ТОМ 7, №3, 2023
eISSN 2587-8999
РЕЦЕНЗИРУЕМЫЙ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Computational Mathematics and Information Technologies

Вычислительная математика / Computational Mathematics

Математическое моделирование / Mathematical Modelling

Информационные технологии / Information Technologies

www.cmit-journal.ru
DOI 10.23947/2587-8999

Computational Mathematics and Information Technologies

Рецензируемый научно-теоретический журнал (издаётся с 2017 года)

eISSN 2587-8999
DOI: 10.23947/2587-8999

Том 7, № 3, 2023

Журнал «Computational Mathematics and Information Technologies» ориентирован на фундаментальные и прикладные исследования по следующим научным разделам:

1. Вычислительная математика
2. Математическое моделирование
3. Информационные технологии

Индексация:	РИНЦ, CrossRef, КиберЛенинка
Наименование органа, зарегистрировавшего издание	Свидетельство о регистрации средства массовой информации ЭЛ № ФС 77 – 66529 от 21 июля 2016 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Учредитель и издатель	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ).
Периодичность	4 выпуска в год
Адрес учредителя и издателя	344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1.
E-mail	CMIT-EJ@yandex.ru
Телефон	+7(863) 273–85–14
Сайт	https://cmit-journal.ru
Дата выхода в свет	29.09.2023

Computational Mathematics and Information Technologies

Peer-reviewed scientific and theoretical journal (published since 2017)

eISSN 2587-8999
DOI: 10.23947/2587-8999

Vol. 7, no. 3, 2023

The scope of "Computational Mathematics and Information Technologies" is focused on fundamental and applied research according to the following scientific sections:

1. Computational Mathematics
2. Mathematical Modelling
3. Information Technologies

Indexing:	Russian Scientific Citation Index, Crossref, Cyberleninka
Name of the body that registered the publication	Mass media registration certificate ЭЛ № ФС 77-66529 dated July 21, 2016 issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media.
Founder and publisher	Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education Don State Technical University (DSTU).
Periodicity	Quarterly (4 issues per year)
Address of the founder and publisher	Gagarin Sq. 1, Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation.
E-mail	CMIT-EJ@yandex.ru
Telephone	+7(863) 273–85–14
Website	https://cmit-journal.ru
Date of publication	29.09.2023

Содержание

Contents

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
COMPUTATIONAL MATHEMATICS

УДК 519.213.2, 517.443, 517.518.45
https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-7-11

Краткое сообщение

Семиинварианты, моменты Сенатова и разложение плотности

А.Е. Кондратенко ✉, В.Н. Соболев

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1

✉ ae_cond@mech.math.msu.su

Аннотация
Предлагается ввести в программы курсов теории вероятностей рассмотрение относительно новой моментной характеристики случайных величин — моментов Сенатова. Естественность этого предложения подтверждается тремя взглядами на возникновение моментов Сенатова, а их введение позволит ответить на вопрос, что является аналогом ряда Тейлора функции для плотности.

Ключевые слова: моменты, семиинварианты, моменты Сенатова, преобразование Фурье, ряд Фурье, разложение плотности

Благодарности: авторы выражают благодарность профессорам А.В. Булинскому, Е.Б. Яровой и академику А.Н. Ширяеву за внимание к работе.

Для цитирования: Кондратенко А.Е., Соболев В.Н. Семиинварианты, моменты Сенатова и разложение плотности. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):7−11. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-7-11

Short report

Semiinvariants, Senatov Moments and Density Decomposition

Alexander E Condratenko, Vitaly N Sobolev

Lomonosov Moscow State University, 1, Lenin Mountains, Moscow, Russian Federation

✉ ae_cond@mech.math.msu.su

Abstract
It is proposed to introduce into Probability Theory courses such a new moment characteristic of random variable as Senatov moment. Naturalness of this proposal is confirmed by three views of appearance of Senatov moments. Introducing of them will answer the question about what is analogue of Taylor series of function for density.

Keywords: moments, semiinvariants, Senatov moments, Fourier transform, Fourier series, density decomposition

Acknowledgments: the authors are grateful to Professors A.V. Bulinsky, E.B. Yarova and academician A.N. Shiryaev for their attention to the work.

For citation: Condratenko AE, Sobolev VN. Semiinvariants, Senatov Moments and Density Decomposition. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):7−11. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-7-11

Введение. В курсах теории вероятностей помимо обычных моментов случайной величины ξ:

$$\alpha_k = M\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x), k \in Z_+,$$

где $F(x)$ — функция распределения рассматриваемой случайной величины, рассказывается также и о других моментных характеристиках, например:
об абсолютных

$$M\,|\xi|^k,$$

центральных

$$M\,(\xi - M\,\xi)^k$$

и факториальных

$$M\xi^{[k]} = M\,\xi(\xi-1)\ldots(\xi-k+1)$$

моментах.

Более того, центральная задача теории вероятностей — центральная предельная теорема — привела в своем развитии к появлению еще двух моментных характеристик, получивших названия семиинвариантов, о которых рассказывается студентам-математикам, и моментов Сенатова, которые пока только начинают входить в программы курсов.

Хотя статья носит научно-методический характер, аппарат определения моментов, предложенный В.В. Сенатовым, возможно использовать и в прикладных задачах, например, при вычислении коэффициентов турбулентного обмена для уравнений гидродинамики систем со свободной поверхностью, в том числе морских и прибрежных [1].

Цель работы. По мнению авторов, моменты Сенатова заслуживают включения в программы курсов теории вероятностей. В работе это будет обосновано при помощи трех вопросов, на первый взгляд, никак не связанных друг с другом.

Для простоты дальнейшего изложения будем считать рассматриваемые в работе случайные величины центрированными, нормированными и абсолютно непрерывными, у которых существуют моменты всех натуральных порядков, а характеристическая функция:

$$f(t) = Me^{it\xi}$$

представима своим рядом Тейлора и абсолютно интегрируема.

Первый вопрос. Как известно, четные моменты стандартной нормальной случайной величины возрастают и возрастают быстро — стандартный нормальный момент порядка $2k$ равен $(2k-1)!!$, $k\in N$ (в дальнейшем будем считать k неотрицательным целым числом, если не оговорено иное). Но исследовать сходимость центрированных и нормированных сверток к стандартной нормальной случайной величине, исследуя сходимость числовой последовательности к ненулевому числу, обычно технически сложнее, чем исследовать сходимость к нулю. Соответственно, возникает необходимость ввести новые естественные моментные характеристики, которые у стандартной нормальной случайной величины будут равны нулю, за исключением, быть может, самых начальных порядков. Так как моменты связаны с производными характеристической функцией равенством:

$$i^k\alpha_k = (f(t))^{(k)}{}_{t=0},$$

а стандартная нормальная характеристическая функция есть $\exp(-t^2/2)$, то необходимо предложить такое преобразование последней, чтобы производные полученной композиции в нуле *быстро* становились нулевыми.

Использовать логарифмирование в качестве первого такого преобразования предложил в 1889 году датский астрономом и математик Торвальд Николай Тиле, назвав полученные характеристики семиинвариантами:

$$i^k\kappa_k = (\ln(f(t)))^{(k)}{}_{t=0}.$$

Действительно, $\ln(\exp(-t^2/2)) = -t^2/2$, тогда $\kappa_0 = 0$, $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = 1$ и $\kappa_k = 0$ при $k > 3$.

Необходимо отметить следующее важное исключительное свойство семиинвариантов. Так как характеристическая функция свертки равна произведению характеристических функций слагаемых, то семиинварианты свертки равны сумме семиинвариантов слагаемых. Но работа с комплексным логарифмом требует особой аккуратности и часто сопряжена с существенными техническими трудностями.

Другое преобразование не менее естественно — в 2001 году профессором кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова Владимиром Васильевичем Сенатовым были окончательно определены характеристики, называемые с 2021 года (после его смерти) моментами Сенатова:

$$i^k\theta_k = (\exp(t^2/2)f(t))^{(k)}{}_{t=0}.$$

Как видно, все моменты Сенатова стандартной нормальной случайной величины равны нулю, кроме $\theta_0 = 1$.

Все упомянутые моментные характеристики произвольной случайной величины существуют либо не существуют одновременно, всегда $\kappa_0 = 0$, $\theta_0 = 1$, у центрированных и нормированных случайных величин $\kappa_1 = \theta_1 = \theta_2 = 0$, $\kappa_2 = 1$.

Второй вопрос связан с тем, что представление характеристической функции своим рядом Тейлора:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k!}(it)^k$$

не позволяет найти плотность $p(x)$ через формулу обращения:

$$p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t)dt,$$

так как преобразования Фурье степенной функции не существует.

Из кажущегося тупика можно выйти именно при помощи семиинвариантов и моментов Сенатова. Для этого вспомним, что являющиеся собственными функциями уравнения Шредингера [2–3] и образующие на множестве действительных чисел ортогональную систему с весом стандартной нормальной плотности $\varphi(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ многочлены Чебышева-Эрмита:

$$H_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2}\left(e^{-x^2/2}\right)^{(k)}$$

обладают свойством (1):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}(it)^k e^{-t^2/2}dt = H_k(x)\varphi(x).$$

Так, для характеристической функции справедливо представление:

$$f(t) = \exp(\operatorname{In}(f(t))) = \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\kappa_k}{k!}(it)^k\right) = e^{-t^2/2}\exp\left(\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\kappa_k}{k!}(it)^k\right),$$

и поэтому свойство (1) позволяет, представив вторую ее экспоненту рядом Тейлора, применить формулу обращения.

Аналогичные рассуждения с использованием моментов Сенатова позволяют ответить на третий вопрос — какой аналог ряда Тейлора функции можно предложить для случайной величины в лице ее плотности. Так как:

$$f(t) = e^{-t^2/2}\left(e^{t^2/2}f(t)\right) = e^{-t^2/2}\left(\sum_{k=o}^{\infty}\frac{\theta_k}{k!}(it)^k\right) = e^{-t^2/2}\left(1+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\theta_k}{k!}(it)^k\right),$$

то свойство (1) позволяет сразу применить формулу обращения и получить разложение для плотности в виде соответствующего ряда Фурье:

$$p(x) = \varphi(x) + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{\theta_k}{k!}H_k(x)\varphi(x).$$

Для центрированных и нормированных сумм n независимых случайных величин такие разложения называются асимптотическими [4], так как все слагаемые под знаком суммы будут стремиться к нулю с ростом n, что следует из выражения моментов сверток через моменты исходного распределения:

$$\frac{\theta_k(F_n)}{k!} = \sum \frac{n!}{j_0!\,j_3!\ldots j_n!}\left(\frac{\theta_3}{3!\,n^{\frac{3}{2}}}\right)^{j_3}\cdots\left(\frac{\theta_k}{k!\,n^{\frac{k}{2}}}\right)^{j_k},$$

где суммирование производится по целым неотрицательным наборам:

$$j_0+j_3+j_4+\ldots j_k=n,\ 3j_3+4j_4+\ldots kj_k=k.$$

Интересна скорость стремления к нулю «тройками» (табл. 1):

$$\theta_k(F_n) = O\left(n - \frac{\left[\frac{k}{3}+3\left\{\frac{k}{3}\right\}\right]}{2}\right), n\to\infty .$$

Таблица 1

Скорость стремления к нулю «троек» слагаемых

k	3	<u>4</u>	5	6	<u>7</u>	8	9	<u>10</u>	11	…
$\frac{\left[\frac{k}{3}+3\left\{\frac{k}{3}\right\}\right]}{2}$	0,5	<u>1</u>	1,5	1	<u>1,5</u>	2	1,5	<u>2</u>	2,5	…

Например:

$$\theta_3(F_n)=\frac{\theta_3}{\sqrt{n}},\ \theta_4(F_n)=\frac{\theta_4}{n},\ \theta_5(F_n)=\frac{\theta_5}{n^{1,5}},\ \theta_6(F_n)=\frac{6!}{n^2}\left(\frac{n-1}{2!}\frac{\theta_3^2}{3!^2}+\frac{\theta_6}{6!}\right).$$

Магической же связью моментов Сенатова с многочленами Чебышева-Эрмита является следующее равенство:

$$\theta_k=\int_{-\infty}^{\infty}H_k(x)\,dF(x).$$

Именно так определил их В.В. Сенатов в 2001 году [5], назвав из-за этой связи моментами Чебышева-Эрмита, поэтому в литературе и исследованиях до прошлого года они встречаются и используются под таким именем. Теперь в знак памяти о выдающемся ученом, работавшем в Московском университете и предложившем, в частности, асимптотические разложения с явной оценкой точности, которые можно доводить до численных значений, будем называть их моментами Сенатова [6].

Заключение. Использование моментов Сенатова позволило настолько качественно продвинуть задачу исследования скорости сходимости в центральной предельной теореме, что эти моментные характеристики стали восприниматься очень естественно. Это позволяет, по мнению авторов, поднять вопрос о включении их в программу тех курсов теории вероятностей, где центральная предельная теорема доказывается методом характеристических функций. А для студентов-математиков сделать это просто необходимо в целях подготовки к изучению специального курса «Дополнительные главы теории вероятностей».

Список литературы

1. Сухинов А.И., Проценко С.В., Проценко Е.А. Фильтрация натурных данных для численного моделирования трехмерных турбулентных течений с применением подхода LES. *Вестник Южно-Уральского университета. Серия: Математика. Механика. Физика*. 2022;14(4): 40–51. https://doi.org/10.14529/mmph220406

2. Шредингер Э. *Избранные труды по квантовой механике*. Москва: Наука; 1976. 424 с.

3. Тайманов И.А., Царев С.П. О преобразовании Мутара и его применениях к спектральной теории и солитонным уравнениям. *Современная математика. Фундаментальные направления*. 2010;170(3):371–387. https://doi.org/10.1007/s10958-010-0092-x

4. Сенатов В.В. *Центральная предельная теорема: точность аппроксимации и асимптотические разложения.* Москва: Книжный дом «ЛИБРОКОМ»; 2009. 352 с.

5. Сенатов В.В. Применение моментов Чебышева-Эрмита в асимптотических разложениях. В ст.: «XX международный семинар по проблемам устойчивости стохастических моделей». *Теория вероятностей и ее применения.* 2001; 46(1):190–193.

6. Соболев В.Н., Кондратенко А.Е. О моментах Сенатова в асимптотических разложениях в центральной предельной теореме. *Теория вероятностей и ее применения*. 2022; 67(1):193–198. https://doi.org/10.4213/tvp5483

References

1. Sukhinov AI, Protsenko SV, Protsenko EA. Field Data Filtering for the Digital Simulation of Three-Dimensional Turbulent Flows Using The Les Approach. *Vestnik Yuzhno-Uralskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Fizika*. 2022;14(4): 40–51. (In Russ.). https://doi.org/10.14529/mmph220406

2. Schrodinger E. *Selected works on quantum mechanics*. Moscow: Nauka; 1976. 424 p. (In Russ.).

3. Taimanov IA, Tsarev SP. On the Moutard transformation and its applications to spectral theory and Soliton equations. *Journal of Mathematical Sciences*. 2010;170(3):371–387. https://doi.org/10.1007/s10958-010-0092-x

4. Senatov VV. *Central limit theorem: accuracy of approximation and asymptotic expansions.* Moscow: Book House "LIBROCOM"; 2009. 352 p.

5. Senatov VV. Application of the Chebyshev-Hermite moments in asymptotic decompositions. In: "Twentieth international seminar on stability problems for stochastic models". *Theory of Probability and its Applications*. 2001;46(1):190–193.

6. Sobolev VN, Kondratenko AE. On Senatov Moments in Asymptotic Expansions in the Central Limit Theorem. *Theory of Probability and its Applications*. 2022;67(1):154–157. https://doi.org/10.4213/tvp5483

Об авторах:

Кондратенко Александр Евгеньевич, доцент кафедры теории вероятностей, МГУ им. М. В. Ломоносова (119991, РФ, г. Москва, Ленинские горы, 1), кандидат физико-математических наук, ae_cond@mech.math.msu.su

Соболев Виталий Николаевич, доцент/с.н.с. по специальности № 01.01.05 МГУ им. М. В. Ломоносова (119991, РФ, г. Москва, Ленинские горы, 1), кандидат физико-математических наук, sobolev_vn@mail.ru

Заявленный вклад соавторов:
Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Поступила в редакцию 25.07.2023
Поступила после рецензирования 17.08.2023
Принята к публикации 18.08.2023

Конфликт интересов
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Alexander E Kondratenko, Associate Professor of the Department of Probability Theory, Lomonosov Moscow State University (1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, RF), Candidate of Physical and Mathematical Sciences, ae_cond@mech.math.msu.su

Vitaly N Sobolev, Associate Professor/PhD in specialty no. 01.01.05 Lomonosov Moscow State University (1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, RF), Candidate of Physical and Mathematical Sciences, sobolev_vn@mail.ru

Claimed contributorship:
All authors have made an equivalent contribution to the preparation of the publication.

Received 25.07.2023
Revised 17.08.2023
Accepted 18.08.2023

Conflict of interest statement
The authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
COMPUTATIONAL MATHEMATICS

Check for updates

УДК 519.6

Научная статья

https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-12-19

Симметризованные варианты методов Зейделя и верхней релаксации решения двумерных разностных задач эллиптического типа

В.В. Сидорякина, Д.А. Соломаха

Донской государственный технический университет, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

cvv9@mail.ru

Аннотация

Введение. Данная статья посвящена рассмотрению вариантов симметризации двухслойных неявных итерационных методов для решения сеточных уравнений, возникающих при аппроксимации краевых задач для двумерных уравнений эллиптического типа. Данные уравнения входят в постановки многих задач гидродинамики, гидробиологии водных систем и др. Сеточные уравнения для данных задач характеризуются большим количеством неизвестных — от 10^6 до 10^{10}, что приводит к плохой обусловленности соответствующей системы алгебраических уравнений и, как следствие, к существенному росту числа итераций, необходимых для достижения заданной точности. В статье рассмотрен метод снижения числа итераций для относительно простых методов решения сеточных уравнений (метода Зейделя и верхней релаксации).

