent convection-dominated PDEs: A brief survey of several recent developments. *Journal of Computational Physics*. 2016;316:598–613.
19. Luo H., Baum J.D., Lohner R.A. Hermite WENO-based limiter for discontinuous Galerkin method on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*. 2007;225(1):686–713.
20. Zhu J., Zhong X., Shu C.-W., et al. Runge-Kutta discontinuous Galerkin method using a new type of WENO limiters on unstructured meshes. *Journal of Computational Physics*. 2013;248:200–220.
21. Dumbser M. Arbitrary high order PNPM schemes on unstructured meshes for the compressible Navier–Stokes equations. *Computers & Fluids*. 2010;39(1):60–76.
22. Peraire J., Persson P.-O. *Adaptive High-Order Methods in Computational Fluid Dynamics*. V.2 of Advances in CFD, chap.5 — High-Order Discontinuous Galerkin Methods for CFD. World Scientific Publishing Co; 2011.
23. Волков А.В., Ляпунов С.В. Монотонизация метода конечного элемента в задачах газовой динамики. *Ученые записки ЦАГИ*. 2009;XL(4):15–27.
24. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Построение лимитера для разрывного метода Галеркина на основе усреднения решения. *Математическое моделирование*. 2018;30(5):99–116.
25. Haga T., Sawada K. *An improved slope limiter for high-order spectral volume methods solving the 3D compressible Euler equations*; 2009.
26. Bassi F., Rebay S. Numerical evaluation of two discontinuous Galerkin methods for the compressible Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2002;40:197–207.
27. Cockburn, Shu C.-W. The local discontinuous Galerkin method for time dependent convection diffusion system. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1998;35(6):2440–2463.
28. Власенко В.В., Волков А.В., Трошин А.И. Выбор метода аппроксимации вязких членов в методе Галеркина с разрывными базисными функциями. *Ученые записки ЦАГИ*. 2013;XLIV(3).
29. Gottlieb S., Shu C.-W., Tadmor E. Strong stability-preserving high-order time discretization methods. *SIAM Review*. 2001;43(1):89–112.
30. Spiteri Raymond J., Ruuth Steven J. A New Class of Optimal High-Order Strong Stability-Preserving Time Discretization Methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2002;40(2):469–491.
31. Rasetarinera P., Hussaini M.Y. An efficient implicit discontinuous spectral Galerkin method. *Journal of Computational Physics*. 2001;172:718–738.
32. Hartmann R. Adaptive discontinuous Galerkin methods with shock-capturing for the compressible Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2006;51:1131–1156.
33. Hartmann R., Houston P. Symmetric interior penalty DG methods for the compressible Navier-Stokes equations I: Method formulation. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*. 2006;3:1–20.
34. Dolejší V. Semi-implicit interior penalty discontinuous Galerkin methods for viscous compressible flows. *Computer Physics Communications*. 2008;4:231–274.
35. Yasue K., Furudate M., Ohnishi N. et al. Implicit discontinuous Galerkin method for RANS simulation utilizing pointwise relaxation algorithm. *Computer Physics Communications*. 2010;7(3):510–533.

36. Jameson A., Yoon S. Lower-upper implicit schemes with multiple grids for the Euler equations. *AIAA Journal*. 1987;25:929–935.
37. Proc. ECCOMAS Thematic Conference: European Conf. on High Order Nonlinear Numerical Methods for Evolutionary PDEs: *Theory and Applications HONOM*. 2017;27.03–31.03.
38. Peery K.M., Imlay S.T. Blunt body flow simulations. *AIAA Paper*. 1988;88–2924.
39. Родионов А.В. Искусственная вязкость для подавления ударно-волновой неустойчивости в схемах типа Годунова повышенной точности. ФГУП «Российский федеральный ядерный центр ВНИИЭФ». 2018;116:51с.
40. Quirk J.J. A contribution to the great Riemann solver debate. *ICASE Report*. 1992;92–64. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 1994;18:555–574.
41. Родионов А.В. Разработка методов и программ для численного моделирования неравновесных сверхзвуковых течений в приложении к аэрокосмическим и астрофизическим задачам. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Саров; 2019.
42. Pandolfi M., D'Ambrosio D. Numerical instabilities in Upwind Methods: Analysis and Cures for the “Carbuncle” Phenomenon. *Journal of Computational Physics*. 2001;166:271–301.
43. Dumbser M., Moschetta J.-M., Gressier J. A matrix stability analysis of the carbuncle phenomenon. *Journal of Computational Physics*. 2004;197:647–670.
44. Roe P., Nishikawa H., Ismail F., et al. On carbuncles and other excrescences. *AIAA Paper*. 2005;2005–4872.
45. Menart J.A., Henderson S.J. Study of the issues of computational aerothermodynamics using a Riemann solver. *AFRL Report*. 2008; 2008–3133.
46. Kitamura K., Shima E. Towards shock-stable and accurate hypersonic heating computations: A new pressure flux for AUSM-family schemes. *Journal of Computational Physics*. 2013;245:62–83.
47. Xie W., Li W., Li H., et al. On numerical instabilities of Godunov-type schemes for strong shocks. *Journal of Computational Physics*. 2017;350:607–637.
48. Gressier J., Moschetta J.-M. Robustness versus accuracy in shock-wave computations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2000;33:313–332.
49. Nishikawa H., Kitamura K. Very simple, carbuncle-free, boundary-layer-resolving, rotated-hybrid Riemann solvers. *Journal of Computational Physics*. 2008;227:2560–2581.
50. Guo S., Tao W.-Q. Numerical Heat Transfer, Part B: *Fundamentals*. 2018; 73:33–47.
51. Hu L.J., Yuan L. A robust hybrid hllc-force scheme for curing numerical shock instability. *Applied Mechanics and Materials*. 2014;577:749–753.
52. Ferrero A., D'Ambrosio D. An Hybrid Numerical Flux for Supersonic Flows with Application to Rocket Nozzles. *17TH International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics*. Rhodes, Greece; 2019, 23–28 September.
53. Краснов М.М., Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А. и др. О влиянии выбора численного потока на решение задач с ударными волнами разрывным методом Галеркина. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2022;91:21 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2022-91>
54. Краснов М.М., Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф. Программный комплекс РАМЕГ3D для численного моделирования задач аэротермодинамики на высокопроизводительных вычислительных системах. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № RU2021615026. 02.04.2021.
55. Родионов А.В. Разработка методов и программ для численного моделирования неравновесных сверхзвуковых течений в приложении к аэрокосмическим и астрофизическим задачам. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Саров; 2019.
56. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. *Математический сборник*. 1959;47(89):3:271–306.
57. Toro E.F. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Springer, Third Edition. 2010.
58. Русанов В.В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1961;1(2):267–279.
59. Lax P.D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1954;7(1):159–193.
60. Краснов М.М., Кучугов П.А., Ладонкина М.Е. и др. Разрывный метод Галёркина на трёхмерных тетраэдральных сетках. Использование операторного метода программирования. *Математическое моделирование*. 2017;29(2):3–22,529–543.
61. Мысовских И.П. *Интерполяционные кубатурные формулы*. Москва: Наука; 1981.
62. Woodward P., Colella Ph. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *Journal of Computational Physics*. 1984;54(1):115–173.
63. Arnold D.N., Brezzi F., Cockburn B. et al. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2002;29:1749–1779.

References

1. Reed WH, Hill TR. Triangular mesh methods for the neutron transport equation . Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-UR-73-79. USA; 1973. <https://www.osti.gov/servlets/purl/4491151>
2. Volkov AV. Features of application of the Galerkin method to the solution of spatial Navier-Stokes equations on unstructured hexahedral grids. *Scientific Notes of TsAGI*. 2009;XL(6). (In Russ.).
3. Nastase R, Mavriplis DJ. High-order discontinuous Galerkin methods using an hp-multigrid approach. *Journal of Computational Physics*. 2006;213:330–357.
4. Bosnyakov SM, Mikhailov SV, Podaruyev VYu, et al. Unsteady discontinuous Galerkin method of high order accuracy for modeling turbulent flows. *Mathematical Modeling*. 2018;30(5):37–56. (In Russ.).
5. Krasnov MM, et al. Numerical solution of the Navier-Stokes equations by discontinuous Galerkin method. *Journal of Physics: Conference Series*. 2017;815(1).
6. Krasnov MM, Kuchugov PA, Ladonkina ME, et al. Discontinuous Galerkin method on three-dimensional tetrahedral grids. Using the operator programming method. *Mathematical Modeling*. 2017;29(2):3–22. (In Russ.).
7. Krasnov MM, Ladonkina ME. Discontinuous Galerkin method on three-dimensional tetrahedral grids. Application of template metaprogramming of the C++ language. *Programming*. 2017;3:41–53. (In Russ.).
8. Ladonkina ME, Neklyudova OA, Tishkin VF. Application of the RKDG method for gas dynamics problems. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2014;26(1):17–32. (In Russ.).
9. Volkov AV. Features of application of the Galerkin method to the solution of spatial Navier-Stokes equations on unstructured hexahedral grids. *Scientific Notes of TsAGI*. 2009;XL(6). (In Russ.).
10. Yasue K, Furudate M, Ohnishi N., et al. Implicit discontinuous Galerkin method for RANS simulation utilizing pointwise relaxation algorithm. *Communications in Computational Physics*. 2010;7(3):510–533.
11. Klockner A, Warburton T, Hesthaven JS. Nodal discontinuous Galerkin methods on graphics processors. *Journal of Computational Physics*. 2009;228(21):7863–7882.
12. Lou J, Xia Y, Luo L, et al. OpenACC-based GPU Acceleration of a p-multigrid Discontinuous Galerkin Method for Compressible Flows on 3D Unstructured Grids. *53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting, AIAA SciTech Forum*, (AIAA 2015-0822).
13. Chan J, et al. GPU-accelerated discontinuous Galerkin methods on hybrid meshes. *Journal of Computational Physics*. 2015:318.
14. Krasnov MM. Operator library for solving three-dimensional grid problems of mathematical physics using graphics cards with CUDA architecture. *Mathematical Modeling*. 2015;27(3):109–120. (In Russ.).
15. Krasnov MM. Parallel algorithm for calculating hyperplane points of the computing front. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2015;55(1):145–152. (In Russ.).
16. Cockburn. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations. *Lecture Notes in Mathematics*. 1998;1697:151–268.
17. Krivodonova L. Limiters for high-order discontinuous Galerkin methods. *Journal of Computational Physics*. 2007; 226(1):276–296.
18. Shu C-W. High order WENO and DG methods for time-dependent convection-dominated PDEs: A brief survey of several recent developments. *Journal of Computational Physics*. 2016;316:598–613.
19. Luo H, Baum JD, Lohner RA. Hermite WENO-based limiter for discontinuous Galerkin method on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*. 2007;225(1):686–713.
20. Zhu J, Zhong X, Shu C-W, et al. Runge-Kutta discontinuous Galerkin method using a new type of WENO limiters on unstructured meshes. *Journal of Computational Physics*. 2013;248:200–220.
21. Dumbser M. Arbitrary high order PNPM schemes on unstructured meshes for the compressible Navier–Stokes equations. *Computers & Fluids*. 2010;39(1):60–76.
22. Peraire J, Persson P-O. *Adaptive High-Order Methods in Computational Fluid Dynamics*. V.2 of Advances in CFD, chap.5 - High-Order Discontinuous Galerkin Methods for CFD. World Scientific Publishing Co; 2011.
23. Volkov AV, Lyapunov CV. Monotonization of the finite element method in problems of gas dynamics. *Scientific Notes of TsAGI*. 2009;XL(4):15–27. (In Russ.).
24. Ladonkina ME, Neklyudova OA, Tishkin VF. Construction of a limiter for the discontinuous Galerkin method based on averaging the solution. *Mathematical Modeling*. 2018;30(5):99–116. (In Russ.).
25. Haga T, Sawada K. *An improved slope limiter for high-order spectral volume methods solving the 3D compressible Euler equations*; 2009.
26. Bassi F, Rebay S. Numerical evaluation of two discontinuous Galerkin methods for the compressible Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2002;40:197–207.
27. Cockburn, Shu C-W. The local discontinuous Galerkin method for time dependent convection diffusion system. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1998;35(6):2440–2463.
28. Vlasenko VV, Volkov AV, Troshin AI. The choice of the method of approximation of viscous terms in the Galerkin method with discontinuous basis functions. *Scientific Notes of TsAGI*. 2013;XLIV(3).

29. Gottlieb S, Shu C-W, Tadmor E. Strong stability-preserving high-order time discretization methods. *SIAM Review*. 2001;43(1):89–112.
30. Spiteri Raymond J, Ruuth Steven J. A New Class of Optimal High-Order Strong Stability-Preserving Time Discretization Methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2002;40(2):469–491.
31. Rasetarinera P, Hussaini MY. An efficient implicit discontinuous spectral Galerkin method. *Journal of Computational Physics*. 2001;172:718–738.
32. Hartmann R. Adaptive discontinuous Galerkin methods with shock-capturing for the compressible Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2006;51:1131–1156.
33. Hartmann R, Houston P. Symmetric interior penalty DG methods for the compressible Na-vier-Stokes equations I: Method formulation. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*. 2006;3:1–20.
34. Dolejší V. Semi-implicit interior penalty discontinuous Galerkin methods for viscous compressible flows. *Computer Physics Communications*. 2008;4:231–274.
35. Yasue K, Furudate M, Ohnishi N, et al. Implicit discontinuous Galerkin method for RANS simulation utilizing pointwise relaxation algorithm. *Computer Physics Communications*. 2010;7(3):510–533.
36. Jameson A, Yoon S. Lower-upper implicit schemes with multiple grids for the Euler equations. *AIAA Journal*. 1987;25:929–935.
37. Proc. ECCOMAS Thematic Conference: European Conf. on High Order Nonlinear Numerical Methods for Evolutionary PDEs: *Theory and Applications HONOM*. 2017;27.03–31.03.
38. Peery KM, Imlay ST. Blunt body flow simulations. *AIAA Paper*. 1988;88–2924.
39. Rodionov AV. *Artificial viscosity for suppression of shock-wave instability in Godunov-type schemes of increased accuracy*. Russian Federal Nuclear Center VNIIEF. 2018;116:51 p. (In Russ.).
40. Quirk JJ. A contribution to the great Riemann solver debate. ICASE Report 1992;92–64. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 1994;18:555–574.
41. Rodionov AV. *Development of methods and programs for numerical simulation of nonequilibrium supersonic flows in application to aerospace and astrophysical problems*. Dissertation for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences Sarov; 2019. (In Russ.).
42. Pandolfi M, D’Ambrosio D. Numerical instabilities in Upwind Methods: Analysis and Cures for the “Carbuncle” Phenomenon. *Journal of Computational Physics*. 2001;166:271–301.
43. Dumbser M, Moschetta J-M, Gressier J. A matrix stability analysis of the carbuncle phenomenon. *Journal of Computational Physics*. 2004;197:647–670.
44. Roe P, Nishikawa H, Ismail F, et al. On carbuncles and other excrescences. *AIAA Paper*. 2005;2005–4872.
45. Menart JA, Henderson SJ. Study of the issues of computational aerothermodynamics using a Riemann solver. *AFRL Report*. 2008; 2008–3133.
46. Kitamura K, Shima E. Towards shock-stable and accurate hypersonic heating computations: A new pressure flux for AUSM-family schemes. *Journal of Computational Physics*. 2013;245:62–83.
47. Xie W, Li W, Li H, et al. On numerical instabilities of Godunov-type schemes for strong shocks. *Journal of Computational Physics*. 2017;350:607–637.
48. Gressier J, Moschetta J-M. Robustness versus accuracy in shock-wave computations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2000;33:313–332.
49. Nishikawa H, Kitamura K. Very simple, carbuncle-free, boundary-layer-resolving, rotated-hybrid Riemann solvers. *Journal of Computational Physics*. 2008;227:2560–2581.
50. Guo S, Tao W-Q. *Numerical Heat Transfer*, Part B: Fundamentals. 2018; 73:33–47.
51. Hu LJ, Yuan L. A robust hybrid hllc-force scheme for curing numerical shock instability. *Applied Mechanics and Materials*. 2014;577:749–753.
52. Ferrero A, D’Ambrosio D. An Hybrid Numerical Flux for Supersonic Flows with Application to Rocket Nozzles. *17TH International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics*. Rhodes, Greece; 2019, 23–28 September.
53. Krasnov MM, Ladonkina ME, Neklyudova OA, et al. On the influence of the choice of numerical flow on the solution of problems with shock waves by the discontinuous Galerkin method. *Preprints of IPM named after M.V.Keldysh*. 2022;91:21 p. (In Russ.). <https://doi.org/10.20948/prepr-2022-91>
54. Krasnov MM, Ladonkina ME, Tishkin VF. *RAMEG3D software package for numerical simulation of aerothermodynamics problems on high-performance computing systems*. Certificate of state registration of the computer program. No. RU2021615026, 02.04.2021. (In Russ.).
55. Rodionov AV. *Development of methods and programs for numerical simulation of nonequilibrium supersonic flows in application to aerospace and astrophysical problems*. Dissertation for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences Sarov; 2019. (In Russ.).
56. Godunov K. The difference method of the calculation of the explosive solutions of the equalization of hydrodynamics. *Mathematical Collection*. 1959;47(89):3:271–306. (In Russ.).
57. Toro EF. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Springer, Third Edition. 2010.

58. Rusanov VV. Calculation of interactions with stationary shock waves. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1961;I(2):267–279. (In Russ.).
59. Lax PD. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1954;7(1): 159–193.
60. Krasnov MM, Kuchugov PA, Ladonkina ME, et al. Discontinuous Galerkin method on three-dimensional tetrahedral grids. Using the operator programming method. *Mathematical Modeling*. 2017;29(2):3–22,529–543. (In Russ.).
61. Mysovskikh IP. *Interpolation cubature formulas*. Moscow: Nauka; 1981. (In Russ.).
62. Woodward P, Colella Ph. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *Journal of Computational Physics*. 1984;54(1):115–173.
63. Arnold DN, Brezzi F, Cockburn B, et al. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2002;29:1749–1779.

Об авторах:

Тишкин Владимир Федорович, член-корреспондент РАН, профессор, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук (125047, РФ, г. Москва, Миусская пл., 4), доктор физико-математических наук, [ORCID](#), tishkin@imamod.ru, v.f.tishkin@mail.ru

Ладонкина Марина Евгеньевна, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук (125047, РФ, г. Москва, Миусская пл., 4), кандидат физико-математических наук, [ORCID](#), ladonkina@imamod.ru

Поступила в редакцию 05.04.2023.

Поступила после рецензирования 24.05.2023.

Принята к публикации 25.05.2023.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Vladimir F Tishkin, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences (4, Miusskaya Sq., Moscow, 125047, RF), Doctor of Physical and Mathematical Sciences, [ORCID](#), tishkin@imamod.ru, v.f.tishkin@mail.ru

Marina E Ladonkina, Senior Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences (4, Miusskaya Sq., Moscow, 125047, RF), Candidate of Physical and Mathematical Sciences, [ORCID](#), ladonkina@imamod.ru

Received 05.04.2023.

Revised 24.05.2023.

Accepted 25.05.2023.

Conflict of interest statement

The authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 519.688

Научная статья

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-19-30>


Численная реализация сеточных уравнений гидродинамики мелководных водоёмов с использованием трехдиагонального предобуславливателя в областях сложной формы

В.Н. Литвинов^{1,2}  , А.М. Атаян¹ , Н.Н. Грачева^{1,2} , Н.Б. Руденко^{1,2} , Н.Ю. Богданова¹

¹Донской государственный технический университет, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

²Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ, Российская Федерация, г. Зерноград, ул. Ленина, 21

✉ LitvinovVN@rambler.ru

Аннотация

Введение. Математическое моделирование гидродинамических процессов в мелководных водоёмах сложной геометрии при наличии прибрежных инженерных систем требует комплексного подхода при разработке алгоритмов построения расчетных сеток и методов решения сеточных уравнений. Работа посвящена описанию алгоритмов, позволяющих уменьшить время решения СЛАУ за счёт использования алгоритма обработки наложения сегментов геометрии и организации параллельно-конвейерных вычислений. Целью работы является сравнение ускорения параллельных алгоритмов для методов Зейделя, Якоби, модифицированного попеременно-треугольного метода и метода решения сеточных уравнений с трехдиагональным предобуславливателем в зависимости от количества вычислительных узлов.

Материалы и методы. Численная реализация модифицированного попеременно-треугольного итерационного метода решения сеточных уравнений (МПТМ) высокой размерности основана на параллельных алгоритмах, построенных на основе конвейерного вычислительного процесса. Произведена декомпозиция расчётной области для организации процесса конвейерного вычисления. Введена графовая модель, позволяющая зафиксировать связи между соседними фрагментами расчетной сетки. Для описания сложной геометрии водоёма, включающей прибрежные сооружения, предложен алгоритм наложения сегментов геометрии.

Результаты исследования. В ходе исследований было установлено, что время расчета одного шага МПТМ на GPU зависит от количества потоков по оси O_z и обратно пропорционально количеству узлов расчетной сетки по данной оси. Поэтому рекомендуется декомпозировать расчетную область на параллелепипеды таким образом, чтобы их размер по оси O_x был наименьшим, а по O_z — наибольшим. Предложенный алгоритм объединения сегментов геометрии позволил уменьшить время вычислений на величину от 14 до 27 %.

Обсуждение и заключения. Разработан и численно реализован алгоритм решения системы сеточных уравнений большой размерности, возникающих при дискретизации задачи гидродинамики мелководного водоема методом МПТМ, адаптированный для гетерогенных вычислительных систем. Предложена графовая модель параллельно-конвейерного вычислительного процесса. Соединение сегментов геометрии водного объекта позволило сократить количество вычислительных операций и увеличить скорость расчетов. Проведено сравнение эффективности параллельных алгоритмов для методов Зейделя, Якоби, модифицированного попеременно-треугольного метода и метода решения сеточных уравнений для задач гидродинамики в плоских областях в зависимости от количества вычислительных узлов.

Ключевые слова: математическое моделирование, геометрия расчетной области, параллельное программирование, графический ускоритель.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-20050. <https://rscf.ru/project/21-71-20050/>

Для цитирования. Литвинов В.Н., Атаян А.М., Грачева Н.Н. и др. Численная реализация сеточных уравнений гидродинамики мелководных водоёмов с использованием трехдиагонального предобуславливателя в областях сложной формы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):19–30. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-19-30>

Original article

Numerical Realization of Shallow Water Bodies' Hydrodynamics Grid Equations using Tridiagonal Preconditioner in Areas of Complex Shape

Vladimir N Litvinov^{1,2}  , Asya M Atayan¹ , Natalya N Gracheva^{1,2} , Nelly B Rudenko^{1,2} , Natalya Yu Bogdanova¹

¹Don State Technical University, 1, Gagarina Sq., Rostov-on-Don, Russian Federation

²Azov-Black Sea Engineering Institute of Don State Agrarian University, 21, Lenina St., Zernograd, Russian Federation

 LitvinovVN@rambler.ru

Abstract

Introduction. Mathematical modeling of hydrodynamic processes in shallow reservoirs of complex geometry in the presence of coastal engineering systems requires an integrated approach in the development of algorithms for constructing computational grids and methods for solving grid equations. The work is devoted to the description of algorithms that allow to reduce the time for solving SLAE by using an algorithm for processing overlapping geometry segments and organizing parallel pipeline calculations. The aim of the work is to compare the acceleration of parallel algorithms for the methods of Seidel, Jacobi, modified alternately triangular method and the method of solving grid equations with tridiagonal preconditioner depending on the number of computational nodes.

Materials and Methods. The numerical implementation of the modified alternating-triangular iterative method for solving grid equations (MATM) of high dimension is based on parallel algorithms based on a conveyor computing process. The decomposition of the computational domain for the organization of the pipeline calculation process has been performed. A graph model is introduced that allows to fix the connections between neighboring fragments of the computational grid. To describe the complex geometry of a reservoir, including coastal structures, an algorithm for overlapping geometry segments is proposed.

Results. It was found that the efficiency of implementing one step of the MATM on the GPU depends only on the number of threads along the O_z axis, and the step execution time is inversely proportional to the number of nodes of the computational grid along the O_z axis. Therefore, it is recommended to decompose the computational domain into parallelepipeds in such a way that the size along the O_z axis is maximum, and the size along the O_x axis is minimal. Thanks to the algorithm for combining geometry segments, it was possible to speed up the calculation by 14–27 %.

Discussion and Conclusions. An algorithm has been developed and numerically implemented for solving a system of large-dimensional grid equations arising during the discretization of the shallow water bodies' hydrodynamics problem by MATM, adapted for heterogeneous computing systems. The graph model of a parallel-pipeline computing process is proposed. The connection of water body's geometry segments allowed to reduce the number of computational operations and increase the speed of calculations. The efficiency of parallel algorithms for the methods of Seidel, Jacobi, modified alternately triangular method and the method of solving grid equations for problems of hydrodynamics in flat areas, depending on the number of computational nodes, is compared.

Keywords: mathematical modeling, computational domain geometry, parallel programming, graphics accelerator.

Funding information. The study was supported by the Russian Science Foundation no. 21-71-20050. <https://rscf.ru/project/21-71-20050/>

For citation. Litvinov VN, Atayan AM, Gracheva NN, et al. Numerical realization of shallow water bodies' hydrodynamics grid equations using tridiagonal preconditioner in areas of complex shape. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):19–30. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-19-30>

Введение. Для предсказания состояния мелководных водоемов в экстренных ситуациях, вызванных деятельностью человека или природными и климатическими катаклизмами, используется математическое моделирование. При этом необходимо учитывать такие особенности каждого конкретного водного объекта, как геометрия водоема и его прибрежной зоны, климатические условия и гидродинамические режимы. Такие задачи актуализируют совершенствование методов решения систем сеточных уравнений высокой размерности в случае несамосопряженного оператора. Из-за большого объема данных и сложности вычислений необходимо использовать многопроцессорные вычислительные системы и видеоадаптеры для увеличения скорости получения решения.

Моделирование многих гидрофизических и гидробиологических задач сводится к необходимости решения уравнения диффузии-конвекции-реакции с несамосопряжённым оператором. Обзор актуальных численных

методов решения выполнен в работе П. Вабищевича [1], где сформулирован ряд теорем, позволяющих определить численные параметры и границы применимости исследуемых методов решения сеточных уравнений. Активно развиваются итерационные методы решения таких задач. В работе Geiser, Hueso, Martinez [2] проанализированы различные типы методов расщепления, предложены модификации методов SLIS и SQIS, на основе которых построены эффективные адаптивные алгоритмы, позволяющие увеличить шаг по времени без снижения точности вычислений.

За последние несколько лет значительно увеличилось количество исследований, направленных на разработку эффективных по скорости вычисления алгоритмов, предназначенных для решения систем сеточных уравнений высокой размерности. Российские и зарубежные учёные занимаются разработкой параллельных алгоритмов для гетерогенных вычислительных сред, изучают производительность кластерных вычислительных систем для различных методов дискретизации различных дифференциальных уравнений. Так, например, в работах [3, 4] Subbaian G. и Reddy Sathi произведён анализ производительности нескольких итерационных методов решения уравнения Навье-Стокса с ускорением вычислений на графическом процессоре (GPU) с помощью технологии CUDA. Учёные Lakshmiranganatha S., Muknahallipatna S., Paliwal M., Chilla R., Prasanth N., Goundar S. и Raja S.P. сравнили производительность различных параллельных алгоритмов для нахождения решения обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от времени, на CPU и графическом процессоре (GPU) с использованием трёх технологий распараллеливания: OpenMP, OpenACC и CUDA. В результате исследования установлено, что технология CUDA является наиболее эффективным ускорителем для решения указанных уравнений [5, 6]. Российские и казахские учёные разработали параллельные алгоритмы для нахождения решений систем линейных алгебраических уравнений. Алгоритмы были реализованы на многоядерных процессорах с использованием технологии OpenMP [7, 8]. Проверка эффективности параллельных алгоритмов для решения задачи одномерной теплопроводности для трёх методов конечно-разностной аппроксимации выполнялась на центральном и графическом процессорах на языках программирования C(CPU) и CUDA C (GPU). Ускорение вычислений на GPU увеличивалось до 60 раз [9, 10]. В работе [11] рассматривается построение параллельных алгоритмов, основанных на функциональной декомпозиции метода встречных прогонок, для решения сеточных уравнений трехдиагонального вида. Д. Б. Волков-Богородский, Г. Б. Сушко и С. А. Харченко в работе [12] описывают гибридные параллельные алгоритмы аппроксимации решений нестационарного уравнения теплопроводности с фазовыми переходами на основе аналитического метода блоков, а именно технологию MPI+threads.

В данном исследовании необходимо разработать параллельный вариант алгоритма, который сократит время решения СЛАУ за счёт использования алгоритма обработки наложения сегментов геометрии и распараллеливания процесса вычислений.

Материалы и методы

1. Постановка задачи. Математическая модель гидродинамики мелководных водоемов включает [13]:

– уравнения движения Навье-Стокса:

$$u'_t + uu'_x + vv'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho} P'_x + (\mu u'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (\mu w'_z)'_z + 2\Omega(v \sin \vartheta - w \cos \vartheta), \quad (1)$$

$$v'_t + uv'_x + vv'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho} P'_y + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (\mu w'_z)'_z + 2\Omega u \sin \vartheta, \quad (2)$$

$$w'_t + uw'_x + vv'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho} P'_z + (\mu w'_x)'_x + (\mu w'_y)'_y + (\mu w'_z)'_z + 2\Omega u \cos \vartheta + g; \quad (3)$$

– уравнение неразрывности в случае переменной плотности:

$$\rho'_t + (\rho u)'_x + (\rho v)'_y + (\rho w)'_z = 0, \quad (4)$$

где $V = \{u, v, w\}$ — компоненты вектора скорости; P — полное гидродинамическое давление; ρ — плотность водной среды; μ, ν — горизонтальная и вертикальная составляющие коэффициента турбулентного обмена; $\Omega = \Omega \cdot (\cos \vartheta \cdot j + \sin \vartheta \cdot k)$ — угловая скорость вращения Земли определяется выражением; ϑ — широта места; g — ускорение свободного падения; f_T, f_s — источники тепла и соли (находится на границе области).

Исходная модель гидродинамики (1–4) разбивается на несколько подзадач [14, 15]. Первая подзадача представлена уравнением диффузии-конвекции-реакции, при помощи которого вычисляются компоненты поля вектора скорости на промежуточном слое по времени:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u} - u}{\tau} + u\tilde{u}'_x + v\tilde{u}'_y + w\tilde{u}'_z &= (\mu\tilde{u}'_x)'_x + (\mu\tilde{u}'_y)'_y + (\mu\tilde{u}'_z)'_z + 2\Omega(v \sin \theta - w \cos \theta), \\ \frac{\tilde{v} - v}{\tau} + u\tilde{v}'_x + v\tilde{v}'_y + w\tilde{v}'_z &= (\mu\tilde{v}'_x)'_x + (\mu\tilde{v}'_y)'_y + (\mu\tilde{v}'_z)'_z - 2\Omega u \sin \theta, \\ \frac{\tilde{w} - w}{\tau} + u\tilde{w}'_x + v\tilde{w}'_y + w\tilde{w}'_z &= (\mu\tilde{w}'_x)'_x + (\mu\tilde{w}'_y)'_y + (\mu\tilde{w}'_z)'_z + 2\Omega u \cos \theta + g \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Для аппроксимации уравнения диффузии-конвекции-реакции (5) по времени использована схема Кранка-Николсона. Здесь $u = \sigma \tilde{u} + (1 - \sigma)u$, $\sigma \in [0, 1]$ — вес схемы.

2. Методы решения сеточных уравнений. Модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод. Введём трёхмерную равномерную расчетную сетку [14]:

$$\bar{w}_h = \{t^n = n\tau, x_i = ih_x, y_j = jh_y, z_k = kh_z; n = \overline{0, n_t - 1}, i = \overline{0, n_1 - 1},$$

$$j = \overline{0, n_2 - 1}, k = \overline{0, n_3 - 1}; (n_t - 1)\tau = T, (n_1 - 1)h_x = l_x, (n_2 - 1)h_y = l_y, (n_3 - 1)h_z = l_z\},$$

где τ — временной шаг; h_x, h_y, h_z — размер шагов по координатным направлениям; n_t — количество временных слоев; T — верхняя граница по временной координате; n_1, n_2, n_3 — количество узлов по пространственным координатам; l_x, l_y, l_z — пространственные размеры расчетной области.

При построении дискретной модели получим систему сеточных уравнений. Каждое уравнение системы может быть представлено в канонической форме, при этом будем использовать семиточечный шаблон:

$$c(m_0)u(m_0) - \sum_{i=1}^6 c(m_0, m_i)u(m_i) = F(m_0),$$

где $m_0(x_i, y_j, z_k)$ — центр шаблона; $M'(P) = \{m_1(x_{i+1}, y_j, z_k), m_2(x_{i-1}, y_j, z_k), m_3(x_i, y_{j+1}, z_k), m_4(x_i, y_{j-1}, z_k), m_5(x_i, y_j, z_{k+1}), m_6(x_i, y_j, z_{k-1})\}$ — окрестность центра; $c_0 \equiv c(m_0)$ — коэффициент центра шаблона; $c_i \equiv c(m_0, m_i)$ — коэффициенты окрестности центра шаблона; F — вектор правых частей; u — рассчитываемый вектор.

Алгоритм МПТМ состоит из четырёх этапов:

- 1) расчет вектора невязки r^m ;
- 2) расчет вектора поправки w^m ;
- 3) расчет скалярных произведений на основе итерационных параметров τ_{m+1}, ω_{m+1} ;
- 4) переход на новый итерационный слой.

Условием окончания итерационного процесса является достижение нормой вектора невязки r^m заданной точности. При этом наиболее трудоемкая часть алгоритма — расчет w^m , который сводится к решению СЛАУ с нижне-треугольной и верхне-треугольной матрицами.