Материалы и методы. Рассматриваемые в статье методы решения сеточных уравнений базируются на процедуре симметризованного обхода по строками (или столбцами) сеточной области.

Результаты исследования. Выполнены численные эксперименты для модельной задачи — разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона, которые демонстрируют сокращение числа итераций по сравнению с базовыми алгоритмами данных методов.

Обсуждение и заключения. Данная работа имеет практическую значимость. Разработанное программное средство позволяет его использовать для решения конкретных физических задач, в том числе как элемента программного комплекса.

Ключевые слова: двумерная задача эллиптического типа, итерационные методы, релаксационные методы, метод полной релаксации, метод Зейделя, метод верхней релаксации

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00295. https://rscf.ru/project/22-11-00295

Благодарности. Авторы выражают глубокую признательность и искреннюю благодарность член-корреспонденту РАН, доктору физико-математических наук, профессору Александру Ивановичу Сухинову за обсуждение алгоритмов и результатов исследования.

Для цитирования. Сидорякина В.В., Соломаха Д.А. Симметризованные варианты методов Зейделя и верхней релаксации решения двумерных разностных задач эллиптического типа. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):12–19. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-12-19

Original article

Symmetrized Versions of the Seidel and Successive OverRelaxation Methods for Solving Two-Dimensional Difference Problems of Elliptic Type

Valentina V Sidoryakina, **Denis A Solomakha**

Don State Technical University, 1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, Russian Federation

cvv9@mail.ru

Abstract

Introduction. This article is devoted to the consideration of options for symmetrization of two-layer implicit iterative methods for solving grid equations that arise when approximating boundary value problems for two-dimensional elliptic equations. These equations are included in the formulation of many problems of hydrodynamics, hydrobiology of aquatic systems, etc. Grid equations for these problems are characterized by a large number of unknowns — from 10^6 to 10^{10}, which leads to poor conditionality of the corresponding system of algebraic equations and, as a consequence, to a significant increase in the number of iterations, necessary to achieve the specified accuracy. The article discusses a method for reducing the number of iterations for relatively simple methods for solving grid equations, based on the procedure of symmetrized traversal of the grid region.

Materials and Methods. The methods for solving grid equations discussed in the article are based on the procedure of symmetrized traversal along the rows (or columns) of the grid area.

Results. Numerical experiments have been performed for a model problem — the Dirichlet difference problem for the Poisson equation, which demonstrate a reduction in the number of iterations compared to the basic algorithms of these methods.

Discussion and Conclusions. This work has practical significance. The developed software allows it to be used to solve specific physical problems, including as an element of a software package.

Keywords: two-dimensional problem of elliptic type, iterative methods, relaxation methods, complete relaxation method, Seidel method, upper relaxation method

Funding information. The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 22-11-00295. https://rscf.ru/en/project/22-11-00295

Acknowledgments. The authors express their deep gratitude and sincere gratitude to Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor Alexander Ivanovich Sukhinov for discussing algorithms and research results.

For citation. Sidoryakina VV, Solomakha DA. Symmetrized Versions of the Seidel and Successive OverRelaxation Methods for Solving Two-Dimensional Difference Problems of Elliptic Type. *Computational Mathematics and Information Technologies.* 2023;7(3):12–19. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-12-19

Введение. При численном моделировании технических систем, физических явлений и технологических процессов, как правило, значительную долю всего объёма вычислительной работы составляет решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которые возникают при дискретизации соответствующих дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений. Особый класс представляют системы линейных алгебраических уравнений с симметричными положительно определенными матрицами. В зависимости от предлагаемого подхода к построению очередного итерационного приближения выделяют несколько итерационных методов решения указанных СЛАУ [1–3]. Среди них методы Зейделя и верхней релаксации. Популярность данных методов можно объяснить их простотой и широкой известностью среди исследователей [4]. В связи с этим, естественен интерес к изучению различных вариантов рассматриваемых методов и стремление к получению преимуществ их использования.

В настоящей статье рассмотрены варианты симметризации методов Зейделя и верхней релаксации для решения двумерных разностных задач эллиптического типа. На основе результатов численных вычислений решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в области прямоугольной формы продемонстрировано сокращение числа итераций по сравнению с базовыми алгоритмами данных методов. Таблица, в которой представлены зависимости количества итераций от количества узлов сетки расчетной области при использовании рассматриваемых методов, позволяет наглядно убедиться, что симметризованный вариант метода верхней релаксации может существенно снизить требуемое количество итераций для достижения заданной точности и, как следствие, сократить время расчётов.

Материалы и методы

1. Изложение методов Зейделя и верхней релаксации. В конечномерном гильбертовом пространстве рассматривается задача об отыскании решения операторного уравнения:

$$Ax = f, \quad A:\ H \to H, \tag{1}$$

где A — линейный оператор, x — искомая функция, f — известная функция правой части.

Для нахождения решения задачи (1) будем использовать неявную двухслойную итерационную схему:

$$B\frac{y^{k+1}-y^k}{\tau_{k+1}}+Ay^k=f,\ B:\ H\to H,\ k=0,1,2,..., \tag{2}$$

с произвольным приближением $y^0\in H$.

В уравнении (2) используются обозначения: B — некоторый обратимый оператор; k — номер итерации; y^k — вектор k-го итерационного приближения; τ_{k+1} — итерационный параметр, $\tau_{k+1}>0$.

Для представления итерационного метода Зейделя в матричной форме запишем матрицу A в виде суммы диагональной, нижней треугольной и верхней треугольной матриц:

$$A=D+L+U, \tag{3}$$

где:

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 & 0\\ 0 & a_{22} & ... & 0 & 0\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & a_{N-1N-1} & 0\\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{NN}\end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0\\ a_{21} & 0 & ... & 0 & 0\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ a_{N-11} & a_{N-12} & ... & 0 & 0\\ a_{N1} & a_{N2} & ... & a_{NN-1} & 0\end{pmatrix},$$

$$U=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & ... & a_{1N-1} & a_{1N}\\ 0 & 0 & ... & a_{2N-1} & a_{2N}\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{N-1N}\\ 0 & 0 & ... & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Обозначим через $y^k=\left(y_1^{(k)}y_2^{(k)},...,y_N^{(k)}\right)$ вектор k-го итерационного приближения.

Используя выражение (3), запишем метод Зейделя в виде:

$$(D+L)y^{k+1}+Uy^k=f,\ k=0,1,2,... . \tag{4}$$

Приводя итерационную схему (4) к каноническому виду двухслойных итерационных схем (2), находим:

$$(D+L)\left(y^{k+1}-y^k\right)+Ay^k=f,\ k=0,1,2,...,\ y^0\in H. \tag{5}$$

При сравнении схем (2) и (5) можно увидеть, что они будут идентичны при $B=D+L,\ \tau_{k+1}=1.$ Схема (5), также как и схема (2), будет неявной, и оператор является несамосопряженным в пространстве H (здесь оператору B соответствует нижняя треугольная матрица).

Для ускорения сходимости метода Зейделя его модифицируют, вводя в итерационную схему (5) числовой параметр ω, так что:

$$(D+\omega L)\frac{y^{k+1}-y^k}{\omega}+Ay^k=f,\ k=0,1,2,...,\ y^0\in H. \tag{6}$$

Для схемы (6) при $\omega>1$ итерационный метод является методом верхней релаксации (или Successive Over Relaxation, SOR).

Идентичность схем (6) и (2) можно наблюдать при $B=D+\omega L$, $\tau_{k+1}=\omega$. Как и в случае использования метода Зейделя, матрице B соответствует нижняя треугольная матрица. Поэтому введение параметра ω не выводит нас из класса треугольных итерационных методов. Реализация одного итерационного шага схемы (6) осуществляется приблизительно с такими же затратами арифметических действий, как и в схеме (5).

Достаточными условиями сходимости рассмотренных схем (5), (6) является самосопряженность и положительная определенность оператора A в пространстве H [5]. В дальнейшем изложении предполагаем эти условия для оператора A выполненными.

2. Симметризация методов Зейделя и верхней релаксации. Рассмотрим разностную задачу Дирихле для уравнения эллиптического типа. Для простоты возьмем задачу Дирихле для уравнения Пуассона.

Пусть на прямоугольной сетке:

$$\omega_h=\left\{x_{ij}=(ih_1,jh_2),\ i=1,...,N_1,\ j=1,...,N_2,\ h_\alpha=\frac{l_\alpha}{N_\alpha},\ \alpha=1,2\right\},$$

введенной в прямоугольнике $\overline{G}=\{0\le x_\alpha\le l_\alpha,\ \alpha=1,2\}$, требуется найти решение разностной задачи:

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=1}^{2} y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = f(x), \quad x \in \omega_h, \\ y(x) = g(x), \quad x \in \gamma, \end{cases} \tag{7}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — заданные функции, γ — граница сетки ω_h, $\omega_h = \overline{\omega}_h \setminus \gamma$.

При решении системы (7) методом Зейделя или методом верхней релаксации вычисления начинаются в точке $x_{11} = x_{ij}(i=1, j=1)$ и ведутся по строкам или по столбцам расчетной сетки ω_h до точки $x_{N_1N_2} = x_{ij}(i = N_1, j = N_2)$ (изображение макета сетки не приводится ввиду очевидности его представления). К расчету приступают с начальной точки и производят повторение, пока не будет достигнуто решение. Основная идея симметризации итерационных методов заключается в добавлении нового вектора решения. Здесь после того, как расчет произведен от точки x_{11} до точки x_{N1N2}, он продолжится далее от точки x_{N1N2} до точки x_{11} в обратном порядке по столбцам или строкам сетки ω_h и потом повторится с начальной точки.

Построим симметризованные варианты методов Зейделя и верхней релаксации в предположении, что используется прямоугольная сетка с равными количествами узлов по каждому из координатных направлений. Пусть C — матрица перестановок размера $N \times N$ ($N = N_1 = N_2$), вида:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & a_{1N} \\ 0 & 0 & ... & a_{2N-1} & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & a_{N-12} & ... & 0 & 0 \\ a_{N1} & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итерационная схема (5) в результате симметризации метода Зейделя принимает вид:

$$(D+L)\left(y^{k+1} - y^k\right) + Ay^k = f, \; y^0 \in H, \; k = 0,1,2,..., k_1, \tag{8}$$

$$(D+L)C\left(y^{k+1} - y^k\right)C + ACy^kC = f, \quad y^0 = y^{k_1}, \; k = k_1+1, k_1+2,... . \tag{9}$$

Достаточные условия сходимости схем (8)–(9) для симметризованного метода Зейделя определяются из ограничений, накладываемых на оператор A (как было упомянуто ранее, это самосопряженный и положительно определенный оператор).

Перейдем к построению симметризованного метода верхней релаксации (Symmetrical Successive Over Relaxation, SSOR).

Итерационная схема (6) в результате симметризации принимает вид:

$$(D+\omega L)\frac{y^{k+1} - y^k}{\omega} + Ay^k = f, \; y^0 \in H, \; k = 0,1,2,..., k_1, \tag{10}$$

$$(D+\omega L)C\frac{y^{k+1} - y^k}{\omega}C + ACy^kC = f, \quad y^0 = y^{k_1}, \; k = k_1+1, k_1+2,... . \tag{11}$$

Достаточные условия сходимости схем (10)–(11) для симметризованного метода верхней релаксации при любом начальном приближении наследуются достаточными условиями сходимости схем (8)–(9). Однако помимо этих ограничений требуется выполнение дополнительного условия, накладываемого на итерационный параметр ω: $0<\omega<2$ [5].

3. Полная симметризация метода Зейделя и метода верхней релаксации. Идея методов полной симметризации близка к методам обычной симметризации. Однако, при решении задачи (7) методом полной симметризации, итерации могут начинаться из любого угла прямоугольной сетки ω_h и вычисления ведутся по строкам или столбцам (т. е. либо из точки x_{11} до точки $x_{N_1-1N_2-1}$, либо из точки $x_{N_1-1N_2-1}$ до точки x_{11}, либо из точки x_{1N_2-1} до точки x_{N_1-11}, либо из точки x_{N_1-11}, до точки x_{1N_2-1}).

Разностная схема, соответствующая полностью симметризованному методу Зейделя, может быть представлена в виде:

$$(D+L)\left(y^{k+1} - y^k\right) + Ay^k = f_1, \; y^0 \in H, \; k = 0,1,2,..., k_1, \tag{12}$$

$$(D+L)\left(y^{k+1} - y^k\right) + Ay^k = f_1, \; y^0 \in H, \; k = 0,1,2,..., k_1, \tag{13}$$

$$(D+L)C\left(y^{k+1} - y^k\right) + ACy^k = f, \quad y^0 = y^{k_1}, \; k = k_1+1, k_1+2,... k_2. \tag{14}$$

$$(D+L)C\left(y^{k+1} - y^k\right)C + ACy^kC = f, \quad y^0 = y^{k_3}, \; k = k_3+1, k_3+2,... . \tag{15}$$

Достаточные условия сходимости схем (12)–(15) для полностью симметризованного метода Зейделя определяются из ограничений, накладываемых на оператор A.

Разностная схема, соответствующая полностью симметризованному методу верхней релаксации, может быть представлена в виде:

$$(D+\omega L)\frac{y^{k+1}-y^k}{\omega}+Ay^k=f,\ y^0\in H,\ \ k=0,1,2,\dots,\ k_1, \tag{16}$$

$$(D+\omega L)C\frac{y^{k+1}-y^k}{\omega}+ACy^k=f,\quad y^0=y^{k_1},\ \ k=k_1+1,k_1+2,\dots\ k_2. \tag{17}$$

$$(D+\omega L)\frac{y^{k+1}-y^k}{\omega}C+Ay^kC=f,\quad y^0=y^{k_2},\ \ k=k_2+1,k_2+2,\dots\ k_3. \tag{18}$$

$$(D+\omega L)C\frac{y^{k+1}-y^k}{\omega}C+ACy^kC=f,\quad y^0=y^{k_3},\ \ k=k_3+1,k_3+2,\dots\ . \tag{19}$$

Достаточные условия сходимости полностью симметризованного метода верхней релаксации совпадают с достаточными условиями сходимости полностью симметризованного метода Зейделя, и добавляется ограничение на итерационный параметр ω: $0 < \omega < 2$.

Результаты исследования. Проиллюстрируем результаты расчета с использованием описанных методов на сетке ω_h при $N = N_1 = N_2$.

Решается задача:

$$\begin{cases}\sum\limits_{\alpha=1}^{2} y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}=f(x), & x\in\omega_h,\\ y(x)=0, & x\in\gamma.\end{cases} \tag{20}$$

Функция правой части $f(x)$ выбиралась так, что $y(x) = x_1(x-x_1)x_2(x-x_2)$ является точным решением задачи (20).

Для метода верхней релаксации и симметризованного метода верхней релаксации итерационный параметр ω выбирался по формуле [5]:

$$\omega=\frac{2}{1+\sin(\pi/n)}.$$

Расчеты выполнены до достижения точности $\varepsilon = 10^{-4}$, где $\varepsilon=\dfrac{\left\|r^{N(\varepsilon)}\right\|_C}{\left\|r^0\right\|_C}$, $\left\|r^{N(\varepsilon)}\right\|_C$ — сеточная норма C невязки на заключительной итерации, при которой достигнута заданная точность, $\left\|r^0\right\|_C$ — норма С начальной невязки.

На рисунках 1 и 2 приведены результаты вычислений, связанных с решением задачи (20), с использованием рассматриваемых итерационных методов. Продемонстрирована зависимость количества узлов сетки от количества итераций, требуемых для достижения необходимой точности ε.

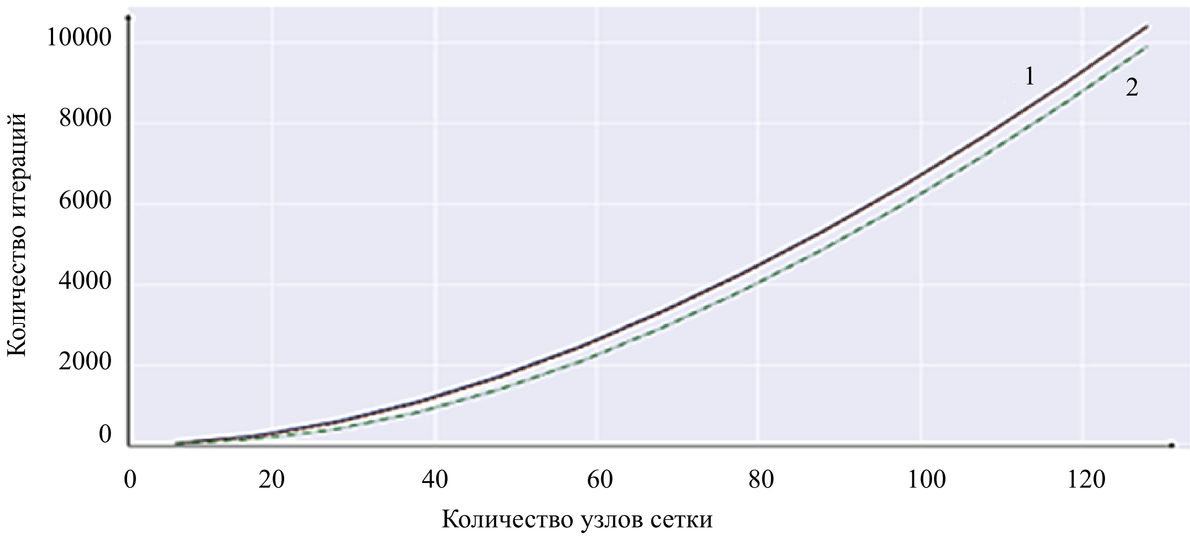


Рис. 1. График зависимости числа итераций от количества узлов сетки при решении задачи с использованием:
1 — метода Зейделя и симметризованного метода Зейделя (линии совпадают);
2 — полностью симметризованного метода Зейделя

В соответствии с графиками на рисунке 1 следует отметить незначительное уменьшение требуемого числа итераций для симметризованного метода Зейделя. Полностью симметризованный метод верхней релаксации требует существенно меньшего числа итераций по сравнению с его несимметризованным аналогом. По затратам арифметических операций, приходящихся на одну итерацию, базовые методы и их симметризованные аналоги отличаются незначительно.

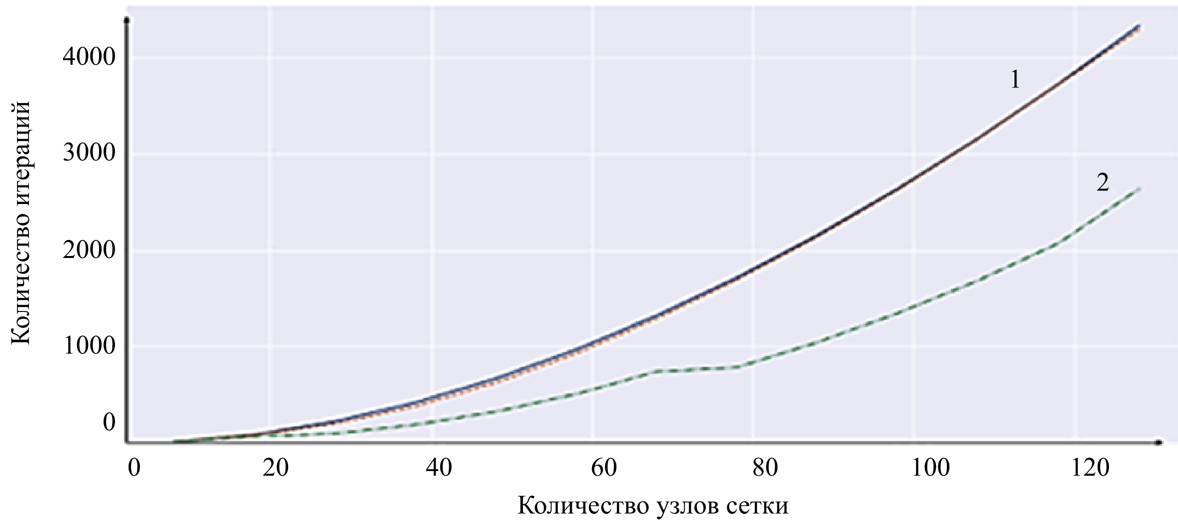


Рис. 2. График зависимости числа итераций от количества узлов сетки при решении задачи с использованием:
1 — метода верхней релаксации и симметризованного метода верхней релаксации (линии совпадают);
2 — полностью симметризованного метода верхней релаксации

Подтверждает сказанное сравнительный анализ полученных данных, приведенных в таблице 1.

Таблица 1

Результаты расчёта с использованием различных итерационных методов

Итерационный метод	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$
Метод Зейделя	757	2947	10420
Симметризованный метод Зейделя	714	2914	10400
Полная симметризация метода Зейделя	538	2550	9914
Метод верхней релаксации	281	1131	4335
Симметризованный метод верхней релаксации	253	1111	4293
Полная симметризация метода верхней релаксации	101	521	2637

Обсуждение и заключения. В статье предложены способы симметризации для метода Зейделя и метода верхней релаксации. Применение полностью симметризованного метода верхней релаксации может ощутимо снизить количество необходимых итераций для достижения заданной точности. Он позволяет сократить вдвое требуемое количество итераций без дополнительных вычислительных затрат. Данная работа имеет практическую значимость. Разработанное программное средство позволяет его использовать для решения конкретных физических задач, в том числе как элемента программного комплекса [6–9].

Список литературы

1. Meligy Sh.A., Youssef I.K. Relaxation parameters and composite refinement techniques. *Results in Applied Mathematics*. 2022;15(1):100282. https:doi.org/10.1016/j.rinam.2022.100282

2. Weiss R., Podgajezki I., Hafner H., et al. Iterative methods for solving systems of linear equations, from the past to the future. *Matematicheskoe modelirovanie*. 2001;13(2):39–50.

3. Saw B.C., Man S., Bairagi A., et al. Gauss-Seidel and Sor Methods for Solving Intuitionistic Fuzzy System of Linear Equations. *Computer Sciences & Mathematics*. 2023;7(1):47. https://doi.org/10.3390/IOCMA2023-14437

4. Allahviraloo T. Successive over relaxation iterative method for fuzzy system of linear equations. Applied *Mathematics and Computation*. 200;162(1):189–196. https:/doi.org//10.1016/j.amc.2003.12.085

5. Самарский А.А., Николаев Е.С. *Методы решения сеточных уравнений*. Москва: Наука; 1978. 592 с.

6. Sidoryakina V.V. Efficient algorithms for the numerical solution of the coupled sediment and suspended matter transport problems in coastal systems. In: *Proceedings of the 21st International Workshop on Computer Science and*

Information Technologies (CSIT 2019) Series: Atlantis Highlights in Computer Sciences. 2019;(3):243–248. https://doi.org/10.2991/csit-19.2019.42

7. Sukhinov A.I., Sukhinov A.A., Sidoryakina V.V. Uniqueness of solving the problem of transport and sedimentation of multicomponent suspensions in coastal systems structures. *Journal of Physics: Conference Series*. 2020;1479(1):012081. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012081

8. Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V. About correctness of the suspension transport and sedimentation model, taking into account bottom relief changes. *Computational Mathematics and Information Technologies Electronic Journal.* 2018;2(2):76–90. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2018-2-76-90

9. Сидорякина В.В., Сухинов А.И. Исследование корректности и численная реализация линеаризованной двумерной задачи транспорта наносов. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2017;57(6):985–1002. https://doi.org/10.7868/S0044466917060138

References

1. Meligy ShA, Youssef IK. Relaxation parameters and composite refinement techniques. *Results in Applied Mathematics*. 2022;15(1):100282. https:doi.org/10.1016/j.rinam.2022.100282

2. Weiss R, Podgajezki I, Hafner H, et al. Iterative methods for solving systems of linear equations, from the past to the future. *Mathematical modelling*. 2001;13(2):39–50.

3. Saw BC, Man S, Bairagi A, et al. Gauss-Seidel and Sor Methods for Solving Intuitionistic Fuzzy System of Linear Equations. *Computer Sciences & Mathematics*. 2023;7(1):47.

4. Allahviraloo T. Successive over relaxation iterative method for fuzzy system of linear equations. Applied *Mathematics and Computation*. 200;162(1):189–196. https:/doi.org//10.1016/j.amc.2003.12.085

5. Samarskiy AA, Nikolaev ES. *Methods for solving grid equations*. Moscow: Nauka; 1978. 592 p.

6. Sidoryakina VV. Efficient algorithms for the numerical solution of the coupled sediment and suspended matter transport problems in coastal systems. In: *Proceedings of the 21st International Workshop on Computer Science and Information Technologies (CSIT 2019) Series: Atlantis Highlights in Computer Sciences*. 2019;(3):243–248. https://doi.org/10.2991/csit-19.2019.42

7. Sukhinov AI, Sukhinov AA, Sidoryakina VV. Uniqueness of solving the problem of transport and sedimentation of multicomponent suspensions in coastal systems structures. *Journal of Physics: Conference Series*. 2020;1479(1):012081. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012081

8. Sukhinov AI, Sidoryakina VV. About correctness of the suspension transport and sedimentation model, taking into account bottom relief changes. *Computational Mathematics and Information Technologies Electronic Journal.* 2018;2(2):76–90. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2018-2-76-90

9. Sidoryakina VV, Sukhinov AI. Correctness study and numerical implementation of a linearized two-dimensional sediment transport problem. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2017;57(6):978–994. https://doi.org/10.7868/S0044466917060138

Об авторах:

Сидорякина Валентина Владимировна, доцент кафедры математики и информатики, Донской государственный технический университет (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), кандидат физико-математических наук, MathSciNet, eLibrary.ru, ORCID, ResearcherID, ScopusID, cvv9@mail.ru

Соломаха Денис Анатольевич, студент 4 курса кафедры «Математика и информатика», Донской государственный технический университет (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), eLibrary.ru, solomakha.05@yandex.ru

Заявленный вклад соавторов:
все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Поступила в редакцию 04.08.2023
Поступила после рецензирования 29.08.2023
Принята к публикации 30.08.2023

Конфликт интересов
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Valentina V Sidoryakina, Associate Professor of the Department of Mathematics and Computer Science, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), Candidate of Physical and Mathematical Sciences, MathSciNet, eLibrary.ru, ORCID, ResearcherID, ScopusID, cvv9@mail.ru

Denis A Solomakha, 4th year student of the Department of Mathematics and Computer Science, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), eLibrary.ru, solomakha.05@yandex.ru

Claimed contributorship:
all authors have made an equivalent contribution to the preparation of the publication.

Received 04.08.2023
Revised 29.08.2023
Accepted 30.08.2023

Conflict of interest statement
the authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
COMPUTATIONAL MATHEMATICS

УДК 519.6
https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-20-27

Научная статья

Применение модификации сеточно-характеристического метода с использованием наложенных сеток для явного выделения границы раздела сред при моделировании рельефа океанического шельфа

В.О. Стецюк

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Российская Федерация, г. Москва, ул. Керченская, 1А, корп. 1

✉stetsyuk@phystech.edu

Аннотация

Введение. Задача моделирования распространения упругих волн имеет большое практическое значение при проведении сейсморазведки, поскольку на ее основе выполняется построение модели исследуемой среды. При этом качество построенной модели определяется точностью решения задачи моделирования, что обеспечивает постоянно возрастающие требования к точности моделирования. Для точного моделирования важно корректно описывать и учитывать границы раздела сред. При этом важным фактором остается ресурсоемкость используемого метода моделирования, поскольку использование менее ресурсоемких методов позволяет выполнить больше итераций расчета для инверсии или использовать сетки с меньшим шагом для повышения точности.

Материалы и методы. В данной работе рассматривается модификация сеточно-характеристического метода на прямоугольных сетках, использующая наложенные сетки для описания границы раздела сред сложной формы. Данный подход ранее использовался для описания поверхности земли при проведении моделирования на суше. В данной работе описывается его применение при моделировании рельефа океанического шельфа.

Результаты исследования. Использование наложенной сетки позволяет уменьшить погрешность моделирования, количество паразитных волн и артефактов и получить более наглядную картину.

Обсуждение и заключения. Наложенные сетки могут быть применены для описания границы раздела сред при моделировании сейсморазведки океанического шельфа. Их использование позволяет повысить точность моделирования и снизить количество артефактов по сравнению с использованием только одной сетки.

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-11-00139).

Ключевые слова: сеточно-характеристический метод, метод наложенных сеток, метод сеток-химер, шельфовая сейсморазведка

Для цитирования. Стецюк В.О. Применение модификации сеточно-характеристического метода с использованием наложенных сеток для явного выделения границы раздела сред при моделировании рельефа океанического шельфа. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):20–27. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-20-27

Original article

Application of a Modification of the Grid-Characteristic Method using Overset Grids for Explicit Interface Description to Modelling the Relief of the Ocean Shelf

Vladislav O Stetsyuk

Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), 1A, build 1, Kerchenskaya St., Moscow, Russian Federation

✉stetsyuk@phystech.edu

Abstract

Introduction. The problem of modelling the propagation of elastic waves is of great practical importance when conducting seismic exploration. Based on it, a model of the environment under study is being built. At the same time, the quality of the constructed model is determined by the accuracy of solving the modelling problem, which ensures constantly increasing requirements for modelling accuracy. For accurate modelling, it is important to correctly describe and take into account the boundaries of the media. At the same time, the quality of the constructed model is determined by the accuracy of solving the modelling problem, which ensures constantly increasing requirements for modelling accuracy.

Materials and Methods. We have studied a modification of the grid-characteristic method on rectangular grids using overset grids to describe the interface of media of complex shape. This approach has previously been used to describe the earth's surface when conducting simulations on land. This paper describes its application in modelling the relief of the ocean shelf.

Results. The use of the overset grid reduces the modelling error, the number of parasitic waves and artifacts and makes it possible to get a more visual picture.

Discussion and Conclusions. Overset grids can be used to describe the interface of media in modelling seismic exploration of the ocean shelf. Their use makes it possible to increase the accuracy of modelling and reduce the number of artifacts compared to using only one grid.

Funding information: This work was funded by Russian Scientific Foundation (project no. 21-11-00139).

Keywords: grid-characteristic method, overset grid, chimera grid, shelf seismic exploration

For citation. Stetsyuk VO. Application of a modification of the grid-characteristic method using overset grids for explicit interface description to modelling the relief of the ocean shelf. *Computational Mathematics and Information Technologies.* 2023;7(3):20–27. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-20-27

Введение. Процесс распространения упругих и акустических волн в среде является предметом изучения целого ряда научных и инженерных дисциплин. К наиболее важным практическим задачам из числа рассматриваемых этими дисциплинами относятся анализ сейсмической устойчивости, неразрушающее обнаружение дефектов и сейсмическая разведка. При решении всех этих задач широко используется численное моделирование. Можно выделить два основных типа задач моделирования — собственно, задачу модерирования распространения волновых возмущений в среде с известными свойствами (прямая задача) и задачу построения модели среды по известным характеристикам сигнала-источника и показаниям приемников (обратная задача). Эти задачи не являются независимыми, решение обратной задачи обычно полагается на несколько итераций решения прямой задачи и внесения уточнений в модель.

При выборе численного метода, используемого для моделирования, необходимо учитывать его особенности и ограничения, а также объем вычислительных ресурсов, которых он требует. Для моделирования распространения механических волн широко используется метод конечных элементов, метод конечных разностей и сеточно-характеристический метод.

Метод конечных элементов [1] использует неструктурные сетки, чаще всего тетраэдральные, что позволяет с хорошей точностью описывать границы области моделирования, а также лежащие внутри нее неоднородности и стыки между слоями. В основе этого метода лежит аппроксимация искомой функции внутри каждой из ячеек с использованием заданного базиса. Также он позволяет хорошо описывать поглощающие граничные условия при помощи метода PML [2]. Его основным недостатком является большая ресурсоемкость.

Основной идеей метода конечных разностей является замена в моделируемом уравнении операций дифференцирования на недифференциальные выражения, определяемые используемой разностной схемой. Конечно-разностные схемы обычно используют структурные прямоугольные сетки. Их преимуществом является низкая ресурсоемкость при хорошей точности [3].

Сеточно-характеристический метод [4–5] во многом схож с методом конечных разностей. Вместо прямой замены дифференцирования на разностное выражение он использует замену переменной, которая позволяет перейти от исходного уравнения к уравнению переноса. Это уравнение переноса решается при помощи поиска характеристик, вдоль которых выполняется перенос значений. В данной работе используется модификация сеточно-характеристического метода, в которой вместо использования характеристик уравнение переноса решается при помощи разностных схем.

В случаях, когда для моделирования используются методы, основанные на структурных сетках, а в области моделирования присутствуют границы сложной формы, возникает необходимость как-то адаптировать метод для их описания. В данной работе для описания криволинейных границ используются наложенные криволинейные сетки. Выбор этого метода обусловлен его хорошей точностью и небольшой ресурсоемкостью. Ранее в [6] было показано, как при помощи этого метода можно описывать свободную поверхность сложной формы, а в данной работе он используется для описания границы раздела сред.