3. Метод решения сеточных уравнений с трехдиагональным предобуславливателем. В случае если шаги по одной из пространственных координат существенно меньше размеров шагов по другим (например, при решении задач тепломассопереноса в мелководных водоемах), размеры расчетной области по вертикальному направлению могут быть на несколько порядков меньше горизонтальных размеров. Для решения задачи (1) на основе разностных схем с относительно небольшими трудозатратами на переход между временными слоями, по сравнению с явной схемой (в 1,5–2 раза большими), с большими шагами по времени (около 30 раз больше) воспользуемся схемами расщепления на двумерную и одномерную задачи [16–17]:

$$\frac{c^{n+1/2} - c^n}{\tau} + u(c^n)'_x + v(c^n)'_y = \left(\mu(c^n)'_x \right)'_x + \left(\mu(c^n)'_y \right)'_y, \quad (6)$$

$$\frac{c^{n+1} - c^{n+1/2}}{\tau} + w(c^{n+(\sigma+1)/2})'_z = \left(v(c^{n+(\sigma+1)/2})'_z \right)'_z + f^{n+(\sigma+1)/2}, \quad (7)$$

здесь $c^{n+(\sigma+1)/2} = \sigma c^{n+1} + (1 - \sigma)c^{n+1/2}$; σ — вес схемы [7].

Для численной реализации дискретной математической модели поставленной задачи вводится пространственная сетка [18]:

$$\bar{w}_h = \{t^n = n\tau, x_i = ih_x, y_j = jh_y; n = \overline{0, n_t - 1}, i = \overline{0, n_1 - 1},$$

$$j = \overline{0, n_2 - 1}; (n_t - 1)\tau = T, (n_1 - 1)h_x = l_x, (n_2 - 1)h_y = l_y\}.$$

Для аппроксимации однородного уравнения (2) будем использовать схемы расщепления по пространственным координатным направлениям:

$$\begin{aligned} \frac{c^{n+1/4} - c^n}{\tau} + u(c^n)'_x &= \left(\mu(c^n)'_x \right)'_x, \\ \frac{c^{n+1/2} - c^{n+1/4}}{\tau} + v(c^{n+1/4})'_y &= \left(\mu(c^{n+1/4})'_y \right)'_y. \end{aligned} \quad (8)$$

Для решения реальных задач гидрофизики мелководных водоемов применены трехслойные разностные схемы, построенные на основе линейной комбинации разностных схем «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициен-

тами 2/3 и 1/3 соответственно. Для увеличения точности расчетов используется схема, учитывающая заполненность расчетных ячеек [19–21]:

– разностная схема для уравнения, описывающего перенос вдоль направления O_x :

$$\begin{aligned} & \frac{2q_{2,i,j} + q_{0,i,j}}{3} \frac{c_{i,j}^{n+1/4} - c_{i,j}^n}{\tau} + 5u_{i-1/2,j} q_{2,i,j} \frac{c_{i,j}^n - c_{i-1,j}^n}{3h_x} + u_{i+1/2,j} \min(q_{1,i,j}, q_{2,i,j}) \frac{c_{i+1,j}^n - c_{i,j}^n}{3h_x} + \\ & + \frac{2\Delta_x c_{i-1,j}^n q_{2,i,j} + \Delta_x c_{i,j}^n q_{0,i,j}}{3} = 2\mu_{i+1/2,j} q_{1,i,j} \frac{c_{i+1,j}^n - c_{i,j}^n}{h_x^2} - 2\mu_{i-1/2,j} q_{2,i,j} \frac{c_{i,j}^n - c_{i-1,j}^n}{h_x^2} - \\ & - |q_{1,i,j} - q_{2,i,j}| \mu_{i,j} \frac{\alpha_x c_{i,j}^n + \beta_x}{h_x}, \quad u_{i,j} \geq 0, \end{aligned}$$

где $\Delta_x c_{i,j}^n = \frac{c_{i,j}^{n-3/4} - c_{i,j}^{n-1}}{\tau}$;

– разностная схема для уравнения (4), описывающего перенос вдоль направления O_y :

$$\begin{aligned} & \frac{2q_{4,i,j} + q_{0,i,j}}{3} \frac{c_{i,j}^{n+1/2} - c_{i,j}^{n+1/4}}{\tau} + 5v_{i,j-1/2} q_{4,i,j} \frac{c_{i,j}^{n+1/4} - c_{i,j-1}^{n+1/4}}{3h_y} + v_{i,j+1/2} \min(q_{3,i,j}, q_{4,i,j}) \frac{c_{i,j+1}^{n+1/4} - c_{i,j}^{n+1/4}}{3h_y} + \\ & + \frac{2\Delta_y c_{i,j-1}^{n+1/4} q_{4,i,j} + \Delta_y c_{i,j}^{n+1/4} q_{0,i,j}}{3} = 2\mu_{i,j+1/2} q_{3,i,j} \frac{c_{i,j+1}^{n+1/4} - c_{i,j}^{n+1/4}}{h_y^2} - 2\mu_{i,j-1/2} q_{4,i,j} \frac{c_{i,j}^{n+1/4} - c_{i,j-1}^{n+1/4}}{h_y^2} - \\ & - |q_{3,i,j} - q_{4,i,j}| \mu_{i,j} \frac{\alpha_y c_{i,j}^{n+1/4} + \beta_y}{h_y}, \quad v_{i,j} \geq 0, \end{aligned}$$

где $\Delta_y c_{i,j}^{n+1/4} = \frac{c_{i,j}^{n-1/2} - c_{i,j}^{n-3/4}}{\tau}$.

Здесь q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 — степени заполненности контрольных областей.

Для получения разностных схем, аппроксимирующих систему уравнений (4), при $u_{i,j} < 0$ и $v_{i,j} < 0$ из представленных аппроксимаций, необходимо направить соответствующие координатные оси O_x и O_y в противоположные стороны. Уравнение (3) решается методом прогонки.

Для решения нестационарных задач преимуществом обладает схема расщепления на двумерную и одномерную задачи. При этом двумерная задача решается на основе явных схем, а одномерная аппроксимируется схемами с весами и решается методом прогонки. При решении стационарных задач используются схемы с весами. Использование данного подхода позволяет свести исходную задачу к решению сеточных уравнений итерационными методами [22].

4. Алгоритм наложения сегментов геометрии. При составлении СЛАУ необходимо учитывать сложную геометрию водоёма, формируемую комбинацией донной поверхности и прибрежных инженерных сооружений. Программно предложен и реализован подход, позволяющий моделировать геометрию исследуемого объекта как множество геометрических примитивов. Особенностью подхода является поддержка наложения примитивов друг на друга. В библиотеке классов, разработанной при программной реализации, все геометрические примитивы наследуются от абстрактного класса Geometry2DPrimitive (рис. 1), который содержит такие данные, как координаты смещения _dS0, тип примитива _primitiveType и логическое свойство, характеризующее «вырез» (_isCavity).

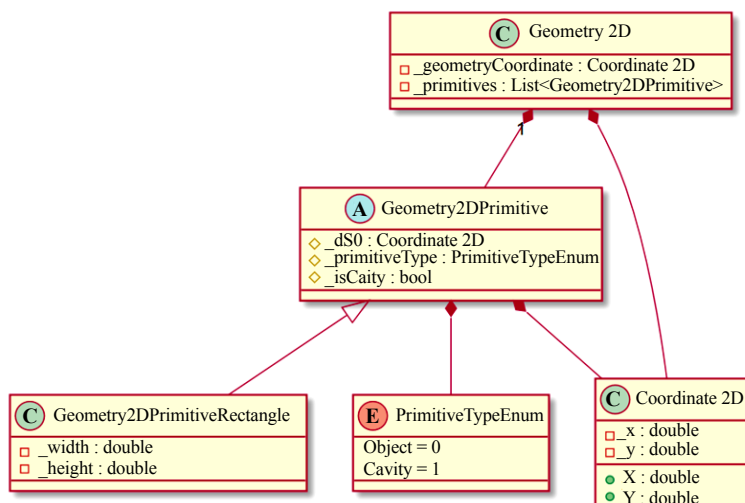


Рис. 1. Геометрия исследуемого объекта. Диаграмма классов

Объектно-ориентированное моделирование сегмента геометрии выполняется при помощи типизированного класса `GeometryPrimitiveSegment<T>`, в котором тип T является классом, используемым для хранения данных о координатах начала и конца сегмента.

Обозначим координаты начала и конца соответственно первого и второго сегментов $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$.

Введём логические переменные: $A = c_{11} < c_{21}$, $B = c_{11} = c_{21}$, $C = c_{11} > c_{21}$, $D = c_{12} < c_{22}$, $E = c_{12} = c_{22}$, $F = c_{12} > c_{22}$, $G = c_{11} = c_{22}$, $H = c_{12} = c_{21}$, $I = c_{12} < c_{21}$, $J = c_{11} > c_{22}$. K, L — типы первого и второго сегментов; M, N — заполненность пространства под первым и вторым сегментами; V — флаг, означающий, что второй сегмент является «вырезом».

Все возможные комбинации наложения сегментов геометрии сведены в таблицу 1.

Учет различных комбинаций геометрических примитивов является основой исходного линейного алгоритма.

Для повышения производительности введен ряд модификаций на основе условных конструкций:

1. Инициализация: $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$.
2. Вычисление: $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, V$.
3. Проверка условия корректности: $L \wedge \bar{N} \vee K \wedge \bar{M} \neq \text{true}$.
4. Определение типа наложения.
5. Дальнейшие действия выполняются для найденного типа наложения. Для примера описан вариант № 1 (таблица 1). Для других типов действия те же.
6. Если первый сегмент не является граничным ($K = \text{true}$), то переход к шагу 12.
7. Если второй сегмент не является граничным ($L = \text{true}$), то переход к шагу 10.
8. Вычисление выражений $\bar{M} \wedge \bar{N} \wedge V$, $\bar{M} \wedge \bar{N} \wedge \bar{V}$, $\bar{M} \wedge N \wedge V$, $\bar{M} \wedge N \wedge \bar{V}$, $M \wedge \bar{N} \wedge V$, $M \wedge \bar{N} \wedge \bar{V}$, $M \wedge N \wedge V$, $M \wedge N \wedge \bar{V}$ и создание результирующих сегментов.
9. Переход к шагу 17.
10. Вычисление $\bar{M} \wedge N \wedge V$, $M \wedge N \wedge \bar{V}$, $M \wedge N \wedge V$, $\bar{M} \wedge N \wedge \bar{V}$ и создание результирующих сегментов.
11. Переход к шагу 17.
12. Если второй сегмент граничный ($L = \text{false}$), то переход к шагу 15, иначе переход к шагу 17.
13. Проверка условий $M \wedge N \wedge V$, $M \wedge \bar{N} \wedge V$, $M \wedge \bar{N} \wedge \bar{V}$, $M \wedge N \wedge \bar{V}$.
14. Создание и возврат результирующих сегментов.
15. Переход к шагу 17.
16. Вычисление $M \wedge N \wedge V$, $M \wedge N \wedge \bar{V}$ и создание результирующих сегментов.
17. Конец.

Таблица 1

Варианты наложения сегментов геометрии

Вариант наложения	Графическая интерпретация	Логическое выражение
1		H
2		G
3		$B \wedge E$
4		$A \wedge F$
5		$C \wedge D$
6		$B \wedge F$
7		$B \wedge D$
8		$A \wedge E$
9		$C \wedge E$
10		$C \wedge F$

Окончание таблицы 1

Вариант наложения	Графическая интерпретация	Логическое выражение
10		$C \wedge F$
11		$A \wedge D \wedge \bar{I}$
12		I
13		J

5. Параллельная реализация. Для численной реализации МПТМ, применимого к СЛАУ высокой размерности, разработан конвейерный параллельный алгоритм, позволяющий задействовать все доступные вычислительные ресурсы. При этом каждым вычислителем (ядром CPU или вычислительным блоком GPU) обрабатываются только закреплённые за ним фрагменты расчетной области.

Связи между фрагментами и организация процесса параллельно-конвейерных вычислений описаны графовой моделью (рис. 2), где узлы представляют собой фрагменты расчетной области. Вычислительный процесс организовывается в соответствии со значениями счетчика этапов вычислений $s = k \cdot i + j$.

Разработанная графовая модель используется в алгоритме решения СЛАУ с нижнетреугольной матрицей (рис. 3). Входными параметрами алгоритма являются коэффициенты сеточных уравнений c_0, c_2, c_4, c_6 и константа ω . Результатом — вектор скорости водного потока r . При запуске программной реализации алгоритма на языке CUDA C необходимо задать значения размерностей вычислительных блоков `blockDim.x`, `blockDim.z`. Параллельно-конвейерный процесс вычислений организован в виде цикла (строка 6).

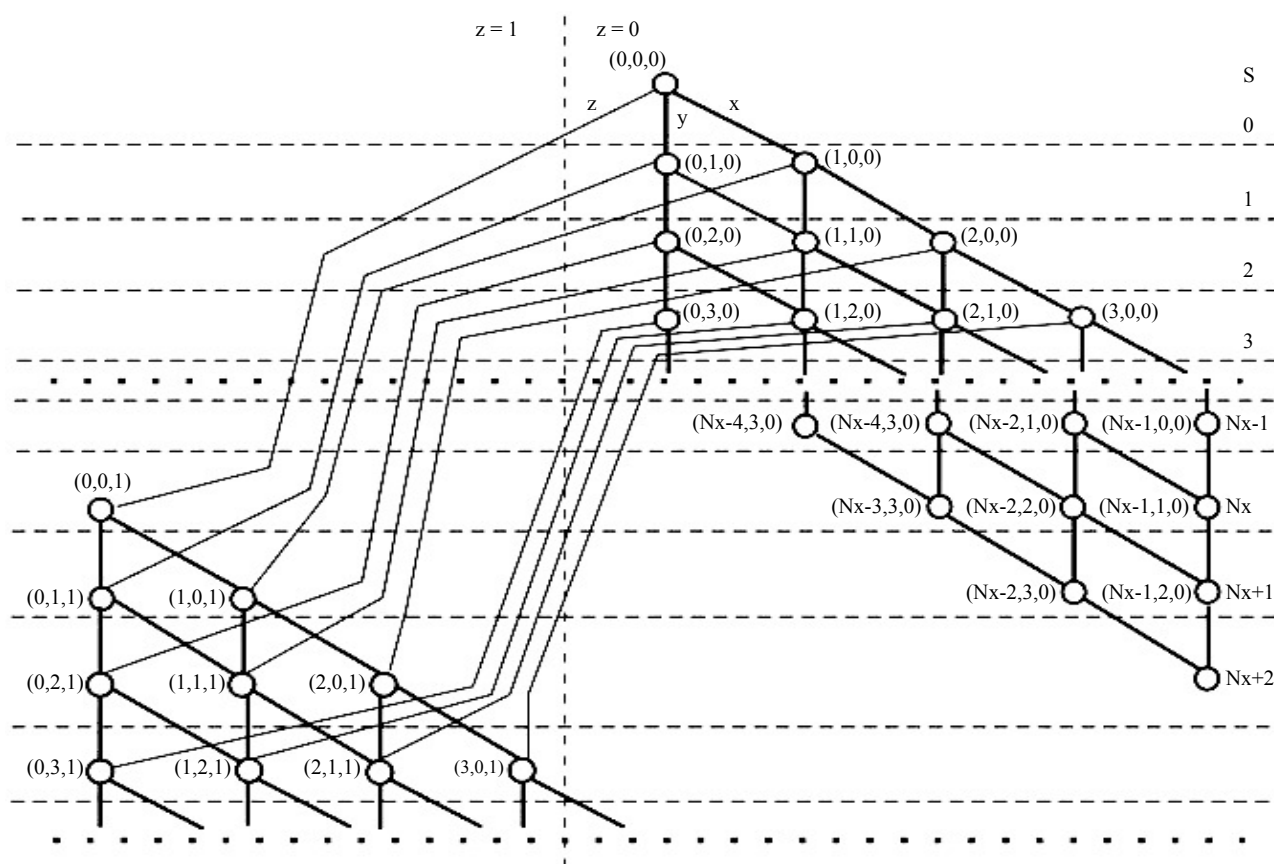


Рис. 2. Графовая модель параллельно-конвейерного процесса вычислений

Algorithm 1 ptmKernel3(IN: $c_0, c_2, c_4, c_6, \omega$ IN/OUT: r ;)

```

1:  $threadX \leftarrow blockDim.x \cdot blockIdx.x + threadIdx.x$ ;
2:  $threadZ \leftarrow blockDim.z \cdot blockIdx.z + threadIdx.z$ ;
3:  $i \leftarrow threadX + 1$ ;
4:  $j \leftarrow 1$ ;
5:  $k \leftarrow threadZ + 1$ ;
6: for  $s \in [3; n_1 + n_2 + n_3 - 3]$  do
7:   if  $(i + j + k = s) \wedge (s < i + n_2 + k)$  then
8:      $m_0 \leftarrow i + (blockDim.x + 1) \cdot j + n_1 \cdot n_2 \cdot k$ ;
9:     if  $c0[m_0] > 0$  then
10:       $m_2 \leftarrow m_0 - 1$ ;
11:       $m_4 \leftarrow m_0 - n_1$ ;
12:       $m_6 \leftarrow m_0 - n_1 \cdot n_2$ ;
13:       $rm4 \leftarrow 0$ ;
14:      if  $(s > 3 + threadX + threadZ)$  then
15:         $rm4 \leftarrow cache[threadX][threadZ]$ ;
16:      else
17:         $rm4 \leftarrow r[m_4]$ ;
18:       $rm2 \leftarrow 0$ ;
19:      if  $(threadX \neq 0) \wedge (s > 3 + threadX + threadZ)$  then
20:         $rm2 \leftarrow cache[threadX - 1][threadZ]$ ;
21:      else
22:         $rm2 \leftarrow r[m_2]$ ;
23:       $rm6 \leftarrow 0$ ;
24:      if  $(threadZ \neq 0) \wedge (s > 3 + threadX + threadZ)$  then
25:         $rm6 \leftarrow cache[threadX][threadZ - 1]$ ;
26:      else
27:         $rm6 \leftarrow r[m_6]$ ;
28:       $rm0 \leftarrow (\omega \cdot (c2[m_0] \cdot rm2 + c4[m_0] \cdot rm4 + c6[m_0] \cdot rm6) + r[m_0]) / ((0.5 \cdot \omega + 1) \cdot c0[m_0])$ ;
29:       $cache[threadX][threadZ] \leftarrow rm0$ ;
30:       $r[m_0] \leftarrow rm0$ ;
31:       $j \leftarrow j + 1$ ;

```

Рис. 3. Алгоритм решения системы уравнений с нижнетреугольной матрицей

Для уменьшения количества считываний из глобальной видеопамати введён двумерный массив *cache*, размещённый в разделяемой (shared) памяти GPU. В нём сохраняются промежуточные результаты вычислений на текущем слое по оси O_y , что ускоряет процесс вычислений на 30 %.

Результаты исследования. Вычислительный эксперимент по сравнению производительности базового и модифицированного алгоритмов проводился на вычислительной системе с процессором Intel Core i5 3.3 ГГц и оперативной памятью DDR4 32 Гб (таблица 2). В модифицированном алгоритме зафиксировано снижение времени расчетов на величину до 27 %.

Таблица 2

Результаты сравнения производительности базового и модифицированного алгоритмов объединения сегментов геометрии

Количество объединений, $\times 10^6$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Базовый алгоритм, с	0,53	0,75	0,13	0,16	0,19	0,23	0,26	0,29	0,35	0,38
Модифицированный алгоритм, с	0,41	0,55	0,97	0,12	0,15	0,20	0,22	0,25	0,29	0,31

Проведен численный эксперимент по определению количества потоков GPU по осям O_x и O_z расчетной сетки (X, Z соответственно) при фиксированном значении узлов сетки по оси O_y , равным 10000, позволяющему уменьшить время расчёта одного шага МПТМ (T_{GPU}) на GPU. Уровни варьирования факторов X и Z и результаты численного эксперимента показаны в таблице 3.

В ходе проведенного эксперимента установлено, что время расчёта одного шага МПТМ на GPU обратно пропорционально количеству узлов расчетной сетки по оси O_z . Наименьшее значение целевой функции получено при X и Z , равных 16 и 64 соответственно.

Таблица 3

Результаты эксперимента

№ п/п	X	Z	T_{GPU} , с
1.	16	64	0,064
2.	32	32	0,065
3.	64	16	0,081
4.	128	8	0,109
5.	256	4	0,100
6.	512	2	0,103

Таблица 4

Сравнение ускорения параллельных алгоритмов

P	Якоби		Зейдель		МПТМ		МРСУ с трехдиагональным предобуславливателем	
	Ускорение	Эффектив- ность	Ускорение	Эффектив- ность	Ускорение	Эффектив- ность	Ускорение	Эффектив- ность
1	1,00	100,00	1,00	100,00	1,00	100,00	1,00	100,00
2	1,95	97,50	1,95	97,50	1,94	97,00	1,84	92,00
3	2,96	98,67	2,92	97,33	2,82	94,00	2,97	99,00
4	3,98	99,50	3,75	93,75	3,82	95,50	3,32	83,00
8	7,36	92,00	7,02	87,75	7,31	91,38	8,03	100,38
16	13,29	83,06	12,92	80,75	12,78	79,88	15,80	98,75
24	16,93	70,54	16,49	68,71	17,03	70,96	19,53	81,38

В таблице 4 представлено сравнение ускорения параллельных алгоритмов для методов Зейделя, Якоби, модифицированного попеременно-треугольного метода и метода решения сеточных уравнений с трехдиагональным предобуславливателем от количества вычислительных узлов. Расчеты производились на сетке, насчитывающей один миллион расчетных ячеек. Запуски проводились последовательно, начиная от запуска на одном вычислительном узле и заканчивая подключением всех доступных узлов.

Обсуждение и заключения. Предложены алгоритмы решения СЛАУ, получаемых при дискретизации задачи гидродинамики мелководного водоема, МПТМ с использованием технологии NVIDIA CUDA. Предложенные метод декомпозиции расчетной сетки и графовая модель позволяют эффективно организовать параллельно-конвейерные вычисления на вычислительных системах различной конфигурации.

Проведены численные эксперименты по определению наилучшей двумерной конфигурации потоков в вычислительном блоке, минимизирующей время одного шага МПТМ на GPU, $-X = 16$ и $Z = 64$.

Наибольшее ускорение показал метод решения сеточных уравнений для задач гидродинамики в плоских областях, который основывается на явно-неявной схеме. МПТМ, по сравнению с методами Якоби и Зейделя, для сходимости требует существенно меньшего числа итераций. При хорошей оптимизации параллельного алгоритма МПТМ ускорение отличается не более чем на 10 % на числе вычислительных узлов до 24 по сравнению с ускорением параллельного алгоритма метода Якоби.

Разработанный программный инструментариум позволяет более эффективно задействовать вычислительные ресурсы GPU, используемой для решения вычислительно-трудоемких пространственно-трехмерных задач гидрофизики.

Объединение сегментов геометрии исследуемого объекта приводит к уменьшению количества вычислительных операций, что позволяет увеличить производительность вычислений.

Список литературы

1. Vabishchevich P. Iterative Methods for Solving Convection-diffusion Problem. *Computational Methods in Applied Mathematics*. 2002;2(4):410–444. <https://www.doi.org/10.2478/cmam-2002-0023>
2. Geiser J., Hueso J., Martinez E. Adaptive Iterative Splitting Methods for Convection-Diffusion-Reaction Equations. *Mathematics*. 2020;8:302. <https://www.doi.org/10.3390/math8030302>
3. Subbaian G., Reddy S. Performance Analysis of Different Iterative Solvers Parallelized On GPU Architecture. 2023;2:215–220. https://www.doi.org/10.1007/978-981-19-6970-6_39

4. Lakshmiranganatha S., Muknahallipatna S. Performance Analysis of Accelerator Architectures and Programming Models for Parareal Algorithm Solutions of Ordinary Differential Equations. *Journal of Computer and Communications*. 2021;9(2):29–56. <https://www.doi.org/10.4236/jcc.2021.92003>
5. Temirbekov A., Baigereyev D., Temirbekov N., Urmashiev B., Amantayeva A. Parallel CUDA implementation of a numerical algorithm for solving the Navier-Stokes equations using the pressure uniqueness condition. *AIP Conference Proceedings*. 2021;2325:020063. <https://www.doi.org/10.4236/jcc.2021.9200310.1063>
6. Paliwal M., Chilla R., Prasanth N., Goundar S., Raja P. Parallel implementation of solving linear equations using OpenMP. *International Journal of Information Technology*. 2022;14:1677–1687. <https://www.doi.org/10.1007/s41870-022-00899-9>
7. Акимова Е.Н., Султанов М.А., Мисилов В.Е. и др. Parallel sweep algorithm for solving direct and inverse problems for time-fractional diffusion equation. *Numerical Methods and Programming (Vychislitel'nye Metody i Programirovanie)*. 2022;23(4):275–287. <https://www.doi.org/10.26089/NumMet.v23r417>
8. Sultanov M., Akimova E., Misilov V., et al. Parallel Direct and Iterative Methods for Solving the Time-Fractional Diffusion Equation on Multicore Processors. *Mathematics*. 2022;10(3):323. <https://www.doi.org/10.3390/math10030323>
9. Sechenov P., Rybenko I. Solving the problem of one-dimensional thermal conductivity on graphics processors using CUDA technology. *Applied Mathematics and Control Sciences*. 2021;4:23–41. <https://www.doi.org/10.15593/2499-9873/2021.4.02>
10. Khimich A., Polyanko V., Chistyakova T. Parallel Algorithms for Solving Linear Systems on Hybrid Computers. *Cybernetics and Computer Technologies*. 2020:53–66. <https://www.doi.org/10.34229/2707-451X.20.2.6>
11. Головашкин Д.Л. Параллельные алгоритмы решения сеточных уравнений трехдиагонального вида, основанные на методе встречных прогонок. *Математическое моделирование*. 2005;17(11):118–128.
12. Волков-Богородский Д.Б., Сушко Г.Б., Харченко С.А. Комбинированная MPI+threads параллельная реализация метода блоков для моделирования тепловых процессов в структурно-неоднородных средах. *Вычислительные методы и программирование*. 2010;11(1):127–136.
13. Munk D.J., Kipourous T., Vio G.A. Multi-physics bi-directional evolutionary topology optimization on GPU-architecture. *Engineering with Computers*. 2019;35(4):1059–1079. <https://www.doi.org/10.1007/s00366-018-0651-1>
14. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Shishenya A.V., et al. Predictive Modeling of Coastal Hydrophysical Processes in Multiple-Processor Systems Based on Explicit Schemes. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2018;10(5):648–658. <https://www.doi.org/10.1134/S2070048218050125>
15. Коновалов А.Н. Метод скорейшего спуска с адаптивным попеременно-треугольным переобусловливателем. *Дифференциальные уравнения*. 2004;40(7):953–963.
16. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии, Изд. стереотип. Москва: Книжный дом «ЛИБРОКОМ»; 2015. 248 с.
17. Oyarzun G., Borrell R., Gorobets A., et al. MPI-CUDA sparse matrix–vector multiplication for the conjugate gradient method with an approximate inverse preconditioner. *Computers and Fluids*. 2014;92:244–252. <https://www.doi.org/10.1016/j.compfluid.2013.10.035>
18. Khokhlov N. I., Petrov I. B. Application of the grid-characteristic method for solving the problems of the propagation of dynamic wave disturbances in high-performance computing systems. *Proceedings of ISP RAS*. 2019;31:237–252.
19. Sukhinov A.I., Belova Yu.V., Chistyakov A.E. Solution of the matter transport problem at high Peclet numbers. *Numerical methods and programming*. 2017;18(4):371–380.
20. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A., et al. Accounting method of filling cells for the hydrodynamics problems solution with complex geometry of the computational domain. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2019;31(8):79–100. <https://www.doi.org/10.1134/S0234087919080057>
21. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A. Upwind and Standard Leapfrog Difference Schemes. *Numerical methods and programming*. 2019;20(2):170–181. <https://www.doi.org/10.26089/NumMet.v20r216>; Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Kuznetsova I.Y., et al. Modelling of suspended particles motion in channel. *Journal of Physics: Conference Series*. 2020;1479(1). <https://www.doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012082>
22. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E. Adaptive analog-SSOR iterative method for solving grid equations with non-selfadjoint operators. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2012;4(4):398–409.

References

1. Vabishchevich P. Iterative Methods for Solving Convection-diffusion Problem. *Computational Methods in Applied Mathematics*. 2002;2(4):410–444. <https://www.doi.org/10.2478/cmam-2002-0023>
2. Geiser J, Hueso J, Martinez E. Adaptive Iterative Splitting Methods for Convection-Diffusion-Reaction Equations. *Mathematics*. 2020;8:302. <https://www.doi.org/10.3390/math8030302>
3. Subbaian G, Reddy S. Performance Analysis of Different Iterative Solvers Parallelized On GPU Architecture. 2023;2:215–220. https://www.doi.org/10.1007/978-981-19-6970-6_39

4. Lakshmiranganatha S, Muknahallipatna S. Performance Analysis of Accelerator Architectures and Programming Models for Parareal Algorithm Solutions of Ordinary Differential Equations. *Journal of Computer and Communications*. 2021;9(2):29–56. <https://www.doi.org/10.4236/jcc.2021.92003>
5. Temirbekov A, Baigereyev D, Temirbekov N, et al. Amantayeva A. Parallel CUDA implementation of a numerical algorithm for solving the Navier-Stokes equations using the pressure uniqueness condition. *AIP Conference Proceedings*; 2021;2325:020063. <https://www.doi.org/10.4236/jcc.2021.9200310.1063>
6. Paliwal M, Chilla R, Prasanth N, et al. Parallel implementation of solving linear equations using OpenMP. *International Journal of Information Technology*. 2022;14:1677–1687. <https://www.doi.org/10.1007/s41870-022-00899-9>
7. Akimova EN, Sultanov MA, Misilov VE, et al. Parallel sweep algorithm for solving direct and inverse problems for time-fractional diffusion equation. *Numerical Methods and Programming (Vychislitel'nye Metody i Programirovanie)*. 2022;23(4):275–287. (In Russ.) <https://www.doi.org/10.26089/NumMet.v23r417>
8. Sultanov M, Akimova E, Misilov V, et al. Parallel Direct and Iterative Methods for Solving the Time-Fractional Diffusion Equation on Multicore Processors. *Mathematics*. 2022;10(3):323. <https://www.doi.org/10.3390/math10030323>
9. Sechenov P, Rybenko I. Solving the problem of one-dimensional thermal conductivity on graphics processors using CUDA technology. *Applied Mathematics and Control Sciences*. 2021;4:23–41. <https://www.doi.org/10.15593/2499-9873/2021.4.02>
10. Khimich A, Polyanko V, Chistyakova T. Parallel Algorithms for Solving Linear Systems on Hybrid Computers. *Cybernetics and Computer Technologies*. 2020:53–66. <https://www.doi.org/10.34229/2707-451X.20.2.6>
11. Golovashkin DL. Parallel algorithms for solving tridiagonal grid equations based on the method of counter runs. *Mathematical modeling*. 2005;17(11):118–128. (In Russ.).
12. Volkov-Bogorodsky DB, Sushko GB, Kharchenko SA. Combined MPI+threads parallel implementation of the block method for modeling thermal processes in structurally inhomogeneous media. *Computational methods and programming*. 2010;11(1):127–136. (In Russ.).
13. Munk DJ, Kipouros T, Vio GA. Multi-physics bi-directional evolutionary topology optimization on GPU-architecture. *Engineering with Computers*. 2019;35(4):1059–1079. <https://www.doi.org/10.1007/s00366-018-0651-1>
14. Sukhinov AI, Chistyakov AE, Shishenya AV, et al. Predictive Modeling of Coastal Hydrophysical Processes in Multiple-Processor Systems Based on Explicit Schemes. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2018;10(5):648–658. <https://www.doi.org/10.1134/S2070048218050125>
15. Konovalov AN. The method of rapid descent with an adaptive alternately triangular preconditioner. *Differential equations*. 2004;40(7):953–963. (In Russ.).
16. Samarskiy AA, Vabishevich PN. *Numerical methods for solving convection-diffusion problems*, Stereotype Publishing House. Moscow: Book House «LIBROCOM»; 2015. 248 p. (In Russ.).
17. Oyarzun G, Borrell R, Gorobets A, et al. MPI-CUDA sparse matrix–vector multiplication for the conjugate gradient method with an approximate inverse preconditioner. *Computers and Fluids*. 2014;92:244–252. <https://www.doi.org/10.1016/j.compfluid.2013.10.035>
18. Khokhlov NI, Petrov IB. Application of the grid-characteristic method for solving the problems of the propagation of dynamic wave disturbances in high-performance computing systems. *Proceedings of ISP RAS*. 2019;31:237–252.
19. Sukhinov AI, Belova YuV, Chistyakov AE. Solution of the matter transport problem at high Peclet numbers. *Numerical methods and programming*. 2017;18(4):371–380.
20. Sukhinov AI, Chistyakov AE, Protsenko EA, et al. Accounting method of filling cells for the hydrodynamics problems solution with complex geometry of the computational domain. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2019;31(8):79–100. <https://www.doi.org/10.1134/S0234087919080057>
21. Sukhinov AI, Chistyakov AE, Protsenko EA. Upwind and Standard Leapfrog Difference Schemes. *Numerical methods and programming*. 2019;20(2):170–181. <https://www.doi.org/10.26089/NumMet.v20r216>; Sukhinov AI, Chistyakov AE, Kuznetsova IY, et al. Modelling of suspended particles motion in channel. *Journal of Physics: Conference Series*. 2020;1479(1). <https://www.doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012082>
22. Sukhinov AI, Chistyakov AE. Adaptive analog-SSOR iterative method for solving grid equations with nonselfadjoint operators. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2012;4(4):398–409.

Об авторах:

Литвинов Владимир Николаевич, доцент кафедры математики и информатики, Донской государственный технический университет (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), кандидат технических наук, [ScopusID](#), [ORCID](#), LitvinovVN@rambler.ru

Атаян Ася Михайловна, ассистент кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем, Донской государственный технический университет (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ScopusID](#), [ORCID](#), atayan24@mail.ru

Грачева Наталья Николаевна, доцент кафедры математики и биоинформатики, Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ (347740, РФ, г. Зерноград, ул. Ленина, 21), кандидат технических наук, [ScopusID](#), [ORCID](#), grann72@mail.ru

Руденко Нелли Борисовна, доцент кафедры математики и биоинформатики, Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ (347740, РФ, г. Зерноград, ул. Ленина, 21), кандидат технических наук, [ScopusID](#), [ORCID](#), nelli-rud@yandex.ru

Богданова Наталья Юрьевна, старший преподаватель кафедры математики и информатики, Донской государственный технический университет (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), nat_bogdanova07@mail.ru

Заявленный вклад соавторов:

Литвинов В.Н. — разработка математических моделей и алгоритмов. Атаян А.М. — проведение численных экспериментов. Грачева Н.Н. — статистическая обработка экспериментальных данных. Руденко Н.Б. — программная реализация, подготовка иллюстраций. Богданова Н.Ю. — проведение численных экспериментов.

Поступила в редакцию 04.04.2023.

Поступила после рецензирования 16.05.2023.

Принята к публикации 17.05.2023.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Vladimir N Litvinov, Associate Professor of the Mathematics and Computer Science Department, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), PhD. (Tech.), [ScopusID](#), [ORCID](#), LitvinovVN@rambler.ru

Asya M Atayan, Assistant of the Computer Engineering and Automated Systems Software Department, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), [ScopusID](#), [ORCID](#), atayan24@mail.ru

Natalia N Gracheva, PhD. (Tech.), Associate Professor of the Mathematics and Bioinformatics Department, Azov-Black Sea Engineering Institute of the Donskoy GAU (21, Lenin St., Zernograd, 347740, RF), [ScopusID](#), [ORCID](#), grann72@mail.ru

Nelly B Rudenko, Associate Professor of the Mathematics and Bioinformatics Department, Azov-Black Sea Engineering Institute of the Donskoy GAU (21, Lenin St., Zernograd, 347740, RF), PhD. (Tech.), [ScopusID](#), [ORCID](#), nelli-rud@yandex.ru

Natalia Yu Bogdanova, Lecturer of the Mathematics and Computer Science Department, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), nat_bogdanova07@mail.ru

Claimed contributorship:

VN Litvinov: development of mathematical models and algorithms. AM Atayan: conducting numerical experiments. NN Gracheva: statistical processing of experimental data. NB Rudenko: software implementation, preparation of illustrations. NYu Bogdanova: conducting numerical experiments.

Received 04.04.2023.

Revised 16.05.2023.

Accepted 17.05.2023.

Conflict of interest statement

The authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 519.633

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-31-39>

Научная статья



Разностная схема второго порядка для решения класса дифференциальных уравнений дробного порядка

А.Х. Хибиев , А.А. Алиханов ✉, М. Шахбазисль, Р.А. Чернобровкин

Северо-Кавказский центр математических исследований, Северо-Кавказский федеральный университет, Российская Федерация, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 1

✉ aaalikhanov@gmail.com

Аннотация

Введение. Повышение точности при аппроксимации дробных интегралов, как известно, является одной из актуальных задач вычислительной математики. Цель настоящего исследования — создание и применение разностного аналога второго порядка для аппроксимации дробного интеграла Римана-Лиувилля. Его применение исследуется при решении некоторых классов дифференциальных уравнений дробного порядка. Разностный аналог предназначен для аппроксимации дробного интеграла с высокой точностью.

Материалы и методы. В работе рассматривается разностный аналог второго порядка для аппроксимации дробного интеграла Римана-Лиувилля, а также класс дифференциальных уравнений дробного порядка, который содержит дробную производную Капуто по времени порядка, принадлежащего интервалу (1, 2).

Результаты исследования. Для решения вышеупомянутых уравнений преобразованы исходные дифференциальные уравнения дробного порядка в новую модель, которая включает дробный интеграл Римана-Лиувилля. Это преобразование позволяет эффективно решать задачи с использованием соответствующих численных методов. Затем предложенный разностный аналог второго порядка аппроксимации применяется для решения преобразованной модельной задачи.

Обсуждение и заключения. Доказана устойчивость предложенной разностной схемы. Получена априорная оценка для рассматриваемой задачи, которая устанавливает единственность и непрерывную зависимость решения от входных данных. Для оценки точности схемы и проверки экспериментального порядка сходимости проведены расчеты для тестовой задачи.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение дробного порядка, производная Капуто, интеграл Римана-Лиувилля, разностная схема.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00363. <https://rscf.ru/project/22-21-00363/>

Для цитирования. Хибиев А.Х., Алиханов А.А., Шахбазисль М. и др. Разностная схема второго порядка для решения класса дифференциальных уравнений дробного порядка. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):31–39. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-31-39>

Original article

A Second-Order Difference Scheme for Solving a Class of Fractional Differential Equations

Aslanbek Kh Hibiev , Anatoly A Alikhanov ✉, Mohammad Shahbaziasl, Ruslan A Chernobrovkin

North-Caucasus Center for Mathematical Research, North-Caucasus Federal University, 1, Pushkin St., Stavropol, Russian Federation

✉ aaalikhanov@gmail.com

Abstract

Introduction. Increasing accuracy in the approximation of fractional integrals, as is known, is one of the urgent tasks of computational mathematics. The purpose of this study is to create and apply a second-order difference

analog to approximate the fractional Riemann-Liouville integral. Its application is investigated in solving some classes of fractional differential equations. The difference analog is designed to approximate the fractional integral with high accuracy.

Materials and Methods. The paper considers a second-order difference analogue for approximating the fractional Riemann-Liouville integral, as well as a class of fractional differential equations, which contains a fractional Caputo derivative in time of the order belonging to the interval (1, 2).

Results. To solve the above equations, the original fractional differential equations have been transformed into a new model that includes the Riemann-Liouville fractional integral. This transformation makes it possible to solve problems efficiently using appropriate numerical methods. Then the proposed difference analogue of the second order approximation is applied to solve the transformed model problem.

Discussion and Conclusions. The stability of the proposed difference scheme is proved. An a priori estimate is obtained for the problem under consideration, which establishes the uniqueness and continuous dependence of the solution on the input data. To evaluate the accuracy of the scheme and verify the experimental order of convergence, calculations for the test problem were carried out.

Keywords: Fractional differential equation, Caputo derivative, Riemann-Liouville integral, Difference scheme.

Founded information. The study was supported by the Russian Science Foundation grant no. 22-21-00363. <https://rscf.ru/project/22-21-00363/>

For citation. Hibiev AKh, Alikhanov AA, Shahbaziasl M, et al. A second-order difference scheme for solving a class of fractional differential equations. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):31–39. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-31-39>

Введение. Дробное исчисление (ДИ) — это раздел математики, который исследует и применяет производные и интегралы действительного и комплексного порядка. Хотя концепция возникла столетия назад, значительный интерес она вызвала только в конце 1960-х годов. Инженеры осознали ее потенциал для точного моделирования систем реального мира по сравнению с обычным исчислением целочисленного порядка [1]. Задержка с его принятием может быть объяснена различными факторами: отсутствие четкой интерпретации дробных производных, воспринимаемая адекватность целочисленного исчисления и присущая ДИ сложность [2]. В настоящее время ДИ стало областью, находящей широкое применение в различных сферах, включая инженерное дело и математику. Обширная литература подчеркивает активное использование ДИ во многих предметных областях: системы управления, акустика, медицинские и биологические науки, оптика, волны, финансы, экономика, обработка сигналов и многое другое [3, 4].

Математические модели, основанные на дифференциальных уравнениях с производными целого порядка, оказались полезными при изучении динамики реальных систем. Однако эти модели имеют ограничения в захвате долговременной памяти или долговременных пространственных взаимодействий, которые присущи многим явлениям реального мира. Такое ограничение возникает из-за отсутствия этих признаков в производных целочисленного порядка [5]. Напротив, дробно-дифференциальные уравнения (ДДУ) дают значительное преимущество, поскольку они демонстрируют нелокальное поведение. Это подразумевает, что дробное исчисление служит мощным инструментом для учета памяти и эволюционных свойств, проявляемых широким спектром физических явлений и сложных систем [6, 7]. Следовательно, математические модели, основанные на ДДУ, более реалистичны и практичны по сравнению с классическими моделями целочисленного порядка [8].

Необходимость точного моделирования и понимания различных явлений и процессов в сочетании с эффективностью моделей ДДУ в захвате долговременной памяти и нелокальных взаимодействий подтолкнула к поиску эффективных численных или аналитических методов решения. Исследователи стремятся разработать инновационные методы, которые могут справиться со сложностями и вызовами, связанными с ДДУ, позволяя глубже понять исследуемые системы. Но получение аналитических решений для ДДУ, как правило, является сложной задачей, и точные решения часто включают представления бесконечных рядов, такие как функция Миттага-Леффлера, Н-функция Фокса или функция гиперболической геометрии, которые могут создавать трудности при вычислении [9]. Следовательно, растет интерес к разработке эффективных в вычислительном отношении численных алгоритмов для решения ДДУ. Они включают в себя множество высокопроизводительных вычислительных методов:

- методы конечных разностей;
- методы предиктора-корректора;
- методы конечных элементов;
- спектральные методы;
- методы граничных частиц;
- неявные бессеточные методы;
- методы Галеркина;
- методы конечных объемов;
- методы локальных радиальных базисных функций [10].

В последние несколько лет значительное внимание уделялось разработке численных методов решения одномерных временных ДДУ. Были опубликованы многочисленные исследования, направленные на изучение и продвижение этих численных подходов [11–13]. Yand и др. [14] применили дробный многоступенчатый метод Любича для численного решения дробного диффузионно-волнового уравнения путем преобразования исходной модели в эквивалентное интегро-дифференциальное уравнение. Они продемонстрировали, что их метод достигает временного порядка точности α для $1 \leq \alpha \leq 1,71832$. В работе [15] авторы представили метод порядка $3-\alpha$ для $0 < \alpha < 1$ для аппроксимации производной Капуто. Затем они предложили дискретную разностную схему, введя две новые переменные для преобразования исходного уравнения в систему уравнений более низкого порядка. Две неявные схемы с переменным направлением для решения двумерных нелинейных уравнений свёрхдиффузии с дробным временем представлены в работе [16]. Эти схемы основаны на эквивалентных интегро-дифференциальных уравнениях в частных производных исходной задачи. Дробный интеграл Римана-Лиувилля дискретизируется с использованием классического приближения первого порядка. Авторы доказывают, что обе схемы обладают точностью первого порядка по времени, обеспечивая сходимость численных решений. Khibiev и др. [13] разработали разностный аналог второго порядка для аппроксимации обобщенной производной Капуто. Они успешно применили этот разностный аналог для численного решения обобщенного уравнения дробной диффузии во времени, уделив особое внимание случаям с гладкими решениями.

Цель данной статьи — разработать разностный аналог второго порядка для аппроксимации дробного интеграла Римана-Лиувилля, а затем применить этот разностный аналог для решения класса ДДУ. Авторы вводят класс ДДУ, которые содержат дробную производную Капуто порядка $\alpha + 1$, где $0 < \alpha < 1$. Далее они преобразуют модель ДДУ в форму, которая включает дробный интеграл Римана-Лиувилля, и представляют априорную оценку для решения дифференциальной модели. Предлагается разностный аналог для аппроксимации дробного интеграла Римана-Лиувилля, а также оценивается погрешность усечения метода и применяется для решения новой модели ДДУ. Кроме того, исследуется устойчивость численного метода. Проводится численное моделирование с тем, чтобы подтвердить точность и эффективность предложенного метода для решения рассматриваемой ДДУ. Также исследуется экспериментальный порядок сходимости метода. И, наконец, приводится краткое заключение, обобщающее ключевые выводы и вклад исследования авторов.

Материалы и методы. В этом разделе представлен конкретный класс ДДУ с начальным значением, а также предлагается методология эффективного решения этих моделей. В исследовании ведется поиск новой эффективной и точной численной схемы для аппроксимации решений следующих ДДУ с начальными условиями:

$$\partial_{0t}^{\alpha+1} y(t) + \kappa y(t) = g(t), \quad (1)$$

$$y(0) = y_0, \quad y_i(0) = y_1, \quad (2)$$

где κ — положительная константа, $0 < \alpha < 1$ и $0 < t \leq T$.

Существует множество определений производных и интегральных операторов в контексте дробного исчисления. Некоторые широко используемые определения включают производную Капуто и производную Римана-Лиувилля. Эти определения различаются тем, как они описывают поведение функции в дробном порядке. В производной Капуто дробная производная определяется путем учета дифференцирования функции в дробном порядке при сохранении начальных условий. Это делает его особенно подходящим для моделирования реальных процессов, где начальные условия имеют решающее значение для определения поведения системы [17, 1]. По этой причине в настоящем исследовании используется дробная производная в уравнении (1) в смысле Капуто. Этот выбор продиктован совместимостью производной *Caputo* с реальными приложениями и ее способностью точно фиксировать начальные условия системы. Производная Капуто определяется следующим образом:

$$\partial_{0t}^{\alpha+1} y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\eta)^{-\alpha} y''(\eta) d\eta, \quad 0 < \alpha < 1,$$

где α представляет дробный порядок, а $\Gamma(\cdot)$ обозначает гамма-функцию.

Используя производную Капуто, можно эффективно фиксировать поведение системы в дробном порядке и учитывать влияние прошлой истории на текущее состояние. Это определение позволяет моделировать различные явления реальной жизни, где начальные условия играют решающую роль в определении динамики системы [18, 2].

Применяя оператор дробного интегрирования Римана-Лиувилля порядка α , обозначаемый $D_{0t}^{-\alpha} y(t)$ к обеим сторонам модели (1), получим:

$$\frac{dy}{dt} + \kappa D_{0t}^{-\alpha} y = f(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (3)$$

где $f(t) = D_{0t}^{-\alpha} g(t) + y_1$, и оператор дробного интегрирования Римана-Лиувилля определяется как:

$$D_{0t}^{-\alpha} y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} y(\xi) d\xi. \quad (4)$$

Модель (3) подчиняется начальному условию $y(0)=y_0$. В уравнении (3), когда t приближается к 0, имеем $y_t(0)=f(0)=y_1$. Следовательно, второе начальное условие в уравнении (2) может быть выведено.

Априорная оценка для решения дифференциальной задачи. Следующая теорема представляет априорную оценку для решения дифференциальной задачи (3), которая дает ценную информацию о поведении и свойствах решения, позволяя лучше понять и проанализировать модель. Прежде чем изложить основную теорему, важно ввести следующее следствие, которое вытекает из результатов, представленных в [19].

Следствие 1. Для любой функции $y(t)$, абсолютно непрерывной на $[0, T]$, имеет место следующее неравенство:

$$\int_0^t y(s) D_{0s}^{-\alpha} y(s) ds \geq 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Теорема 1. Решение $y(t)$ задачи (3) удовлетворяет следующей априорной оценке:

$$y^2(t) \leq C_1 \left(y_0^2 + \int_0^t f^2(s) ds \right), \quad C_1 = \max\{2, 4T\}.$$

Доказательство. Умножая уравнение (3) на $y(t)$, затем изменяя переменную t на s и интегрируя по временным переменным от 0 до t , получаем:

$$\int_0^t y(s) y'(s) ds + \kappa \int_0^t y(s) D_{0s}^{-\alpha} y(s) ds = \int_0^t y(s) f(s) ds. \quad (5)$$

Из следствия 1 и того факта, что $\kappa > 0$, второй член левой части (5) неотрицателен и может быть опущен. Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (y^2(t) - y_0^2) &\leq \int_0^t \left(\varepsilon y^2(s) + \frac{1}{4\varepsilon} f^2(s) \right) ds, \\ y^2(t) &\leq 2\varepsilon \int_0^t y^2(s) ds + y_0^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t f^2(s) ds. \end{aligned} \quad (6)$$

Чтобы завершить доказательство, нужно оценить интеграл $\int_0^t y^2(s) ds$. Проинтегрируем уравнение (6) относительно переменной t от 0 до t . Установим $\varepsilon = \frac{1}{(4T)}$, принимая во внимание следующее неравенство:

$$\int_0^t d\xi \int_0^\xi y^2(s) ds = \int_0^t (t-s) y^2(s) ds \leq T \int_0^t y^2(s) ds,$$

можем прийти к следующему выводу:

$$\int_0^t y^2(s) ds \leq 2Ty_0^2 + 4T^2 \int_0^t f^2(s) ds. \quad (7)$$

Теперь, подставив уравнение (7) в уравнение (6) и установив $\varepsilon = \frac{1}{(4T)}$, можно завершить доказательство.

Вывод разностной схемы для аппроксимации ДДУ. Цель этого подраздела — ввести разностный аналог, который эффективно аппроксимирует дробный интеграл Римана-Лиувилля. Впоследствии используем этот разностный аналог для разработки надежной и точной разностной схемы второго порядка, специально разработанной для аппроксимации модели (3).

Чтобы построить разностный метод аппроксимации дробного интеграла Римана-Лиувилля (4) для целого числа N и заданного времени T , дискретизируем интервал $[0, T]$ на равные промежутки времени $t_j = j\tau$, $j=0, 1, \dots, N$, где $\tau = \frac{T}{N}$ — длина временного шага. Для краткости обозначений запишем численное решение $y(t_j)$ в точке t_j через y^j . Чтобы аппроксимировать дробный интеграл Римана-Лиувилля при $t=t_{j+1}$, где $j=1, 2, \dots, N$, используем метод трапеций:

$$\begin{aligned} D_{0t_{j+1}}^{-\alpha} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{j+1}} (t_{j+1} - \xi)^{\alpha-1} y(\xi) d\xi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^j \int_{t_s}^{t_{s+1}} (t_{j+1} - \xi)^{\alpha-1} y(\xi) d\xi \approx \\ &\approx \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^j \int_{t_s}^{t_{s+1}} (t_{j+1} - \xi)^{\alpha-1} \left(y(t_{s+1}) \frac{\xi - t_s}{\tau} + y(t_s) \frac{t_{s+1} - \xi}{\tau} \right) d\xi = \\ &= \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \left(\sum_{s=0}^j c_{j-s}^{(\alpha)} y^{s+1} + c_{j+1}^{-(\alpha)} y^0 \right) = \Delta_{0t_{j+1}}^{-\nu} y, \end{aligned} \quad (8)$$

в котором $c_0^{(\alpha)}=1$ и

$$c_s^{(\alpha)} = (s+1)^{\alpha+1} - 2s^{\alpha+1} + (s-1)^{\alpha+1},$$

$$c_s^{-(\alpha)} = (\alpha+1)(s+1)^\alpha - ((s+1)^{\alpha+1} - s^{\alpha+1}).$$

Ошибка усечения оператора $\Delta_{0t_{j+1}}^{-v}$ в (8) характеризуется следующей леммой.

Лемма 1. Предположим, что $y(t) \in C^2[0, t_{j+1}]$. Для любого $v \in (0, 1)$, $\Delta_{0t_{j+1}}^{-v}$ и определено формулой (8). Тогда имеем:

$$\left| D_{0t_{j+1}}^{-v} y(t) - \Delta_{0t_{j+1}}^{-v} y \right| = O(\tau^2).$$

Доказательство. Из формулы остатка интерполяции Лагранжа следует, что:

$$\begin{aligned} \left| D_{0t_{j+1}}^{-v} y(t) - \Delta_{0t_{j+1}}^{-v} y \right| &\leq \sum_{s=0}^j \int_{t_s}^{t_{s+1}} (t_{j+1} - \xi)^{v-1} \left| \frac{C^2}{2} (t_{s+1} - \xi)(\xi - t_s) \right| d\xi \leq \\ &\leq \frac{C_2}{8} \tau^2 \sum_{s=0}^j \int_{t_s}^{t_{s+1}} (t_{j+1} - \xi)^{v-1} d\xi = \frac{C_2}{8} \tau^2 \int_0^{t_{j+1}} (t_{j+1} - \xi)^{v-1} d\xi \leq \frac{C_2 T^v}{8} \tau^2 = O(\tau^2), \end{aligned}$$

где $C_2 = \max_{0 \leq t \leq T} |y''(t)|$.

Чтобы достичь желаемого порядка сходимости предлагаемого метода, используем конечно-разностную формулу второго порядка для аппроксимации первого производного члена в уравнении (3). Это приближение задается формулой:

$$\frac{d}{dt} y(t_{j+1}) = \frac{3y(t_{j+1}) - 4y(t_j) + y(t_{j-1}))}{2\tau} + O(\tau^2), \quad j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (9)$$

Справедливость этого приближения может быть легко подтверждена применением теоремы Тейлора.

В однородной области $\Omega = \{t_j: j=0, 1, \dots, N\}$ рассматриваем дробно-дифференциальную модель (3) в точке t_{j+1} , где $j=1, 2, \dots, N-1$. Применяя предложенную разностную схему (8), а также аппроксимацию (9) к модели (3), предлагаем следующую разностную схему:

$$\frac{3y^{j+1} - 4y^j + y^{j-1}}{2\tau} + \kappa \Delta_{0t_{j+1}}^{-\alpha} y = f(t_{j+1}), \quad (10)$$

$$y^0 = y_0. \quad (11)$$

На начальном временном шаге t_1 оцениваем значение y^1 , используя теорему Тейлора следующим образом:

$$y^1 = y_0 + \tau y_1 + O(\tau^2). \quad (12)$$

Принимая во внимание лемму 1 и уравнения (9) и (12), можно заключить следующее: если решение дифференциальной модели (3) удовлетворяет условию гладкости $y(t) \in C_t^2(\Omega)$, то разностная схема (10)–(11) демонстрирует порядок точности $O(\tau^2)$.

Теоретический анализ предложенной разностной схемы. Рассмотрим ошибку $z^j = Y^j - y^j$, где $Y^j = y(t_j)$. Подставляя $y^j = z^j + Y^j$ в модель (3), получаем задачу для ошибки следующим образом:

$$\frac{3z^{j+1} - 4z^j + z^{j-1}}{2\tau} + \kappa \Delta_{0t_{j+1}}^{-\alpha} z = R_i^{j+1}, \quad (13)$$

$$z^0 = u_0, \quad z^1 = \mu,$$

где

$$R_i^{j+1} = -\frac{3Y^{j+1} - 4Y^j + Y^{j-1}}{2\tau} - \kappa \Delta_{0t_{j+1}}^{-\alpha} Y + f(t_{j+1}) = O(\tau^2),$$

$$\mu = -y^1 + y_0 + \tau y_1 = O(\tau^2).$$

Прежде чем представить основную теорему об устойчивости предложенной разностной схемы, важно ввести следующие две леммы.

Лемма 2 [6]. Для любых вещественных констант r_0, r_1 таких, что $r_0 \geq \max\{r_1, -3r_1\}$, и $\{v_j\}_{j=0}^{j=N}$ выполняется следующее неравенство:

$$v_{j+1}(r_0 v_{j+1} - (r_0 - r_1)v_j - r_1 v_{j-1}) \geq E_{j+1}(r_0, r_1) - E_j(r_0, r_1), \quad j = 1, \dots, N-1,$$

где

$$E_j(r_0, r_1) = \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_0 - r_1}{2}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_0 + 3r_1}{2}} \right)^2 v_j^2 + \\ + \left(\sqrt{\frac{r_0 - r_1}{2}} v_j - \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_0 - r_1}{2}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_0 + 3r_1}{2}} \right) v_{j-1} \right)^2.$$

Лемма 3 [20]. Предположим, что последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ вещественных чисел удовлетворяет следующим свойствам:

$$a_n \geq 0, a_n - a_{n+1} \geq 0, a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geq 0.$$

Пусть $c_0 = \frac{a_0}{2}$ и $c_j = a_j$ для $j \geq 1$. Тогда:

$$\sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^s c_{s-k} \xi_s \xi_k \geq 0, \forall (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in R^n.$$

Теорема 2. Разностная схема (3) безусловно устойчива и для ее решения справедлива следующая априорная оценка:

$$(z^{j+1})^2 \leq C_3 \left(\sum_{s=1}^j (R^{s+1})^2 \tau + \mu^2 \right),$$

где C_3 — положительная константа, не зависящая от τ и h .

Доказательство основано на подходе, аналогичном подходу теоремы 1. Умножив уравнение (13) на $z^{j+1}\tau$ и заменив j на s , суммируем по s от 1 до j и используем результаты из леммы 2 и леммы 3. Из-за сходства методологии подробное доказательство здесь опущено для краткости.

Результаты исследования. Чтобы оценить производительность численного метода и получить представление о его сходимости, проводится полный набор численных экспериментов. Основная цель состоит в том, чтобы проанализировать численные ошибки путем сравнения точного решения с вычисленным численным решением. Кроме того, исследуется порядок сходимости численного алгоритма в зависимости от размера шага τ . Экспериментальные порядки сходимости (ЕОС) рассчитываются с использованием следующих соотношений:

$$\text{ЕОС} = \log_{\tau_1/\tau_2} \frac{E(\tau_1)}{E(\tau_2)},$$

где максимальная абсолютная погрешность $E(\tau)$ вычисляется по формуле:

$$E(\tau) = \max_{1 \leq j \leq N} |y(t_j) - y^j|,$$

с размером шага τ .

Пример 1. Рассмотрим модель (3) с точным аналитическим решением, заданным следующим выражением: $y(t) = t^2 + t^{3+\alpha}$. Соответствующий исходный член и начальные условия для данной задачи могут быть получены следующим образом:

$$f(t) = 2t + (3 + \alpha)t^{2+\alpha} + \kappa \frac{2}{\Gamma(3 + \alpha)} t^{\alpha+2} + \kappa \frac{\Gamma(4 + \alpha)}{\Gamma(4 + 2\alpha)} t^{3+2\alpha}, y(0) = y_t(0) = 0.$$

Задача решается с помощью представленной разностной схемы (10).

В таблице 1 представлены результаты, полученные при варьировании значений длины шага τ , отображающие максимальную погрешность и экспериментальные порядки сходимости (ЭПС) для различных значений $\kappa=4$, в момент времени $T = 1$. Таблица показывает, что метод демонстрирует превосходную точность даже для очень малых размеров сетки, а ЭПС неизменно достигает ожидаемого значения 2 во всех случаях.

Приступаем к исследованию долговременной эффективности предложенного метода схемы с целью дальнейшей оценки точности и надежности схемы. В таблице 2 показаны максимальная погрешность и ЭПС для различных значений α при $\kappa = 2$ в момент времени $T = 10$. Таблица является дополнительным доказательством высокой точности метода даже для длительных временных интервалов и очень малых размеров ячеек. Значение ЭПС неизменно остается равным 2, что указывает на надежность метода в точном решении проблемы. Эти результаты подтверждают эффективность и надежность численной схемы авторов в точном решении рассматриваемой задачи в различных временных диапазонах.

Обсуждение и заключения. В этом исследовании представлен числовой аналог второго порядка для аппроксимации дробного интеграла Римана-Лиувилля и продемонстрирована его эффективность при решении класса обычных ДДИ. Преобразовав исходные затухания в модель, которая включает дробный интеграл Римана-Лиувилля, авторы смогли расширить применимость предложенного ими метода для решения модели. Кроме того, они установили априорные оценки для решения, которые демонстрируют уникальность и непрерывную зависимость

его от входных данных. Также исследован анализ устойчивости предложенной разностной схемы. Проведено численное моделирование для оценки точности, эффективности и долгосрочной надежности предложенного метода. Моделирование демонстрирует эффективность метода при решении ДДИ даже для длительных временных интервалов и с небольшими размерами ячеек. Также исследован экспериментальный порядок сходимости, подтверждающий ожидаемый экспериментальный порядок сходимости, равный 2 для различных случаев.

Таблица 1

Максимальная погрешность и экспериментальные порядки сходимости для примера 1 при уменьшении размера временной сетки $\tau = T/N$, для $\alpha = 0,1; 0,5; 0,9$, при $\kappa = 4$, в момент времени $T = 1$

$\tau = T/N$	$\alpha = 0,1$		$\alpha = 0,5$		$\alpha = 0,9$	
N	$E(\tau)$	CO	$E(\tau)$	CO	$E(\tau)$	CO
80	2,1178e-04		2,2420e-04		3,9043e-04	
160	5,4976e-05	1,9457	5,7336e-05	1,9673	9,8674e-05	1,9843
320	1,4126e-05	1,9604	1,4501e-05	1,9833	2,4799e-05	1,9924
640	3,5885e-06	1,9769	3,6458e-06	1,9918	6,2161e-06	1,9962
1280	9,0518e-07	1,9871	9,1379e-07	1,9963	1,5560e-06	1,9981
2560	2,2750e-07	1,9923	2,2870e-07	1,9984	3,8926e-07	1,9991

Таблица 2

Долговременная производительность предложенной схемы для решения примера 1 с уменьшением размера временной сетки $\tau = T/N$, для $\alpha = 0,1; 0,5; 0,9$, при $\kappa = 2$, в момент времени $T = 10$

	$\alpha = 0,1$		$\alpha = 0,5$		$\alpha = 0,9$	
N	$E(\tau)$	CO	$E(\tau)$	CO	$E(\tau)$	CO
80	3,1602e-02		3,1247e-01		1,1045e+00	
160	8,8350e-03	1,8387	7,9023e-02	1,9834	2,7524e-01	2,0046
320	2,4257e-03	1,8648	1,9915e-02	1,9884	6,8737e-02	2,0016
640	6,5691e-04	1,8846	5,0069e-03	1,9919	1,7177e-02	2,0006
1280	1,7599e-04	1,9002	1,2567e-03	1,9943	4,2936e-03	2,0002
2560	4,6740e-05	1,9128	3,1505e-04	1,9960	1,0733e-03	2,0001

Список литературы

1. Asl M.S., Javidi M., Yan Y. High order algorithms for numerical solution of fractional differential equations. *Advances in Difference Equations*. SpringerOpen. 2021;2021(1):1–23.
2. Asl M.S., Javidi M. An improved PC scheme for nonlinear fractional differential equations: Error and stability analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Elsevier; 2017;324:101–117.
3. Roohi M., Aghababa P., Haghighi A.R. Switching adaptive controllers to control fractional-order complex systems with unknown structure and input nonlinearities. *Complexity*. Wiley Online Library; 2015;21(2):211–223.
4. Taheri M., et al. A Finite-time Sliding Mode Control Technique for Synchronization Chaotic Fractional-order Laser Systems With Application on Encryption of Color Images. *Optik*. Elsevier; 2023:170948.
5. Zaslavsky G., Edelman M., Tarasov V. Dynamics of the chain of forced oscillators with long-range interaction: From synchronization to chaos. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. American Institute of Physics. 2007;17(4):043124.
6. Alikhanov A.A., Huang C. A high-order L2 type difference scheme for the time-fractional diffusion equation. *Applied Mathematics and Computation*. Elsevier; 2021;411:126545.
7. Asl M.S., Javidi M. Novel algorithms to estimate nonlinear FDEs: applied to fractional order nutrient-phytoplankton-zooplankton system. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Elsevier; 2018;339:193–207.
8. Kumar V., Kumari N. Stability and bifurcation analysis of fractional-order delayed prey–predator system and the effect of diffusion. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. World Scientific; 2022;32(01): 2250002.
9. Deng W. Short memory principle and a predictor–corrector approach for fractional differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Elsevier; 2007;206(1):174–188.
10. Xie J., Deng D., Zheng H. Fourth-order difference solvers for nonlinear delayed fractional sub-diffusion equations with variable coefficients. *International Journal of Modelling and Simulation*. Taylor & Francis; 2017;37(4):241–251.
11. Li C., He C. Fractional-order diffusion coupled with integer-order diffusion for multiplicative noise removal. *Computers and Mathematics with Applications*. Elsevier; 2023;136:34–43.

12. Xu Y., et al. A novel meshless method based on RBF for solving variable-order time fractional advection-diffusion-reaction equation in linear or nonlinear systems. *Computers and Mathematics with Applications*. Elsevier; 2023;142:107–120.
13. Khibiev A., Alikhanov A. A., Huang C. A second-order difference scheme for generalized time-fractional diffusion equation with smooth solutions. *Computational Methods in Applied Mathematics*. 2023.
14. Yang J., et al. Numerical solution of fractional diffusion-wave equation based on fractional multistep method. *Applied Mathematical Modelling*. Elsevier; 2014;38(14):3652–3661.
15. Sun Z., Wu X. A fully discrete difference scheme for a diffusion-wave system. *Applied Numerical Mathematics*. Elsevier; 2006;56(2):193–209.
16. Huang J., et al. Alternating direction implicit schemes for the two-dimensional time fractional nonlinear super-diffusion equations. *Journal of Computational Mathematics*. 2019;37(3).
17. Asl M.S., Javidi M., Ahmad B. New predictor-corrector approach for nonlinear fractional differential equations: error analysis and stability. *Journal of Applied Analysis and Computation*. 2019;9(4):1527–1557.
18. Asl M.S., Javidi M. Numerical evaluation of order six for fractional differential equations: stability and convergence. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*. The Belgian Mathematical Society; 2019;26(2):203–221.
19. Vabishchevich P.N. Numerical solution of the Cauchy problem for Volterra integrodifferential equations with difference kernels. *Applied Numerical Mathematics*. Elsevier; 2022;174:177–190.
20. McLean W.V. Thomée Numerical solution of an evolution equation with a positive-type memory term. *The ANZIAM Journal*. Cambridge University Press; 1993;35(1):23–70.