Материалы и методы

1. Физическая модель. В данной работе рассматриваются процессы распространения волн в упругих и акустических средах. Рассмотрим сначала модель упругой среды. В точке с радиус-вектором $\vec{x}$ обозначим вектор смещения в момент времени t как $u(\vec{x},t)$. Второй закон Ньютона по оси i будет иметь вид [7]:

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}-\sum_j\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}-f_i=0.$$

Мы предполагаем, что все смещения малы. Тогда можно записать закон Гука:

$$\sigma_{ij}=\sum_{k=1,l=1}^{3,3}C_{ijkl}\in_{kl},$$

где C_{ijkl} называется тензором жесткости, а ε_{ij} — тензор деформации Коши-Грина:

$$\in_{i,j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\sum\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\right)\approx\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

Тензоры σ и ε симметричны и, следовательно, содержат не более 6 независимых компонент каждый. Тензор C_{ijkl} также симметричен, поэтому количество его независимых компонент не превышает 21, и он может быть записан в нотации Фойгта [8] в виде симметричной матрицы 6×6. В данной работе рассматриваются только изотропные среды. В таких средах эта матрица еще упрощается и имеет вид [9]:

$$C_{\alpha\beta}=\begin{bmatrix}\lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0\\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0\\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu\end{bmatrix}.$$

Можно ввести вектор скорости смещения в точке v как производную вектора смещения по времени. Система уравнений примет вид:

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=(\nabla\cdot\sigma)^T+\vec{f},$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}=\lambda(\nabla\cdot\vec{v})\mathbf{I}+\mu\left(\nabla\otimes\vec{v}+\nabla\otimes\vec{v}\right)^T\big).$$

Параметры λ и μ называются параметрами Ламе. Вместе с плотностью они задают свойства среды в точке. Скорости продольных и поперечных волн можно выразить через них следующим образом:

$$c_p=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},$$

$$c_s=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Для описания акустических сред используются уравнение непрерывности и уравнение Эйлера. Обозначим давление, плотность и скорость в точке с радиус-вектором $\vec{x}$ в момент времени t как $p_A(x,t)$, $\rho_A(x,t)$ и $vA(x,t)$ соответственно. Уравнения имеют следующий вид [10]:

$$\frac{\partial\rho_A}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_A\vec{v}_A)=0,$$

$$\frac{\partial \vec{v}_A}{\partial t} + \left(\vec{v}_A \nabla\right)\vec{v}_A = -\frac{1}{\rho_A}\nabla p.$$

В данной работе рассматриваются задачи, в которых до начала распространения волновых возмущений среды находятся в состоянии покоя. Кроме того, изменения давления и плотности, вызванные распространением волн, полагаются малыми по сравнению с их значениями в состоянии покоя. Обозначим давление и плотность в состоянии покоя в выбранной точке как $p_0\,(x,t)$ и $\rho_0\,(x,t)$, а их изменения, вызванные распространяющимися волнами, как $p(x,t)$ и $\rho(x,t)$. В предположениях выше, уравнения акустической среды могут быть приведены к такому виду:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\nabla p = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c^2 \nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

В используемом приближении распространение акустических волн можно рассматривать как частный случай распространения упругих волн в среде, где распространяются только P-волны. Параметры такой упругой среды будут задаваться следующими соотношениями:

$$c_p = c\sqrt{\frac{\lambda}{\rho}},$$

$$c_s = 0,$$

$$\mu = 0.$$

2. Сеточно-характеристический метод. Рассмотрим применение сеточно-характеристического метода для решения уравнений, описывающих упругую среду. Соберем все неизвестные в этих уравнениях в один вектор [11]:

$$q = [v_1, v_2, v_3, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}].$$

Производные по каждой из координат соберем вместе. Получим матричное уравнение следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{q} - \mathbf{A_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{q} - \mathbf{A_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{q} - \mathbf{A_3}\frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{q} = 0.$$

Выполним расщепление по пространственным координатам [12], то есть разделим одну систему на три разных, по одной для каждой оси. Поскольку изначально система уравнений является гиперболической, то можно выполнить диагонализацию матриц A_i:

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{\Omega}_i^{-1}\mathbf{\Lambda}_i\mathbf{\Omega}_i,$$

где $\mathbf{\Lambda}_i$ — диагональная матрица, состоящая из собственных чисел $\mathbf{A}_i$, а $\mathbf{\Omega}_i$ состоит из столбцов, равных собственным векторам $\mathbf{A}_i$.

Далее можно выполнить замену переменной $\omega_i=\Omega_i\, q$, после чего системы по осям примут вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega_i + \mathbf{\Lambda}_i\omega_i = 0.$$

Поскольку матрицы $\mathbf{\Lambda}_i$ диагональные, то мы фактически имеем дело с набором отдельных уравнений переноса для каждой из компонент ω_i. Эти отдельные уравнения переноса можно решать при помощи метода характеристик [4], однако в данной работе для их решения используются конечно-разностные схемы.

Таким образом, шаг моделирования по времени происходит следующим образом: сначала выполняется переход к новым переменным и уравнениям переноса, затем выполняется шаг по времени в этих переменных, после чего выполняется обратная замена и вычисляются новые значения исходных переменных в узлах сетки.

3. Метод наложенных сеток. Метод наложенных сеток, впервые описанный в [13], позволяет объединить преимущества использования криволинейных сеток, позволяющих хорошо описывать границы сложной формы с низкой ресурсозатратностью структурных сеток. При использовании этого метода сначала строится основная сетка — большая структурная сетка, покрывающая всю область моделирования. После этого области вблизи границ, которые необходимо описать, покрываются отдельными криволинейными сетками меньшего размера. Если области, покрытые наложенными сетками, составляют незначительную часть от всей области моделирования, то и доля вычислительных ресурсов, затрачиваемая на расчет в наложенных сетках незначительна, то есть добавление наложенных сеток в этом случае не приводит к заметному росту ресурсоемкости расчета.

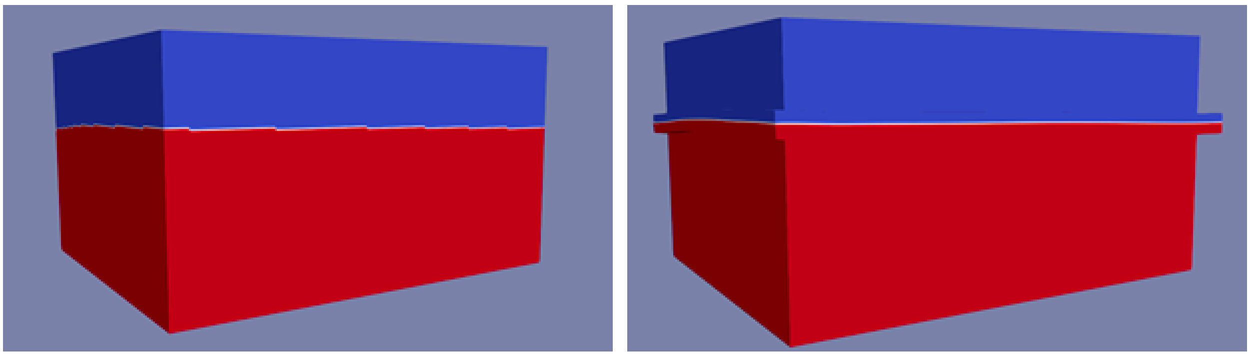
При использовании наложенных сеток шаг моделирования по времени выполняется в два этапа. Сначала выполняется шаг по времени независимо по каждой из сеток. После этого выполняется перенос значений между сетками. В областях, которые покрыты наложенными сетками, значения в узлах основной сетки перезаписываются значениями из соответствующих наложенных сеток. У каждой из наложенных сеток несколько ближайших к границе слоев узлов по всем осям называются ghost-узлами (фантомными узлами). Значения в этих узлах не используются для вычисления новых значений в узлах основной сетки, а наоборот, значения в них перезаписываются значениями из основной сетки [6]. Количество используемых слоев фантомных узлов определяется исходя из используемой разностной схемы, в нашем случае оно равно двум, так как используется пятиточечная разностная схема.

Поскольку узлы основной и наложенных сеток не совпадают, а для каждой сетки в каждый момент времени значения функции известны только в узлах, то для вычисления новых значений при перезаписи используется интерполяция. Поскольку в задачах, рассматриваемых в данной работе, не происходит изменений геометрии расчетной области, узлы сеток в ходе расчета остаются неподвижными. Это позволяет перенести часть расчетов, необходимых для интерполяции, на этап предварительной обработки для экономии вычислительных ресурсов в ходе расчета. Во время этой предварительной обработки для всех узлов основной сетки, значения в которых будут перезаписываться, находятся узлы наложенной сетки, значения в которых будут участвовать в вычислении новых значений в узле основной сетки и веса суммирования и, наоборот, для фантомных узлов наложенных сеток ищутся узлы-источники значений из основной сетки и их веса. Таким образом, во время расчета выполняется только взвешенное суммирование с известными коэффициентами.

К часто используемым методам многомерной интерполяции относятся метод ближайшего соседа, метод обратных расстояний [14], метод естественной окрестности (также известный как метод Сибсона [15]) и методы локального разложения по базису. В расчете в данной работе использовался метод локального разложения по функциям радиального вида (Radial Basis Function, RBF).

Вычислительный эксперимент. В рамках данного исследования было проведено моделирование распространения волновых возмущений от точечного источника. Размер моделируемой области составлял 1080×1320 метров, верхняя граница области совпадала с поверхностью воды, а нижняя находилась на глубине 720 метров. Источник возмущений располагался вблизи поверхности воды. Также вблизи поверхности располагались приемники. Карта глубин была взята из набора данных [16]. Плотность среды шельфа полагалась равной 2400 кг/м^3, скорости продольных и поперечных волн в ней — 2850 м/с и 1650 м/с соответственно. Скорость волн в воде полагалась равной 1500 м/с, а плотность воды — 1050 кг/м^3. В качестве сигнала источника использовался импульс Рикера. Шаг моделирования по времени составлял 1мс.

Было рассмотрено два основных подхода к моделированию данной области. В первом подходе использовалась только одна прямоугольная сетка размером 180×220×120 узлов с шагом 6 метров по всем осям. В зависимости от того, находятся ли узлы выше или ниже поверхности дна, им назначались физические свойства воды или материала дна. При использовании этого подхода поверхность раздела сред фактически имела лестничную структуру. Во втором подходе для описания границы раздела сред использовалась дополнительно наложенная криволинейная сетка размером 192×234×11 узлов с шагом примерно 6 метров, форма которой повторяла границу раздела. Иллюстрация описания границы раздела этими способами приведена на рисунке 1.



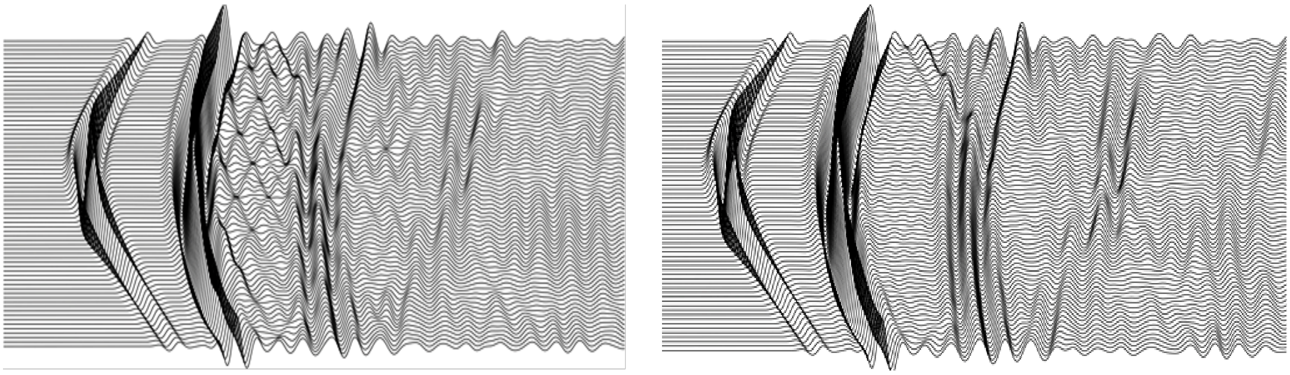
а) *б)*

Рис. 1. Моделирование границы раздела:
а) без использования наложенной сетки; б) с использованием наложенной сетки

В данном случае есть два варианта использования наложенных сеток. Можно использовать две наложенные сетки, каждая из которых будет находиться с одной из сторон от границы и задавать между ними контактное условие, а можно ограничиться одной сеткой, в которой будут узлы с разными свойствами. В данном эксперименте использовался второй подход, поскольку в основной сетке все равно присутствуют узлы с различными свойствами, однако если бы области с разных сторон от границы описывались двумя разными основными сетками, то использование первого подхода было бы предпочтительным.

Результаты исследования. Используя показания приемников, полученные в ходе моделирования, были построены синтетические сейсмограммы вертикальной компоненты скорости смещения, приведенные на рисунке 2.

Можно видеть, что эти сейсмограммы качественно совпадают, однако на сейсмограмме, которая была построена с использованием наложенной сетки для описания границы раздела сред, волны видны лучше, а количество артефактов и шума меньше. На рисунке 3 приведено сравнение показаний одного из приемников.



а) *б)*

Рис. 2. Синтетические сейсмограммы вертикальной компоненты скорости смещения:
а) без использования наложенной сетки; б) с использованием наложенной сетки

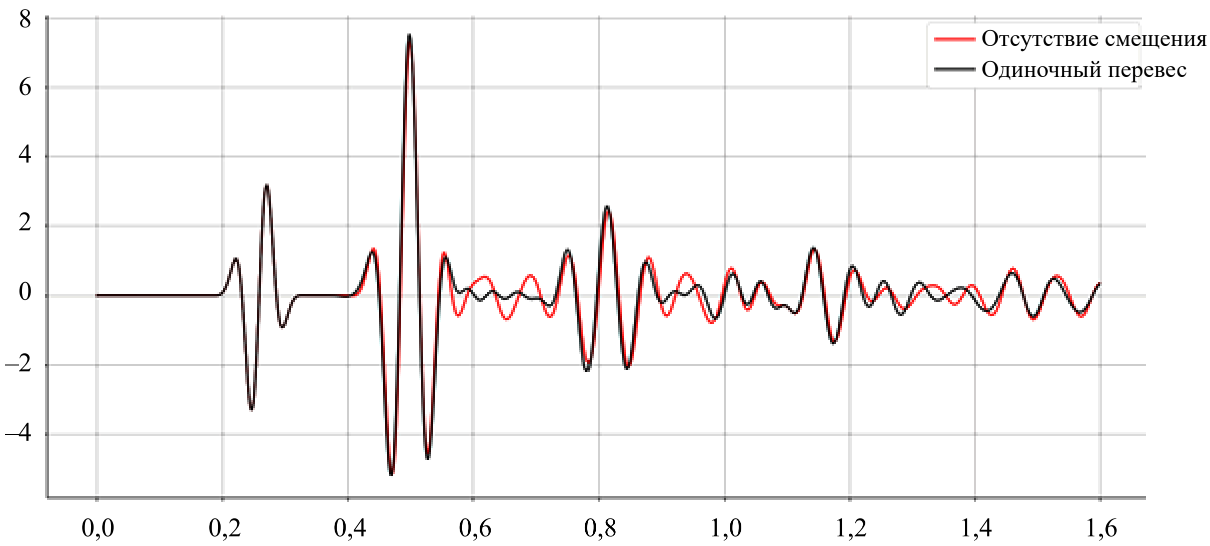


Рис. 3. Сравнение показаний сейсмограммы на одном приемнике

Это сравнение также подтверждает сделанный вывод: использование наложенной сетки позволяет уменьшить погрешность моделирования, количество паразитных волн и артефактов и получить более наглядную картину.

При этом увеличение времени расчета при добавлении наложенной сетки было незначительным и не превышало 10 % от времени расчета с использованием одной сетки.

Обсуждение и заключения. В данном исследовании показано, что наложенные сетки, ранее использовавшиеся для выделения свободной границы при моделировании вблизи поверхности земли на суше, также могут быть применены для описания границы раздела сред при моделировании сейсморазведки океанического шельфа. Их использование позволяет повысить точность моделирования и снизить количество артефактов по сравнению с использованием только одной сетки. При этом использование наложенных сеток не приводит к значительному увеличению ресурсоемкости вычислительного комплекса. Кроме того, наложенные сетки не требуют модификации основной расчетной сетки или внесения значительных изменений в процесс моделирования. Из этого можно сделать вывод, что использование наложенных сеток в подобных задачах зачастую оправдано, поскольку позволяет повысить точность с незначительными издержками.

Предложенный метод может быть использован также для описания границ раздела геологических слоев в твердой среде, поскольку принципиального различия между этими задачами нет. Однако там могут потребоваться дополнительные модификации метода для учета случаев, когда в одной точке смыкаются несколько границ раздела. Исследование этого вопроса пока не проводилось, однако может служить темой последующих работ.

Список литературы

1. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Robert L., et al. *The finite element method: its basis and fundamentals*. 7th ed. Elsevier, 2013. 756 p.

2. Komatitsch D., et al. A perfectly matched layer absorbing boundary condition for the second-order seismic wave equation. *Geophysical Journal International.* 2003;154(1):146–153. https://doi.org/10.1046/J.1365-246X.2003.01950.X

3. Zang N., Zhang W., Chen X. An overset-grid finite-difference algorithm for simulating elastic wave propagation in media with complex free-surface topography. *Geophysics*. 2021:86(4):1–97. https://doi.org/10.1190/geo2020-0915.1

4. Магомедов К.М., Холодов А.С. О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1969;9(2):158–176. https://doi.org/10.1016/0041-5553(69)90099-8

5. Магомедов К.М., Холодов А.С. *Сеточно-характеристические численные методы*, 2-е изд. Москва: Юрайт, 2023. 313 с.

6. Khokhlov N.I., Stetsyuk V.O., Mitskovets I.A. Overset grids approach for topography modelling in elastic-wave modelling using the grid-characteristic method. *Computer Research and Modelling*. Institute of Computer Science. 2019; 11(6):1049–1059. https://doi.org/10.20537/2076-7633-2019-11-6-1049-1059

7. Новацкий В. *Теория упругости*. Москва: Мир, 1975. 872 с.

8. Voigt W. *Lehrbuch der kristallphysik (mit ausschluss der kristalloptik)*. Leipzig; Berlin: B.G. Teubner, 1910. 998 p.

9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, в 10 т. *Теория упругости*, 5-е изд. Д.А. Миртова (ред.). Москва: Физматлит, 2003. Т. 7. 264 с.

10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Учебное пособие, в 10 т. Гидродинамика, 6-е изд. Л.П. Питаевский (ред.). Москва: Физматлит, 2015. Т. 6. 728 с.