References

1. Asl MS, Javidi M, Yan Y. High order algorithms for numerical solution of fractional differential equations. *Advances in Difference Equations*. SpringerOpen. 2021;2021(1):1–23.
2. Asl MS, Javidi M. An improved PC scheme for nonlinear fractional differential equations: Error and stability analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Elsevier; 2017;324:101–117.
3. Roohi M, Aghababa P, Haghighi AR. Switching adaptive controllers to control fractional-order complex systems with unknown structure and input nonlinearities. *Complexity*. Wiley Online Library; 2015;21(2):211–223.
4. Taheri M, et al. A Finite-time Sliding Mode Control Technique for Synchronization Chaotic Fractional-order Laser Systems With Application on Encryption of Color Images. *Optik*. Elsevier; 2023:170948.
5. Zaslavsky G, Edelman M, Tarasov V. Dynamics of the chain of forced oscillators with long-range interaction: From synchronization to chaos. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. American Institute of Physics. 2007;17(4):043124.
6. Alikhanov AA, Huang C. A high-order L2 type difference scheme for the time-fractional diffusion equation. *Applied Mathematics and Computation*. Elsevier; 2021;411:126545.
7. Asl MS, Javidi M. Novel algorithms to estimate nonlinear FDEs: applied to fractional order nutrient-phytoplankton-zooplankton system. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Elsevier; 2018;339:193–207.
8. Kumar V, Kumari N. Stability and bifurcation analysis of fractional-order delayed prey–predator system and the effect of diffusion. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. World Scientific; 2022;32(01): 2250002.
9. Deng W. Short memory principle and a predictor–corrector approach for fractional differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Elsevier; 2007;206(1):174–188.
10. Xie J, Deng D, Zheng H. Fourth-order difference solvers for nonlinear delayed fractional sub-diffusion equations with variable coefficients. *International Journal of Modelling and Simulation*. Taylor & Francis; 2017;37(4):241–251.
11. Li C, He C. Fractional-order diffusion coupled with integer-order diffusion for multiplicative noise removal. *Computers and Mathematics with Applications*. Elsevier; 2023;136:34–43.
12. Xu Y, et al. A novel meshless method based on RBF for solving variable-order time fractional advection-diffusion-reaction equation in linear or nonlinear systems. *Computers and Mathematics with Applications*. Elsevier; 2023;142:107–120.
13. Khibiev A, Alikhanov AA, Huang C. A second-order difference scheme for generalized time-fractional diffusion equation with smooth solutions. *Computational Methods in Applied Mathematics*. 2023.
14. Yang J, et al. Numerical solution of fractional diffusion-wave equation based on fractional multistep method. *Applied Mathematical Modelling*. Elsevier; 2014;38(14):3652–3661.
15. Sun Z, Wu X. A fully discrete difference scheme for a diffusion-wave system. *Applied Numerical Mathematics*. Elsevier; 2006;56(2):193–209.
16. Huang J, et al. Alternating direction implicit schemes for the two-dimensional time fractional nonlinear super-diffusion equations. *Journal of Computational Mathematics*. 2019;37(3).
17. Asl MS, Javidi M, Ahmad B. New predictor-corrector approach for nonlinear fractional differential equations: error analysis and stability. *Journal of Applied Analysis and Computation*. 2019;9(4):1527–1557.
18. Asl MS, Javidi M. Numerical evaluation of order six for fractional differential equations: stability and convergence. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*. The Belgian Mathematical Society; 2019;26(2):203–221.

19. Vabishchevich PN. Numerical solution of the Cauchy problem for Volterra integrodifferential equations with difference kernels. *Applied Numerical Mathematics*. Elsevier; 2022;174:177–190.

20. McLean WV. Thomée Numerical solution of an evolution equation with a positive-type memory term. *The ANZIAM Journal*. Cambridge University Press; 1993;35(1):23–70.

Об авторах:

Хибиев Асланбек Хизирович, стажер-исследователь отдела вычислительных методов, Северо-Кавказский центр математических исследований, Северо-Кавказский федеральный университет (355017, РФ, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 1), [ORCID](#), akhibiev@gmail.com

Алиханов Анатолий Алиевич, проректор по НИР И ИД, доцент, Северо-Кавказский центр математических исследований, Северо-Кавказский федеральный университет (355017, РФ, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 1), кандидат физико-математических наук, [ScopusID](#), [ORCID](#), aaalikhanov@gmail.com

Шахбазисль Мохаммад, научный сотрудник, Северо-Кавказский центр математических исследований, Северо-Кавказский федеральный университет (355017, РФ, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 1)

Чернобровкин Руслан Алексеевич, лаборант отдела вычислительных методов, Северо-Кавказский центр математических исследований, Северо-Кавказский федеральный университет (355017, РФ, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 1)

Поступила в редакцию 06.04.2023.

Поступила после рецензирования 19.05.2023.

Принята к публикации 22.05.2023.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Aslanbek Kh Khbiev, Trainee researcher of the Computational Methods, Department North Caucasus Center for Mathematical Research, North Caucasus Federal University (1, Pushkin St., Stavropol, 355017, RF), [ORCID](#), akhibiev@gmail.com

Anatoly A Alikhanov, Vice-Rector for Research and Innovation, Associate Professor, North Caucasus Center for Mathematical Research, North Caucasus Federal University (1, Pushkin St., Stavropol, 355017, RF), Candidate of Physical and Mathematical Sciences, [ScopusID](#), [ORCID](#), aaalikhanov@gmail.com

Mohammad Shahbaziasl, Researcher, North Caucasus Center for Mathematical Research, North Caucasus Federal University (1, Pushkin St., Stavropol, 355017, RF)

Ruslan A Chernobrovkin, Laboratory Assistant of the Computational Methods Department, North Caucasus Center for Mathematical Research, North Caucasus Federal University (1, Pushkin St., Stavropol, 355017, RF)

Received 06.04.2023.

Revised 19.05.2023.

Accepted 22.05.2023.

Conflict of interest statement

The authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ MATHEMATICAL MODELING



УДК 51-77

Обзорная статья

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-40-51>


Оптимальное управление в нейробиологических моделях информационного противоборства

А.П. Петров

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Российская Федерация, г. Москва, Миусская пл., 4

✉ petrov.alexander.p@yandex.ru

Аннотация

Рассматриваются две нейробиологические модели информационного противоборства. Для каждой из них предложено решение задачи оптимального управления. При этом предполагается, что Планировщик кампании ассоциируется с управляющим органом одной из противоборствующих партий и распределяет во времени доступный ему объем пропагандистского вещания. Таким образом, интенсивность пропагандистского вещания одной из сторон противоборства имеет смысл управления.

Целевой функционал отражает стремление Планировщика максимизировать численность своих сторонников в заданный момент времени при минимизации затрат в течение кампании.

Исследование задачи управления проводится аналитически, с помощью принципа максимума Понтрягина.

Получено оптимальное управление для различных комбинаций параметров.

Стратегия пропагандистской кампании, в зависимости от параметров системы, может быть как «нарастающей» (т. е. проходящей с неубывающей интенсивностью пропагандистского вещания), так и «убывающей» (проходящей с невозрастающей интенсивностью). При «нарастающей» кампании информация предоставляется только на финише, с тем, чтобы впечатление от этой информации не успело потерять силу. В основе стратегии «убывающей» кампании — межличностное общение. Сначала нужно убедить в своей позиции как можно больше индивидов, которые затем будут пересказывать ее собеседникам. Параметры системы определяют баланс между этими типами стратегий.

Ключевые слова: математическая модель, информационное противоборство, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина.

Для цитирования. Петров А.П. Оптимальное управление в нейробиологических моделях информационного противоборства. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):40–51. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-40-51>

Review article

Optimal Control in Neurological Models of Information Warfare

Alexander P Petrov

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, 4, Miusskaya Sq., Moscow, Russian Federation

✉ petrov.alexander.p@yandex.ru

Abstract

Two neurological models of information warfare are considered. For each of them, the optimal control problem is considered, assuming that the Campaign Planner is associated with the governing body of one of the belligerent parties and distributes the volume of propaganda broadcasting in time.

The cost functional reflects the Planner's desire to maximize the number of their supporters at a given time while minimizing costs during the campaign.

The problem is studied analytically, using the Pontryagin's maximum principle.

Optimal control is obtained for various combinations of parameters.

The "increasing" type of campaign is aimed at ensuring that for most individuals information is received immediately before the finish line, and that the impression of this information does not have time to weaken. In contrast, the strategy of a "decreasing" campaign implies a high role of interpersonal communication: it is based on convincing a significant number of individuals of their position at the very beginning, who will then retell it to their interlocutors.

Keywords: mathematical model, information warfare, optimal control, Pontryagin's maximum principle.

For citation. Petrov AP. Optimal control in neurological models of information warfare. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):40–51. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-40-51>

В статье рассматривается следующая задача. Рассмотрим информационную войну между двумя сторонами. Ассоциируя себя с одной из них, попытаемся максимизировать число наших сторонников в определенный момент времени, минимизируя при этом затраты на вещание в СМИ. Этот момент времени можно рассматривать как дату выборов. Вопрос в том, чтобы определить наиболее выгодную стратегию: например, следует ли начинать кампанию с низкой интенсивности пропаганды в средствах массовой информации и усиливать ее с течением времени. Или, наоборот, нужно начать кампанию с интенсивной пропаганды, а затем сократить ее. Или оптимальна какая-то более сложная, немонокотонная стратегия. Для простоты предположим, что пропаганда другой стороны имеет постоянную интенсивность.

Для изучения данной проблемы в настоящей работе используется нейробиологическая модель информационного противоборства в социуме [1]. Заметим, что данная модель оперирует входными параметрами, некоторые из которых весьма трудно поддаются оцениванию. Поэтому с прикладной точки зрения анализ нацелен не столько на получение количественных результатов, сколько на выявление качественных закономерностей. Для этих выявленных закономерностей представлена прозрачная социологическая трактовка, допускающая практическое применение результатов. Полученные при этом выводы не противоречат интуиции, но являются, по мнению авторов, неочевидными и вряд ли могли бы быть получены на основании соображений общего характера, т. е. без применения методов математического моделирования.

Содержательно данная работа относится к такому направлению, как математическое моделирование информационных процессов в социуме [2–4]. В данной области информационные процессы изучаются методами анализа текстов [5, 6], сетевого анализа и динамики мнений [7–11] и т. д. При этом задача управления в постановке настоящей работы ранее не рассматривалась.

Модель информационного противоборства. Нейробиологическая модель информационного противоборства в социуме [1] (и ее применение [3]) основана на традиционной нейробиологической схеме [12, 13] и имеет вид:

$$\frac{d\psi}{dt} = c \left(2 \int_{-\psi}^{\infty} n(\varphi) d\varphi - N_0 \right) + u - b - a\psi. \quad (1)$$

Здесь параметры a , b , c , u положительны и их содержательный смысл определен в теории Рашевского [12, 13]. Они зависят как от стимулов, которые исходят из социальной среды, так и от внутренних параметров нейробиологической системы. Для целей настоящей работы важно, что u и b связаны с интенсивностью масс-медиа, поддерживающих Правую и Левую партии соответственно.

В самых общих чертах социологический смысл модели выбора позиций и уравнения (1) можно пояснить следующим образом. Предполагается, что в обществе, состоящем из N_0 индивидов, происходит информационная борьба двух сторон (партий):левой и Правой. Каждый индивид принимает решение о поддержке той или иной партии на основе своей установки и стимулов, поступающих из социальной среды.

Далее поочередно рассмотрим, что представляют собой эти стимулы и установка, а затем опишем механизм принятия решений.

Под стимулами в модели авторов понимается информационное влияние на индивида со стороны СМИ и других индивидов. Под этим влиянием с течением времени индивид может менять свою партийную принадлежность. При этом он и сам создает стимулы для других индивидов тем, что агитирует их за свою текущую партию. В результате возникает социальная динамика, описываемая уравнением (1). Если интенсивность пропаганды СМИ постоянна, то динамический процесс завершается формированием стационарного состояния. Довольно часто возможны несколько стационарных состояний, в этом случае от начального условия зависит то, какое из них достигается. Далее формулируется задача оптимального управления, в которой Планировщик отождествляется с одной из сторон противоборства (с Правой партией), причем интенсивность ее пропаганды через СМИ принимается в качестве управляющего параметра, а целевая функция учитывает эту интенсивность (как показатель расходов) и количество сторонников этой партии на заданный момент времени (окончание противоборства).

Теперь рассмотрим модель более подробно.

Каждый из N_0 индивидов характеризуется установкой (attitude), т. е. своей предрасположенностью φ к поддержке той или иной партии, связанной с его фундаментальной принадлежностью к определенной идеологии, предыдущим опытом, социальным состоянием и т. д. Эта величина предполагается постоянной на отрезке времени, в течение которого длится информационная борьба.

Тем самым предполагается, что имеется постоянное во времени, экзогенно заданное распределение индивидов по оси установок $n(\varphi)$, при этом отрицательная установка соответствует поддержке первой партии, положительная — поддержке второй партии, а абсолютное значение отражает силу поддержки.

Здесь функция $n(\varphi)$ равна нулю вне отрезка при $\varphi_{\min} \leq \varphi \leq \varphi_{\max}$ и далее будем полагать, что на этом отрезке функция $n(\varphi)$ положительна, кроме, быть может, конечного количества изолированных точек, в которых она обращается в ноль.

Очевидно:

$$N_0 = \int_{-\infty}^{\infty} n(\varphi) d\varphi.$$

Правило, по которому индивид относит себя к той или иной партии, можно выразить следующим образом: если сумма стимула и установки отрицательна, то индивид относит себя клевой партии, если положительна — к правой.

Рассматриваемый в данной работе вариант модели предполагает, что влияние масс-медиа равномерно распределено по обществу, в частности, это означает, что не учитывается селективное пользование СМИ (например, «консерваторы читают только консервативные газеты, либералы читают только либеральные газеты»). Стимул в поддержку некоторой партии, связанный с агитацией, проводимой сторонниками этой партии, принимается пропорциональным ее текущей численности.

Численности сторонников левой (L) и правой (R) партий равны, соответственно:

$$L(t) = \int_{\varphi_{\min}}^{-\psi(t)} n(\varphi) d\varphi, \quad (2.1)$$

$$R(t) = \int_{-\psi(t)}^{\varphi_{\max}} n(\varphi) d\varphi. \quad (2.2)$$

Начальное условие $\psi(0)$, необходимое для однозначного определения $\psi(t)$, находится из распределения индивидов между партиями в момент $t=0$ и имеет вид:

$$L(0) = \int_{-\psi(0)}^{\varphi_{\max}} n(\varphi) d\varphi \quad (3)$$

или, что то же самое:

$$R(0) = \int_{\varphi_{\min}}^{-\psi(0)} n(\varphi) d\varphi.$$

Здесь $L(0)$ (а также $R(0)$) является наблюдаемой величиной и каждое из этих равенств можно рассматривать как уравнение для $\psi(0)$, имеющее единственное решение, если функция $N(\varphi)$ положительна почти при всех φ .

Очевидно, $\psi(0) = \varphi_{\max}$, если $X(0) = 0$ и $\psi(0) = \varphi_{\min}$, если $Y(0) = 0$. Реалистическое предположение состоит в том, что $0 < X(0) < N_0$, так что $\varphi_{\min} < \psi(0) < \varphi_{\max}$.

Заметим, что, функция $\psi(t)$ может принимать значения в более широком диапазоне, вплоть до $-\infty < \psi < \infty$. Например, неравенство $\psi(t) > \varphi_{\max}$ соответствует ситуации, когда абсолютно все члены социума поддерживают первую партию, т. е. ее преимущество в интенсивности пропаганды настолько велико, что оно перевешивает установку даже самого радикального сторонника второй партии. Такая ситуация представляется малореалистичной. Поэтому в данном анализе будем выбирать области изменения параметров так, что $\varphi_{\min} < \psi(t) < \varphi_{\max}$ для всех $0 \leq t \leq T$.

Итак, функция $\psi(t)$ находится как решение начальной задачи (1), (3).

Рашевский [12, 13] анализировал стационарное уравнение, соответствующее (1) в случае $u=b=0$ (в терминах настоящей модели это соответствует процессу, проходящему в отсутствие пропаганды масс-медиа) и четной функции $n(\varphi)$. Он показал, что при достаточно малых значениях отношения c/a существует единственное стационарное решение, оно асимптотически устойчиво и соответствует равному распределению индивидов между партиями, т. е. $R(t) - L(t) \rightarrow 0$, при $t \rightarrow \infty$. Это соответствует тому случаю, когда реакцию каждого индивида существенно больше определяет его установка, чем мнение других индивидов. И, наоборот, при достаточно больших значениях c/a реакция индивида более определяется мнением других индивидов, чем его собственной

установкой. Вследствие этого равновесие между партиями неустойчиво: если одна из них имеет численное превосходство при $t=0$, то оно позволяет создать преимущество в силе стимула (т. е. в количестве агитирующих за нее индивидов), которое увеличивается с течением времени. В результате, устойчивые стационарные решения соответствуют ситуациям, в которых одна из партий приобретает существенное большинство. Именно такие случаи представляют наибольший интерес для анализа и именно им уделяется особое внимание в настоящей работе.

Постановка задачи управления. Будем рассматривать процесс информационного противоборства на временном интервале $(0;T)$, где экзогенно заданный момент времени T можно условно трактовать как «день выборов». При этом интенсивность u пропагандистского вещания Правой партии принимается в качестве управления и имеет ограничение:

$$0 \leq u \leq u_m. \quad (4)$$

Целевой функционал отражает стремление Планировщика максимизировать численность своих сторонников в момент времени T при минимизации затрат в течение кампании:

$$J = -\frac{k}{2} \int_0^T u^2 dt + R(T) \rightarrow \max,$$

т. е.:

$$J = -\frac{k}{2} \int_0^T u^2 dt + \int_{-\psi(T)}^{\varphi_{\max}} n(\varphi) d\varphi \rightarrow \max. \quad (5)$$

При этом ограничимся случаем равномерного симметричного распределения: $\varphi_{\max} = -\varphi_{\min} = \varphi_m$ и $N(\varphi) = \text{const} > 0$, при $-\varphi_m < \varphi < \varphi_m$.

Решение задачи управления

А. Основные уравнения. Гамильтониан задачи оптимального управления (1)–(5) имеет вид:

$$H(\psi, p, u) = \left[c \left(2 \int_{-\psi(t)}^{\varphi_m} n(\varphi) d\varphi - N_0 \right) + u - b - a\psi \right] p - \frac{ku^2}{2}.$$

Следовательно:

$$\frac{d\psi}{dt} = c \left(2 \int_{-\psi}^{\varphi_m} n(\varphi) d\varphi - N_0 \right) + u - b - a\psi, \quad (6)$$

$$\frac{dp}{dt} = [-2cn(-\psi) + a]p, \quad (7.1)$$

$$p(T) = n(-\psi(T)). \quad (7.2)$$

Ближайшая цель состоит в том, чтобы максимизировать гамильтониан по управлению. Имеем:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = p - ku.$$

Эта производная обращается в ноль при:

$$u = \frac{p}{k}.$$

С учетом ограничения (4) получаем, что оптимальное управление имеет вид:

$$u^* = \begin{cases} 0, & p < 0, \\ p/k, & 0 \leq p \leq ku_m, \\ u_m, & p > ku_m. \end{cases} \quad (8)$$

С учетом того, что авторы ограничились случаем равномерного симметричного распределения: $N(\varphi) = \text{const} > 0$, при $-\varphi_m < \varphi < \varphi_m$, откуда:

$$\int_{-\psi}^{\varphi_m} n(\varphi) d\varphi = \begin{cases} 0, & \psi < -\varphi_m, \\ \frac{N_0}{2} \left(1 + \frac{\psi}{\varphi_m} \right), & -\varphi_m \leq \psi \leq \varphi_m, \\ N_0, & \psi > \varphi_m. \end{cases}$$

Стационарные решения дифференциального уравнения (6) находятся из уравнения:

$$f(\psi) = a\psi. \quad (9)$$

где

$$f(\psi) = \begin{cases} -cN_0 + u - b, & \psi < -\varphi_m, \\ cN_0 \frac{\psi}{\varphi_m} + u - b, & -\varphi_m \leq \psi \leq \varphi_m, \\ cN_0 + u - b, & \psi > \varphi_m. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что, если $a > cN_0 / \varphi_m$, то уравнение (9) имеет одно решение для любого постоянного u . Если же $a < cN_0 / \varphi_m$, то оно имеет три корня при $a\varphi_m - cN_0 < u - b < -a\varphi_m + cN_0$ и только один корень при $u - b < a\varphi_m - cN_0$ или $-a\varphi_m + cN_0 < u - b$ (в данной работе не рассматривается особый случай $a = cN_0 / \varphi_m$).

Для краткости записи введем обозначение:

$$\lambda = a - \frac{cN_0}{\varphi_m}. \quad (10)$$

Задачи (6), (7) принимают вид:

$$\frac{d\psi}{dt} = \begin{cases} -cN_0 + u - b - a\psi, & \psi < -\varphi_m, \\ -\lambda\psi + u - b, & -\varphi_m \leq \psi \leq \varphi_m, \\ cN_0 + u - b - a\psi, & \psi > \varphi_m. \end{cases} \quad (11)$$

$$\frac{dp}{dt} = \begin{cases} ap, & \psi < -\varphi_m, \\ \lambda p, & -\varphi_m \leq \psi \leq \varphi_m, \\ ap, & \psi > \varphi_m. \end{cases} \quad (12)$$

С учетом рассматриваемого случая, когда $-\varphi_m \leq \psi(t) \leq \varphi_m$ для всех t , имеем:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda\psi + u - b, \quad \psi(0) = \psi^0, \quad (13)$$

$$\frac{dp}{dt} = \lambda p, \quad p(T) = N_0 / 2\varphi_m. \quad (14)$$

Решение задачи (14) для сопряженного уравнения имеет вид:

$$p(t) = \frac{N_0}{2\varphi_m} \exp[\lambda(t - T)]. \quad (15)$$

Таким образом, функция $p(t)$ либо строго возрастает (если $\lambda > 0$), либо строго убывает (если $\lambda < 0$), либо постоянна (если $\lambda = 0$). Рассмотрим первые два варианта последовательно.

Б. Строго возрастающая функция $p(t)$

Будем полагать, что:

$$a - cN_0 / \varphi_m > 0. \quad (16)$$

Тогда могут иметь место три случая (рис. 1).

Случай 1 (рис. 1 а): $ku_m \geq p(T)$, т. е.:

$$N_0 / 2\varphi_m \leq ku_m.$$

Случай 2 (рис. 1 б): $p(0) < ku_m < p(T)$, т. е.:

$$\frac{N_0}{2\varphi_m} \exp[-\lambda T] < ku_m < \frac{N_0}{2\varphi_m}.$$

Случай 3 (рис. 1 в): $ku_m \leq p(0)$, т. е.:

$$ku_m \leq \frac{N_0}{2\varphi_m} \exp[-\lambda T].$$

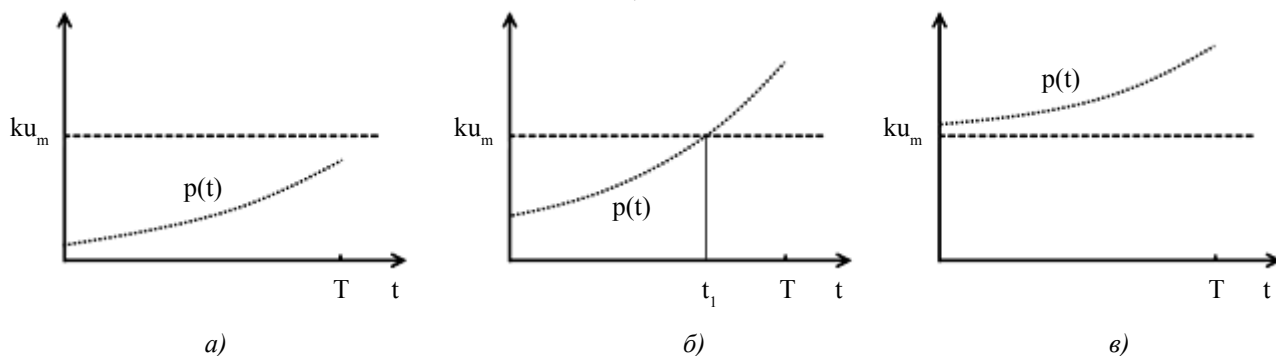


Рис. 1. Три варианта расположения функции $y=p(t)$ относительно прямой $y=ku_m$: случаи 1–3

Рассмотрим каждый из этих случаев.

Случай 1. $\lambda > 0$, $ku_m \geq p(T)$.

Тогда $p(t) \leq ku_m$ при всех $t \in [0; T]$. Тогда из формулы (8) следует, что:

$$u^*(t) = \frac{N_0}{2k\varphi_m} \exp[\lambda(t - T)]. \quad (17)$$

Подставляя это в (13), получаем:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda\psi + \frac{N_0}{2k\varphi_m} \exp[\lambda(t - T)] - b, \quad (18)$$

Решение этой задачи Коши имеет вид:

$$\psi(t) = \frac{N_0 \exp[\lambda(t - T)]}{4\lambda k\varphi_m} - \frac{b}{\lambda} + \left[\psi^0 - \frac{N_0 \exp[-\lambda T]}{4\lambda k\varphi_m} + \frac{b}{\lambda} \right] \exp[-\lambda t], \quad (19)$$

при $0 \leq t \leq T$.

Случай 2. $\lambda > 0$, $p(0) < ku_m < p(T)$.

Тогда существует точка $t_1 \in (0; T)$, такая, что $p(t_1) = ku_m$ (рис. 1 б). Другими словами, t_1 определяется путем приравнивания функции $p(t)$, даваемой выражением (15), к величине ku_m . Имеем для этой величины уравнение $N_0 / (2\varphi_m) \exp[\lambda(t_1 - T)] = ku_m$, т. е.:

$$t_1 = T - \frac{1}{\lambda} \ln \frac{N_0}{2\varphi_m ku_m}. \quad (20)$$

Вычисленное таким образом t_1 положительно ввиду условия $p(0) < ku_m < p(T)$, определяющего Случай 2 (неположительность t_1 означала бы, что $p(0) > ku_m$, т. е. имеет место Случай 3).

Для оптимального управления получаем:

$$u^* = \begin{cases} p(t)/k, & 0 \leq t \leq t_1, \\ u_m, & t_1 < t \leq 1. \end{cases}$$

Подставив $u=u^*$ в уравнение (13), получим для функции $\psi(t)$ задачу Коши с правой частью, заданной отдельно на отрезках $0 \leq t \leq t_1$ и $t_1 \leq t \leq 1$:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda\psi + \frac{N_0}{2k\varphi_m} \exp[\lambda(t - T)] - b, \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad \psi(0) = \psi^0, \quad (21)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda\psi + u_m - b, \quad t_1 \leq t \leq 1, \quad \psi(t_1 + 0) = \psi(t_1 - 0). \quad (22)$$

Последовательно решая задачи (21), (22), получаем:

$$\psi(t) = \frac{N_0 \exp[\lambda(t - T)]}{4\lambda k\varphi_m} - \frac{b}{\lambda} + \left[\psi^0 - \frac{N_0 \exp[-\lambda T]}{4\lambda k\varphi_m} + \frac{b}{\lambda} \right] \exp[-\lambda t], \quad 0 \leq t \leq t_1; \quad (23)$$

$$\psi(t) = \frac{u_m - b}{\lambda} + \left[\psi(t_1) - \frac{u_m - b}{\lambda} \right] \exp[-\lambda(t - t_1)], \quad t_1 \leq t \leq 1. \quad (24)$$

Случай 3. $\lambda > 0$, $ku_m \leq p(0)$.

В этом случае $p(t) \geq ku_m$ для всех $t \in [0; T]$, в частности $p(T) = N_0 / 2\varphi_m > ku_m$. Из (8) следует, что оптимальное управление тогда имеет вид:

$$u^*(t) = u_m, \quad t \in [0; T]. \quad (25)$$

Подставив $u=u^*$ в уравнение (13), получим для функции $\psi(t)$ задачу Коши:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda\psi + u_m - b, \quad \psi(0) = \psi^0,$$

решение которой имеет вид:

$$\psi(t) = \frac{u_m - b}{\alpha} + \left[\psi^0 - \frac{u_m - b}{\alpha} \right] \exp[-\alpha t]. \quad (26)$$

В. Строго убывающая функция $p(t)$

Будем полагать, что:

$$\lambda = a - cN_0 / \varphi_m < 0. \quad (27)$$

Для удобства перепишем формулу (15):

$$p(t) = \frac{N_0}{2\varphi_m} \exp[\lambda(t - T)].$$

Могут иметь место три случая (рис. 2).

Случай 4 (рис. 2 а): $ku_m \geq p(0)$, т. е.:

$$ku_m \geq \frac{N_0}{2\varphi_m} \exp[-\lambda T].$$

Случай 5 (рис. 2 б): $p(T) < ku_m < p(0)$, т. е.:

$$\frac{N_0}{2\varphi_m} < ku_m < \frac{N_0}{2\varphi_m} \exp[-\lambda T].$$

Случай 6 (рис. 2 в): $ku_m \leq p(T)$, т. е.:

$$ku_m \leq \frac{N_0}{2\varphi_m}.$$

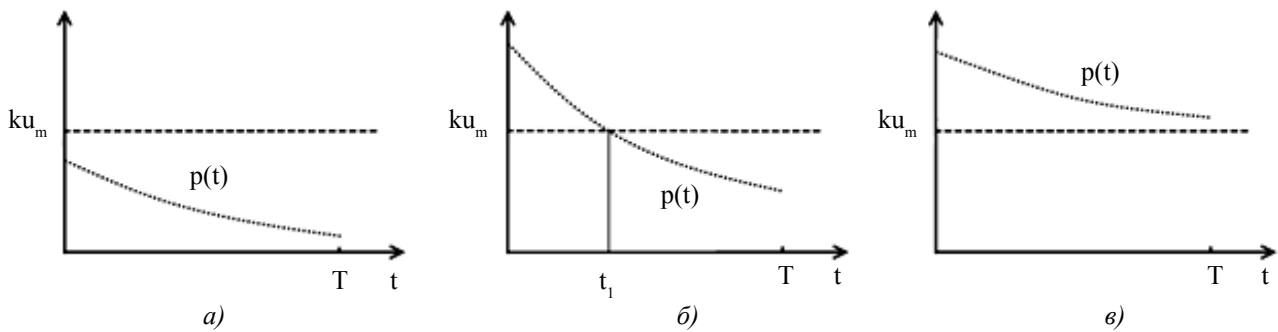


Рис. 2. Три варианта расположения функции $y=p(t)$ относительно прямой $y=ku_m$: случаи 4–6

Рассмотрим эти случаи последовательно.

Случай 4. $\lambda < 0$, $p(0) \leq ku_m$.

Таким образом, $\frac{N_0}{2\varphi_m} \exp[-\lambda T] \leq ku_m$. В этом случае $p(t) \leq ku_m$ для всех $t \in [0; T]$. Тогда из (8) следует, что:

$$u^*(t) = \frac{N_0}{2k\varphi_m} \exp[\lambda(t - T)]. \quad (28)$$

Подставив $u=u^*$ в уравнение (13), получим для функции $\psi(t)$ задачу Коши:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda\psi + \frac{N_0}{2k\varphi_m} \exp[\lambda(t - T)] - b, \quad \psi(0) = \psi^0. \quad (29)$$

Ее решение при $0 \leq t \leq T$ имеет вид:

$$\psi(t) = \frac{N_0 \exp[\lambda(t - T)]}{4\lambda k\varphi_m} - \frac{b}{\lambda} + \left[\psi^0 - \frac{N_0 \exp[-\lambda T]}{2\lambda k\varphi_m} + \frac{b}{\lambda} \right] \exp[-\lambda t]. \quad (30)$$

Случай 5. $\lambda < 0$, $p(T) < ku_m < p(0)$.

Таким образом, $N_0 / (2\varphi_m) < ku_m < N_0 / (2\varphi_m) \exp[-\lambda T]$. Тогда существует точка $t_1 \in (0; T)$, такая, что $p(t_1) = ku_m$. Т. е. t_1 определяется путем приравнивания функции $p(t)$, даваемой формулой (15), к величине ku_m . Получим:

$$t_1 = T - \frac{1}{\lambda} \ln \frac{N_0}{2\varphi_m ku_m}. \quad (31)$$

Тогда оптимальное управление имеет вид:

$$u^* = \begin{cases} u_m, & 0 \leq t \leq t_1, \\ p(t)/k, & t_1 < t \leq T. \end{cases} \quad (32)$$

Подставим это в (13). Получим:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda\psi + u_m - b, \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad \psi(0) = \psi^0. \quad (33)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda\psi + \frac{N_0}{2k\varphi_m} \exp[\lambda(t - T)] - b, \quad t_1 \leq t \leq T, \quad \psi(t_1 + 0) = \psi(t_1 - 0). \quad (34)$$

Решив данные задачи на соответствующих интервалах времени, получаем:

$$\psi(t) = \frac{u_m - b}{\lambda} + \left[\psi^0 - \frac{u_m - b}{\lambda} \right] \exp[-\lambda t], \quad (35)$$

$$\psi = \left\{ \frac{\frac{N_0}{2k\phi_m} \exp[\alpha(t - T)]}{2\alpha} - \frac{b}{a} \right\} + C \exp[-\alpha(t - T)], \quad (36)$$

где

$$C = \frac{u_m - b}{\alpha} \exp[\alpha(t_1 - T)] + \left[\psi^0 - \frac{u_m - b}{\alpha} \right] \exp[-\alpha T] - \exp[\alpha(t_1 - T)] \left\{ \frac{N_0 \exp[\alpha(t_1 - T)]}{4\alpha k\phi_m} - \frac{b}{\alpha} \right\}. \quad (37)$$

Случай 6. $\lambda < 0$, $ku_m \leq p(T)$.

В этом случае $p(t)/k \geq u_m$ для всех $t \in [0; T]$. Из (8) следует, что оптимальное управление имеет вид:

$$u^*(t) = u_m \text{ для всех } t \in [0; T]. \quad (38)$$

Подставив это в (13), получаем задачу Коши:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda\psi + u_m - b, \quad \psi(0) = \psi^0, \quad (39)$$

решением которой является функция:

$$\psi(t) = \frac{u_m - b}{\alpha} + \left[\psi^0 - \frac{u_m - b}{\alpha} \right] \exp[-\alpha t]. \quad (40)$$

Основные выводы настоящего раздела:

– при достаточно высоких значениях параметра релаксации a и/или достаточно малых значениях интенсивности передачи информации при межличностной коммуникации (параметр c) оптимальная стратегия является неубывающей (рис. 1);

– в обратном случае оптимальная стратегия является невозрастающей (рис. 2).