11. Favorskaya A.V. et al. Modelling the wave phenomena in acoustic and elastic media with sharp variations of physical properties using the grid-characteristic method. *Geophysical Prospecting*. Blackwell Publishing Ltd, 2018;66(2):1485–1502. https://doi.org/10.1111/1365-2478.12639

12. LeVeque R.J. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002. https://doi.org/10.1017/CBO9780511791253

13. Benek J.A. Steger J.L.; Dougherty F.C., et al. *Chimera: A Grid-Embedding Technique*. 1986. 300 p.

14. Shepard D. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. In: *Proceedings of the 1968 23rd ACM National Conference, 27–29 August 1968*. New York, 1968. Pp. 517–524. https://doi.org/10.1145/800186.810616

15. Sibson R. *A Brief Description of Natural Neighbor Interpolation*. V. Barnett (ed., Interpreting Multivariate Data, John Wiley & Sons, New York, 1981. Pp. 21–36.

16. Butman B., Danforth W.W., Clark J.H., et al. *Bathymetry and backscatter intensity of the sea floor of the Hudson Shelf Valley*. U.S. Geological Survey, 2017. https://doi.org/10.5066/F7C53J1Z

References

1. Zienkiewicz OC, Taylor RL, Robert L, et al. *The finite element method: its basis and fundamentals*. 7th ed. Elsevier, 2013. 756 p.

2. Komatitsch D, et al. A perfectly matched layer absorbing boundary condition for the second-order seismic wave equation. *Geophysical Journal International*. 2003;154(1):146–153. https://doi.org/10.1046/J.1365-246X.2003.01950.X

3. Zang N, Zhang W, Chen X. An overset-grid finite-difference algorithm for simulating elastic wave propagation in media with complex free-surface topography. *Geophysics*. 2021:86(4):1–97. https://doi.org/10.1190/geo2020-0915.1

4. Magomedov KM, Kholodov AS. On the construction of difference schemes for hyperbolic equations based on characteristic relations. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1969;9(2):158–176. (In Russ.). https://doi.org/10.1016/0041-5553(69)90099-8

5. Magomedov KM, Kholodov AS. *Grid-characteristic numerical methods*, 2nd ed. Moscow: Yurayt, 2023. 313 p. (In Russ.).

6. Khokhlov NI, Stetsyuk VO, Mitskovets IA. Overset grids approach for topography modelling in elastic-wave modelling using the grid-characteristic method. *Computer Research and Modelling*. Institute of Computer Science. 2019;11(6):1049–1059. https://doi.org/10.20537/2076-7633-2019-11-6-1049-1059

7. Novatsky V. *Theory of elasticity*. Moscow: Mir, 1975. 872 p. (In Russ.).

8. Voigt W. *Lehrbuch der kristallphysik (mit ausschluss der kristalloptik)*. Leipzig; Berlin: B.G. Teubner, 1910. 998 p.

9. Landau LD, Lifshits EM. Theoretical physics, in 10 vols. *Theory of Elasticity*, 5th ed., by DA Mirtov (ed.). Moscow: Fizmatlit, 2003. Vol. 7. 264 p. (In Russ.).

10. Landau LD, Lifshits EM. Theoretical physics. Textbook, in 10 t. *Hydrodynamics*, 6th ed., by LP Pitaevsky (ed.). Moscow: Fizmatlit, 2015. Vol. 6. 728 P.

11. Favorskaya AV, et al. Modelling the wave phenomena in acoustic and elastic media with sharp variations of physical properties using the grid-characteristic method. *Geophysical Prospecting*. Blackwell Publishing Ltd, 2018;66(2):1485–1502. https://doi.org/10.1111/1365-2478.12639

12. LeVeque RJ. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002. https://doi.org/10.1017/CBO9780511791253

13. Benek JA, Steger JL, Dougherty FC, et al. *Chimera: A Grid-Embedding Technique*. 1986. 300 p.

14. Shepard D. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. In: *Proceedings of the 1968 23rd ACM National Conference, 27–29 August 1968*. New York, 1968. Pp. 517–524. https://doi.org/10.1145/800186.810616

15. Sibson R. *A Brief Description of Natural Neighbor Interpolation*, by V Barnett (ed.). Interpreting Multivariate Data, John Wiley & Sons, New York, 1981. Pp. 21–36.

16. Butman B, Danforth WW, Clark JH, et al. *Bathymetry and backscatter intensity of the sea floor of the Hudson Shelf Valley*. U.S. Geological Survey, 2017. https://doi.org/10.5066/F7C53J1Z

Об авторе:

Стецюк Владислав Олегович, ассистент, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), (РФ, 117303, г. Москва, ул. Керченская, 1А, корп. 1), Math-Net.Ru, stetsyuk@phystech.edu

Поступила в редакцию 24.07.2023
Поступила после рецензирования 16.08.2023
Принята к публикации 17.08.2023

Конфликт интересов
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

About the Author:

Vladislav O Stetsyuk, Assistant, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), (bldg. 1, 1A, Kerchenskaya Street, Moscow, 117303, RF), Math-Net.Ru, stetsyuk@phystech.edu

Received 24.07.2023
Revised 16.08.2023
Accepted 17.08.2023

Conflict of interest statement
The author does not have any conflict of interest.

The author has read and approved the final manuscript.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
COMPUTATIONAL MATHEMATICS

Check for updates

УДК 519.6

Научная статья

https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-28-38

Сеточно-характеристический метод с использованием наложенных сеток в задаче сейсморазведки трещиноватых геологических сред

И.А. Митьковец, Н.И. Хохлов

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Российская Федерация, г. Москва, ул. Керченская, 1А, корп. 1

k_h@inbox.ru

Аннотация

Введение. Сейсморазведка в условия гетерогенности среды является актуальной темой для нефтегазовой промышленности. Следовательно, остается актуальным развитие численных методов решения прямой задачи сейсморазведки как необходимого звена при разработке и усовершенствовании методов решения обратной задачи. Модель тонкой трещины Шонберга хорошо себя показала при численном решении задач, требующих явного учета геологических неоднородностей.

Материалы и методы. В данной работе авторы рассматривают модификацию сеточно-характеристического метода применением наложенных сеток. Представленный подход позволяет проводить вычислительные эксперименты, явно учитывая трещиноватые неоднородности с произвольной пространственной ориентацией. Для этого помимо основной регулярной вычислительной сетки водится понятие наложенных сеток. Неоднородности, такие как трещины, описываются в рамках наложенной сетки и, в свою очередь, не имеют ограничений, связанных с основной сеткой. Таким образом, производя операцию интерполирования между наложенными основными сетками, мы можем обойти требование соосности трещин и ребер основной сетки.

Результаты исследования. Предлагаемый подход позволил произвести исследование зависимости анизотропии сейсмического отклика трещиноватого кластера от дисперсии углов наклона трещин.

Обсуждение и заключения. Предложена модификация сеточно-характеристического метода с применением наложенных сеток для явного учета трещиноватых неоднородностей в гетерогенной геологической среде.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00139. https://rscf.ru/project/21-11-00139/

Ключевые слова: сеточно-характеристический метод, наложенные сетки, химерные сетки, сейсмика, сейсморазведка, гетерогенная геологическая среда

Для цитирования. Митьковец И.А., Хохлов Н.И. Сеточно-характеристический метод с использованием наложенных сеток в задаче сейсморазведки трещиноватых геологических сред. *Computational Mathematics and Information Technologies.* 2023;7(3):28‒38. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-28-38

Original article

Grid-characteristic method using superimposed grids in the problem of seismic exploration of fractured geological media

Ivan A Mitkovets, Nikolay I Khokhlov

Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), 1A, build 1, Kerchenskaya St., Moscow, Russian Federation

k_h@inbox.ru

Abstract

Introduction. Seismic exploration in conditions of heterogeneity of the environment is an urgent topic for the oil and gas industry. Consequently, the development of numerical methods for solving the direct problem of seismic exploration remains relevant as a necessary link in the development and improvement of methods for solving the inverse problem.

The Schonberg thin crack model has performed well in the numerical solution of problems requiring explicit consideration of geological inhomogeneities.
Materials and Methods. In this paper, we consider a modification of the grid-characteristic method using superimposed grids. The presented approach makes it possible to conduct computational experiments, explicitly taking into account fractured inhomogeneities with arbitrary spatial orientation. For this, in addition to the basic regular computational grid, there is the concept of superimposed grids. Inhomogeneities, such as cracks, are described within the framework of the superimposed grid and, in turn, have no restrictions associated with the main grid. Thus, by performing an interpolation operation between the superimposed main grids, we can bypass the requirement of alignment of cracks and edges of the main grid.
Results. The proposed approach made it possible to study the dependence of the anisotropy of the seismic response of a fractured cluster on the dispersion of the angles of inclination of the cracks.
Discussion and Conclusions. A modification of the grid-characteristic method using superimposed grids is proposed to explicitly account for fractured inhomogeneities in a heterogeneous geological environment.

Funding information. The research was carried out at the expense of the grant of the Russian Science Foundation no. 21-11-00139. https://rscf.ru/project/21-11-00139/

Keywords: grid-characteristic method, superimposed grids, chimeric grids, seismics, seismic exploration, heterogeneous geological environment

For citation. Mitkovets IA, Khokhlov NI. Grid-characteristic method using superimposed grids in the problem of seismic exploration of fractured geological media. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):28‒38. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-28-38

Введение. На сегодняшний день методики поиска и исследования нефтегазовых месторождений включают в себя эффективное решение обратной задачи сейсморазведки в условиях гетерогенной геологической среды. Это становится неотъемлемо важным, учитывая, что известные нефтегазовые залежи постепенно исчерпываются, а для поддержания уровня добычи необходим поиск новых месторождений либо добыча полезных ископаемых из уже выработанных месторождений с использованием современных методов. Зачастую потенциальные участки расположены в регионах, богатых трещиноватыми неоднородностями. Дополнительно современные технологии увеличения добычи на месторождениях предусматривают применение такого инструмента, как гидроразрыв пласта. Современные подходы к гидроразрыву, основанные на многоступенчатых процедурах, открывают возможности для возобновления добычи даже на тех месторождениях, которые были признаны исчерпанными на протяжении многих лет. Геофизическая информация, собранная в результате сейсморазведки, позволяет проводить моделирование процесса гидроразрыва пласта, что является критическим элементом для адаптации технологии к конкретному месторождению. С учетом расположения уже существующих трещин, а также с учетом параметров трещиноватости (что можно определить с помощью сейсморазведки) можно контролировать форму образующегося разрыва. Такой контроль над формой создаваемой трещины актуален из-за риска возникновения пробок в образовавшихся каналах, что может привести к их блокировке и, как следствие, к снижению эффективности эксплуатации месторождения. Для успешного проведения такого рода манипуляции первостепенная важность придаётся наличию точной картины структуры трещин и разломов, скрытых под земной поверхностью.

В процессе проведения сейсморазведки данные, полученные на множестве сейсмических датчиков, расположенных на незначительной глубине в земной поверхности, интерпретируются современными методами вычислительной математики для воссоздания модели геологической среды в изучаемой области. Однако проверить результаты, полученные таким образом, затруднительно за неимением возможности получить подробную и качественную модель геологической среды альтернативными способами. Таким образом, для развития возможностей и точности современных методов решения обратной задачи сейсморазведки критически важно развивать возможности и точность методов решения прямой задачи сейсморазведки.

Сегодня известно несколько методик, которые учитывают присутствие трещиноватых структур при моделировании распространения волн упругих возмущений в подлинных геологических формациях. Одна из наиболее распространенных — это математический подход, основывающийся на модели линейного скольжения, предложенной Шонбергом (LSM), что было описано в статье, опубликованной в 1980 году [1], и получило дальнейшее экспериментальное подтверждение в других источниках [2–3]. Тем не менее, при моделировании областей с разломами использование анизотропных моделей [4] оказывается наиболее эффективным на больших длинах волн, хотя и не учитывает большую часть характеристик. Альтернативным методом для моделирования зоны с разломами является эксплицитный подход [5], который имеет свои преимущества. Были также изучены и другие методики, включая добавление дополнительных узлов, как показано в работах [6–7], а также применение дополнительных вычислительных сеток для описания процесса распространения волн внутри разлома [8].

В рамках данного исследования авторы представляют новый вариант сеточно-характеристического метода [9], в котором применяется техника наложенных сеток. Первые концепции этого подхода были изложены в источнике [10]. Одной из первоначальных работ, посвященных применению наложенных (или адаптивных) вычислительных сеток, стала работа авторов по фамилии Бергер и Джозеф [11], а также Стегер и Бэнек [12–13]. Идея использования наложенных сеток успешно развивалась и в настоящее время применяется для решения различных задач, как показано в исследованиях [14–18]. Инновационность предлагаемой авторами методики заключается в применении наложенных сеток при решении задач сейсморазведки трещиноватых областей и в организации этих сеток вокруг трещин таким образом, чтобы якобиан преобразования стремился к единице. В данном исследовании авторы фокусируются на 2D геологических моделях.

Материалы и методы

1. Уравнение упругости. Одним из ключевых уравнений в линейной теории упругости считается уравнение Гука, которое осуществляет связь между тензором напряжений и тензором деформаций [19–20]. Уравнения сохранения массы и импульса также применяются для описания процесса распространения волн в среде. Более сложное представление упругих сред возможно с помощью расширенных уравнений, учитывающих нелинейные и неоднородные характеристики среды. В этих уравнениях могут присутствовать нелинейные связи между напряжением и деформацией, а также могут быть учтены разнообразные физические процессы, например, анизотропия или диссипация энергии. В рамках исследования для решения обобщенной задачи моделирования распространения сейсмической волны в грунте выбрана модель линейно-упругой и изотропной среды. Эта модель была изучена в ряде предыдущих работ [21–24].

В каждой точке линейно-упругой среды выполняется второй закон Ньютона:

$$\rho \vec{\boldsymbol{v}}_t = \left(\nabla \cdot \mathbf{T}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{1}$$

где $\mathbf{T}$ — тензор напряжений Коши, ρ — плотность среды, $\boldsymbol{v}$ — скорость перемещения среды.

Закон Гука в тензорной форме имеет вид:

$$\mathbf{T} = \lambda\, tr\left(\varepsilon\right)\mathbf{I} + 2\mu\varepsilon, \tag{2}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\nabla \otimes \boldsymbol{u} + \left(\boldsymbol{u} \otimes \nabla\right)^{\mathrm{T}}\right), \tag{3}$$

где $\boldsymbol{u}$ — тензор смещения, $\mathbf{I}$ — единичный тензор, λ и μ — параметры Ламе, характеристики упругих деформаций, ε — тензор деформаций, ⊗ — оператор тензорного произведения $\left(\nabla \otimes \boldsymbol{v}\right)_{i,j} = \nabla_i \boldsymbol{v}_j$.

Тогда, учитывая воздействие внешней силы $\vec{f}$, из уравнений (1)–(3) можно получить систему уравнений для линейно-упругой изотропной среды в следующем виде:

$$\mathbf{T} = \lambda\left(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\right)\mathbf{I} + \mu\left(\nabla \otimes \vec{\boldsymbol{v}} + \left(\nabla \otimes \vec{\boldsymbol{v}}\right)^{\mathrm{T}}\right), \tag{4}$$

$$\rho \vec{\boldsymbol{v}}_t = \left(\nabla \cdot \mathbf{T}\right)^{\mathrm{T}} + \vec{f}. \tag{5}$$

Система из уравнений (4) и (5) может быть представлена в виде системы дифференциальных уравнений, тут и далее в работе полагаем отсутствие внешней силы:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{T}_{ij} = \lambda\left(\sum_k \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_k}\right) I_{ij} + \mu\left(\nabla_i \upsilon_j + \nabla_j \upsilon_i\right), \tag{6}$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v}_j = \frac{\partial \mathbf{T}_{ji}}{\partial x_i}. \tag{7}$$

Систему дифференциальных уравнений теории линейной упругости (6) и (7), можно представить в матричном виде, который удобно использовать при изучении характеристических методов вычислительной математики. Введем обозначения $\vec{u} = (u_1, \ldots u_5)^T = (v_1, v_2, \boldsymbol{T}_{11}, \boldsymbol{T}_{22}, \boldsymbol{T}_{12})^T$, тогда система уравнений в декартовой системе координат приобретает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{A_1}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \mathbf{A_2}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} = 0, \tag{8}$$

$$\mathbf{A_1} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} \\ \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$\mathbf{A}_2 = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Для описания упругих свойств среды удобно использовать скорости звуковых волн: продольную C_p и поперечную C_s. Продольная скорость отражает скорость волны по направлению силы, поперечная — в перпендикулярном. Они вычисляются через параметры Ламе и плотность среды следующим образом:

$$C_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\ , \tag{11}$$

$$C_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\ . \tag{12}$$

В настоящей работе для моделирования распространения упругих волн в присутствии трещин используется модель двух береговой тонкой трещины Шонберга. В случае, когда трещина ориентирована вдоль оси O_y, граничные условия имеют вид:

$$\boldsymbol{T}_{xx}^0 = \boldsymbol{T}_{xx}^1,$$

$$\boldsymbol{T}_{xy}^0 = \boldsymbol{T}_{xy}^1,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}_{xx}^0}{\partial t} = K_T\left(\upsilon_x^1 + \upsilon_x^0\right),$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}_{xy}^0}{\partial t} = K_N\left(\upsilon_y^1 + \upsilon_y^0\right).$$

где индексы 0 и 1 используются для отметки отношения величины к левой и правой стороне трещины соответственно, K_T и K_N параметры трещины, которые в нашем случае тонкой заполненной жидкостью трещины равны:

$$K_T = \infty,$$
$$K_N = 0.$$

2. Сеточно-характеристический метод. В данной работе для получения численного решения системы уравнений, описывающих линейно-упругую среду, применяется сеточно-характеристический метод. Этот метод был впервые представлен в работах [25–27]. В контексте данного исследования, которое ограничено численным решением системы уравнений гиперболического типа, можно утверждать, что для матрицы $\mathbf{A}_j$ всегда существует N собственных значений и N линейно независимых собственных векторов. Это в свою очередь подтверждает возможность существования обратной матрицы для $\mathbf{\Omega}_j$. Тогда с учетом расщепления по компонентам уравнение (8) принимает вид:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \mathbf{\Omega}_j^{-1}\mathbf{\Lambda}_j\mathbf{\Omega}_j\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_j},\ j = 1{,}2\,, \tag{13}$$

где $\mathbf{\Omega}_j$ состоит из столбцов, являющихся собственными векторами матрицы $\mathbf{A}_j$, а $\mathbf{\Lambda}_j$ — диагональная матрица, состоящая из собственных значений матрицы $\mathbf{A}_j$. При этом, $\mathbf{\Lambda}_j$ при любом j имеет одинаковый вид:

$$\Lambda = \mathrm{dia\,g}\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}, -\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}\,, \sqrt{\mu/\rho}, -\sqrt{\mu/\rho}, -\sqrt{\mu/\rho}\,,\ 0{,}0{,}0\,. \tag{14}$$

Принимая во внимание выражения (11) и (12), можно привести уравнение (14) к виду:

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{C_p, -C_p, C_s, -C_s, C_s, -C_s, 0{,}0{,}0\}.$$

Произведем характеристическую замену переменных $\boldsymbol{v} = \mathbf{\Omega}\boldsymbol{u}$ ($\boldsymbol{u} = \mathbf{\Omega}^{-1}\boldsymbol{v}$) в уравнении (13), b помножим слева на матрицу $\mathbf{\Omega}^{-1}$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} = 0.$$

Таким образом, вычисление значения для каждого элемента вектора u на последующем временном шаге, обозначаемом как n+1, осуществляется при условии, что известно значение $\boldsymbol{v}^{(n+1)}$: $\boldsymbol{u}^{n+1} = \mathbf{\Omega}^{-1}\boldsymbol{v}^{n+1}$.

3. Наложенные сетки. На старте каждого этапа вычислительного процесса, который ограничен определенным временным шагом, после произведения вычислений в узлах основной вычислительной сетки осуществляется прямая интерполяция из основной сетки во внешние узлы наложенной сетки. Это действие является необходимым для учета изменения напряженности и векторного смещения среды, вызванных процессом распространения волны в рамках основной сетки. После чего производятся вычисление новых значений в узлах наложенной сетки. В завершении каждого временного шага производится обратная интерполяция из узлов наложенной сетки в основную. Этот процесс обеспечивает синхронизацию изменений, которые имели место на протяжении данного этапа вычислений. Такой подход обусловлен необходимостью учесть влияние разнообразных неоднородностей, представленных в наложенных сетках, при выполнении расчетов на следующем временном этапе [28].

В данной работе авторы использовали функцию билинейной интерполяции для поиска значений искомых функций в точке по значениям функции в четырех известных точках:

$$F_{x,y} = b_1 + b_2\,x + b_3\,y + b_4\,xy.$$

Применение наложенных сеток

1. Реализация. При применении наложенной сетки для определения положения наклонной трещины сплошная среда может быть представлена с использованием одной основной прямоугольной сетки. В то же время, трещины можно задать с помощью наложенных сеток, которые расположены в соответствии с ориентацией каждой отдельной трещины. Методика расчета прямой трещины на регулярной прямоугольной сетке и ее применение в рамках сеточно-характеристического метода были подробно описаны в научной работе [9]. Важно отметить, что применение наложенной сетки не является обязательным для учета трещины, соосных с ребрами основной вычислительной сетки.

На рисунке 1 представлено расположение используемых сеток и трещины, также обозначены узлы наложенной сетки, участвующие в интерполяции между сетками. На рисунке черным цветом представлены границы основной прямоугольной регулярной сетки, представляющие окружающую среду. Ребра наложенной сетки выделены синим цветом. Зеленым цветом отмечены дополнительные «призрачные» узлы наложенной сетки, куда осуществляется интерполяция из основной сетки. Оранжевым цветом выделена часть узлов наложенной сетки, откуда происходит интерполяция. Красная линия указывает на местоположение трещины.

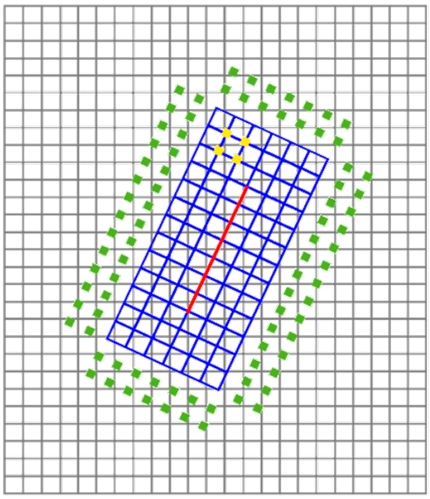
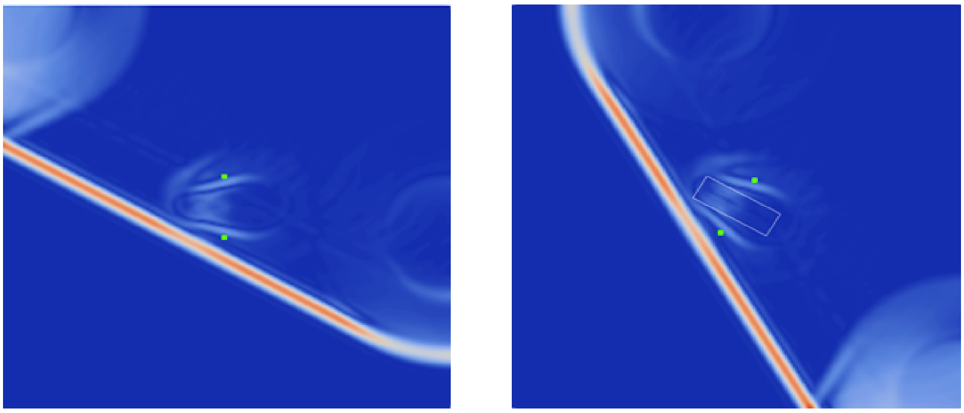


Рис. 1. Использование наложенной сетки для учета трещины

2. Верификация. Для оценки точности предложенной модификации проведем сравнение показаний, получаемых на виртуальных приемниках в ходе моделирования взаимодействия упругой волны с трещиной. В одном случае трещина совпадает с горизонтальной осью основной сетки, а в другом — она повернута относительно этой оси с использованием наложенной сетки. Чтобы осуществить такой поворот, необходимо корректно обрабатывать данные, полученные с виртуальных приемников, а также корректно проводить поворот трещины и приемников, и источника упругой волны.

Волновые картины в один из моментов времени для сравниваемых постановок, а также расположения приемников и наложенной сетки представлены на рисунке 2 (а, б).

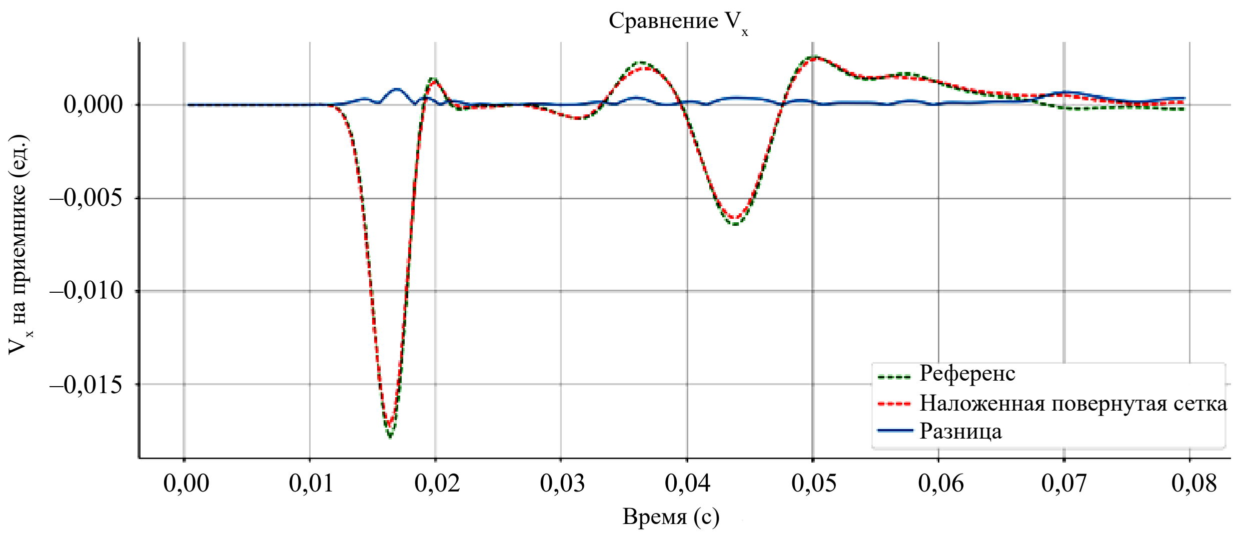
В ходе вычислительных экспериментов начальные условия предполагали наличие упругих возмущений плоского фронта, заданных гауссовой функцией с шириной в 10 метров. Фронт инициируемой плоской волны был повернут относительно моделируемой трещины на угол, составляющий 30 градусов. Длина тонкой трещины составляла 52 метра. В вычислении с применением наложенной сетки система «волна-трещина-приемники» была повернута на угол в 30 градусов. Приемники были размещены на линии, перпендикулярной моделируемой трещине и проходящей через ее центр, на отдалении 30 метров от нее. Продольная скорость упругой волны в среде составляла $C_p = 3000$ м/с, поперечной — $C_s = 1500$ м/с, шаг по времени — $dt = 0{,}0002$ секунды, пространственный шаг сеток — h= 2,0.



а) *б)*

Рис. 2. Волновые картины в один из моментов времени:
а) без использования наложенной сетки (зеленым отмечено положение приёмников); б) с использованием наложенной сетки, отмеченной белым цветом, зеленым — приёмники

Сравнение значений компонент скорости смещения среды, полученные в результате проведения описанных выше экспериментов, представлены на рисунках 3 и 4, для приемников над трещиной и за ней соответственно.



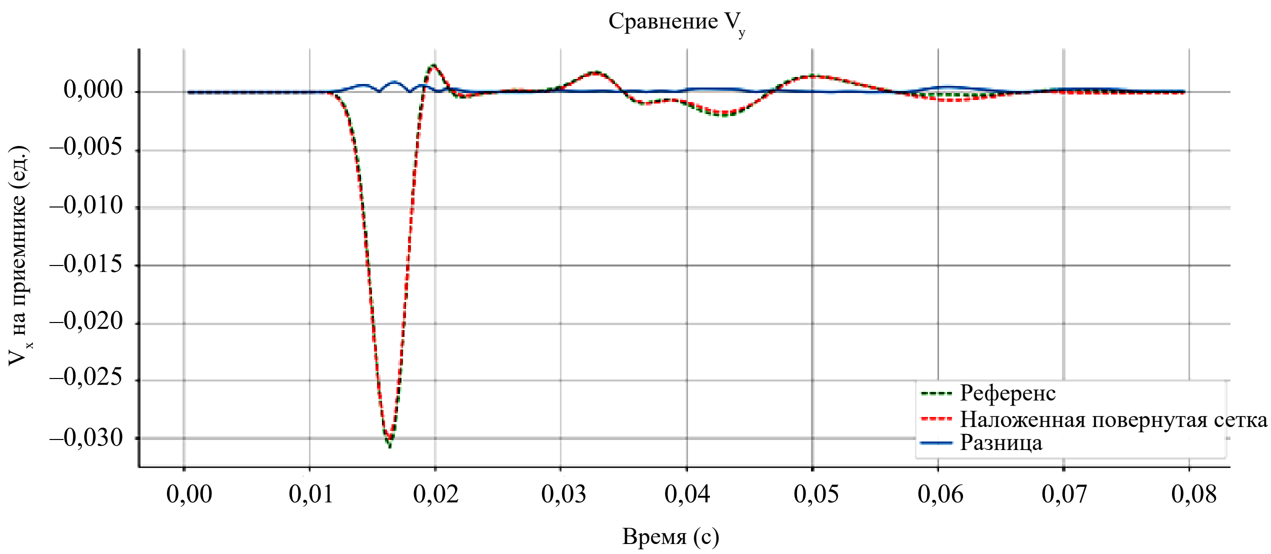


Рис. 3. Сравнение сигналов на приемниках над трещиной

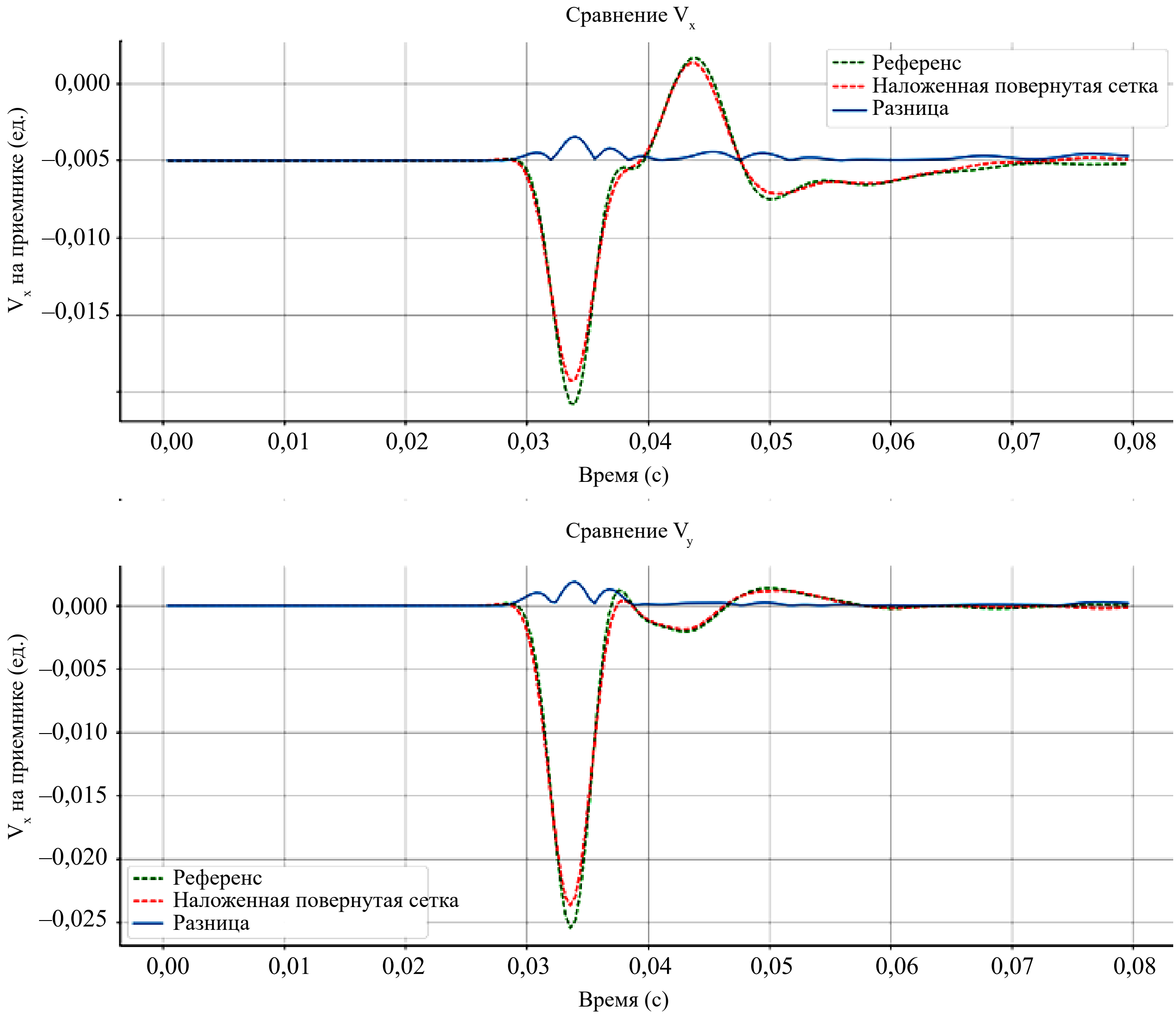


Рис. 4. Сравнение сигналов на приемниках под трещиной

Результаты исследования. В рамках настоящего исследования был проведен анализ анизотропии сейсмического ответа трещиноватого кластера в упругой геологической среде, взаимосвязанной с дисперсией наклона трещин. Подобный анализ, относящийся к анизотропии сейсмического ответа трещиноватого кластера, зависящего от изменяемого расстояния между трещинами и частоты источника, был проведен в работе [29]. Задача численного моделирования сейсмического ответа от трещиноватых кластеров субвертикальных трещин с использованием сеточно-характеристического метода была рассмотрена в ряде научных статей [30–33].

В рамках данного исследования было использовано фиксированное расстояние в 30 метров между соседними по вертикали и горизонтали трещинами. Всего было размещено 128 трещин, которые были организованы в 8 слоев и 16 колонок. Каждая трещина была наклонена под произвольным углом относительно вертикали и имела длину 10 метров. В каждом отдельном эксперименте углы поворота трещин соответствовали нормальному распределению со средним значением 45 градусов и дисперсией, варьирующейся от 0 до 20 градусов. Схема задачи и расположение кластера трещин в моделируемом полупространстве представлены на рисунке 5.