Расширенная модель: социум, состоящий из двух групп. Данный раздел посвящен анализу модели, рассматривающей социум более подробно по сравнению с моделью из предыдущего раздела. Основная цель — установить, сохраняется ли для этой более сложной модели вывод предыдущего раздела о влиянии параметров a , c на характер оптимальной кампании.

Модель имеет вид:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = f_1(\psi_1, \psi_2, u) - a\psi_1, \quad (41)$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = f_2(\psi_1, \psi_2, u) - a\psi_2, \quad (42)$$

$$J(n, u) = -\frac{k}{2} \int_0^T u^2 dt + \int_{-\psi_1(T)}^{\phi_m} n_1(\phi) d\phi + \int_{-\psi_2(T)}^{\phi_m} n_2(\phi) d\phi \rightarrow \max, \quad (43)$$

где

$$f_1(\psi_1, \psi_2, u) = c \left[\gamma \left(2 \int_{-\psi_1}^{\phi_m} n_1(\phi) d\phi - N_1 \right) + (1 - \gamma) \left(2 \int_{-\psi_2}^{\phi_m} n_2(\phi) d\phi - N_2 \right) \right] + (u - b),$$

$$f_2(\psi_1, \psi_2, u) = c \left[(1 - \gamma) \left(2 \int_{-\psi_1}^{\phi_m} n_1(\phi) d\phi - N_1 \right) + \gamma \left(2 \int_{-\psi_2}^{\phi_m} n_2(\phi) d\phi - N_2 \right) \right] + (u - b)$$

и по-прежнему имеет место ограничение:

$$0 \leq u \leq u_m. \quad (44)$$

Здесь предполагается, что система состоит из двух групп индивидов. Каждая из них характеризуется своим распределением $n_1(\phi)$, $n_2(\phi)$. При этом каждый индивид более общается с членами своей группы, чем чужой, что описывается параметром γ (при этом $\gamma=1$ соответствует тому, что межгрупповая коммуникация отсутствует,

а $\gamma=0,5$ соответствует однородной коммуникации, когда группы фактически отсутствуют. Далее будем полагать, что $0,5 < \gamma < 1$). Обозначим численность первой группы через N_1 , численность второй группы — через N_2 . Положим, что распределения индивидов по установке внутри каждой из групп аналогичны распределению из модели, рассмотренной в предыдущем разделе. Другими словами, распределения являются равномерными на некотором экзогенно заданном интервале $(-\varphi_m, \varphi_m)$, так что:

$$\int_{-\psi}^{\varphi_m} n_i(\varphi) d\varphi = \begin{cases} 0, & \psi < -\varphi_m, \\ \frac{N_i}{2} \left(1 + \frac{\psi}{\varphi_m} \right), & -\varphi_m \leq \psi \leq \varphi_m, \\ N_i, & \psi > \varphi_m, \end{cases}$$

(здесь и в формулах (45): $i=1,2$). Имеем для численностей сторонников Правой илевой партий в первой и группах:

$$R_i(t) = \int_{-\psi_i(t)}^{\varphi_m} n_i(\varphi) d\varphi, \quad (45.1)$$

$$L_i(t) = \int_{-\varphi_m}^{-\psi_i(t)} n_i(\varphi) d\varphi. \quad (45.2)$$

Кроме того, здесь предполагается, что группы в равной степени подвержены медийной пропаганде каждой из партий.

С учетом выбранного вида функций $f_i(\psi_1, \psi_2, u)$, $n_i(\varphi)$ формулы (41)–(43) принимают вид:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = c \left[\gamma N_1 \frac{\psi_1}{\varphi_m} + (1-\gamma) N_2 \frac{\psi_2}{\varphi_m} \right] + (u-b) - a\psi_1, \quad -\varphi_m \leq \psi_1 \leq \varphi_m, \quad (46)$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = c \left[(1-\gamma) N_1 \frac{\psi_1}{\varphi_m} + \gamma N_2 \frac{\psi_2}{\varphi_m} \right] + (u-b) - a\psi_2, \quad -\varphi_m \leq \psi_2 \leq \varphi_m, \quad (47)$$

$$J(n, u) = -\frac{k}{2} \int_0^T u^2 dt + \frac{N_1}{2} \frac{\varphi_m + \psi_1(T)}{\varphi_m} + \frac{N_2}{2} \frac{\varphi_m + \psi_2(T)}{\varphi_m} \rightarrow \max. \quad (48)$$

Гамильтониан имеет вид:

$$H(\psi_1, \psi_2, p_1, p_2, u) = \left\{ c \left[\gamma N_1 \frac{\psi_1}{\varphi_m} + (1-\gamma) N_2 \frac{\psi_2}{\varphi_m} \right] + (u-b) - a\psi_1 \right\} p_1 + \\ + \left\{ c \left[(1-\gamma) N_1 \frac{\psi_1}{\varphi_m} + \gamma N_2 \frac{\psi_2}{\varphi_m} \right] + (u-b) - a\psi_2 \right\} p_2 - \frac{ku^2}{2}.$$

Ближайшая цель состоит в том, чтобы максимизировать гамильтониан по управлению. Здесь:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = p_1 + p_2 - ku.$$

Эта функция имеет максимум при:

$$u = \frac{p_1 + p_2}{k}.$$

С учетом ограничения (44) получаем оптимальное управление, которое имеет вид:

$$u^* = \begin{cases} 0, & p_1 + p_2 < 0, \\ (p_1 + p_2)/k, & 0 \leq p_1 + p_2 \leq ku_m, \\ u_m, & p_1 + p_2 > ku_m. \end{cases} \quad (49)$$

Сопряженная система имеет вид:

$$\frac{dp_1}{dt} = -\left(\frac{\gamma c N_1}{\varphi_m} - a \right) p_1 - \frac{(1-\gamma) c N_1}{\varphi_m} p_2, \quad p_1(T) = \frac{N_1}{2\varphi_m}, \\ \frac{dp_2}{dt} = -\frac{(1-\gamma) c N_2}{\varphi_m} p_1 - \left(\frac{\gamma c N_2}{\varphi_m} - a \right) p_2, \quad p_2(T) = \frac{N_2}{2\varphi_m}.$$

Нетрудно видеть, что ввиду положительности значений $p_1(T)$, $p_2(T)$ функции $p_1(t)$, $p_2(t)$ положительны при $0 \leq t \leq T$. Очевидно также, что каждая из производных dp_1/dt , dp_2/dt положительна при достаточно больших значениях параметра a и/или малых значениях параметра c и отрицательна в обратном случае. Следовательно, оптимальное управление, даваемое формулой (49), является неубывающим при достаточно высоких значениях параметра релаксации a и невозрастающим при достаточно малых его значениях. Тем самым модель данного раздела сохраняет основное свойство более простой модели, рассмотренной в предыдущем разделе.

Дадим содержательную трактовку полученным результатам. Из полученных формул для обеих рассмотренных моделей следует, что параметры влияют на оптимальную стратегию следующим образом:

- параметр релаксации a : большие значения способствуют нарастающей кампании, малые значения — убывающей;
- продолжительность противоборства T и интенсивность b вещания оппонирующей партии не влияет на выбор стратегии (при условии, что эта интенсивность является постоянной);
- интенсивность передачи информации через межличностную коммуникацию (параметр c), численность социума, а также консолидированность группы параметр $\phi_{\max}$: большие значения способствуют убывающей кампании, малые значения — нарастающей.

Информация распространяется через СМИ и путем межличностной коммуникации (слухов): от индивида к индивиду. При этом влияние информации на конкретного индивида после того, как он ее получит, постепенно уменьшается, поэтому он может быть «перевербован» более свежей информацией противника.

Соответственно, «нарастающая» кампания ориентирована на то, чтобы для большинства индивидов информация была получена непосредственно перед финишем, а впечатление от нее не успело ослабнуть. Обратная сторона такой стратегии состоит в том, индивиды не успеют широко распространить полученную информацию «из уст в уста», ведь каждый акт межличностной коммуникации требует определенного времени. В противоположность этому, стратегия «убывающей» кампании подразумевает эффективную роль межличностного взаимодействия и основана на том, чтобы в самом ее начале убедить в своей позиции значительное количество индивидов, которые затем будут пересказывать ее другим. У этой стратегии также есть обратная сторона: с течением времени интерес индивидов к данной позиции будет угасать, так что к концу кампании противник может «перевербовать» их за счет более интенсивного вещания. Таким образом, полученные в работе выводы не являются очевидными, но и не противоречат интуиции.

Список литературы

1. Петров А.П., Маслов А.И., Цаплин Н.А. Моделирование выбора позиций индивидами при информационном противоборстве в социуме. *Математическое моделирование*. 2015;27(12):137–148. <http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=3684>
2. Mikhailov A.P., Pronchev G.B., Proncheva O.G. Mathematical Modeling of Information Warfare in Techno-Social Environments. Troussov A., Maruev S. “Techno-Social Systems for Modern Economical and Governmental Infrastructures”. *IGI Global*. 2019:174–210. <https://www.doi.org/10.4018/978-1-5225-5586-5>, <https://www.igi-global.com/chapter/mathematical-modeling-of-information-warfare-in-techno-social-environments/208385>
3. Прончева О.Г. О влиянии степени поляризации общества на исход информационного противоборства. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2016;75. 29 с. <https://www.doi.org/10.20948/prepr-2016-75>, <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-75>
4. Прончев Г.Б. О проблемах информационной безопасности использования информационно-коммуникационных технологий и искусственного интеллекта в цифровом здравоохранении. *Социально-гуманитарные знания*. 2022;2:100–107. <https://www.doi.org/10.34823/SGZ.2022.2.51777>
5. Boldyreva A., Alexandrov M., Koshulko O., et al. *Queries to Internet as a tool for analysis of the regional police work and forecast of the crimes in regions*. In: Proc. of 14-th Mexican Intern. Conf. on Artif. Intell. (MICAI-2016). Springer Cham, LNAI. 2017;10061(25):290–302. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62434-1_25
6. Boldyreva A., Sobolevskiy O., Alexandrov M., et al. *Creating collections of descriptors of events and processes based on Internet queries*. In: Proc. of 14-th Mexican Intern. Conf. on Artif. Intell. (MICAI-2016). Springer Cham, LNAI. 2017;10061(26):303–314. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62434-1_26
7. Губанов Д.А., Новиков Д.А. Модели совместной динамики мнений и действий в онлайн-социальных сетях. Ч. 1. *Исходные данные и первичный анализ. Проблемы управления*. 2023;2:37–53.
8. Губанов Д.А. Методы анализа информационного влияния в активных сетевых структурах. *Автоматика и телемеханика*. 2022;5:87–101.
9. Chartishvili A.G., Kozitsin I.V., Goiko V.L., et al. *On an approach to measure the level of polarization of individuals' opinions*. Twelfth International Conference “Management of large-scale system development” (MLSD). 2019;1–5. <https://doi.org/10.1109/MLSD.2019.8911015>

10. Kozitsin I.V. A general framework to link theory and empirics in opinion formation models. *Scientific reports*. 2022;12:5543.
11. Чхартишвили А.Г. Задача нахождения медианного предпочтения индивидов в стохастической модели. *Автоматика и телемеханика*. 2021;5:139–150.
12. Rashevsky N. *Outline of a Physico-mathematical Theory of Excitation and Inhibition*. Protoplasma; 1933.
13. Рашевский Н. Две модели: подражательное поведение и распределение статуса. Под ред. Г.В. Осипова. *Математические методы в современной буржуазной социологии. Сборник статей*. Москва: Прогресс; 1966. С. 175–197.

References

1. Petrov AP, Maslov AI, Tsaplin NA. Modeling of the choice of positions by individuals in the information confrontation in society. *Mathematical modeling*. 2015;27(12):137–148. (In Russ.). <http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=3684>
2. Mikhailov AP, Pronchev GB, Proncheva OG. Mathematical Modeling of Information Warfare in Techno-Social Environments. Troussov A., Maruev S. “Techno-Social Systems for Modern Economical and Governmental Infrastructures”. *IGI Global*. 2019:174–210. <https://www.doi.org/10.4018/978-1-5225-5586-5>, <https://www.igi-global.com/chapter/mathematical-modeling-of-information-warfare-in-techno-social-environments/208385>
3. Proncheva OG. On the influence of the degree of polarization of society on the outcome of the information confrontation. *Preprints of the IPM named after M. V. Keldysh*. 2016;75. 29 p. (In Russ.). <https://www.doi.org/10.20948/prepr-2016-75>, <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-75>
4. Pronchev GB. On the problems of information security of the use of information and communication technologies and artificial intelligence in digital healthcare. *Social and humanitarian knowledge*. 2022;2:100–107. (In Russ.). <https://www.doi.org/10.34823/SGZ.2022.2.51777>
5. Boldyreva A, Alexandrov M, Koshulko O, et al. *Queries to Internet as a tool for analysis of the regional police work and forecast of the crimes in regions*. In: Proc. of 14-th Mexican Intern. Conf. on Artif. Intell. (MICA-2016). Springer Cham, LNAI. 2017;10061(25):290–302. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62434-1_25
6. Boldyreva A, Sobolevskiy O, Alexandrov M, et al. *Creating collections of descriptors of events and processes based on Internet queries*. In: Proc. of 14-th Mexican Intern. Conf. on Artif. Intell. (MICA-2016). Springer Cham, LNAI. 2017;10061(26):303–314. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62434-1_26
7. Gubanov DA, Novikov DA. Models of joint dynamics of opinions and actions in online social networks. Part 1. Initial data and primary analysis. *Management problems*. 2023;2:37–53. (In Russ.).
8. Gubanov DA. Methods of analyzing information influence in active network structures. *Automation and telemechanics*. 2022;5:87–101. (In Russ.).
9. Chartishvili AG, Kozitsin IV, Goiko VL, et al. *On an approach to measure the level of polarization of individuals' opinions*. Twelfth International Conference “Management of large-scale system development” (MLSD). 2019;1–5. <https://doi.org/10.1109/MLSD.2019.8911015>
10. Kozitsin IV. A general framework to link theory and empirics in opinion formation models. *Scientific reports*. 2022;12:5543.
11. Chkhartishvili AG. The problem of finding the median preference of individuals in a stochastic model. *Automation and telemechanics*. 2021;5:139–150. (In Russ.).
12. Rashevsky N. *Outline of a Physico-mathematical Theory of Excitation and Inhibition*. Protoplasma; 1933.
13. Rashevsky N. Two models: imitative behavior and status distribution. Edited by GV Osipov. *Mathematical methods in modern bourgeois sociology. Collection of articles*. Moscow: Progress; 1966. pp. 175–197. (In Russ.).

Об авторе:

Петров Александр Пхоун Чжо, ведущий научный сотрудник Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (РФ, 125047, г. Москва, Миусская пл., 4), доктор физико-математических наук, [ORCID](https://orcid.org/), eLibrary.ru, [ИСТИНА](https://istina.ru/), [ResearcherID](https://researcherid.com/), [ScopusID](https://scopusid.com/), petrov.alexander.p@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.04.2023.

Поступила после рецензирования 30.05.2023.

Принята к публикации 31.05.2023.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

About the Author:

Alexander Phoun Zho Petrov, Leading Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences (4, Miusskaya Sq., Moscow, 125047, RF), Dr. (Physical and Mathematical Sciences), [ORCID](#), [eLibrary.ru](#), [ИСТИНА](#), [ResearcherID](#), [ScopusID](#), petrov.alexander.p@yandex.ru

Received 24.04.2023.

Revised 30.05.2023.

Accepted 31.05.2023.

Conflict of interest statement

The author does not have any conflict of interest.

The author has read and approved the final manuscript.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ MATHEMATICAL MODELLING



УДК 519.6

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-52-59>


Научная статья



Моделирование и анализ динамики квази-2D-турбулентности в мелководных водоемах

С.В. Проценко , Е.А. Проценко

Таганрогский институт им. А. П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), Российская Федерация, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48

eapros@rambler.ru

Аннотация

Введение. Работа посвящена изучению генерации и развития турбулентных структур в мелководных потоках. Для оптимального управления водным ресурсом необходимо знать, какие будут последствия при изменении системы течения в результате вмешательства человека. В основном все потоки жидкости, которые относятся к практике гражданского строительства, имеют турбулентный характер. Это, например, речные и русловые потоки, приливные течения в океанах и прибрежных морях. Неглубокие течения в окружающей среде часто включают в себя широкий диапазон масштабов вихрей, начиная от микромасштабных вихрей и заканчивая крупномасштабными когерентными структурами с горизонтальными масштабами длины, которые намного превышают глубину воды ($L \gg H$). Существование таких крупных структур — типичная характеристика турбулентности при мелком течении. Это указывает на необходимость проведения системного анализа проблемы, а также моделирования подобных сложно формализуемых систем. Целью данной работы является моделирование и анализ динамики структур квази-2D-турбулентности.

Материалы и методы. Исследуются крупномасштабные квази-2D когерентные структуры (2DCS) в зависимости от источника и локализации в столбе жидкости. Рассматриваются турбулентные течения в канале, удовлетворяющие несжимаемым уравнениям Навье-Стокса. Численный эксперимент выполнен на основе подхода «моделирование крупных вихрей» (LES).

Результаты исследования. Построен сценарий динамики структур квази-2D-турбулентности береговой зоны. Предсказано формирование вихревых структур.

Обсуждение и заключения. Развитие двумерной турбулентности в неглубоких потоках служит иллюстрацией процессов, которые управляют квази-двумерной турбулентностью, включая слияние отдельных вихрей. Основным механизмом, управляющим распадом 2DCS, являются потери энергии из-за трения о дно. При этом, чем больше размер вихря относительно глубины, тем быстрее происходит прямое рассеивание его кинетической энергии.

Ключевые слова: турбулентные структуры, мелководные потоки, крупномасштабные квази-2D когерентные структуры (2DCS), квази-2D-турбулентность, масштаб вихрей.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00295. <https://rscf.ru/project/22-11-00295/>

Для цитирования. Проценко С.В., Проценко Е.А. Моделирование и анализ динамики квази-2D-турбулентности в мелководных водоемах. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):52–59. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-52-59>

Original article

Modeling and Analysis of Quasi-2D Turbulence Dynamics in Shallow Waters

Sofia V Protsenko , Elena A Protsenko

Taganrog Institute named after A. P. Chekhov (branch) of RSUE, 48, Initiative St., Taganrog, Russian Federation

eapros@rambler.ru

Abstract

Introduction. The work is devoted to the study of the generation and development of turbulent structures in shallow-water flows. For optimal water resource management, it is necessary to know what the consequences will be if the flow system

changes as a result of human intervention. Basically, all fluid flows that relate to the practice of civil engineering are turbulent in nature. These are, for example, river and channel flows, tidal currents in the oceans and coastal seas. Shallow currents in the environment often include a wide range of vortex scales, ranging from micro-scale vortices to large-scale coherent structures with horizontal length scales that far exceed the depth of water ($L \gg H$). The existence of such large structures is a typical characteristic of turbulence in shallow flow. This indicates the need for a systematic analysis of the problem, as well as modeling of such complex formalized systems. The purpose of this work is to model and analyze the dynamics of quasi-2D turbulence structures.

Materials and Methods. Large-scale quasi-2D coherent structures (2 DCS) are investigated depending on the source and localization in the liquid column. Turbulent flows in the channel satisfying incompressible Navier-Stokes equations are considered. The numerical experiment was carried out on the basis of the “large eddy simulation” (LES) approach.

The Results of the Study. Scenario of the dynamics of quasi-2D turbulence structures of the coastal zone is constructed, the formation of vortex structures is predicted.

Discussion and Conclusions. The development of two-dimensional turbulence in shallow flows illustrates the processes that control quasi-two-dimensional turbulence, including the merging of individual vortices. The main mechanism controlling the decay of 2DCS is the loss of energy due to friction on the bottom, while the larger the size of the vortex relative to the depth, the faster the direct dissipation of its kinetic energy occurs.

Keywords: turbulent structures, shallow water channels, large-scale quasi-2D coherent structures (2PCS), quasi-2D turbulence, vortex scale.

Founded information. The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 22-11-00295. <https://rscf.ru/project/22-11-00295/>

For citation. Protsenko SV, Protsenko EA. Modeling and analysis of quasi-2D turbulence dynamics in shallow waters. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):52–59. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-52-59>

Введение. В контексте механики жидкости в окружающей среде можно констатировать, что практически все потоки жидкости имеют турбулентный характер. Обычно турбулентный поток содержит вихри, также называемые «завихрениями», «когерентными структурами» или «структурами турбулентности». Это структуры динамической рециркуляции, возникающие в результате неустойчивости внутреннего потока. Несмотря на то, что размер и границы отдельных вихрей обычно не могут быть выявлены однозначно, зачастую можно определить масштабы длины и скорости для характеристики поведения различных типов вихрей в потоке, особенно доминирующих энергосодержащих крупных вихрей. Неглубокие течения включают широкий диапазон масштабов вихрей, включая крупномасштабные когерентные структуры. Такие вихри часто наблюдаются в областях с большими перепадами горизонтальных скоростей или вблизи препятствий, где поток отделяется от стенки.

Турбулентность мелкого течения, как и любая другая, в окружающей среде не может быть прямолинейно предсказана в деталях из-за ее хаотической природы. Требуется тщательная экспериментальная работа (полевые или лабораторные данные) и детальное численное моделирование, чтобы с некоторой точностью предсказать поведение турбулентности в реальных ситуациях. Это имеет практическое значение для улучшения понимания и моделирования крупномасштабной турбулентности на мелководье. Для оптимального управления водным ресурсом необходимо с большой долей вероятности знать, какие последствия произойдут при изменении системы течения (включая турбулентность) в результате вмешательства человека.

Турбулентные потоки присутствуют в природе повсюду, неглубокие турбулентные потоки среди них образуют важную подгруппу. По сути, турбулентность — это хаотическое явление. Однако турбулентность при мелком течении можно охарактеризовать как «организованный хаос». Организация в таких потоках видна благодаря турбулентным структурам с масштабами длины, обычно превышающими глубину воды, которые могут иметь относительно длительный срок существования.

Неглубокий поток определяется как трехмерный, одно измерение которого значительно меньше двух других измерений. В контексте гидромеханики окружающей среды этим меньшим измерением обычно является глубина воды. G. H. Jirka [1] описывает несколько механизмов, вызывающих крупномасштабные структуры турбулентности, которые типичны для неглубоких течений. Такие крупные вихри имеют преимущественно двумерный характер. Их динамика существенно отличается от вихрей меньшего масштаба ($L < H$), которые имеют полностью трехмерный характер, т. е.: относительно короткое время жизни ($T \approx L/U$), более слабая взаимная корреляция и непрерывная тенденция распадаться на более мелкие вихри. Хотя вся турбулентность в природе, по существу, трехмерна, турбулентность мелкого течения часто называют «квази-2D» [2]. G. H. Jirka [1] ввел аббревиатуру 2DCS для обозначения крупномасштабных квази-2D когерентных структур. Очевидно, что 2D-объекты в потоке всегда сопровождаются трехмерными структурами меньшего масштаба.

Обычно турбулентность вызывается сдвигом в направлении, перпендикулярном локальной скорости потока, в результате чего поток становится нестабильным. Происхождение такого бокового сдвига всегда можно проследить либо до трения о стенки (пристенная турбулентность), либо до поперечного градиента скорости внутри области (свободная турбулентность). Важным механизмом, ответственным за возникновение внутренних градиентов скорости, является разделение потока. Разделение происходит, когда пограничный слой потока теряет контакт с соответствующей сплошной стенкой и отрывается от нее (рис. 1). Это может быть связано с геометрическими причинами (например, поток не способен следовать сложной форме границы или плавно огибать угол) или по динамическим причинам (градиент давления в потоке нарушает равновесие локального пограничного слоя). Разделяющие потоки включают область сильного поперечного сдвига ниже по течению от места разделения, что приводит к большой интенсивности турбулентности и часто является областью рециркуляции потока [3–5].



Рис. 1. Цветосинтезированное изображение Таганрогского залива Азовского моря со спутника дистанционного зондирования Земли Landsat 8, разрешение 30 м

Неглубокие потоки, струи и перемешивающие слои — это три распространенных типа свободных, неглубоких, сдвиговых потоков. В других случаях наличие боковых стенок приводит к тому, что разделяющий поток создает область рециркуляции.

Материалы и методы

1. Мелководье и его влияние на турбулентность. Турбулентные течения в канале удовлетворяют несжимаемым уравнениям Навье-Стокса в консервативной форме [6]:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial P/\rho}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = f_i, \quad (2)$$

где u — вектор скорости жидкости (в м/с); P — гидродинамическое давление (кг/м²); ρ — постоянная плотность (пресная вода, 1000 кг/м³); ν — постоянная кинематическая молекулярная вязкость (10⁻⁶ м²/с) и f — вектор силы тела на единицу массы (м/с²), что обычно составляет силу тяжести, $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Поле скоростей u называется свободным от дивергенции или соленоидальным. Силу тяжести тела можно устранить, включив ее в градиент давления. Если установим $f_i = -\partial(g x_3)/\partial x_i$ (при ускорении силы тяжести $g = 9,81$ м/с²) и определим так называемое, негидростатическое нормированное давление через $p = P/\rho + g x_3$ (м²/с²), уравнение (2) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0. \quad (3)$$

Уравнения (1) и (3) должны быть дополнены соответствующими начальными и граничными условиями. На непроницаемых твердых стенках физически выполняется граничное условие отсутствия скольжения, тогда как на поверхности (рассматриваемой либо как подвижная свободная поверхность, либо как жесткая крышка) действует условие свободного скольжения (в данном исследовании ветровыми и атмосферными воздействиями пренебрегают) [7–9].

Движение жидкости индуцируется гидродинамическими градиентами давления, в то время как поле скоростей постоянно деформируется под действием нелинейной адвекции импульса и вязкости. Когда уравнение (3) записано в безразмерной форме, используя шкалу скоростей U и шкалу длин L , соотношение адвективных и вязких сил может быть выражено одним безразмерным параметром — числом Рейнольдса (Re):

$$Re = \frac{UL}{\nu}. \quad (4)$$

Две особенности в уравнениях Навье-Стокса являются существенной причиной турбулентности. При больших значениях Re проблема течения может стать гидродинамически нестабильной и в конечном итоге проявлять хаотическое поведение. Действие вязких сил (в сочетании с граничными условиями отсутствия скольжения) вносит вращение (или завихренность) в поле скоростей, даже если исходное поле течения не содержало вращения. Вследствие наличия завихренности поле хаотического потока всегда будет содержать вихри или «завихрения» [10].

Из-за важной роли завихренности турбулентность, по сути, является трехмерным явлением. С физической точки зрения растущий хаос в турбулентных потоках иллюстрируется тем фактом, что вихри нестабильны и имеют тенденцию распадаться на более мелкие вихри. Это в основном означает, что турбулентная кинетическая энергия передается в сторону меньших масштабов, пока мельчайшие вихри не достигнут масштабов длины, при которых их энергия преобразуется в тепло под действием вязкости (так называемые масштабы Колмогорова). Этот продолжающийся выброс турбулентной кинетической энергии часто называют «3D-энергетическим каскадом» [11]. Поток энергии в сторону меньших масштабов длины часто оставляет свой след в спектре плотности энергии турбулентного движения. Что касается трехмерного энергетического каскада, спектр пространственной плотности энергии E (m^3/c^2) при малых масштабах изотропной турбулентности (инерционный диапазон) должен иметь следующий вид:

$$E(k) \approx \tau^{2/3} k^{-5/3}, \quad (5)$$

где τ (m^2/c^3) — скорость рассеивания энергии на единицу массы; а k (m^{-1}) — «волновое число», связанное с определенной шкалой длины турбулентности. Завихренность играет жизненно важную роль в механизме энергетического каскада. Это можно увидеть, взяв кривизну уравнения (3), которое дает уравнение завихренности:

$$\frac{D\omega_i}{Dt} \equiv \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j^2}, \quad (6)$$

где ω (s^{-1}) — вектор завихренности. Это уравнение показывает, что материальная производная завихренности движущейся частицы жидкости определяется правой частью уравнения. Первый член описывает взаимодействие между полем завихренности и полем деформации скорости; второй — диффузию завихренности посредством молекулярной вязкости [12–14].

Первый член отвечает за растяжение вихря и может быть переписан как:

$$\omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \omega_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \omega_j S_{ij}. \quad (7)$$

Если поле скоростей растянуть в направлении вектора локальной завихренности (т. е. по нормали к соответствующей плоскости вихря, (рис. 2 а)), локальная завихренность в этом направлении увеличится; кинетическая энергия вращения будет передаваться на более высокие частоты и, следовательно, в меньшие масштабы, как в пространстве, так и во времени. Этот механизм растягивания вихря отвечает за спектральный поток энергии в 3D-энергетическом каскаде.

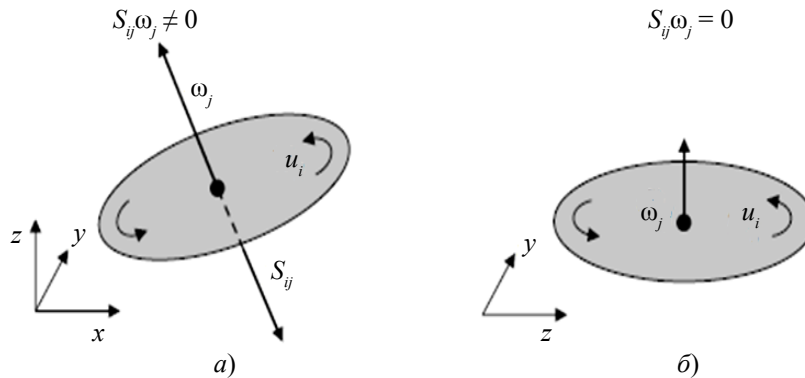


Рис. 2. 2D и 3D динамика вихря: а — в трехмерном пространстве вихри могут быть растянуты в направлении локального вектора завихренности, перпендикулярного плоскости вихря; б — вихрь в двумерной плоскости не может быть растянут в направлении, перпендикулярном этой плоскости

2. Теоретическое исследование динамики структур квази-2D-турбулентности. Несмотря на присущую турбулентности трехмерность, многие области турбулентного течения в природе ограничены вертикальным направлением. Такой поток называется неглубоким; его крупномасштабная турбулентность часто рассматривается как квазидвумерная. Хотя 2D-турбулентность является *contradictio in terminis*, эта классификация все же имеет смысл, поскольку на практике динамика структур квази-2D-турбулентности может значительно отличаться от «нормальной» 3D-турбулентности. Это можно показать, обратившись к уравнению завихренности (6). В двух измерениях вектор скорости состоит только из одной компоненты и везде перпендикулярен двумерному полю скоростей (рис. 2 б). Однако растяжение двумерного поля скоростей невозможно в этом перпендикулярном направлении. Следовательно, член растяжения вихря обращается в нуль, что приводит к:

$$\frac{D\omega_i}{Dt} \equiv \nu \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j^2}. \quad (8)$$

Остальные члены показывают, что теоретически завихренность является сохраняющейся величиной в 2D. Более того, из (8) следует, что общая энстрофия (мера количества кинетической энергии вращения) также приблизительно сохраняется, за исключением небольшого квадратичного члена диссипации из-за вязкости:

$$\frac{D\Omega}{Dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial t} + u_j \frac{\partial \Omega}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_j^2} - \nu \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right)^2, \quad (9)$$

где $\Omega = \frac{1}{2} \omega_i^2 (s^{-2})$ — общая энстрофия. Принцип сохранения энстрофии аналогичен принципу сохранения энергии: кинетическая энергия также сохраняется, за исключением квадратичного члена диссипации. Этот результат следует из умножения уравнения (3) на u_i :

$$\frac{DE_k}{Dt} + \frac{\partial u_i \rho}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \nu u_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2, \quad (10)$$

где $E_k = \frac{1}{2} u_i^2 (m^2/s^2)$ — полная кинетическая энергия. Следовательно, в пределе невязкости энергетический баланс двумерного потока во времени и пространстве ограничен двумя законами сохранения (9) и (10) (вместо только (10) для 3D-случая). Сохраненные величины E_k и Ω могут быть записаны в спектральной форме:

$$E_k = \frac{1}{2} u_i^2 = \int_0^\infty E_k(k) dk, \quad (11)$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \omega_i^2 = \int_0^\infty k^2 E_k(k) dk. \quad (12)$$

Следовательно, Ω может быть выражен как второй момент спектрального распределения кинетической энергии. Это означает, что в двумерном потоке сохраняется не только общее количество кинетической энергии, но и ее дисперсия по всем масштабам длины. Этот факт подразумевает два одновременных энергетических каскада. Предположим, что ситуация с двумерным потоком нарушается некоторым принудительным механизмом с характерным масштабом длины, тогда можно определить волновое число воздействия $k_i \approx L^{-1}$, при котором к системе добавляется кинетическая энергия. Комбинация законов сохранения (9) и (10) вызовет перераспределение энергии: если кинетическая энергия передается от масштаба k_i к более высоким волновым числам (малые масштабы) $k > k_i$ должен присутствовать компенсирующий поток энергии в направлении более низких волновых чисел (большие масштабы) $k < k_i$ чтобы сохранить дисперсию. Этот перенос энергии в сторону большей длины и временных масштабов часто называют обратным рассеянием или обратным энергетическим каскадом. Рассмотрим спектральные формы для учета этих двух одновременных процессов:

$$E(k) = \begin{cases} t^{2/3} k^{-5/3}, & \text{if } k < k_i, \\ \eta^{2/3} k^{-3}, & \text{if } k > k_i, \end{cases} \quad (13)$$

где $t (m^2/s^3)$ — скорость рассеивания энергии; а $\eta (s^{-3})$ — скорость рассеивания энстрофии на единицу массы. Существование обратного энергетического каскада в области $k < k_i$ подразумевает, что после некоторой начальной стадии кинетическая энергия имеет тенденцию концентрироваться в крупномасштабных вихрях, которые стабильны и не распадаются. Этот принцип часто называют «самоорганизацией».