В ряде вычислительных экспериментов использовался источник плоской волны длиной 50 метров, который вертикально падал и был задан функцией Рикера. Шаг интеграции по времени составил $3 \cdot 10^{-4}$ секунды, общее количество шагов составило 3000. Для регистрации сейсмического отклика в экспериментах использовались 300 приемников, равномерно распределенных на глубине 6 метров от поверхности моделируемой области. Для выделения сейсмического отклика от волны, проходящей через приемники, в процессе обработки результатов показания приемников за время эксперимента, меньше 0,0801 секунды, были проигнорированы. Продольная скорость упругой волны в среде составляла $C_p = 3000$ м/с, поперечной — $C_s = 1500$ м/с, пространственный шаг сеток — $h = 2{,}0$.

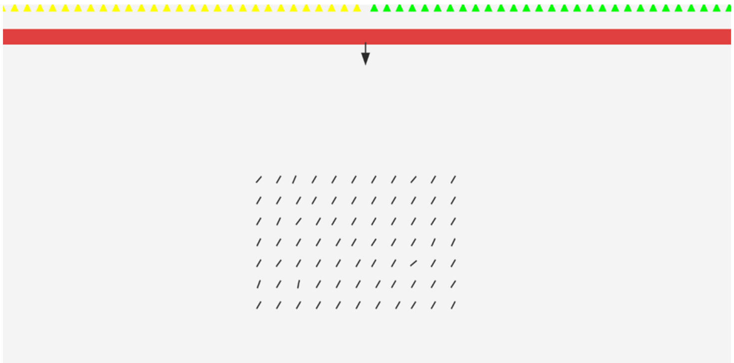


Рис. 5. Схема вычислительного эксперимента. Желтыми и зелеными треугольниками обозначены «левая» и «правая» группы приёмников

Для оценки анизотропии сейсмического отклика, используемые приёмники были разделены на две равные группы: группа приемников с индексом L располагалась слева от середины (по оси O_x) основной наложенной сетки, а группа приемников с индексом R — справа. Пусть скорость смещения среды в проекции на ось O_x, зарегистрированная в конце i-ого вычислительного шага, на j-ом виртуальном приемнике в группе L обозначается $V^{i,j}_{x,L}$ (для проекции на O_y , соответственно, $V^{i,j}_{y,L}$). Тогда анизотропию сейсмического отклика A в заданном эксперименте можем рассчитать по следующим формулам:

$$E_R = \sum_{i=1}^{150} \sum_{j=267}^{3000} \left(\left(V_{x,L}^{i,j} \right)^2 + \left(V_{y,L}^{i,j} \right)^2 \right),$$

$$E_L = \sum_{i=1}^{150} \sum_{j=267}^{3000} \left(\left(V_{x,R}^{i,j} \right)^2 + \left(V_{y,R}^{i,j} \right)^2 \right),$$

$$A = \frac{E_L - E_R}{E_L + E_R}.$$

Результаты серии вычислительных экспериментов представлены на рисунке 6.

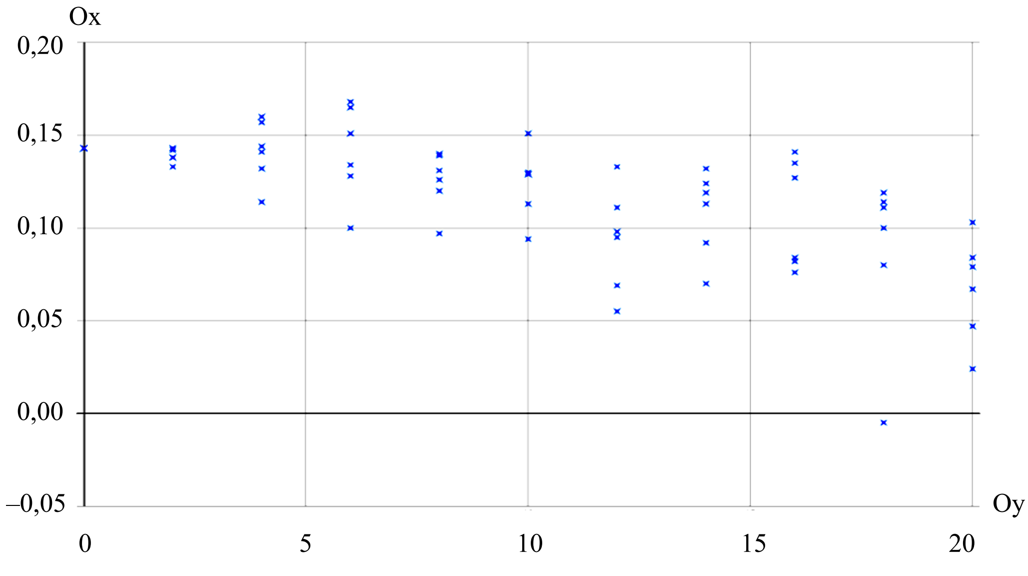


Рис. 6. Зависимость анизотропии от дисперсии наклона трещин в кластере

Обсуждение и заключения. Предложена модификация сеточно-характеристического метода с применением наложенных сеток для явного учета трещиноватых неоднородностей в гетерогенной геологической среде.

Проведено верификационное исследование, которое показало высокую точность предлагаемого подхода и не вносит значительной ошибки по сравнению с использованием классической реализации тонкой трещины Шонберга в сеточно-характеристическом методе и при этом расширяет ряд прикладных задач, доступных для численного моделирования данным методом.

Исследована зависимость анизотропии сейсмического отклика от трещиноватого кластера в зависимости от дисперсии угла наклона трещин в последнем. Полученная зависимость показывает значительный разброс результатов, что демонстрирует сложность обратной задачи сейсморазведки гетерогенных геологических структур.

В заключение можно сделать вывод, что использование наложенных сеток позволяет явно учитывать геологические неоднородности, такие как трещины, при численном решении задачи моделирования распространения упругих волн в геологической среде. Представленный подход к описанию неоднородностей обладает высоким потенциалом в вычислительной математике и вызывает интерес к его дальнейшему изучению.

Список литературы

1. Schoenberg M. Elastic Wave Behavior Across Linear Slip Interfaces. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1980;68:1516–21. https://doi.org/10.1121/1.385077

2. Pyrak-Nolte L.J., Myer L.R., Cook N.G.W. Anisotropy in Seismic Velocities and Amplitudes from Multiple Parallel Fractures. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 1990;95:11345–58. https://doi.org/10.1029/JB095IB07P11345

3. Chaur-Jian H., Schoenberg M. Elastic Waves Through a Simulated Fractured Medium. *Geophysics*. 1993;58:924–1060. https://doi.org/10.1190/1.1443487

4. Backus G.E. Long-Wave Elastic Anisotropy Produced by Horizontal Layering. *Journal of Geophysical Research*. 1962;67:4427–40. https://doi.org/10.1029/JZ067I011P04427

5. Zhang J. Elastic Wave Modeling in Fractured Media with an Explicit Approach. *Geophysics*. 2005;70. https://doi.org/10.1190/1.2073886

6. Slawinski R.A., Krebes E.S. Finite-Difference Modeling of SH-Wave Propagation in Nonwelded Contact Media. *Geophysics*. 2002;67:1656–63. https://doi.org/10.1190/1.1512753

7. Slawinski R.A., Krebes E.S. The Homogeneous Finite-Difference Formulation of the p-SV-Wave Equation of Motion. *Studia Geophysica Et Geodaetica*. 2002;46:731–51. https://doi.org/10.1023/A:1021133606779

8. Zhang J., Gao H. Elastic Wave Modelling in 3-d Fractured Media: An Explicit Approach. *Geophysical Journal International*. 2009;177:1233–41. https://doi.org/10.1111/J.1365-246X.2009.04151.X

9. Favorskaya A.V., Zhdanov M.S., Khokhlov N.I., et al. Modelling the wave phenomena in acoustic and elastic media with sharp variations of physical properties using the grid-characteristic method. *Geophysical Prospecting*. 2018;66(8):1485–1502.

10. Ruzhanskaya A., Khokhlov N. Modelling of Fractures Using the Chimera Grid Approach. In 2nd Conference on Geophysics for Mineral Exploration and Mining. *European Association of Geoscientists & Engineers*. 2018;1:1–5.

11. Berger M.J., Oliger J. Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. *Journal of Computational Physics*. 1984;53(3):484–512.

12. Steger J.L., Dougherty F.C., Benek J.A. *A chimera grid scheme*. 1983;5:55–70.

13. Steger J.L., Benek J.A. On the use of composite grid schemes in computational aerodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1987;64(1):301–320.

14. Chan W. Overset grid technology development at NASA Ames Research Center. *Computers & Fluids*. 2009; 38:496–503.

15. Mayer U.M., Popp A., Gerstenberger A., et al. 3D fluid–structure-contact interaction based on a combined XFEM FSI and dual mortar contact approach. *Computational Mechanics*. 2010;46(1):53–67.

16. Zhang Y., Yim S.C., Del Pin F.A nonoverlapping heterogeneous domain decomposition method for three-dimensional gravity wave impact problems. *Computers & Fluids*. 2015;106:154.

17. Nguyen V.T., Vu D.T., Park W.G., et al. Navier–Stokes solver for water entry bodies with moving Chimera grid method in 6DOF motions. *Computers & Fluids*. 2016;140:19–38.

18. Formaggia L., Vergara C., Zonca S. Unfitted extended finite elements for composite grids. *Computers & Mathematics with Applications*. 2018;76(4):893–904.

19. Лурье А. И. *Теория упругости*. Москва: Наука. 1970. 940 с.

20. Новацкий В. *Теория упругости*. Москва: МИР. 1975. 872 с.

21. Keiiti A., Richards P.G. *Quantitative Seismology*, 2nd ed. Quse. 2002;68:1546.

22. Randall J. LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. 2002. https://doi.org/10.1017/CBO9780511791253

23. Zhdanov M.S. *Geophysical Inverse Theory and Regularization Problems*. Elsevier Science Ltd. 2002;609.

24. Zhdanov M.S. *Inverse Theory and Applications in Geophysics*. Elsevier Inc. 2015. https://doi.org/10.1016/C2012-0-03334-0

25. Ivanov D.V., Kondaurov V.I., Petrov I.B., et al. Calculation of Dynamic Deformation and Distructure of Elastic-Plastic Body by Grid-Characteristic Methods. *Matematicheskoe modelirovanie*. 1990;2(11):10–29. http://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1124094

26. Golubev V.I., Petrov I.B., Khokhlov N.I. Numerical Simulation of Seismic Activity by the Grid-Characteristic Method. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2013;53:1523–1533. https://doi.org/10.1134/S0965542513100060

27. Magomedov K.M., Kholodov A.S. The Construction of Difference Schemes for Hyperbolic Equations Based on Characteristic Relations. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1969;9(2):158–76. https://doi.org/10.1016/0041-5553(69)90099-8

28. Petrov I.B., Khokhlov N.I. Modeling 3D Seismic Problems Using High-Performance Computing Systems. *Mathematical Models and Computer Simulations.* 2014;6:342–50. https://doi.org/10.1134/S2070048214040061

29. Kvasov I.E., Pankratov S.A., Petrov I.B. Numerical Study of Dynamic Processes in a Continuous Medium with a Crack Initiated by a Near-Surface Disturbance by Means of the Grid-Characteristic Method. *Mathematical Models and Computer Simulations.* 2011;3:399–409. https://doi.org/10.1134/S2070048211030070

30. Kvasov I.E., Petrov I.B. Numerical Study of the Anisotropy of Wave Responses from a Fractured Reservoir Using the Grid-Characteristic Method. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2012;4:336–43. https://doi.org/10.1134/S2070048212030064

31. Muratov M.V., Petrov I.B. Estimation of Wave Responses from Subvertical Macrofracture Systems Using a Grid Characteristic Method. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2013;5:479–91.

32. Golubev V.I., Petrov I.B., Khokhlov N.I. Numerical Simulation of Seismic Activity by the Grid-Characteristic Method. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2013;53:1523–33. https://doi.org/10.1134/S0965542513100060

33. Favorskaya A.V., Petrov I.B. The Use of Full-Wave Numerical Simulation for the Investigation of Fractured Zones. *Mathematical Models and Computer Simulations.* 2019;11:518–30. https://doi.org/10.1134/S2070048219040069

References

1. Schoenberg M. Elastic Wave Behavior Across Linear Slip Interfaces. *The Journal of the Acoustical Society of America.* 1980;68:1516–21. https://doi.org/10.1121/1.385077

2. Pyrak-Nolte LJ, Myer LR, Cook NGW. Anisotropy in Seismic Velocities and Amplitudes from Multiple Parallel Fractures. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 1990;95:11345–58. https://doi.org/10.1029/JB095IB07P11345

3. Chaur-Jian H, Schoenberg M. Elastic Waves Through a Simulated Fractured Medium. *Geophysics*.1993;58:924–1060. https://doi.org/10.1190/1.1443487

4. Backus GE. Long-Wave Elastic Anisotropy Produced by Horizontal Layering. *Journal of Geophysical Research*. 1962;67: 4427–40. https://doi.org/10.1029/JZ067I011P04427

5. Zhang J. Elastic Wave Modeling in Fractured Media with an Explicit Approach. *Geophysics*. 2005;70. https://doi.org/10.1190/1.2073886

6. Slawinski RA, Krebes ES. Finite-Difference Modeling of SH-Wave Propagation in Nonwelded Contact Media. *Geophysics*. 2002;67:1656–63. https://doi.org/10.1190/1.1512753

7. Slawinski RA, Krebes ES. The Homogeneous Finite-Difference Formulation of the p-SV-Wave Equation of Motion. *Studia Geophysica Et Geodaetica.* 2002;46:731–51. https://doi.org/10.1023/A:1021133606779

8. Zhang J, Gao H. Elastic Wave Modelling in 3-d Fractured Media: An Explicit Approach. *Geophysical Journal International.* 2009;177:1233–41. https://doi.org/10.1111/J.1365-246X.2009.04151.X

9. Favorskaya AV, Zhdanov MS, Khokhlov NI, et al. Modelling the wave phenomena in acoustic and elastic media with sharp variations of physical properties using the grid-characteristic method. *Geophysical Prospecting.* 2018;66(8):1485–1502.

10. Ruzhanskaya A, Khokhlov N. Modelling of Fractures Using the Chimera Grid Approach. In 2nd Conference on Geophysics for Mineral Exploration and Mining. *European Association of Geoscientists & Engineers*. 2018;1:1–5.

11. Berger MJ, Oliger J. Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. *Journal of Computational Physics.* 1984;53(3):484–512.

12. Steger JL, Dougherty FC, Benek JA. *A chimera grid scheme.* 1983;5:55–70.

13. Steger JL, Benek JA. On the use of composite grid schemes in computational aerodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1987;64(1):301–320.

14. Chan W. Overset grid technology development at NASA Ames Research Center. *Computers & Fluids*. 2009;38:496–503.

15. Mayer UM, Popp A, Gerstenberger A, et al. 3D fluid–structure-contact interaction based on a combined XFEM FSI and dual mortar contact approach. *Computational Mechanics*. 2010;46(1):53–67.

16. Zhang Y, Yim SC, Del Pin F. A nonoverlapping heterogeneous domain decomposition method for three-dimensional gravity wave impact problems. *Computers & Fluids*. 2015;106:154.

17. Nguyen VT, Vu DT, Park WG, et al. Navier–Stokes solver for water entry bodies with moving Chimera grid method in 6DOF motions. *Computers & Fluids*. 2016;140:19–38.

18. Formaggia L, Vergara C, Zonca S. Unfitted extended finite elements for composite grids. *Computers & Mathematics with Applications.* 2018;76(4):893–904.

19. Lurie AI. *Theory of Elasticity*. Moscow: Nauka. 1970. 940 p. (In Russ.).

20. Nowacki V. *Theory of Elasticity*. Moscow: MIR. 1975. 872 p. (In Russ.).

21. Keiiti A, Richards PG. *Quantitative Seismology*, 2nd ed. Quse. 2002;68:1546.

22. Randall J LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. 2002. https://doi.org/10.1017/CBO9780511791253

23. Zhdanov MS. *Geophysical Inverse Theory and Regularization Problems*. Elsevier Science Ltd. 2002;609.

24. Zhdanov MS. *Inverse Theory and Applications in Geophysics.* Elsevier Inc. 2015. https://doi.org/10.1016/C2012-0-03334-0

25. Ivanov DV, Kondaurov VI, Petrov IB, et al. Calculation of Dynamic Deformation and Distructure of Elastic-Plastic Body by Grid-Characteristic Methods. *Mathematical Modeling.* 1990;2:11–29. http://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1124094

26. Golubev VI, Petrov IB, Khokhlov NI. Numerical Simulation of Seismic Activity by the Grid-Characteristic Method. Computational *Mathematics and Mathematical Physics*. 2013;53:1523–1533. https://doi.org/10.1134/S0965542513100060

27. Magomedov KM, Kholodov AS. The Construction of Difference Schemes for Hyperbolic Equations Based on Characteristic Relations. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1969;9(2):158–76. https://doi.org/10.1016/0041-5553(69)90099-8

28. Petrov IB, Khokhlov NI. Modeling 3D Seismic Problems Using High-Performance Computing Systems. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2014;6:342–50. https://doi.org/10.1134/S2070048214040061

29. Kvasov IE, Pankratov SA, Petrov IB. Numerical Study of Dynamic Processes in a Continuous Medium with a Crack Initiated by a Near-Surface Disturbance by Means of the Grid-Characteristic Method. *Mathematical Models and Computer Simulations.* 2011;3:399–409. https://doi.org/10.1134/S2070048211030070

30. Kvasov IE, Petrov IB. Numerical Study of the Anisotropy of Wave Responses from a Fractured Reservoir Using the Grid-Characteristic Method. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2012;4:336–43. https://doi.org/10.1134/S2070048212030064

31. Muratov MV, Petrov IB. Estimation of Wave Responses from Subvertical Macrofracture Systems Using a Grid Characteristic Method. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2013;5:479–91.