В результате экспериментов и моделирования выявляются конкретные типы вихрей, можно выделить монополярные, дипольные и трехполярные вихревые образования. Эти конфигурации характеризуются тем фактом, что соседние двумерные вихри способны сосуществовать, когда они имеют противоположные знаки завихренности. С другой стороны, два монополярных двумерных вихря с одинаковым знаком завихренности способны объединяться и образовывать новый, более крупный вихрь. Это явление известно как слияние вихрей, очень заметное

и впечатляющее вследствие существования обратного энергетического каскада и естественный аналог механизма растяжения вихрей, который отвечает за их разрушение (рис. 3).

Результаты исследования

Численное моделирование динамики структур квази-2D-турбулентности. Неглубокие турбулентные течения проявляют множество двумерных характеристик, что называется квазидвумерным поведением потока. Хотя в неглубоком потоке механизм растягивания вихря не исключен полностью, он, по крайней мере, сильно затруднен в вертикальном измерении. Если в неглубоком потоке присутствуют крупномасштабные квази-двумерные когерентные структуры, часто наблюдается, что они довольно стабильны и лишь слабо диссипативны.

Типичная квази-2D задача, характеризуется как небольшой 3D-турбулентностью, так и 2DCS. Последние представляют собой хорошо различимые крупномасштабные структуры, которые остаются нетронутыми в течение относительно длительного времени во время прохождения через область потока.

Пример слияния вихрей при 2D-моделировании крупных вихрей (LES) приведен на рис. 3, который демонстрирует графики контуров завихренности при четырех стадиях процесса слияния.

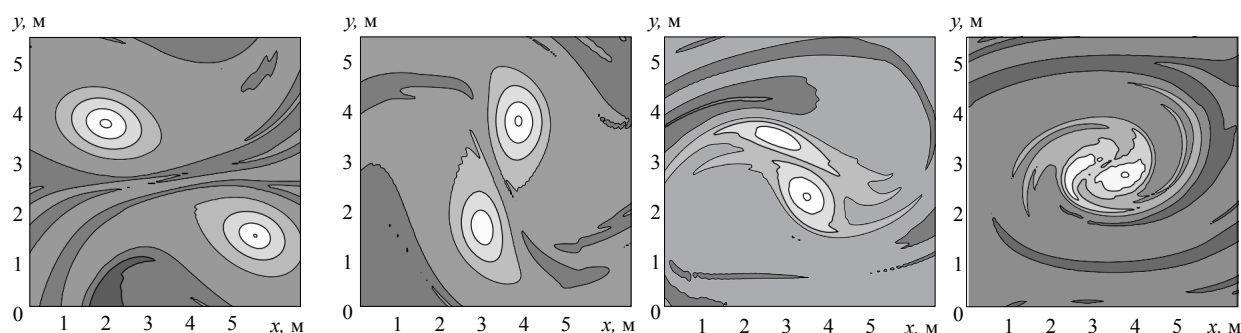


Рис. 3. Результаты двумерного моделирования LES слияния вихрей из-за существования обратного энергетического каскада: графики контуров завихренности

Термин «когерентные структуры» используется для рассмотрения связанных крупномасштабных турбулентных масс жидкости, которые равномерно распространяются по всей глубине воды и содержат фазово-коррелированную завихренность, за исключением тонкого придонного пограничного слоя. В случае внутренней неустойчивости при поперечном сдвиге разделения не происходит: из-за разницы боковых скоростей возникнут гидродинамические неустойчивости, которые постепенно перерастут в 2DCS. Различия в боковой скорости могут быть вызваны, например, слияниями рек или различиями в глубине и неровностях (сложные каналы).

Обсуждение и заключения. Во всех случаях генерация и развитие последовательностей 2DCS требует определенного времени прохождения и определенного пространственного расстояния от их источника. Выделяют три различных региона развития 2DCS, основываясь на соотношении расстояния распространения вихря x и глубины воды H . В области «ближнего поля» ($x/H < 1$) преобладает трехмерная мелкомасштабная турбулентность, но присутствующий средний поперечный сдвиг обычно двумерный, главным образом из-за формы геометрии. В «дальнем поле» ($x/H > 10$) 2DCS хорошо развиты в горизонтальном направлении и, в конечном итоге, рассеиваются из-за трения о дно. И средний поток, и крупномасштабная турбулентность имеют ярко выраженный 2D-характер. «Среднее поле» ($1 < x/H < 10$) характеризуется взаимодействием между растущими 2DCS, средним потоком и 3D-турбулентностью дна, что приводит к эффектам среднего вторичного потока и 3D-эффектам внутри 2DCS, например, областям восходящего и нисходящего потоков жидкости.

Развитие двумерной турбулентности в неглубоких потоках часто служит хорошей иллюстрацией процессов, которые управляют квази-двумерной турбулентностью, включая слияние отдельных вихрей. 2DCS обычно растут при движении в направлении вниз по течению. В конечном счете 2DCS будут распадаться в области дальнего поля. Основным механизмом, управляющим этим распадом, являются потери энергии из-за трения о дно. Чем больше размер вихря относительно глубины, тем быстрее происходит прямое рассеивание его кинетической энергии. Этот факт ограничивает максимальный размер вихря λ , который может быть обнаружен в реальных неглубоких потоках. В случаях очень мелкого течения даже образование 2DCS уже может быть подавлено трением о дно.

Среди множества конфигураций неглубокого потока, которые могут содержать 2DCS, выделяют несколько основных типов: следы, сетчатая турбулентность, струи и слои смешивания. Эти базовые конфигурации, основанные на общих исследованиях 3D-турбулентности, имеют свои аналоги в теории неглубокого течения. В трехмерных случаях режим турбулентности этих типов потоков определяется соотношением между адвективными и вязкими силами, которое выражается числом Рейнольдса (Re). В соответствующих квази-двумерных случаях донное трение важнее молекулярной вязкости, следовательно, поведение этих неглубоких течений определяется соотношением между горизонтальным поперечным сдвигом и донным трением. Эти две величины, соответственно, определяют производство и рассеивание кинетической энергии 2DCS.

Список литературы

1. Jirka G.H. Large scale flow structures and mixing processes in shallow flows. *Journal of Hydraulic Research*. 2001;39(6):567–573.
2. G.J.F van Heijst. Zelf-organisatie van twee-dimensionale stromingen. *Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde*. 1993;59:321–325.
3. Avancha R. and Pletcher R.H. *Large eddy simulation of the turbulent flow past a backward facing step*. Proceedings of the 38th AIAA Areosciences Meeting and Exhibit. Reno, Nevada, USA; 2000;0542:1–7.
4. Bijlsma A.C., Uittenbogaard R.E. and Blokland T. *Horizontal large eddy simulation applied to stratified tidal flows*. Proceedings of the International Symposium on Shallow Flows. Delft, Netherlands; 2003;559–566.
5. Breugem W.P. *The influence of wall permeability on laminar and turbulent flows*. PhD thesis, Delft University of Technology. 2004.
6. Clercx H.J.H., Zoetewij M.L. and G.J.F. van Heijst. *Quasi two-dimensional turbulence in shallow fluid layers: the role of bottom friction and fluid layer depth*. Proceedings of the International Symposium on Shallow Flows, Delft, Netherlands; 2003;87–94.
7. Frohlich J. and Rodi W. *Introduction to Large Eddy Simulation of turbulent flows. Closure Strategies for Turbulent and Transitional Flows* (ed. B. E. Launder and N. D. Sandham), Cambridge University Press; 2000;8:267–298.
8. Kadota A., Suzuki K. and Uijttewaals W.S.J. *The shallow flow around a single groyne under submerged and emerged conditions*. Proceedings of the International Conference in Fluvial Hydraulics (River Flow), Lisboa, Portugal; 2006;673–682.
9. Labeur R.J. *Finite element modelling of transport and non-hydrostatic flow in environmental fluid mechanics*. PhD thesis, Delft University of Technology. 2009.
10. Mittal R. and Iaccarino G. Immersed Boundary Methods. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2005;37:239–61.
11. Schnauder I., Sukhodolov A., Uijttewaals W.S.J. and Labeur R.J. *Field experiments and numerical modelling on shallow mixing layers at a confluence of two parallel streams*. Proceedings of the International Conference in Fluvial Hydraulics (River Flow), Izmir, Turkey; 2008;883–892.
12. Talstra H., Uijttewaals W.S.J. and Stelling G.S. *3D LES computations of a shallow lateral expansion using an immersed boundary method*. Proceedings of the International Conference on Hydrosience and Engineering (ICHE), Philadelphia, USA; 2006.
13. W. van Balen. *Large-scale coherent structures in turbulent shallow flows*. Master's thesis, Delft University of Technology; 2005.
14. B.C. van Prooijen and Uijttewaals W.S.J. The relevance of a back-scatter model for depth-averaged flow simulation. *Flow Turbulence Combust.* 2009;82:73–91.

References

1. Jirka GH Large scale flow structures and mixing processes in shallow flows. *Journal of Hydraulic Research*. 2001;39(6):567–573.
2. GJF van Heijst. Zelf-organisatie van twee-dimensionale stromingen. *Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde*. 1993;59:321–325.
3. Avancha R and Pletcher RH. *Large eddy simulation of the turbulent flow past a backward facing step*. Proceedings of the 38th AIAA Areosciences Meeting and Exhibit. Reno, Nevada, USA; 2000;0542:1–7.
4. Bijlsma AC, Uittenbogaard RE and Blokland T. *Horizontal large eddy simulation applied to stratified tidal flows*. Proceedings of the International Symposium on Shallow Flows. Delft, Netherlands; 2003;559–566.
5. Breugem WP. *The influence of wall permeability on laminar and turbulent flows*. PhD thesis, Delft University of Technology. 2004.
6. Clercx HJH, Zoetewij ML and GJF van Heijst. *Quasi two-dimensional turbulence in shallow fluid layers: the role of bottom friction and fluid layer depth*. Proceedings of the International Symposium on Shallow Flows, Delft, Netherlands; 2003;87–94.
7. Frohlich J and Rodi W. *Introduction to Large Eddy Simulation of turbulent flows. Closure Strategies for Turbulent and Transitional Flows* (ed. BE Launder and ND Sandham), Cambridge University Press; 2000;8:267–298.
8. Kadota A, Suzuki K and Uijttewaals WSJ. *The shallow flow around a single groyne under submerged and emerged conditions*. Proceedings of the International Conference in Fluvial Hydraulics (River Flow), Lisboa, Portugal; 2006;673–682.
9. Labeur RJ. *Finite element modelling of transport and non-hydrostatic flow in environmental fluid mechanics*. PhD thesis, Delft University of Technology. 2009.
10. Mittal R and Iaccarino G. Immersed Boundary Methods. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2005;37:239–61.
11. Schnauder I, Sukhodolov A, Uijttewaals WSJ and Labeur RJ. *Field experiments and numerical modelling on shallow mixing layers at a confluence of two parallel streams*. Proceedings of the International Conference in Fluvial Hydraulics (River Flow), Izmir, Turkey; 2008;883–892.

12. Talstra H, Uijttewaal WSJ and Stelling GS. *3D LES computations of a shallow lateral expansion using an immersed boundary method*. Proceedings of the International Conference on Hydrosience and Engineering (ICHE), Philadelphia, USA; 2006.

13. W van Balen. *Large-scale coherent structures in turbulent shallow flows*. Master's thesis, Delft University of Technology; 2005.

14. BC van Prooijen and Uijttewaal WSJ. The relevance of a back-scatter model for depth-averaged flow simulation. *Flow Turbulence Combust.* 2009;82:73–91.

Об авторах:

Проценко Софья Владимировна, доцент кафедры математики, научный сотрудник, Таганрогский институт им. А. П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (347936, РФ, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), кандидат физико-математических наук, [ORCID](#), rab5555@rambler.ru

Проценко Елена Анатольевна, доцент кафедры математики, ведущий научный сотрудник, Таганрогский институт им. А. П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (347936, РФ, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), кандидат физико-математических наук, [ORCID](#), eapros@rambler.ru

Заявленный вклад соавторов:

С.В. Проценко — проведение расчетов, формулирование выводов, подготовка текста, оформление научной статьи, работа с источниками, оформление графических материалов. Е.А. Проценко — формирование основной концепции, цели и задачи исследования, анализ результатов исследований, корректировка выводов, доработка текста.

Поступила в редакцию 03.04.2023.

Поступила после рецензирования 18.05.2023.

Принята к публикации 19.05.2023.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Sofia V Protsenko, Associate Professor of the Department of Mathematics, Researcher, Taganrog Institute named after A. P. Chekhov (branch) of RSUE (48, Initiative St., Taganrog, 347936, RF), PhD (Physical and Mathematical Sciences), [ORCID](#), rab5555@rambler.ru

Elena A Protsenko, Associate Professor of the Mathematics Department, Leading Researcher, Taganrog Institute named after A. P. Chekhov (branch) of RSUE (48, Initiative St., Taganrog, 347936, RF), PhD (Physical and Mathematical Sciences), [ORCID](#), eapros@rambler.ru

Claimed contributorship:

SV Protsenko: making calculations, drawing conclusions, text preparation, working with sources, making graphic materials. EA Protsenko: basic concept formulation, research objectives and tasks computational analysis, conclusions correction, text revision.

Received 03.04.2023.

Revised 18.05.2023.

Accepted 19.05.2023.

Conflict of interest statement

The authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELING



УДК 519.872.6

Обзорная статья

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-60-72>


Моделирование движения автомобильного транспорта с использованием макро- и микроскопических моделей

М.А. Трапезникова , А.А. Чечина , Н.Г. Чурбанова

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Российская Федерация, г. Москва, Миусская пл., 4

nataimamod@mail.ru

Аннотация

Для эффективного регулирования дорожного движения на магистралях и сетях современных мегаполисов необходимо внедрение Интеллектуальных транспортных систем, включающих в себя множество инновационных решений, в частности, математические модели описания динамики транспортных потоков.

Статья кратко описывает современное состояние транспортных систем и их развитие: от простейших макроскопических и микроскопических моделей, ставших классическими, до современных разработок.

Особое внимание уделяется разработанным авторами статьи оригинальным многополосным моделям в рамках обоих подходов. Макроскопическая модель основана на квазигазодинамическом подходе, а микроскопическая использует идеологию клеточных автоматов и является обобщением модели Нагеля-Шрекенберга на многополосный случай.

Кратко описывается различие в способе представления и математическом аппарате для макроскопического и микроскопического описания транспортных потоков. Далее следует обзор основных моделей на разных этапах их развития, принадлежащих зарубежным и российским авторам.

Рассматривается трехфазная теория Бориса Кернера и модели, построенные в рамках этой теории.

Приводятся примеры современного программного обеспечения для транспортного моделирования.

Кратко описывается оригинальная квазигазодинамическая модель транспортных потоков, использующая приближение сплошной среды и построенная по аналогии с известной моделью газовой динамики. Благодаря введению скорости перестроения модель обобщена на многополосный случай.

Описывается оригинальная микроскопическая модель, основанная на теории клеточных автоматов, которая является обобщением модели Нагеля-Шрекенберга на многополосный случай. Модель получила дальнейшее развитие путем учета различных водительских стратегий и поведенческих аспектов.

В статье представлен краткий обзор состояния в области математического моделирования транспортных потоков, а также представлены оригинальные макроскопическая и микроскопическая модели, разработанные авторами для случая многополосного движения.

Ключевые слова: математическое моделирование, транспортные потоки, микроскопические и макроскопические модели, клеточные автоматы, многополосное движение.

Для цитирования. Трапезникова М.А., Чечина А.А., Чурбанова Н.Г. Моделирование движения автомобильного транспорта с использованием макро- и микроскопических моделей. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):60–72. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-60-72>

Simulation of Vehicular Traffic using Macro- and Microscopic Models

Marina A Trapeznikova , Antonina A Chechina , Natalya G Churbanova  

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, 4, Miusskaya Sq., Moscow, Russian Federation

✉ nataimamod@mail.ru

Abstract

To effectively regulate traffic on highways and networks of modern megacities, it is necessary to introduce Intelligent Transport Systems, which include many innovative solutions, in particular, mathematical models for describing the dynamics of traffic flows.

The article is devoted to a brief description of the current state in this area in its development — from the simplest macroscopic and microscopic models that have become classic to modern developments.

Special attention is paid to the original multilane models developed by the authors of the article within both approaches. The macroscopic model is based on the quasigasdynamic approach, while the microscopic one uses the ideology of cellular automata and constitutes a generalization of the Nagel-Schreckenberg model for the multilane case.

The difference in the representation method and the mathematical apparatus for the macroscopic and microscopic description of traffic flows is briefly described, followed by the review of the main models at different stages of their development, presented by foreign and Russian authors.

Special attention is paid to the three-phase theory of Boris Kerner and models built in the framework of this theory.

Examples of modern software for traffic modeling are given.

The original quasigasdynamic model of traffic flows, which uses the continuum approximation and is constructed by analogy with the well-known model of gas dynamics, is briefly described. Due to the introduction of the lateral speed, the model is generalized to the multilane case.

An original microscopic model based on the cellular automata theory and representing a generalization of Nagel-Schreckenberg model for the multilane case is described. The model has been further developed by taking into account various driving strategies and behavioral aspects.

The article presents a brief overview of the state of the art in the field of mathematical modeling of traffic flows, as well as original macroscopic and microscopic models developed by the authors for the case of multilane traffic.

Keywords: mathematical modeling, traffic flows, microscopic and macroscopic models, cellular automata, multilane traffic.

For citation. Trapeznikova MA, Chechina AA, Churbanova NG. Simulation of vehicular traffic using macro- and microscopic models. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):60–72. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-60-72>

Мировой опыт показывает, что в крупных городах необходимо внедрение Интеллектуальной транспортной системы (ИТС) для эффективного строительства новых транспортных сетей со сложной многоуровневой структурой, а также для оперативного регулирования на них дорожного движения. ИТС представляет собой совокупность систем, основанных на информационных, коммуникационных и управленческих технологиях, встроенных в транспортные средства и дорожную инфраструктуру. Она сочетает в себе множество инновационных решений: от математических моделей и методов описания трафика до систем поддержки принятия решений по управлению трафиком, не говоря уже о технических и инженерных аспектах.

Предлагаемая статья посвящена краткому описанию классических и современных тенденций в области математического моделирования автотранспортных потоков. Рассматриваются два основных направления в этой области: макроскопические и микроскопические модели.

Приводится также обзор готовых программных средств для моделирования потоков автомобильного транспорта.

Отдельное внимание уделяется разработанным авторами статьи оригинальным многополосным моделям в рамках обоих подходов. Макроскопическая модель рассматривает транспортный поток как движение сжимаемого газа и использует идеологию кинетически-согласованных разностных схем и квазигазодинамической (КГД) системы уравнений [1]. В последнее время появилась современная вычислительная техника сверхвысокой производительности и значительно возросла популярность микроскопических моделей. Однако, благодаря своей экономичности, и макроскопические модели не теряют актуальности при определении основных характеристик дорожного движения, необходимых для транспортного планирования.

Оригинальная микроскопическая модель основана на теории клеточных автоматов (*Cellular Automata* — CA), адаптированной к моделированию потоков транспорта на многополосных магистралях и основных элементах улично-дорожной сети (УДС) [2]. Этот подход позволяет учитывать многие технические параметры автомобилей и особенности поведения водителей. Такие модели могут включать подробное описание движения автомобилей на перекрестках и в местах сужения дорог, обгона и перестроения, обеспечивая высокую степень соответствия модели реальной ситуации.

Оба предложенных подхода обладают внутренним параллелизмом и подходят для быстрых и эффективных расчетов на суперкомпьютерах даже для моделирования крупномасштабных дорожных сетей с несколькими миллионами транспортных средств.

В настоящее время теория транспортных потоков является самостоятельным научным направлением, в основе которого — так называемая физика транспортных потоков — математическое и имитационное моделирование. Математические модели трафика используются как в исследовательской, так и в практической деятельности для обоснования планирования и принятия управленческих решений в транспортной отрасли.

Моделирование автотранспортных потоков начало развиваться в США с 30-х годов 20-го столетия. Но в связи с возрастающим повсюду объемом транспортных перевозок, а также все более доступной компьютеризацией, в 1990-е годы эта область стала притягивать все больше внимания. Возникло два основных направления этого развития: макроскопическое моделирование и микроскопическое моделирование, которые различаются по способу представления реальной действительности, и по своему математическому описанию.

В первом случае движение транспорта использует приближение сплошной среды и рассматривает поток автомобилей аналогично потоку слабосжимаемого газа. Основные исследуемые величины: поле плотности (количество автомобилей на единицу длины дороги и на дорожную полосу) и поле средней скорости, а также поток (количество автомобилей, проехавших заданную точку на дороге в единицу времени). Модель состоит из системы дифференциальных уравнений в частных производных и решается хорошо известными конечно-разностными методами.

В случае микроскопического моделирования предметом исследования является движение одного отдельно взятого автомобиля и его взаимодействие с остальными участниками движения, реакция на окружающую обстановку и на её возможные изменения этой обстановки.

Такие модели описываются, как правило, обыкновенными дифференциальными уравнениями, для решения которых также существуют известные численные методы, например, метод Рунге-Кутты второго или четвертого порядков.

Макроскопическими моделями удобно описывать достаточно плотный поток автотранспорта, когда все водители вынуждены придерживаться одинаковых стратегий и ехать приблизительно с одной скоростью. С помощью таких моделей обычно исследуют общие закономерности движения транспорта. Микроскопические модели позволяют более детально рассматривать движение транспортной единицы «водитель-автомобиль». При этом учитываются не только характеристики самого автомобиля, но и поведенческие особенности водителя, а возможно даже и его психологический тип. С помощью таких моделей можно описывать не только разреженный поток, но и плотный поток автотранспорта благодаря сегодняшним вычислительным возможностям.

Одна из первых простейших моделей макроскопического типа — модель Лайтхилла-Уизема-Ричардса (LWR) [3]. Она характеризуется единственным динамическим уравнением, являющимся следствием закона сохранения числа автомобилей:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dQ_e(\rho)}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,$$

где ρ — плотность автомобильного потока; Q_e — равновесный поток.

В данной модели предполагается, что поток или средняя скорость всегда находятся в локальном равновесии относительно действительной плотности и мгновенно меняются вместе с ней, то есть возникают неоправданно высокие ускорения: $V = V_e(\rho)$, $Q = Q_e(\rho)$. Модели такого типа, ввиду отсутствия конечного ускорения, не могут описывать рост волн трафика и неустойчивость транспортного потока.

На следующем этапе появились модели, включающие в себя помимо уравнения неразрывности второе динамическое уравнение — уравнение ускорения, которое описывает локальное ускорение как функцию от плотности, скорости, их градиентов и других возможных внешних факторов. Такой класс моделей известен как класс *моделей второго порядка*, в отличие от моделей LWR, которые называются *моделями первого порядка*.

В книге [4] приводится модель Пэйна [5], для которой уравнение ускорения имеет вид:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_e(\rho) - V}{\tau} + \frac{V'_e(\rho)}{2\rho\tau} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

с постоянным временем релаксации τ и модель Кернера-Конхойзера [6]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_e(\rho) - V}{\tau} - \frac{c_0^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

Здесь вводится аналог звуковой скорости $\pm c_0$ и динамическая вязкость η . Эта модель чисто феноменологическая.

Модели Пэйна и многим впоследствии предложенным моделям второго порядка, в том числе с диффузионными поправками, присущи некоторые недостатки. В частности, при сильных пространственных неоднородностях начальных условий могут возникать отрицательные значения скоростей, плотности, превышающие максимально допустимые, а также, согласно этим моделям, на движение автомобиля заметное влияние оказывают автомобили, находящиеся сзади, что в случае одной полосы нереалистично. В дальнейшем много усилий было потра-

чено на то, чтобы сделать макромодели анизотропными, то есть в соответствии с этими моделями автомобили должны реагировать только на ситуацию перед ними. Наиболее известные модели, решающие перечисленные проблемы, — модели Ава-Раскла [7] и Занга [8].

В рамках микроскопического подхода наиболее простой явилась модель следования за лидером [9], которая могла воспроизводить только основные детали и особенности потоков транспорта. Простейшим представителем этого класса является непрерывная по времени модель оптимальной скорости:

$$\dot{v} = \frac{v_{\text{opt}}(s) - v}{\tau},$$

которая описывает адаптацию действительной скорости автомобиля v к оптимальной скорости $v_{\text{opt}}(s)$ за временной масштаб, задаваемый *временем адаптации* τ . Ее аналогом является дискретная по времени модель Ньюэлла [10]:

$$v_{\alpha}(t + \Delta t) = v_{\text{opt}}(s(t)) = \min\left(v_0, \frac{s}{\Delta t}\right),$$

$$x_{\alpha}(t + \Delta t) = x_{\alpha}(t) + \frac{v_{\alpha}(t) + v_{\alpha}(t + \Delta t)}{2} \Delta t.$$

Еще одним интересным примером простейшей модели следования за лидером является модель Пайпса [11], основанная на правиле безопасного вождения, разработанном в Калифорнии: «правило для следования за впереди идущим транспортным средством на безопасном расстоянии состоит в том, чтобы держать расстояние между вашим автомобилем и автомобилем впереди вас не меньше, чем наименьшая длина автомобиля на каждые десять миль в час от скорости, с которой вы путешествуете». В переводе на математический язык эту модель можно сформулировать следующим образом:

$$s_i(t)_{\min} = \frac{l_i}{0,44} \dot{x}_i(t) + l_{i-1},$$

здесь $s_i(t)$ — зазор между текущим и впереди идущим автомобилями, а l_i — длина i -ого автомобиля.

Дальнейшим развитием моделей следования за лидером явились модели разумного водителя (Intelligent Driver Model, IDM). Непрерывная по времени IDM — это самая простая полная и безаварийная модель, дающая реалистичные профили ускорения и правдоподобное поведение во всех однополосных транспортных ситуациях. Наиболее известной моделью этого класса является модель Трайбера [12], которая демонстрирует реалистичное поведение при разгоне и торможении.

Отдельно следует отметить микроскопические модели Пригожина, основанные на кинетической теории Больцмана [13, 14]. В модели вводится функция типа функции распределения в кинетической теории $f(x, u, t)$, которая обозначает число автомобилей, находящихся в момент времени t в точке пространства между x и $x+dx$ и имеющих скорость между u и $u+du$. Вводится также понятие желаемого распределения, которое является идеализацией той цели, к которой стремится данный транспортный поток. Реальное и желаемое распределения могут различаться по различным многим причинам: дорожные условия, погодные условия, взаимодействие с другими автомобилями и т. д. Сами по себе эти причины могут также меняться со временем и, следовательно, реальное распределение будет приближаться к желаемому за какое-то время релаксации. На основе этих предположений для реального распределения записывается уравнение типа уравнения Больцмана:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{rel}} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{int}},$$

где $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{rel}}$ — переход реального распределения к желаемому при отсутствии взаимодействия автомобилей, а изменение реального распределения, возникающее из-за взаимодействий между автомобилями, — $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{int}}$.

Члены в правой части могут задаваться различными способами, функция распределения также может иметь более сложный вид. Благодаря этому существует достаточное число разновидностей данной модели: например, в модели Павери-Фонтана [15] в дополнение к реальной вводится «желаемая» скорость данного автомобиля. Подход Пригожина был впоследствии развит в работах Хельбинга и др. [16, 17].

В дальнейшем модели обоих макро- и микроскопического типов развивались в направлении учета человеческого фактора. Появились модели с безопасной скоростью движения [18], неравновесные модели с реалистичным ускорением [19], модели, описывающие движение на сложных дорожных развязках [20, 21], описывающие смешанные потоки, состоящие из неоднородных транспортных средств [22, 23] и т. д.

Современные исследования динамики транспортных потоков идут, в основном, по пути усложнения уже существующих моделей. Можно привести, например, публикации [24–26], посвященные макроскопическим моделям гидродинамического типа.

В области микроскопического моделирования в последнее время быстро развивается отдельное специфическое направление, использующее теорию клеточных автоматов (Cellular Automata — CA). Эти модели можно разделить на две группы: детерминистические и стохастические. Примером детерминистической модели является Правило 184 Вольфрама. Данная модель относится к классу элементарных клеточных автоматов. Это группа из $256 (2^8)$ одномерных моделей с числом соседей 3, их можно найти в Атласе Вольфрама [27].

Одна из первых реалистичных стохастических моделей транспортных потоков — широко известная модель Нагеля-Шрекенберга [28]. Эта модель требует подробного рассмотрения, поскольку на ней основаны многие современные модели, развиваемые исследователями во всем мире.

Трасса в модели Нагеля-Шрекенберга представляется в виде одномерной решетки, каждая ячейка которой может быть либо пустой, либо содержать частицу, обозначающую транспортное средство. Частицы перемещаются из одной ячейки в другую (свободную) в одном направлении. В случае однопослонного движения они не могут обгонять друг друга. Вся система — пространство, время, скорость — дискретна. Скорость показывает, на сколько ячеек автомобиль перемещается за один шаг по времени. Ускорение происходит мгновенно между шагами. На каждом шаге по времени происходит обновление состояния системы по определённым правилам:

1. Ускорение. Скорость автомобиля i увеличивается на единицу, если максимальная разрешенная скорость не достигнута: $V_i \rightarrow \min(V_i + 1, V_{\max})$.

2. Торможение. Скорость автомобиля уменьшается на единицу, если есть угроза столкновения с впереди идущим автомобилем: $V_i \rightarrow \min(V_i, D_i - 1)$, где D_i — расстояние до впереди идущего автомобиля.

3. Случайные возмущения. Если скорость автомобиля положительна, то она может быть уменьшена на единицу с некоторой вероятностью: $V_i \rightarrow \max(V_i - 1, 0)$ с вероятностью p .

4. Движение. Каждый автомобиль продвигается вперед на количество ячеек, соответствующее его новой скорости после выполнения предыдущих шагов: $X_i \rightarrow X_i + V_i$.

Для упрощения записи считаем, что скорость и расстояние измеряются в ячейках, а время безразмерно. По этой причине величины можно складывать, вычитать и сравнивать друг с другом.

На сегодняшний день существуют более сложные и детальные СА модели. В статье [29] приведено интересное обобщение теории клеточных автоматов на случай морских перевозок в применении к морскому транспорту. В этом случае правила дискретизации по пространству дополняются правилами картографирования. Авторы статьи [30] исследуют пропускную способность автомагистрали с двумя въездами и одним промежуточным съездом между ними также с использованием модели клеточных автоматов. Целью исследований является максимизация пропускной способности системы путем установления оптимального потока для двух въездов. В работе [31] представлена надежная при численной реализации модель клеточных автоматов, ориентированная на то, чтобы точно воспроизводить замедление и ускорение в соответствии с реалистичными реакциями водителей, когда рассматриваются транспортные средства с различными возможностями замедления.

При помощи клеточных автоматов можно моделировать большие сети дорог. В качестве примера приведем модель, созданную А.П. Буслаевым [32] и коллегами в МАДИ. В основе их подхода — кольцевые структуры из клеточных автоматов с общими ячейками, за которые происходит конкуренция. Подобные структуры колец могут иметь различную топологию, движение по ним имитирует движение по УДС с перекрестками.

В начале 2000-х годов появилась альтернативная теория транспортных потоков, а именно была предложена трехфазная теория Бориса Кернера. Первые работы относятся к 2002-му году, однако, основные положения теории были сформулированы позже в книгах [33] и [34]. В отличие от прежних теорий, где рассматривались две основные фазы транспортных потоков (свободное движение и плотный поток), автор рассматривает существование трех фаз: свободный поток, синхронизованное движение и широкий движущийся кластер, то есть в плотном потоке выделяются две фазы. Это дает возможность предсказать и объяснить эмпирические свойства перехода от свободного к плотному потоку, а также особенности образующихся пространственно-временных структур трафика. Сам автор называет свою теорию эмпирической, качественной, основанной на данных наблюдений, что допускает создание различных математических моделей в рамках этой теории. Автором и другими исследователями были созданы модели на основе клеточных автоматов [35, 36]. В частности, в модели Кернера-Кленова [37, 38] для соответствия теории трех фаз вводятся понятия переускорения и расстояния синхронизации. Благодаря математическому описанию стохастического переускорения с задержкой и эффекта адаптации внутри синхронизованного потока, в разработанной модели переход от свободного к плотному потоку — это $F \rightarrow S$ переход (согласно теории трех фаз Кернера) в метастабильном свободном потоке, что наблюдается во всех эмпирических данных. Также Кернером и Кленовым была предложена детерминистическая модель [39]. В работах [40, 41] предложены варианты макроскопических моделей, реализующих трехфазную теорию.

Вообще, модели, соответствующие теории трех фаз Кернера, характеризуются способностью описывать неустойчивости, неизбежно возникающей в реальном трафике. Такие модели демонстрируют один из основных тезисов теории трех фаз: переходы между фазами от свободного потока к синхронизованному и от синхронизованного — к широким движущимся кластерам могут происходить под влиянием случайных процессов и при различных значениях потока, а не быть привязанными четко к конкретному его значению потока. Большинство существующих на сегодняшний день моделей не обладают этим свойством.

В настоящее время теория трёх фаз приобретает всё больше последователей, о чём свидетельствует множество публикаций, например, [42, 43]. В статье [44] представлена недавно модифицированная модель KKW (Kerner-Klenov-Wolf), включающая различные типы транспортных средств. Вводится переменная чувствительность водителя к колебаниям скорости. Делаются выводы о влиянии изменения скорости одного или нескольких транспортных средств на общую скорость потока при различной интенсивности начального потока.

Отечественные разработки в области транспортного моделирования соответствуют основным мировым тенденциям. Выше были упомянуты работы по сетям Буслаева, проводимые в МАДИ, там же исследуются стохастические модели, а также применение теории массового обслуживания для решения транспортных проблем. В МФТИ совместно с зарубежными коллегами активно ведутся исследования на основе теории трех фаз Кернера, развиваются модели клеточных автоматов [35, 37–39], модели гидродинамического типа [45, 46], имитационные модели, разрабатываются численные методы поиска равновесий в больших транспортных сетях [47]. Следует отметить работы коллектива авторов из МГУ им. М. В. Ломоносова [48, 49], посвященные вопросам организации дорожного движения и исследованию неустойчивости потоков на основе гидродинамических моделей. Решением задач оптимального управления транспортными потоками на УДС [50], в том числе с применением генетических алгоритмов, активно занимаются в ФИЦ «Информатика и управление» РАН. Двумерная квазигазодинамическая модель транспортных потоков и многополосная СА модель, разработанные в ИПИМ им. М. В. Келдыша РАН, представлены ниже.

На сегодняшний день существует огромное количество программных решений для транспортного моделирования. Пакеты, обзор которых дан в сборнике [51], продолжают развиваться. Наиболее известными среди коммерческих пакетов являются:

- PTV Vision Traffic Suite [52];
- Aimsun (TSS-Transport Simulation Systems) [53].

Имеется также свободное программное обеспечение с открытым исходным кодом, например:

- MATSim [54, 55];
- Eclipse SUMO [56, 57].

PTV Vision Traffic Suite включает продукты:

- PTV Visum (стратегическое планирование, расчет спроса на транспорт, анализ транспортной сети городов, мегаполисов, стран и регионов на основе макро моделирования);
- PTV Vissim (имитационное моделирование дорожного движения, проверка гипотез по организации дорожного движения);
- PTV Viswalk (имитационное моделирование пешеходных потоков, планирование массовых мероприятий, разработка эвакуационных планов);
- PTV Vistro (работа на сетевом уровне, учитывая сразу несколько видов пересечений — регулируемых и нерегулируемых, оптимизации режимов регулирования).

Aimsun в настоящее время превратился из микросимулятора в полностью интегрированное приложение для моделирования дорожного движения, которое объединяет прогноз спроса на поездки, макроскопические функции и мезоскопический-микроскопический гибридный симулятор.

Продукты PTV и Aimsun реализованы для операционной системы Windows.

MATSim основан на мультиагентном подходе для крупномасштабного транспортного моделирования, состоит из нескольких модулей, которые можно комбинировать или использовать по отдельности. Модули могут быть заменены пользовательскими реализациями.

SUMO является академической разработкой для моделирования транспортных систем, включающих автомобили, общественный транспорт и пешеходов. Программы основаны на микроскопическом подходе. В состав SUMO входит множество вспомогательных инструментов, которые автоматизируют основные задачи и позволяют осуществлять импорт сети, расчет маршрута, визуализацию, а также расчет выбросов загрязняющих веществ и расчет шума. SUMO можно дополнить настраиваемыми моделями и предоставить интерфейсы для удаленного управления моделированием. Отличительные черты SUMO — переносимость (portability) и расширяемость (extensibility). Разработаны версии пакета для ряда популярных операционных систем, в частности, для Linux.

Отметим, что существуют также программные пакеты для реализации концепции BIM, 3D моделирования и создания цифровых двойников в области комплексного проектирования дорог и транспортной инфраструктуры, в частности, продукты компании Bentley Systems [58], среди которых OpenRoads и OpenCities Planner.

Таким образом, в мире накоплен уже достаточно большой опыт по моделированию транспортных потоков, разработаны эффективные программные средства, которые становятся неотъемлемой частью как краткосрочного, так и долгосрочного транспортного планирования, закладывают основу интеллектуальных транспортных систем.

Как упоминалось выше, многие модели макроскопического типа описывают движение автотранспорта по аналогии с газодинамическим течением. Следовательно, основой моделей служит система уравнений газовой динамики. Авторами данной статьи некоторое время назад была разработана двумерная многополосная макроскопическая модель для описания транспортных потоков, построенная по аналогии с КГД системой уравнений [59]. КГД система была создана для описания газодинамических течений в широком диапазоне чисел Маха, в том числе хорошо зарекомендовала себя при моделировании существенно дозвуковых течений. Поэтому естественно было использовать ее при построении модели транспортных потоков в приближении сплошной среды. Уравнения

КГД системы, в отличие от традиционных газодинамических уравнений, содержат в правой части дополнительные диффузионные члены. В случае транспортных потоков их можно рассматривать как естественную вязкость, позволяющую сглаживать решения при больших градиентах и реализовывать численные алгоритмы сквозным счетом, без выделения особенностей.

Отличительной чертой многополосной модели является наличие в системе уравнения для «поперечной» компоненты скорости, которая имеет смысл скорости перестроения из полосы в полосу. Поэтому модель может быть использована для моделирования движения по трассе с учетом ее реальной геометрии. Многополосность и изменение числа полос учитывается путем задания конкретной вычислительной области, а не при помощи источников в правых частях уравнений. Подробное описание КГД модели транспортных потоков содержится в работах [1, 60, 61]. Система уравнений предложенной модели выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V) = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau_x}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho U^2 + P_x) - f_x + \frac{\partial}{\partial y}(\rho UV) \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau_y}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y}(\rho V^2 + P_y) - f_y + \frac{\partial}{\partial x}(\rho UV) \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U^2 + P_x) - f_x + \frac{\partial}{\partial y}(\rho UV) = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau_x}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho U^3 + 3P_x U) - 3f_x U \right) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau_y}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y}(\rho UV^2 + P_y U) - f_y U \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau_x}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y}(\rho U^2 V + P_y V) - f_y V \right) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau_y}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho U^2 V + P_x V) - f_x V \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V^2 + P_y) - f_y + \frac{\partial}{\partial x}(\rho UV) = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau_x}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho U^2 V + P_x V) - f_x V \right) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau_y}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y}(\rho V^3 + 3P_y V) - 3f_y V \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau_x}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y}(\rho V^2 U + P_y U) - f_y U \right) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau_y}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho V^2 U + P_x U) - f_x U \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь использованы следующие обозначения: ρ — плотность транспортного потока; U — продольная, вдоль дороги, компонента скорости; V — поперечная компонента скорости (скорость перестроения); $P = \lambda \rho^B / \beta$ — аналог давления; $f = a \cdot \rho$ — сила ускорения или замедления, где $a = (U_{eq} - U) / T$ — ускорение.

Равновесная продольная скорость вычисляется согласно параболической фундаментальной диаграмме:

$$U_{eq} = U_{free}(1 - \rho / \rho_{jam}) / T.$$

$T = t_0(1 + r\rho / (\rho_{jam} - r\rho))$ можно рассматривать как время релаксации. Уравнения также дополняет ряд феноменологических констант.

Приведенная система содержит уравнение для поперечной скорости, аналогичное уравнению продольной скорости. Однако проведенные тестовые расчеты показали, что более удобным является использование вместо дифференциального уравнения (3) алгебраического уравнения:

$$V_1 = k_u \rho \frac{\partial U}{\partial y} - k_\rho U \frac{\partial \rho}{\partial y} + k_{des} \frac{U^2}{(x_{des} - x)^2} (y_{des} - y), \quad (4)$$

где первое слагаемое соответствует желанию водителя ехать с большей скоростью, второе — желанию ехать по полосе с меньшей плотностью и третье — достичь определенной цели. Здесь k_u, k_ρ, k_{des} — константы; (x_{des}, y_{des}) — координаты цели водителя. Использование уравнения (4) упрощает процесс решения и повышает устойчивость разностной схемы.

Следует отметить, что в некоторых случаях неоднородной, но не очень сложной трассы качественно верные результаты можно получить при помощи одномерной КГД модели [60, 62]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau}{2} \frac{\partial \left(\frac{Q^2}{\rho} + P \right)}{\partial x} + F_\rho, \quad (5)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{Q^2}{\rho} + P \right] = f + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau}{2} \frac{\partial \left(\frac{Q^3}{\rho^2} + P \frac{Q}{\rho} \right)}{\partial x} + F_U. \quad (6)$$

В этих уравнениях, записанных в консервативной форме, транспортный поток: $Q = \rho \cdot U$. Источниковые члены в правой части F_p и F_U равны нулю на однородной дороге и не равны нулю, если есть въезды или съезды с основной дороги или есть изменение числа полос.

Предлагаемые модели численно реализуются с помощью конечно-разностных схем. Система аппроксимируется явными разностными схемами второго порядка по пространству. Отметим, что структура явного вычислительного алгоритма хорошо ложится на архитектуру многопроцессорных вычислительных систем с распределённой памятью и при необходимости выполнения большого объема вычислений может быть распараллелена с достаточно высокой эффективностью [62, 63].

Вторая модель, предложенная авторами ранее и являющаяся перспективной для реализации в интерактивной программе, — это многополосная модель, использующая идеологию клеточных автоматов. Подробное описание этой модели изложено в работах [2, 60, 64]. Здесь опишем ее кратко.

Расчетная область представляет собой двумерную решетку. Количество ячеек в поперечном направлении соответствует количеству полос на рассматриваемом участке магистрали, а ширина ячейки равна ширине реальной дорожной полосы (рис. 1).

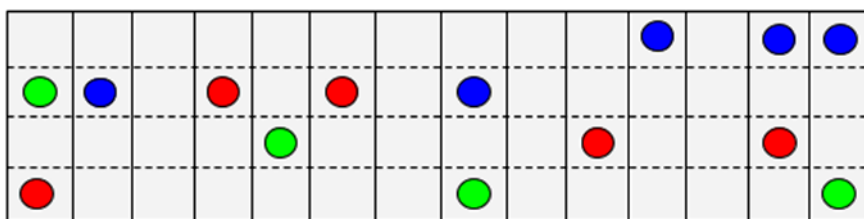


Рис. 1. Расчетная область в модели СА

Количество ячеек вдоль дороги зависит от конкретной задачи с учетом того, что продольный размер ячейки равен средней длине автомобиля плюс ширина зазора между автомобилями при максимальной плотности потока, то есть, в «пробке». В литературе приводится длина 7,5 м как стандартная величина ячейки для легковых автомобилей. Время в таких моделях дискретно, система обновляется на каждом шаге по времени. При стандартных расчетах этот шаг равен 1 с, хотя в более развитых и реалистичных моделях эта величина может меняться. В каждый момент времени ячейки решетки могут находиться в одном из двух состояний: ячейка либо занята (что соответствует присутствию в ней автомобиля), либо пуста. На рис. 1 показано состояние расчетной области в некоторый момент времени. Разный цвет элементов движения соответствует разным выбранным целям. В следующий момент времени происходит обновление состояния ячеек в два этапа по определенным правилам.

На первом этапе каждый водитель проверяет, хочет ли он перестроиться в соседнюю полосу и имеет ли для этого возможность. Он перестраивается, если:

- это необходимо для достижения его цели (например, подъехать к выезду с дороги) или необходимо объехать препятствие;

- он получает преимущество после перестроения — едет с большей скоростью или с меньшей плотностью;

- для перестроения есть возможность — перестроение разрешено и соседняя ячейка пуста;

- выполнены условия безопасности.

После выбранного решения относительно перестроения и выполненного в соответствии с этим действия происходит движение вперед по выбранной полосе по правилам однополосного движения Нагеля-Шрекенберга [28], приведённым в разделе 1 данной статьи.

Следует отметить, что здесь описана первоначальная, простейшая версия стратегии перестроения. В более сложных модификациях модели [65] правила перестроения зависят от типа дорожного элемента (X-образный перекрёсток, T-образный перекрёсток, разворот, участок с сужением/расширением и т. д.), дорожных знаков и разметок. Учитываются также различные водительские стратегии и поведенческие аспекты. В модель введены понятия «агрессивный», «осторожный», «вежливый» водитель. Процентные соотношения того или иного типа водителей могут меняться в процессе расчета. Также разработан алгоритм «медленный старт».

Для реализации модели разработан программный комплекс САМ-2D [66], имеющий помимо вычислительных модулей интегрированный web-интерфейс и модуль визуализации. Параллельная версия предназначена для расчётов дорожных сетей на CPU многопроцессорных систем с использованием технологии MPI [62, 63].

В статье представлен обзор работ в области моделирования транспортных потоков, охватывающий широкий спектр подходов — макро- и микроскопические модели, а также модели клеточных автоматов. Отдельное внимание уделено оригинальным разработкам авторов статьи как в области макроскопического, так и в области микроскопического (а именно, клеточных автоматов) моделирования. Обе разработки имеют свои преимущества, такие, например, как возможность моделировать движение автомобильного транспорта с учётом реальной гео-

метрии дороги, даже в случае макромоделирования. Модели неоднократно апробированны в расчётах и, кроме того, допускают эффективную реализацию на суперкомпьютерах, так как обладают внутренним параллелизмом. Последнее свойство является особенным преимуществом в условиях моделирования движения на транспортных сетях многомиллионных мегаполисов.

Список литературы

1. Сухинова А.Б., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н. и др. Двумерная макроскопическая модель транспортных потоков. *Математическое моделирование*. 2009;21(2):118–126.
2. Трапезникова М.А., Фурманов И.Р., Чурбанова Н.Г. и др. Моделирование многополосного движения автотранспорта на основе теории клеточных автоматов. *Математическое моделирование*. 2011;23(6):133–146.
3. Lighthill M.J., Witham G.B. On kinematic waves (Part II): A theory of traffic flow on long crowded roads. *In Proceedings of Royal Society. Ser. A*. 1955;229:317–345.
4. Treiber M., Kesting A. *Traffic flow dynamics. Data, models and simulation*. Berlin-Heidelberg: Springer; 2013. 503 p.
5. Payne H. Models of freeway traffic and control. In: Bekey, G.A. (ed.) *Mathematical Models of Public Systems*. Simulation Council, La Jolla, CA. 1971;1:51–61.
6. Kerner B., Konhäuser P. Structure and parameters of clusters in traffic flow. *Physical Review E*. 1994;50:54–83.
7. Aw A., Rascle M. Resurrection of “second order models” of traffic flow. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2000;60:916–938.
8. Zhang H.M. A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior. *Transportation Research. B*. 2002;36(3):275–290.
9. Gazis D.C., Herman R., Rothery R.W. Nonlinear follow-the-leader models of traffic flow. *Operations Research*. 1961;9(4):545–567.
10. Newell G.F. A simplified car-following theory: a lower order model. *Transportation Research. Part B: Methodological*. 2002;36:195–205.
11. Pipes L.A. An operational analysis of traffic dynamics. *Journal of Applied Physics*. 1954;24(3):274–281.
12. Treiber M., Hennecke A., Helbing D. Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations. *Physical Review E*. 2000;62(2):1805–1824.
13. Prigogine I., Andrews, F.C. A Boltzmann like approach for traffic flow. *Operations Research*. 1960;8(6):789–797.
14. Prigogine I., Herman R. *Kinetic Theory of Vehicular Traffic*. Amsterdam, Elsevier; 1971.
15. Paveri-Fontana S.L. On Boltzmann like treatments for traffic flow. *Transportation Research*. 1975;9:225–235.
16. Helbing D., Treiber M. Enskog equations for traffic flow evaluated up to Navier-Stokes order. *Granular Matter*. 1998;1:21–31.
17. Treiber M., Hennecke A., Helbing D. Derivation, properties, and simulation of a gas-kinetic-based, non-local traffic model. *Physical Review E*. 1999;59(1):239–253.
18. Gipps P.G. A behavioural car-following model for computer simulation. *Transportation Research. Part B: Methodological*. 1981;15(2):105–111.
19. Kesting A., Treiber M., Helbing D. Enhanced Intelligent Driver Model to access the impact of driving strategies on traffic capacity simulations. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. 2010;368:4585–4605.
20. Su Z., Liu S., Deng W., et al. Transportation dynamics on networks of heterogeneous mobile agents. *Physics Letters A*, 2019;523:1379–1386.
21. Yao W., Jia N., Zhong S., et al. Best response game of traffic on road network of non-signalized intersections. *Physica A: Statistical mechanics and its applications*. 2018;490:P.386–401.
22. Dong P., Wang X., Yun L., et al. Research on the characteristics of mixed traffic flow based on an improved bicycle model simulation. *Simulation, SAGE Publications*. 2018;94(5):451–462.
23. Zeng J.W., Qian Y.S., Wang H., et al. Modeling and simulation of traffic flow under different combination setting of taxi stop and bus stop. *Modern Physics. Letters B*. 2018;32(25):1850301.
24. Zhou J., Zhang H.L., Wang C.P., et al. A new lattice model for single-lane traffic flow with the consideration of driver’s memory during a period of time. *International Journal of Modern Physics C*. 2017;28(7):1750086.
25. Jin D., Zhou J., Zhang H.L., et al. Lattice hydrodynamic model for traffic flow on curved road with passing. *Nonlinear Dynamics*. 2017;89(1):107–124.
26. Kaur R., Sharma S. Analysis of driver’s characteristics on a curved road in lattice model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2017;471:59–67.
27. The Wolfram atlas of simple programs [Электронный ресурс]. URL: <http://atlas.wolfram.com/> (дата обращения: 18.05.2023).
28. Nagel K., Schreckenberg M. A cellular automaton model for freeway traffic. *Journal de Physique I France*. 1992;2221–2229.
29. Qi L., Zheng Z., Gang L. A cellular automation model for ship traffic flow in waterways. *Physica A: Statistical Mechanics And Its Applications*. 2017;471:705–717.
30. Chen J., Jiang R., Lin L. Assigning on ramp flows to maximize capacity of highway with two on-ramps and one off-ramp in between. *Physica A: Statistical Mechanics And Its Applications*. 2017;465:347–357.
31. Guzman H.A., Larraga M.E., Alvarez-Icaza L., et al. A cellular automata model for traffic flow based on kinetics theory, vehicles capabilities and driver reactions. *Physica A: Statistical Mechanics And Its Applications*. 2018;491:528–548.

32. Бугаев А.С., Буслаев А.П., Козлов В.В. и др. Обобщенная транспортно-логистическая модель как класс динамических систем. *Математическое моделирование*. 2015;27(12):65–87.
33. Kerner B.S. *The Physics of Traffic*. Berlin: Springer; 2004.
34. Kerner B.S. *Introduction to Modern Traffic Flow Theory and Control*. Berlin: Springer; 2009.
35. Kerner B.S., Klenov S.L., Wolf D.E. Cellular automata approach to three-phase traffic theory. *Journal Physics A: Mathematical and General*. 2002;35:9971–10013.
36. Jiang R., Wu Q.S. Spatial-temporal patterns at an isolated on-ramp in a new cellular automata model based on three-phase traffic theory. *Journal Physics A: Mathematical and General*. 2004;37:8197–8213.
37. Kerner B., Klenov S., Schreckenberg M. Simple cellular automaton model for traffic breakdown, highway capacity, and synchronized flow. *Physical Review E*. 2011;84:046110.
38. Kerner B., Klenov S., Hermanns G., et al. Effect of driver over-acceleration on traffic breakdown in three-phase cellular automaton traffic flow models. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2013;392(18):4083–4105.
39. Kerner B.S., Klenov S.L. Deterministic microscopic three-phase traffic flow models. *Journal Physics A: Mathematical and General*. 2006;39:1775.
40. Hoogendoorn S., Van Lint J.W.C., Knoop V.L. *Macroscopic modeling framework unifying kinematic wave modeling and three-phase traffic theory*. Trans. Res. Rec. 2008;2088(1):102–108.
41. Laval J.A. *Lane-changing in traffic streams*. In: Traffic and Granular Flow' 05. Proc. of the International Workshop, ed. by A. Schadschneider, et al. Berlin: Springer; 2007. pp. 521–526.
42. Tian J., et al. Improved 2D intelligent driver model in the framework of three-phase traffic theory simulating synchronized flow and concave growth pattern of traffic oscillations. *Transportation Research*. 2016;41(F):55–65.
43. Xue Y., et al. Long-range correlations in vehicular traffic flow studied in the framework of Kerner's three-phase theory based on rescaled range analysis. *Communications in Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. 2015;22:285–296.
44. Qian Y.S., Feng X., Zeng J.W. A cellular automata traffic flow model for three phase theory. *Physica A: Statistical Mechanics And Its Applications*. 2017;479:509–52.
45. Морозов И.И., Гасников А.В., Тарасов В.Н. и др. Численное исследование транспортных потоков на основе гидродинамических моделей. *Компьютерные исследования и моделирование*. 2011;3(4): 389–412.
46. Kholodov Y., Alekseenko A., Kazorin V., et al. Generalization second order macroscopic traffic models via relative velocity of the congestion propagation. *Mathematics*. 2021;9(16):2001.
47. Kubentayeva M., Gasnikov A. Finding equilibria in the traffic assignment problem with primal-dual gradient methods for stable dynamics model and Beckmann model. *Mathematics*. 2021;9(11):1217.
48. Киселев А.Б., Кокорева А.В., Никитин В.Ф. и др. *Математическое моделирование движения автотранспортных потоков методами механики сплошной среды. Исследование влияния искусственных дорожных неровностей на пропускную способность участка дороги. Современные проблемы математики и механики*. Прикладные исследования, под ред. В.В. Александрова и В.Б. Кудрявцева. Москва: Изд-во МГУ. 2009;1:311–322.
49. Smirnov N., Kiselev A., Nikitin V., et al. Hydrodynamic traffic flow models and its application to studying traffic control effectiveness. *WSEAS Transactions on Fluid Mechanics*. 2014;9:178–186.
50. Дивеев А.И., Софронова Е.А. Задача оптимального управления потоками транспорта в сети городских дорог. *Вопросы теории безопасности и устойчивости*. 2018;20:89–99.
51. *Fundamentals of Traffic Simulation*. In: International Series in Operations Research & Management Science. J. Barcelo (Ed.). Springer. 2010;145. 452 p.
52. PTV Vision Traffic Suite [Электронный ресурс]. URL: <https://ptv-vision.ru/> (дата обращения: 18.05.2023).
53. Aimsun: Simulation and AI for future mobility [Электронный ресурс]. URL: <https://www.aimsun.com/> (дата обращения: 18.05.2023).
54. MATSim: Multi-Agent Transport Simulation [Электронный ресурс]. URL: <https://www.matsim.org/> (дата обращения: 18.05.2023).
55. Horni A., Nagel K., Axhausen K.W. (Eds.) *The Multi-Agent Transport Simulation MATSim*. London: Ubiquity Press; 2016.
56. SUMO: Simulation of Urban MObility [Электронный ресурс]. URL: <https://www.eclipse.org/sumo/> (дата обращения: 18.05.2023).
57. Lopez P.A., et al. *Microscopic Traffic Simulation using SUMO*. In: 21st Int. Conf. on Intelligent Transportation Systems (ITSC). 2018:2575–2582.
58. Bentley Systems [Электронный ресурс]. URL: <https://www.bentley.com> (дата обращения: 18.05.2023).
59. Четверушкин Б.Н. *Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений*. Москва: МАКС Пресс; 2004. 332 с.
60. Churbanova N.G.; Chechina A.A.; Trapeznikova M.A. Simulation of traffic flows on road segments using cellular automata theory and quasigasdynamic approach. *Mathematica Montisnigri*. 2019;XLVI:72–90.
61. Трапезникова М.А., Чечина А.А., Чурбанова Н.Г. и др. Математическое моделирование потоков автотранспорта на основе макро- и микроскопических подходов. *Вестник АГТУ, Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика*. 2014;1:130–139.

62. Соколов П.А., Школина И.В., Трапезникова М.А. и др. Моделирование на суперкомпьютерах движения автотранспорта на основе КГД системы уравнений. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2019;7:159–169.
63. Chetverushkin B., Chechina A., Churbanova N., et al. Development of parallel algorithms for intelligent transportation systems. *Mathematics*. 2022;10(4):643.
64. Трапезникова М.А., Чечина А.А., Чурбанова Н.Г. Двумерная модель клеточных автоматов для описания динамики транспортных потоков на элементах улично-дорожной сети. *Математическое моделирование*. 2017;29(9):110–120.
65. Chechina A., Churbanova N., Trapeznikova M. Driver behaviour algorithms for the cellular automata-based mathematical model of traffic flows. *EPJ Web of Conferences*. 2021;248:02002.
66. Чечина А.А., Герман М.С., Ермаков А.В. и др. Моделирование и визуализация потоков автотранспорта на элементах улично-дорожной сети с использованием комплекса программ САМ-2D. *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. 2016;124. 17 с.

References

1. Sukhinova AB, Trapeznikova MA, Chetverushkin BN, et al. Two-dimensional macroscopic model of traffic flows. *Mathematical modeling*. 2009;21(2):118–126. (In Russ.).
2. Trapeznikova MA, Furmanov IR, Churbanova NG, etc. Modeling of multi-lane vehicle traffic based on the theory of cellular automata. *Mathematical modeling*. 2011;23(6):133–146. (In Russ.).
3. Lighthill MJ, Witham GB. On kinematic waves (Part II): A theory of traffic flow on long crowded roads. *In Proceedings of Royal Society. Ser. A*. 1955;229:317–345.
4. Treiber M, Kesting A. *Traffic flow dynamics. Data, models and simulation*. Berlin-Heidelberg: Springer; 2013. 503 p.
5. Payne H. Models of freeway traffic and control. In: Bekey, G.A. (ed.) *Mathematical Models of Public Systems. Simulation Council, La Jolla, CA*. 1971;1:51–61.
6. Kerner B, Konhäuser P. Structure and parameters of clusters in traffic flow. *Physical Review E*. 1994;50:54–83.
7. Aw A, Rascle M. Resurrection of “second order models” of traffic flow. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2000;60:916–938.
8. Zhang HM. A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior. *Transportation Research. B*. 2002;36(3):275–290.
9. Gazis DC, Herman R, Rothery RW. Nonlinear follow-the-leader models of traffic flow. *Operations Research*. 1961;9(4):545–567.
10. Newell GF. A simplified car-following theory: a lower order model. *Transportation Research. Part B: Methodological*. 2002;36:195–205.
11. Pipes LA. An operational analysis of traffic dynamics. *Journal of Applied Physics*. 1954;24(3):274–281.
12. Treiber M, Hennecke A, Helbing D. Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations. *Physical Review E*. 2000;62(2):1805–1824.
13. Prigogine I, Andrews FC. A Boltzmann like approach for traffic flow. *Operations Research*. 1960;8(6):789–797.
14. Prigogine I, Herman R. *Kinetic Theory of Vehicular Traffic*. Amsterdam, Elsevier; 1971.
15. Paveri-Fontana S.L. On Boltzmann like treatments for traffic flow. *Transportation Research*. 1975;9:225–235.
16. Helbing D., Treiber M. Enskog equations for traffic flow evaluated up to Navier-Stokes order. *Granular Matter*. 1998;1:21–31.
17. Treiber M, Hennecke A, Helbing D. Derivation, properties, and simulation of a gas-kinetic-based, non-local traffic model. *Physical Review E*. 1999;59(1):239–253.
18. Gipps PG. A behavioural car-following model for computer simulation. *Transportation Research Part B: Methodological*. 1981;15(2):105–111.
19. Kesting A, Treiber M, Helbing D. Enhanced Intelligent Driver Model to access the impact of driving strategies on traffic capacity simulations. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. 2010;368:4585–4605.
20. Su Z, Liu S, Deng W, et al. Transportation dynamics on networks of heterogeneous mobile agents. *Physics Letters A*. 2019;523:1379–1386.
21. Yao W, Jia N, Zhong S, et al. Best response game of traffic on road network of non-signalized intersections. *Physica A: Statistical mechanics and its applications*. 2018;490:P.386–401.
22. Dong P, Wang X, Yun L, et al. Research on the characteristics of mixed traffic flow based on an improved bicycle model simulation. *Simulation, SAGE Publications*. 2018;94(5):451–462.
23. Zeng JW, Qian YS, Wang H, et al. Modeling and simulation of traffic flow under different combination setting of taxi stop and bus stop. *Modern Physics Letters B*. 2018;32(25):1850301.
24. Zhou J, Zhang HL, Wang CP, et al. A new lattice model for single-lane traffic flow with the consideration of driver’s memory during a period of time. *International Journal of Modern Physics C*. 2017;28(7):1750086.
25. Jin D, Zhou J, Zhang HL, et al. Lattice hydrodynamic model for traffic flow on curved road with passing. *Nonlinear Dynamics*. 2017;89(1):107–124.
26. Kaur R, Sharma S. Analysis of driver’s characteristics on a curved road in lattice model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2017;471:59–67.
27. The Wolfram atlas of simple programs [Electronic resource]. URL: <http://atlas.wolfram.com/> (date of application:

18.05.2023).

28. Nagel K, Schreckenberg M. A cellular automaton model for freeway traffic. *Journal de Physique I France*. 1992;2221–2229.

29. Qi L, Zheng Z, Gang L. A cellular automation model for ship traffic flow in waterways. *Physica A: Statistical Mechanics And Its Applications*. 2017;471:705–717.

30. Chen J, Jiang R, Lin L. Assigning on ramp flows to maximize capacity of highway with two on-ramps and one off-ramp in between. *Physica A: Statistical Mechanics And Its Applications*. 2017;465:347–357.

31. Guzman H.A., Larraga M.E., Alvarez-Icaza L., et al. A cellular automata model for traffic flow based on kinetics theory, vehicles capabilities and driver reactions. *Physica A: Statistical Mechanics And Its Applications*. 2018;491:528–548.

32. Bugaev A.S., Buslaev A.P., Kozlov V.V. et al. Generalized transport and logistics model as a class of dynamic systems. *Mathematical modeling*. 2015;27(12):65–87. (In Russ.).

33. Kerner BS. *The Physics of Traffic*. Berlin: Springer; 2004.

34. Kerner BS. *Introduction to Modern Traffic Flow Theory and Control*. Berlin: Springer; 2009.

35. Kerner BS, Klenov SL, Wolf DE. Cellular automata approach to three-phase traffic theory. *Journal Physics A: Mathematical and General*. 2002;35:9971–10013.

36. Jiang R, Wu QS. Spatial-temporal patterns at an isolated on-ramp in a new cellular automata model based on three-phase traffic theory. *Journal Physics A: Mathematical and General*. 2004;37:8197–8213.

37. Kerner B, Klenov S, Schreckenberg M. Simple cellular automaton model for traffic breakdown, highway capacity, and synchronized flow. *Physical Review E*. 2011;84:046110.

38. Kerner B, Klenov S, Hermanns G, et al. Effect of driver over-acceleration on traffic breakdown in three-phase cellular automaton traffic flow models. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2013;392(18):4083–4105.

39. Kerner B.S., Klenov S.L. Deterministic microscopic three-phase traffic flow models. *Journal Physics A: Mathematical and General*. 2006;39:1775.

40. Hoogendoorn S, Van Lint JWC, Knoop VL. Macroscopic modeling framework unifying kinematic wave modeling and three-phase traffic theory. *Transportation Research Record*. 2008;2088(1):102–108.

41. Laval JA. *Lane-changing in traffic streams*. In: *Traffic and Granular Flow '05*. Proceedings of the International Workshop, ed. by A. Schadschneider, et al. Berlin: Springer; 2007. pp. 521–526.

42. Tian J, et al. Improved 2D intelligent driver model in the framework of three-phase traffic theory simulating synchronized flow and concave growth pattern of traffic oscillations. *Transportation Research*. 2016;41(F):55–65.

43. Xue Y, et al. Long-range correlations in vehicular traffic flow studied in the framework of Kerner's three-phase theory based on rescaled range analysis. *Communications in Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. 2015;22:285–296.

44. Qian YS, Feng X, Zeng JW. A cellular automata traffic flow model for three phase theory. *Physica A: Statistical Mechanics And Its Applications*. 2017;479:509–52.

45. Morozov II, Gasnikov AV, Tarasov VN, et al. Numerical study of transport flows based on hydrodynamic models. *Computer research and modeling*. 2011;3(4): 389–412. (In Russ.).

46. Kholodov Y., Alekseenko A., Kazorin V., et al. Generalization second order macroscopic traffic models via relative velocity of the congestion propagation. *Mathematics*. 2021;9(16):2001.

47. Kubentayeva M, Gasnikov A. Finding equilibria in the traffic assignment problem with primal-dual gradient methods for stable dynamics model and Beckmann model. *Mathematics*. 2021;9(11):1217.

48. Kiselev AB, Kokoreva AV, Nikitin VF, etc. Mathematical modeling of traffic flows by methods of continuum mechanics. Investigation of the influence of artificial road irregularities on the capacity of a road section. *Modern problems of mathematics and mechanics*. Applied Research, edited by VV Alexandrov and VB Kudryavtsev. Moscow: Publishing House of Moscow State University; 2009;1:311–322. (In Russ.).

49. Smirnov N, Kiselev A, Nikitin V, et al. Hydrodynamic traffic flow models and its application to studying traffic control effectiveness. *WSEAS Transactions on Fluid Mechanics*. 2014;9:178–186.

50. Diveev AI, Sofronova EA. The problem of optimal control of traffic flows in the urban road network. *Questions of the theory of security and stability*. 2018;20:89–99. (In Russ.).

51. *Fundamentals of Traffic Simulation*. In: International Series in Operations Research & Management Science. J Barcelo (Ed.). Springer. 2010;145. 452 p.

52. PTV Vision Traffic Suite [Electronic resource]. URL: <https://ptv-vision.ru/> (date of application: 18.05.2023).

53. Aimsun: Simulation and AI for future mobility [Electronic resource]. URL: <https://www.aimsun.com/> (date of application: 18.05.2023).

54. MATSim: Multi-Agent Transport Simulation [Electronic resource]. URL: <https://www.matsim.org/> (date of application: 18.05.2023).

55. Horni A, Nagel K, Axhausen KW (Eds.) *The Multi-Agent Transport Simulation MATSim*. London: Ubiquity Press; 2016.

56. SUMO: Simulation of Urban MObility [Electronic resource]. URL: <https://www.eclipse.org/sumo/> (date of application: 18.05.2023).

57. Lopez PA, et al. Microscopic Traffic Simulation using SUMO. *21st international conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*. 2018:2575–2582.

58. Bentley Systems [Electronic resource]. URL: <https://www.bentley.com> (date of application: 18.05.2023).

59. Chetverushkin BN. *Kinetic schemes and quasi-gas-dynamic system of equations*. Moscow: MAKSS Press; 2004. 332 p. (In Russ.).
60. Churbanova NG, Chechina AA, Trapeznikova MA. Simulation of traffic flows on road segments using cellular automata theory and quasigasdynamic approach. *Mathematica Montisnigri*. 2019;XLVI:72–90.
61. Trapeznikova MA, Chechina AA, Churbanova NG, et al. Mathematical modeling of traffic flows based on macro- and microscopic approaches. *Bulletin of ASTU, Ser.: Management, Computer engineering and Computer Science*. 2014;1:130–139. (In Russ.).
62. Sokolov PA, Shkolina IV, Trapeznikova MA, et al. Simulation of vehicle traffic on supercomputers based on the SRG system of equations. *News of the SFU. Technical sciences*. 2019;7:159–169. (In Russ.).
63. Chetverushkin B, Chechina A, Churbanova N, et al. Development of parallel algorithms for intelligent transportation systems. *Mathematics*. 2022;10(4):643.
64. Trapeznikova MA, Chechina AA, Churbanova NG. Two-dimensional model of cellular automata for describing the dynamics of traffic flows on the elements of the road network. *Mathematical modeling*. 2017;29(9):110–120. (In Russ.).
65. Chechina A, Churbanova N, Trapeznikova M. Driver behaviour algorithms for the cellular automata-based mathematical model of traffic flows. *EPJ Web of Conferences*. 2021;248:02002.
66. Chechina AA, Herman MS, Ermakov AV, et al. Modeling and visualization of traffic flows on the elements of the road network using the SAM-2D software package. *Preprints of the IAM named after M. V. Keldysh*. 2016;124. 17 p. (In Russ.).

Об авторах:

Трапезникова Марина Александровна, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (РФ, 125047, Москва, Миусская пл., 4), кандидат физико-математических наук, [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9155-1234), mtrapez@yandex.ru

Чечина Антонина Александровна, младший научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (РФ, 125047, Москва, Миусская пл., 4), кандидат физико-математических наук, [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9155-1234), chechina.antonina@yandex.ru

Чурбанова Наталья Геннадьевна, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (РФ, 125047, Москва, Миусская пл., 4), кандидат физико-математических наук, [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9155-1234), nataimamod@mail.ru

Поступила в редакцию 11.04.2023.

Поступила после рецензирования 16.05.2023.

Принята к публикации 17.05.2023.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Marina A Trapeznikova, Senior Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS (4, Miusskaya Sq., Moscow, 125047, RF), Cand.Sci. (Phys.-Math.), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9155-1234), mtrapez@yandex.ru

Antonina A Chechina, Junior Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS (4, Miusskaya Sq., Moscow, 125047, RF), Cand.Sci. (Phys.-Math.), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9155-1234), chechina.antonina@yandex.ru

Natalia G Churbanova, Senior Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS (4, Miusskaya Sq., Moscow, 125047, RF), Cand.Sci. (Phys.-Math.), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9155-1234), nataimamod@mail.ru

Received 11.04.2023.

Revised 16.05.2023.

Accepted 17.05.2023.

Conflict of interest statement

The authors does not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELING



УДК 519.6

Научная статья

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-73-80>


Существование и единственность решения начально-краевой задачи транспорта многокомпонентных наносов прибрежных морских систем

В.В. Сидорякина

Таганрогский институт им. А. П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), Российская Федерация, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48

✉ cvv9@mail.ru

Аннотация

Введение. Настоящая работа посвящена исследованию нестационарной двумерной модели транспорта наносов в прибрежных морских системах. Модель учитывает сложный многокомпонентный состав наносов; действие силы тяжести и тангенциального напряжения, вызванного воздействием волн; турбулентный обмен; динамически изменяемый рельеф дна и другие факторы. Целью работы являлось проведение аналитического исследования условий существования и единственности начально-краевой задачи, соответствующей указанной модели.

Материалы и методы. В работе на временной равномерной сетке выполнена линеаризация начально-краевой задачи, при которой нелинейные коэффициенты квазилинейного параболического уравнения берутся с «запаздыванием» на один шаг сетки. Тем самым строится цепочка задач, связанных по начальным условиям и финальным решениям. Привлекая методы математического и функционального анализа, а также методы решения дифференциальных уравнений, проводится исследование существования и единственности задач, входящих в данную цепочку, а потому и в целом исходной задачи.

Результаты исследования. На основе анализа существующих результатов математического моделирования гидродинамических процессов ранее была исследована нелинейная пространственно-двумерная модель транспорта наносов в случае донных отложений, состоящих из частиц, имеющих одинаковые характерные размеры и плотность (однокомпонентный состав). В настоящей работе предыдущие результаты исследования распространены на случай наносов многокомпонентного состава, а именно определены условия существования и единственности решения начально-краевой задачи, соответствующей рассматриваемой модели.

Обсуждение и заключения. Модель транспорта многокомпонентных наносов может быть полезна для прогноза распространения загрязняющих веществ, а также при исследовании динамики изменения рельефа дна как при антропогенном воздействии, так и в силу естественно протекающих природных процессов в морских системах.

Ключевые слова: транспорт многокомпонентных наносов, прибрежная морская система, начально-краевая задача, существование решения, единственность решения.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No. 23-21-00509, <https://rscf.ru/project/23-21-00509>

Для цитирования. Сидорякина В.В. Существование и единственность решения начально-краевой задачи транспорта многокомпонентных наносов прибрежных морских систем. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):73–80. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-73-80>

Existence and Uniqueness of the Initial-Boundary Value Problem Solution of Multicomponent Sediments Transport in Coastal Marine Systems

Valentina V Sidoryakina 

Taganrog Institute named after A. P. Chekhov (branch) of RSUE, 48, Initiative St., Taganrog, Russian Federation

✉ cvv9@mail.ru

Abstract

Introduction. This work is devoted to the study of a non-stationary two-dimensional model of sediment transport in coastal marine systems. The model takes into account the complex multi-fractional composition of sediments, the gravity effect and tangential stress caused by the impact of waves, turbulent exchange, dynamically changing bottom topography, and other factors. The aim of the work was to carry out an analytical study of the conditions for the initial-boundary value problem existence and uniqueness corresponding to the specified model.

Materials and Methods. Linearization of the initial-boundary value problem is performed on a temporary uniform grid. The nonlinear coefficients of a quasilinear parabolic equation are taken with a “delay” by one grid step. Thus, a chain of correlated by initial conditions is the final solutions of problems is built. The study of the existence and uniqueness of the problems included in this chain, and therefore the original problem as a whole, is carried out involving the methods of mathematical and functional analysis, as well as methods for solving differential equations.

Results. Earlier, the authors investigated the existence and uniqueness of the initial-boundary value problem of the transport of sediments of a single-component composition. In the present work, the result obtained is extended to the case of multi-fractional sediments.

Discussion and Conclusions. The non-linear spatial two-dimensional model of sediment transport was previously investigated by the team of authors in the case of bottom sediments consisting of particles having the same characteristic dimensions and density (single-component composition) based on the analysis of the existing results of mathematical modeling of hydrodynamic processes. In this paper, the previous results of the study are extended to the case of sediments of a multicomponent composition, namely, the conditions for the existence and uniqueness of the solution of the initial-boundary value problem corresponding to the considered model are determined.

Keywords: multicomponent sediments’ transport, coastal marine system, initial-boundary value problem, solution existence, solution uniqueness.

Funding information. The study was supported by the Russian Science Foundation grant no. 23-21-00509. <https://rscf.ru/project/23-21-00509>

For citation. Sidoryakina VV. Existence and uniqueness of the solution of the initial-boundary value problem of transport of multicomponent sediments of coastal marine systems. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):73–80. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-73-80>

Введение. При решении ряда практических задач, связанных с экологической оценкой состояния водного объекта, необходимо использовать комплекс моделей различных по пространственным и временным масштабам [1–6]. В последние десятилетия активное развитие получили исследования математических моделей гидрофизических процессов, которые характеризуются множеством параметров [7–14]. В настоящей работе рассматривается 2D математическая модель для расчета транспорта многокомпонентных наносов применительно к прибрежным морским системам. Совокупность уравнений конвекции-диффузии для каждой компоненты наносов (или фракции) формирует данную математическую модель с учетом турбулентного обмена, действия силы тяжести, тангенциального напряжения, динамически изменяемого рельефа дна и других факторов [15–17].

В статье представлены результаты проведения теоретического исследования существования и единственности начально-краевой задачи, базирующейся на построенной модели. В соответствии с поставленной целью рассматривается начально-краевая задача для квазилинейного уравнения параболического типа, для которой методами математического и функционального анализа, а также методами решения дифференциальных уравнений определены достаточные условия существования и единственности решения.

Материалы и методы

1. Начально-краевая задача транспорта многокомпонентных наносов. Запишем уравнение транспорта многокомпонентных наносов [16, 17]:

$$(1 - \varepsilon_r) \frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{div}(V_r k_r \bar{\tau}_b) = \operatorname{div} \left(V_r k_r \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H \right) + \frac{w_{g,r}}{\rho_r} c_r, \quad r = \overline{1, R}. \quad (1)$$

Здесь $H = H(x, y, t)$ — глубина водоема; ε_r — пористость r -ой компоненты в составе наносов; V_r — объемная доля r -ой компоненты; $\vec{\tau}_b$ — вектор касательного тангенциального напряжения на дне водоема; $\tau_{bc,r}$ — критическое значение тангенциального напряжения для r -ой компоненты наносов, $\tau_{bc,r} = a_r \sin \varphi_0$, a_r — некоторый коэффициент для r -ой компоненты наносов, φ_0 — угол естественного откоса грунта в водоеме; $w_{g,r}$ — гидравлическая крупность или скорость осаждения r -ой компоненты; ρ_r — плотность r -ой компоненты донного материала; $k_r = k_r(H, x, y, t)$ — нелинейный коэффициент, определяемый соотношением:

$$k_r = \frac{A \tilde{\omega} d_r}{((\rho_r - \rho_0) g d_r)^\beta} \left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \text{grad} H \right|^{\beta-1},$$

где $\tilde{\omega}$ — усредненная частота волн; d_r — характерный размер r -ой компоненты; g — ускорение силы тяжести; ρ_0 — плотность водной среды; A и β — безразмерные постоянные.

Пусть процесс транспорта наносов происходит в области D , $D, D(x, y) = \{0 < x < L_x, 0 < y < L_y\}$ с границей S , представляющей кусочно-гладкую линию. Считаем, что трехмерный цилиндр $\Pi_T = D \times (0, T)$ высоты T с основанием S есть область задания уравнения (1). Граница этого цилиндра состоит из боковой поверхности $S \times [0, T]$ и двух оснований — $\bar{D} \times \{0\}$ и $\bar{D} \times \{T\}$.

Уравнение (1) рассматривается с начальным условием:

$$H(x, y, 0) = H_0(x, y), \quad (2.1)$$

$$H_0(x, y) \in C^2(D) \cap C(\bar{D}), \quad (2.2)$$

$$\text{grad}_{(x,y)} H_0 \in C(\bar{D}), \quad (2.3)$$

$$(x, y) \in \bar{D} \quad (2.4)$$

и условиями на границе области $\bar{D}$:

$$\left| \vec{\tau}_b \right|_{y=0} = 0, \quad (3)$$

$$H(L_x, y, t) = H_2(y, t), \quad 0 \leq y \leq L_y, \quad (4)$$

$$H(0, y, t) = H_1(y, t), \quad 0 \leq y \leq L_y, \quad (5)$$

$$H(x, 0, t) = H_3(x), \quad 0 \leq x \leq L_x. \quad (6)$$

$$H(x, L_y, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq L_x. \quad (7)$$

Предполагаем:

$$\text{grad}_{(x,y)} H \in C(\bar{\Pi}_T) \cap C^1(\Pi_T),$$

$$\tau_{bx} = \tau_{bx}(x, y, t),$$

$$k_r \geq k_{0r} = \text{const} > 0, \quad \forall (x, y) \in \bar{D}, \quad 0 < t \leq T,$$

2. Линеаризация начально-краевой задачи транспорта многокомпонентных наносов. Построим временную сетку ω_τ , с шагом τ : $\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N, N\tau = T\}$.

Если $n=1$, то глубина водоема $H^{(1)}(x, y, t_0)$ является известной и определяется из начального условия, т. е. $H^{(1)}(x, y, t_0) = H_0(x, y)$. Если же $n = 2, \dots, N$, то глубина водоема $H^{(n)}(x, y, t_{n-1})$ также будет известной, поскольку является решенной задачей (1)–(7) для временного промежутка $t_{n-2} < t \leq t_{n-1}$, т. е. $H^{(n)}(x, y, t_{n-1}) = H^{(n-1)}(x, y, t_{n-1})$.

Обозначим:

$$k_r^{(n-1)} \equiv \frac{A \tilde{\omega} d_r}{((\rho_r - \rho_0) g d_r)^\beta} \left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \text{grad} H^{(n-1)}(x, y, t_{n-1}) \right|^{\beta-1}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (8)$$

После линеаризации уравнение (1) и начальное условие примут вид:

$$(1 - \varepsilon_r) \frac{\partial H^{(n)}}{\partial t} = \text{div} \left(V_r k_r^{(n-1)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \text{grad} H^{(n)} \right) - \text{div} (V_r k_r^{(n-1)} \vec{\tau}_b) + \frac{w_{g,r}}{\rho_r} c_r, \quad r = \overline{1, R}, \quad (9)$$

$$t_{n-1} < t \leq t_n, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

$$H^{(1)}(x, y, t_0) = H_0(x, y), \quad H^{(n)}(x, y, t_{n-1}) = H^{(n-1)}(x, y, t_{n-1}), \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad n = 2, \dots, N. \quad (10)$$

Граничные условия (3)–(7) предполагаются выполненными для всех промежутков времени $t_{n-1} < t \leq t_n$, $n = 1, 2, \dots, N$.

Результаты исследования

1. Исследование существования решения линеаризованной начально-краевой задачи транспорта многокомпонентных наносов. Положим $n = i$, $i = 1, 2, \dots, N$ в уравнении (9).

Имеем:

$$(1 - \varepsilon_r) \frac{\partial H^{(i)}}{\partial t} = \operatorname{div} \left(V_r k_r^{(i-1)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H^{(i)} \right) - \operatorname{div} (V_r k_r^{(i-1)} \bar{\tau}_b) + \frac{w_{g,r}}{\rho_r} c_r, \quad r = \overline{1, R}. \quad (11)$$

Уравнение (11) дополняется условиями (10) и (3)–(7).

Если $i = 1$, то на основании сделанных ранее предположений можем записать:

$$V_r k_r^{(0)} \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \in C^1(\Pi_\infty), \quad V_r k_r^{(0)} \bar{\tau}_b \in C^1(\Pi_\infty). \quad (12)$$

Из [18] можно заключить, что при выполнении условия (12), решение начально-краевой задачи (11), (10), (2)–(7), $t_0 < t \leq t_1$, $i = 1$, существует и принадлежит классу:

$$H^{(1)}(x, y, t) \in C^2(\Pi_{t_1}) \cap C(\bar{\Pi}_{t_1}), \quad \operatorname{grad}_{(x,y)} H^{(1)} \in C(\bar{\Pi}_{t_1}).$$

Если $i = 2$, то начально-краевая задача будет иметь начальным условием $H^{(2)}(x, y, t_1) \equiv H^{(1)}(x, y, t_1)$. Его гладкость совпадает с гладкостью начального условия для уравнения (11) номера $i = 1$, а именно:

$$H^{(2)}(x, y, t) \in C^2(\Pi_{t_2}) \cap C(\bar{\Pi}_{t_2}), \quad \operatorname{grad}_{(x,y)} H^{(2)} \in C(\bar{\Pi}_{t_2}).$$

Очевидно, что опять применимы условия из [18], и решение задачи (11), (10), (2)–(7) для номера $i = 2$ существует.

Далее, если i , $i = 3, \dots, N$, то для каждого случая будем иметь смешанную задачу для линейного уравнения параболического типа. Начальные и граничные условия данной задачи имеют гладкость, достаточную для существования функций $H^{(i)}(x, y, t)$, $t_{i-1} < t \leq t_i$, $i = 1, 2, \dots, N$ класса $C^2(\Pi_{t_i}) \cap C(\bar{\Pi}_{t_i})$, $\operatorname{grad}_{(x,y)} H^{(i)} \in C(\bar{\Pi}_{t_i})$, являющихся решением начально-краевых задач (11), (10), (2)–(7) [19].

2. Исследование единственности решения линеаризованной начально-краевой задачи транспорта многокомпонентных наносов. Запишем уравнение (11) при $n = 1$:

$$(1 - \varepsilon_r) \frac{\partial H^{(1)}}{\partial t} = \operatorname{div} \left(V_r k_r^{(0)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H^{(1)} \right) - \operatorname{div} (V_r k_r^{(0)} \bar{\tau}_b) + \frac{w_{g,r}}{\rho_r} c_r, \quad r = \overline{1, R}. \quad (13)$$

Допустим существование двух различных его решений, а именно:

$$H' = H'(x, y, t), \quad H'' = H''(x, y, t), \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad t_0 < t \leq t_1.$$

Обозначим:

$$w^{(1)}(x, y, t) \equiv H'(x, y, t) - H''(x, y, t), \quad t_0 < t \leq t_1, \quad w^{(1)}(x, y, t) \neq 0, \quad w^{(1)}(x, y, t_0) \equiv 0.$$

Начально-краевая задача для функции $w(x, y, t) \equiv w^{(1)}(x, y, t)$ будет иметь вид:

$$(1 - \varepsilon_r) \frac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{div} \left(V_r k_r^{(0)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} w \right), \quad r = \overline{1, R}, \quad (14)$$

$$w(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad (15)$$

$$\left| \bar{\tau}_b \right| \Big|_{y=0} = 0, \quad (16)$$

$$w(x, L_y, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq L_x, \quad (17)$$

$$w(0, y, t) = 0, \quad 0 \leq y \leq L_y, \quad (18)$$

$$w(L_x, y, t) = 0, \quad 0 \leq y \leq L_y, \quad (19)$$

$$w(x, 0, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq L_x. \quad (20)$$

Обе части уравнения (14) умножим на функцию $w(x, y, t) \neq 0$, $t_0 < t \leq t_1$, $(x, y) \in \bar{D}$, а далее выполним интегрирование по переменным t , $t_0 < t \leq t_1$ и (x, y) в области D . Получим:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left((1 - \varepsilon_r) \iint_D w \frac{\partial w}{\partial t} dx dy \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\iint_D w \operatorname{div} \left(V_r k_r^{(0)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} w \right) dx dy \right) dt, \quad r = \overline{1, R}. \quad (21)$$

После ряда преобразований равенства (21), получим:

$$\frac{1}{2}(1 - \varepsilon_r) \left[\iint_D w^2(x, y, t_1) dx dy - \iint_D w^2(x, y, t_0) dx dy \right] = \int_{t_0}^{t_1} \left(\iint_D w \operatorname{div} \left(V_r k_r^{(0)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} w \right) dx dy \right) dt. \quad (22)$$

Равенство (22) при условии (15) запишется в виде:

$$\frac{1}{2}(1 - \varepsilon_r) \iint_D w(x, y, t_1)^2 dx dy = \int_{t_0}^{t_1} \left(\iint_D w \operatorname{div} \left(V_r k_r^{(0)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} w \right) dx dy \right) dt. \quad (23)$$

Пусть:

$$R(w) \equiv \int_{t_0}^{t_1} \left(\iint_D w \operatorname{div} \left(V_r k_r^{(0)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} w \right) dx dy \right) dt. \quad (24)$$

Имеет место равенство:

$$\begin{aligned} & \iint_D \left[w \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(V_r k_r^{(0)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(V_r k_r^{(0)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy = \\ & = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(w \left(V_r k_r^{(0)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(w \left(V_r k_r^{(0)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy - \\ & - \iint_D \left[\left(V_r k_r^{(0)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(V_r k_r^{(0)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \end{aligned} \quad (25)$$

С другой стороны, с учетом граничных условий (16)–(20) и в силу теоремы Остроградского-Гаусса [19], имеем:

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(w \left(V_r k_r^{(0)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(w \left(V_r k_r^{(0)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy = 0. \quad (26)$$

Из равенств (25) и (26) находим:

$$R(w) \equiv - \int_{t_0}^{t_1} \left(\iint_D V_r k_r^{(0)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \right) dt. \quad (27)$$

С учетом (27) равенство (22) запишется в виде:

$$\frac{1}{2}(1 - \varepsilon_r) \iint_D w^2(x, y, t_1) dx dy = - \int_{t_0}^{t_1} \left(\iint_D V_r k_r^{(0)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \right) dt. \quad (28)$$

Далее преобразуем правую часть равенства (28). Привлекая неравенство Пуанкаре [20], получаем:

$$- \int_{t_0}^{t_1} \left(\iint_D V_r k_r^{(0)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \right) dt \leq - V_r k_r^{(0)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \int_{t_0}^{t_1} \left(\iint_D \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \right) dt. \quad (29)$$

Из неравенства (29) следует оценка:

$$- \int_{t_0}^{t_1} \left(\iint_D V_r k_r^{(0)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \right) dt \leq - \pi^2 V_r k_r^{(0)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} \right) \int_{t_0}^{t_1} \left(\iint_D w^2 dx dy \right) dt. \quad (30)$$

Из равенств (33) и (35) получено неравенство:

$$\frac{1}{2}(1 - \varepsilon_r) \iint_D w^2(x, y, t_1) dx dy \leq - \pi^2 V_r k_r^{(0)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} \right) \int_{t_0}^{t_1} \left(\iint_D w^2 dx dy \right) dt. \quad (31)$$

Так как $w(x, y, t) \neq 0$, то выполнено $w^2(x, y, t^*) > 0$. В силу непрерывности функции $w^2(x, y, t)$ в некоторой окрестности точки t^* при $t_0 < t^* \leq t_1$, имеем $\iint_D w^2(x, y, t) dx dy > 0$, а потому:

$$- \pi^2 V_r k_r^{(0)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} \right) \int_{t_0}^{t_1} \left(\iint_D w^2 dx dy \right) dt < 0. \quad (32)$$

Из полученных неравенств (31) и (32) будет следовать противоречивое неравенство:

$$\frac{1}{2}(1 - \varepsilon_r) \iint_D w^2(x, y, t_1) dx dy < 0. \quad (33)$$

Следовательно, справедливо тождество $w(x, y, t_1) \equiv 0$. В силу произвольности временного шага τ , $\tau > 0$, имеем:

$$w(x, y, t) = 0, \quad t_0 < t \leq t_1.$$

Очевидно, что $w(x, y, t) \equiv 0$ при $(x, y) \in \overline{D}$, $t_{n-1} \leq t \leq t_n$, $n = 2, \dots, N$.

Тем самым сделан первый шаг индукции при $n = 1$. Аналогичным образом строятся рассуждения для $n = s$, $s = 2, \dots, N$, что приводит к равенству:

$$w(x, y, t_s) \equiv 0.$$

Результатом проведенных рассуждений служит следующая теорема.

Теорема. Пусть даны уравнения (11):

$$(1 - \varepsilon_r) \frac{\partial H^{(n)}}{\partial t} = \operatorname{div} \left(V_r k_r^{(n-1)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H^{(n)} \right) - \operatorname{div} (V_r k_r^{(n-1)} \bar{\tau}_b) + \frac{w_{g,r}}{\rho_r} c_r, \quad r = \overline{1, R},$$

$$t_{n-1} < t \leq t_n, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

в прямоугольной области:

$$D(x, y) = \{0 < x < L_x, 0 < y < L_y\},$$

где $k_r^{(n-1)} \equiv \frac{A \tilde{\omega} d_r}{((\rho_r - \rho_0) g d_r)^\beta} \left| \bar{\tau}_b - \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H^{(n-1)}(x, y, t_{n-1}) \right|^{\beta-1}$ с начальными и граничными условиями (11), (3)–(7).

Тогда, если выполнены условия $k_r^{(n-1)} \geq k_{0r} > 0$, $k_r^{(n-1)} \in C^1(\overline{D})$, то $\forall n$, $n = 1, 2, \dots, N$ функция $H^{(n)}(x, y, t)$, $t_{n-1} < t \leq t_n$, $n = 1, 2, \dots, N$ класса $C^2(\Pi_T) \cap C(\overline{\Pi_T})$, $\operatorname{grad}_{(x,y)} H^{(n)} \in C(\overline{\Pi_T})$ будет решением уравнения номера n в цилиндре $\Pi_T = D \times (0, T)$, и это решение единственно.

Обсуждение и заключения. Новизна данной работы определяется постановкой нестационарной пространственно-двумерной математической задачи транспорта наносов, учитывающей их сложный многокомпонентный состав. Линеаризация соответствующей начально-краевой задачи выполнена на сетке по времени и для произвольного временного шага $t_{n-1} < t \leq t_n$, $n = 1, 2, \dots, N$, получены условия существования и единственности решения начально-краевой задачи.

Список литературы

1. Леонтьев И.О. *Прибрежная динамика: волны, течения потоки наносов*. Москва: ГЕОС; 2001. 272 с.
2. Xiaoying Liu, Shi Qi, Yuan Huang, et al. Predictive modeling in sediment transportation across multiple spatial scales in the Jialing River Basin of China. *International Journal of Sediment Research*. 2015;30(3):250–255. <https://doi.org/10.1016/j.ijsrc.2015.03.013>
3. Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б. *Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации*. Ленинград: Гидрометеиздат; 1987. 296 с.
4. Gic-Grusza G., Dudkowska A. Numerical modeling of hydrodynamics and sediment transport — an integrated approach. *Ocean Dynamics*. 2017;67:1283–1292. <https://doi.org/10.1007/s10236-017-1085-9>
5. Ouda M., Toorman E.A. Development of a new multiphase sediment transport model for free surface flows. *International Journal of Multiphase Flow*. 2019;117:81–102. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2019.04.023>
6. Aksoy H., Kavvas M.L. A review of hillslope and watershed scale erosion and sediment transport models. *Catena*. 2005;64(2–3):247–271. <https://doi.org/10.1016/j.catena.2005.08.008>
7. Sukhinov A., Sidoryakina V. Two-Dimensional-One-Dimensional Alternating Direction Schemes for Coastal Systems Convection-Diffusion Problems. *Mathematics*. 2021;9:3267. <https://doi.org/10.3390/math9243267>
8. Sukhinov A., Belova Y., Nikitina A., et al. Sufficient Conditions for the Existence and Uniqueness of the Solution of the Dynamics of Biogeochemical Cycles in Coastal Systems Problem. *Mathematics*. 2022;10:2092. <https://doi.org/10.3390/math101220928>
9. Sukhinov A., Belova Y., Panasenkov N., et al. Research of the Solutions Proximity of Linearized and Nonlinear Problems of the Biogeochemical Process Dynamics in Coastal Systems. *Mathematics*. 2023;11:575. <https://doi.org/10.3390/math11030575>
10. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Бондаренко Ю.С. Оценка погрешности решения уравнения диффузии погрешности на основе схем с весами. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2011;8(121):6–13.

11. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Шишени А.В. Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами. Математическое моделирование. 2013;25(11):53–64; *Mathematical Models and Computer Simulation*. 2014;6(3):324–331. <https://doi.org/10.1134/S2070048214030120>
12. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Угольницкий Г.А. и др. Теоретико-игровые регламенты механизмов управления устойчивым развитием мелководных экосистем. *Автоматика и телемеханика*. 2017;6:122–137. *Automation and Remote Control*. 2017;78(6):1059–1071. <https://doi.org/10.1134/S0005117917060078>
13. Сухинов А.И., Сидорякина В.В. О сходимости решения линеаризованной последовательности задач к решению нелинейной задачи транспорта наносов. *Математическое моделирование*. 2017;29(11):19–39.
14. Сидорякина В.В., Сухинов А.И. Исследование корректности и численная реализация линеаризованной двумерной задачи транспорта наносов. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2017;57(6):985–1002; *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2017;57(6):978–994. <https://doi.org/10.7868/S0044466917060138>
15. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Построение дискретной двумерной математической модели транспорта наносов. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2011;8(121):32–44.
16. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Sidoryakina V.V. Parallel Solution of Sediment and Suspension Transportation Problems on the Basis of Explicit Schemes. *Communications in Computer and Information Science*. 2018;910:306–321. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99673-8_22
17. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Атаян А.М. и др. Математическая модель процесса осаждения на дно многокомпонентной взвеси и изменения состава донных материалов. *Известия ИМИ УдГУ*. 2022;60:73–89. <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2022-60-05>
18. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики*. Учебник. 4-е изд., испр. и доп. Москва: Наука; 1981. 512 с.
19. Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики*. Москва: Наука; 1973. 407 с.
20. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*. Москва: Наука; 1967. 736 с.

References

1. Leontiev IO. *Coastal dynamics: waves, currents, sediment flows*. Moscow: GEOS; 2001. 272 p. (In Russ.).
2. Xiaoying Liu, Shi Qi, Yuan Huang, et al. Predictive modeling in sediment transportation across multiple spatial scales in the Jialing River Basin of China. *International Journal of Sediment Research*. 2015;30(3):250–255. <https://doi.org/10.1016/j.ijsrc.2015.03.013>
3. Marchuk GI, Dymnikov VP, Zalesny VB. *Mathematical models in geophysical hydrodynamics and numerical methods of their implementation*. Leningrad: Hydrometeoizdat; 1987. 296 p. (In Russ.).
4. Gic-Grusza G, Dudkowska A. Numerical modeling of hydrodynamics and sediment transport — an integrated approach. *Ocean Dynamics*. 2017;67:1283–1292. <https://doi.org/10.1007/s10236-017-1085-9>
5. Ouda M, Toorman EA. Development of a new multiphase sediment transport model for free surface flows. *International Journal of Multiphase Flow*. 2019;117:81–102. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2019.04.023>
6. Aksoy H, Kavvas ML. A review of hillslope and watershed scale erosion and sediment transport models. *Catena*. 2005;64(2–3):247–271. <https://doi.org/10.1016/j.catena.2005.08.008>
7. Sukhinov A, Sidoryakina V. Two-Dimensional-One-Dimensional Alternating Direction Schemes for Coastal Systems Convection-Diffusion Problems. *Mathematics*. 2021;9:3267. <https://doi.org/10.3390/math9243267>
8. Sukhinov A, Belova Y, Nikitina A, et al. Sufficient Conditions for the Existence and Uniqueness of the Solution of the Dynamics of Biogeochemical Cycles in Coastal Systems Problem. *Mathematics*. 2022;10:2092. <https://doi.org/10.3390/math101220928>
9. Sukhinov A, Belova Y, Panasenko N, et al. Research of the Solutions Proximity of Linearized and Nonlinear Problems of the Biogeochemical Process Dynamics in Coastal Systems. *Mathematics*. 2023;11:575. <https://doi.org/10.3390/math11030575>
10. Sukhinov AI, Chistyakov AE, Bondarenko YuS. Error estimation of the solution of the error diffusion equation based on schemes with weights. *News of the SFU. Technical sciences*. 2011;8(121):6–13. (In Russ.).
11. Sukhinov AI, Chistyakov AE, Shishenya AV. Estimation of the error of solving the diffusion equation based on schemes with weights. *Mathematical modeling*. 2013;25(11):53–64; *Mathematical Models and Computer Simulation*. 2014;6(3):324–331. (In Russ.). <https://doi.org/10.1134/S2070048214030120>
12. Sukhinov AI, Chistyakov AE, Ugolnitsky GA., et al. Game-theoretic regulations of mechanisms for managing the sustainable development of shallow-water ecosystems. *Automation and telemechanics*. 2017; 6:122–137; *Automation and Remote Control*. 2017;78(6):1059–1071. (In Russ.). <https://doi.org/10.1134/S0005117917060078>
13. Sukhinov AI, Sidoryakina VV. On the convergence of the solution of a linearized sequence of problems to the solution of a nonlinear sediment transport problem. *Mathematical modeling*. 2017;29(11):19–39. (In Russ.).

14. Sidoryakina VV., Sukhinov AI. Correctness study and numerical implementation of a linearized two-dimensional sediment transport problem. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2017;57(6):985–1002; *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2017;57(6):978–994. (In Russ.) <https://doi.org/10.7868/S0044466917060138>
15. Sukhinov AI, Chistyakov AE, Protsenko EA. Construction of a discrete two-dimensional mathematical model of sediment transport. *News of the SFU. Technical sciences*. 2011;8(121):32–44. (In Russ.).
16. Sukhinov AI, Chistyakov AE, Sidoryakina VV. Parallel Solution of Sediment and Suspension Transportation Problems on the Basis of Explicit Schemes. *Communications in Computer and Information Science*. 2018;910:306–321. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99673-8_22
17. Sukhinov AI, Chistyakov AE, Atayan AM., et al. Mathematical model of the process of deposition to the bottom of a multicomponent suspension and changes in the composition of bottom materials. *Izvestiya IMI UdGU*. 2022;60:73–89. (In Russ.). <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2022-60-05>
18. Vladimirov VS. *Equations of mathematical physics*. Textbook. 4th ed., ispr. and add. Moscow: Nauka; 1981. 512 p. (In Russ.).
19. Ladyzhenskaya OA. *Boundary value problems of mathematical physics*. Moscow: Nauka; 1973. 407 p. (In Russ.).
20. Ladyzhenskaya OA, Solonnikov VA, Uraltseva NN. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*. Moscow: Nauka; 1967. 736 p. (In Russ.).

Об авторе:

Сидорякина Валентина Владимировна, доцент кафедры математики, Таганрогский институт имени А. П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), (РФ, 347936, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), кандидат физико-математических наук, [MathSciNet](#), [eLibrary.ru](#), [ORCID](#), [ResearcherID](#), [ScopusID](#), cvv9@mail.ru

Поступила в редакцию 18.04.2023.

Поступила после рецензирования 24.05.2023.

Принята к публикации 25.05.2023.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

About the Author:

Valentina V Sidoryakina, Associate Professor of the Mathematics Department, Taganrog Institute named after A. P. Chekhov (branch) of RSUE (48, Initiative St., Taganrog, 347936, RF), PhD (Physical and Mathematical Sciences), [MathSciNet](#), [eLibrary.ru](#), [ORCID](#), [ResearcherID](#), [ScopusID](#), cvv9@mail.ru

Received 18.04.2023.

Revised 24.05.2023.

Accepted 25.05.2023.

Conflict of interest statement

The author does not have any conflict of interest.

The author has read and approved the final manuscript.