32. Golubev VI, Petrov IB, Khokhlov NI. Numerical Simulation of Seismic Activity by the Grid-Characteristic Method. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2013;53:1523–33. https://doi.org/10.1134/S0965542513100060

33. Favorskaya AV, Petrov IB. The Use of Full-Wave Numerical Simulation for the Investigation of Fractured Zones. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2019;11:518–30. https://doi.org/10.1134/S2070048219040069

Об авторах:

Иван Анатольевич Митьковец, аспирант, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (РФ, 117303, г. Москва, ул. Керченская, 1А, корп. 1), ORCID, mitkovets@phystech.edu

Николай Игоревич Хохлов, доцент, заведующий кафедрой информатики и вычислительной математики, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (РФ, 117303, г. Москва, ул. Керченская, 1А, корп. 1), кандидат физико-математических наук, ORCID, Math-Net.Ru, elibrary.ru, ResearcherID, k_h@inbox.ru

Заявленный вклад соавторов:
все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Поступила в редакцию 24.07.2023
Поступила после рецензирования 16.08.2023
Принята к публикации 17.08.2023

Конфликт интересов
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Ivan A Mitkovets, PhD student, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University) (bldg. 1, 1A, Kerchenskaya St., Moscow, 117303, RF), ORCID, mitkovets@phystech.edu

Nikolay I Khokhlov, Associate Professor, Head of the Department of Computer Science and Computational Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University) (bldg. 1, 1A, Kerchenskaya St., Moscow, 117303, RF), Candidate of physical and mathematical Sciences, ORCID, Math-Net.Ru, elibrary.ru, ResearcherID, k_h@inbox.ru

Claimed contributorship:
all authors have made an equivalent contribution to the preparation of the publication.

Received 24.07.2023
Revised 16.08.2023
Accepted 17.08.2023

Conflict of interest statement
the authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
MATHEMATICAL MODELING

Check for updates

УДК 519.6

Научная статья

https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-39-48

Математическая модель транспорта трехкомпонентной взвеси

А.И. Сухинов[1], **И.Ю. Кузнецова**[1,2]

[1]Донской государственный технический университет, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

[2]НИЦ супер-ЭВМ и нейрокомпьютеров, Российская Федерация, Ростовская область, г. Таганрог, пер. Итальянский, 106

inna.yu.kuznetsova@gmail.com

Аннотация

Введение. При проведении дноуглубительных работ в рамках реализации масштабных инженерных проектов требуется прогнозирование зон осаждения взвеси для оценки и минимизации негативного влияния на экосистему водоема. Для решения подобных задач необходимо построение математической модели, учитывающей множество факторов, оказывающих существенное влияние на точность прогнозов. Целью работы является построение математической модели транспорта многокомпонентной взвеси, учитывающей состав грунта (различный диаметр частиц взвеси), скорость течения водного потока, сложную геометрию береговой линии и дна, ветровые напряжения и трение о дно, турбулентный обмен и др.

Материалы и методы. Описана математическая модель транспорта многокомпонентной взвеси и аппроксимация предложенной непрерывной модели со вторым порядком точности относительно шагов пространственной сетки с учетом граничных условий второго и третьего рода. Аппроксимация модели гидродинамики представлена на основе схем расщепления по физическим процессам, которая обеспечивает выполнение закона сохранения массы в разностной схеме.

Результаты исследования. Предлагаемая математическая модель легла в основу разработанного программного комплекса, позволяющего моделировать процесс осаждения многокомпонентной взвеси. Приведены результаты работы программного комплекса на модельной задаче осаждения трехкомпонентной взвеси в процессе дампинга грунта при проведении дноуглубительных работ.

Обсуждения и заключения. Описана программная математическая модель транспорта трехкомпонентной взвеси. Разработанный программный комплекс позволяет моделировать процесс осаждения взвешенных частиц различного диаметра на дно и оценивать его влияние на рельеф и изменение состава дна. Разработанный программный комплекс также позволяет анализировать процесс движения наносов в случае взмучивания многокомпонентных донных отложений водоема, вызывающий вторичное загрязнение водоема.

Ключевые слова: транспорт взвеси, многокомпонентная взвесь, трехмерная модель гидродинамики, схемы расщепления, численные методы

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00295. https://rscf.ru/project/22-11-00295/

Для цитирования. Сухинов А.И., Кузнецова И.Ю. Математическая модель транспорта трехкомпонентной взвеси. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):39–48. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-39-48

Original article

Mathematical Model of Three-Component Suspension Transport

Alexander I Sukhinov[1], **Inna Yu Kuznetsova**[1,2]

[1]Don State Technical University, 1, Gagarin Square, Rostov-on-Don, Russian Federation

[2]Supercomputers and Neurocomputers Research Center, 106, Italian Lane, Taganrog, Russian Federation

inna.yu.kuznetsova@gmail.com

Abstract

Introduction. Prediction of suspension deposition zones is required to assess and minimize the negative impact on the ecosystem of the reservoir during dredging within the framework of large-scale engineering projects, prediction of suspension deposition zones is required to assess and minimize the negative impact on the ecosystem of the reservoir. It is necessary to build a mathematical model that takes into account many factors that have a significant impact on the accuracy of forecasts. The aim of the work is to construct a mathematical model of transport of multicomponent suspension, taking into account the composition of the soil (different diameter of the suspension particles), the flow velocity of the water flow, the complex geometry of the coastline and bottom, wind stresses and friction on the bottom, turbulent exchange, etc.

Materials and Methods. A mathematical model for the transport of a multicomponent suspension and an approximation of the proposed continuous model with the second order of accuracy with respect to the steps of the spatial grid are described, considering the boundary conditions of the Neumann and Robin type. The approximation of the hydrodynamics model is obtained based on splitting schemes by physical processes, which guarantee fulfillment mass conservation for discrete model.

Results. The proposed mathematical model formed the basis of the developed software package that allows to simulate the process of sedimentation of a multicomponent suspension. The results of the work of the software package on the model problem of sedimentation of a three-component suspension in the process of soil dumping during dredging are presented.

Discussions and Conclusions. The mathematical model of transport of three-component suspension is described and software implemented. The developed software allows to simulate the process of deposition of suspended particles of various diameters on the bottom, and to evaluate its effect on the bottom topography and changes in the bottom composition. The developed software package also allows to analyze the process of sediment movement in the case of resuspension of multicomponent bottom sediments of the reservoir, which causes secondary pollution of the reservoir.

Keywords: suspension transport, multicomponent suspension, three-dimensional hydrodynamics model, splitting schemes, numerical methods

Funding information. The research was carried out at the expense of the grant of the Russian Science Foundation no. 22-11-00295. https://rscf.ru/project/22-11-00295/

For citation. Sukhinov AI, Kuznetsova IYu. Mathematical Model of Three-Component Suspension Transport. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):39–48. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-39-48

Введение. Реализация масштабных инженерных проектов, таких как строительство мостов, расширение акватории, доступной для судоходства, требует проведения работ, оказывающих существенное влияние как на рельеф дна, так и на экосистему водоема в целом. Например, при проведении дноуглубительных работ в воду поступает значительное количество взвеси, которая в процессе оседания на дно или вторичного взмучивания может негативно повлиять на продукционно-деструкционные процессы водной экосистемы [1–2]. Для оценки возможного ущерба, наносимого экосистеме в процессе дампинга грунта при проведении дноуглубительных работ, необходимо предварительно оценить области акватории, в которых будет происходить оседание взвеси и в которых возможно ее взмучивание, что ведет к вторичному загрязнению водного объекта. Для прогнозирования зон осаждения взвешенных частиц предложена математическая модель транспорта взвеси на основе системы начально-краевых задач, включающей расчет гидродинамических характеристик акватории и транспорта взвеси.

Для предложенной трехмерной модели транспорта многокомпонентной взвеси описан подход к аппроксимации непрерывной модели со вторым порядком точности относительно шагов пространственной сетки с учетом граничных условий второго и третьего рода. Предложенная математическая модель транспорта взвешенных частиц дополнена трехмерной моделью гидродинамики, позволяющей рассчитывать поля вектора скорости водного потока [3–4]. Предлагаемая математическая модель легла в основу разработанного программного комплекса, позволяющего моделировать процесс осаждения многокомпонентной взвеси. Приведены результаты работы программного комплекса на модельной задаче осаждения трехкомпонентной взвеси в процессе дампинга грунта при проведении дноуглубительных работ.

Материалы и методы

1. Постановка задачи. Для построения математической модели транспорта многокомпонентной взвеси воспользуемся уравнением диффузии-конвекции, которое может быть записано в следующем виде [3]:

$$(c_r)'_t + (uc_r)'_x + (vc_r)'_y + ((w + w_{s,r})\, c_r)'_z = \left(\mu (c_r)'_x\right)'_x + \left(\mu (c_r)'_y\right)'_y + \left(\nu (c_r)'_z\right)'_z + F_r\,, \tag{1}$$

где c_r — концентрация r-ой фракции взвеси, мг/л; $\mathbf{V}=\{u,v,w\}$ — компоненты вектора скорости течения водного потока, м/с; $w_{s,r}$ — скорость осаждения r-ой фракции взвеси, м/с; μ, ν — горизонтальная и вертикальная составляющие коэффициента турбулентного обмена, соответственно, м^2/с; F_r — функция, описывающая интенсивность распределения источников r-ой фракции взвеси, мг/(л·с).

Выражение (1) рассматривается при следующих начальных $c_r(x, y, z, 0) = c_{0r}(x, y, z)$ и граничных условиях:

– на свободной поверхности: $(c^n)'_z = 0$

– вблизи поверхности дна: $\nu (c_r)'_z = -w_{s,r} c_r$;

– на боковой поверхности: $(c_r)'_{\mathbf{n}} = 0$, если $(\mathbf{V}, \mathbf{n}) \geq 0$ и $\mu (c_r)'_{\mathbf{n}} = (\mathbf{V}, \mathbf{n}) c_r$, если $(\mathbf{V}, \mathbf{n}) < 0$, где $(\mathbf{V}, \mathbf{n})$ — нормальная составляющая вектора скорости, $\mathbf{n}$ вектор нормали, направленный внутрь расчетной области.

Уравнение диффузии-конвекции (1) дополним трехмерной моделью гидродинамики мелководных водоемов [5] для расчета вектора скорости течения водного потока:

– уравнение движения (Навье-Стокса):

$$\begin{aligned} u'_t + uu'_x + vu'_y + wu'_z &= -P'_x/\rho + (\mu u'_x)'_x + (\mu u'_y)'_y + (\nu u'_z)'_z\,,\\ v'_t + uv'_x + vv'_y + wv'_z &= -P'_y/\rho + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (\nu v'_z)'_z\,,\\ w'_t + uw'_x + vw'_y + ww'_z &= -P'_z/\rho + (\mu w'_x)'_x + (\mu w'_y)'_y + (\nu w'_z)'_z + g\,, \end{aligned} \tag{2}$$

– уравнение неразрывности в случае переменной плотности:

$$\rho'_t + (\rho u)'_x + (\rho v)'_y + (\rho w)'_z = 0. \tag{3}$$

где P — давление, Па; ρ — плотность, кг/м^3; g — ускорение свободного падения, м/с^2.

Система уравнений (2)–(3) рассматривается при следующих граничных условиях:

– на входе: $u = u_0, v = v_0, P'_{\mathbf{n}} = 0, V'_{\mathbf{n}} = 0$;

– боковая граница (берег и дно): $\rho\mu u'_{\mathbf{n}} = -\tau_x, \rho\mu v'_{\mathbf{n}} = -\tau_y, V_{\mathbf{n}} = 0, P'_{\mathbf{n}} = 0$;

– верхняя граница: $\rho\mu u'_{\mathbf{n}} = -\tau_x$, $\rho\mu v'_{\mathbf{n}} = -\tau_y$, $w = -\omega - P'_t/(\rho g)$, $P'_{\mathbf{n}} = 0$,

где ω — интенсивность испарения жидкости, τ_x, τ_y — составляющие тангенциального напряжения.

2. Аппроксимация задачи транспорта взвешенных частиц. Не теряя общности, рассмотрим аппроксимацию трехмерной задачи транспорта однокомпонентной взвеси на основе выражения (1) (для каждой отдельной фракции уравнение записывается аналогично):

$$c'_t + (uc)'_x + (vc)'_y + (wc)'_z = \left(\mu c'_x\right)'_x + \left(\mu c'_y\right)'_y + \left(\nu c'_z\right)'_z\,, \tag{4}$$

где компонента скорости w неявным образом учитывает скорость осаждения рассматриваемой фракции взвеси w_s.

Введем равномерную сетку по времени $\overline{\omega}_\tau = \left\{t^n = n\tau;\, n = \overline{0, N_t};\, N_t\tau = T\right\}$, где τ — шаг по времени, N_t — количество временных слоев, T — длительность интервала моделирования.

Предположим, что расчетная область вписана в параллелепипед $G = \left\{0 < x < L_x, 0 < y < L_y, 0 < z < L_z\right\}$. Замыкание области G получим путем присоединения к G граней параллелепипеда, то есть определим как $\overline{G} = \left\{0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq L_z\right\}$.

Таким образом приходим к цепочке начально-краевых задач:

$$(c^n)'_t + \operatorname{div}\left(\mathbf{V} \cdot c^n\right) = \operatorname{div}\left(\mathbf{k} \cdot \operatorname{grad}\ c^n\right), \tag{5}$$

где $\mathbf{k} = \{\mu, \mu, \nu\}$ — коэффициент турбулентного обмена, $(x, y, z, t) \in G \times [0 < t \leq T]$, $t_{n-1} < t \leq t_n$, $cn\ (x, y, z, t_{n-1}) = c^{n-1}$ (x, y, z, t_{n-1}), (x, y, z, t_{n-1}), $(x, y, z) \in G$.

При этом начальные и граничные условия запишутся в виде:

– начальное условие: $c\ (x, y, z, 0) = c_0\ (x, y, z)$, $(x, y, z) \in \overline{G}$;

– граничное условие на свободной поверхности: $(c_r)'_z = 0;$, $(x, y, z) \in \Sigma_0$;

– граничное условие на дне: $\nu (c^n)'_z = -w_s c^n$, $(x, y, z) \in \Sigma_H$;

– граничное условие на боковой поверхности: $(c^n)'_{\mathbf{n}} = 0$, если $(\mathbf{V}, \mathbf{n}) \geq 0$ и $\mu (c_r)'_{\mathbf{n}} = (\mathbf{V}, \mathbf{n}) c_r$, если $(\mathbf{V}, \mathbf{n}) < 0$,

где $\Sigma_0 = \{0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, z = 0\}$ — верхняя грань параллелепипеда $\overline{G}$, $\Sigma_H = \{0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, z = L_z\}$ — нижняя грань параллелепипеда $\overline{G}$.

Запишем член, описывающий конвективный перенос взвешенных веществ в симметричной форме. Такой подход при дискретизации задачи позволит построить разностный оператор, обладающий свойством кососимметричности [6]:

$$\mathrm{div}\left(\mathbf{V}\cdot c^n\right)=\frac{1}{2}\left[u\frac{\partial c^n}{\partial x}+v\frac{\partial c^n}{\partial y}+w\frac{\partial c^n}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(uc^n\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(vc^n\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(wc^n\right)\right]. \tag{6}$$

Для аппроксимации задачи (5) введем равномерную расчетную сетку $\overline{\omega}=\overline{\omega}_x\times\overline{\omega}_y\times\overline{\omega}_z$,

$$\overline{\omega}_x=\left\{x_i: x_i=ih_x;\ i=\overline{0,N_x};\ h_xN_x=L_x\right\},$$
$$\overline{\omega}_y=\left\{y_j: y_j=jh_y;\ j=\overline{0,N_y};\ h_yN_y=L_y\right\},$$
$$\overline{\omega}_z=\left\{z_k: z_k=kh_z;\ k=\overline{0,N_z};\ h_zN_z=L_z\right\},$$

где h_x, h_y, h_z — шаги по пространственным координатным направлениям O_x, O_y и O_z, соответственно, N_x, N_y, N_z — количество узлов расчетной сетки по каждому из пространственных направлений, L_x, L_y, L_z — длина расчетных интервалов по каждому из пространственных направлений.

Множество внутренних узлов расчетной сетки обозначим как ω_x, ω_y, ω_z.

Аппроксимацию задачи (5) на пространственно-временной сетке $\overline{\omega}_\tau\times\overline{\omega}$ выполним с заданием скоростей (коэффициентов конвективного переноса) в узлах сеток, сдвинутых на полшага по координатным направлениям O_x и O_y.

Для оператора конвективного переноса, заданного в симметричной форме (6) в уравнении (5), имеем:

$$\begin{aligned}Cc^n\equiv&\frac{1}{2h_x}\left(u^n\left(x+0{,}5h_x,y,z\right)\cdot\overline{c}^n\left(x+h_x,y,z\right)-u^n\left(x-0{,}5h_x,y,z\right)\cdot\overline{c}^n\left(x-h_x,y,z\right)\right)+\\&+\frac{1}{2h_y}\left(v^n\left(x,y+0{,}5h_y,z\right)\cdot\overline{c}^n\left(x,y+h_y,z\right)-v^n\left(x,y-0{,}5h_y,z\right)\cdot\overline{c}^n\left(x,y-h_y,z\right)\right)+\\&+\frac{1}{2h_z}\left(w^n\left(x,y,z+0{,}5h_z\right)\cdot\overline{c}^n\left(x,y,z+h_z\right)-w^n\left(x,y,z-0{,}5h_z\right)\cdot\overline{c}^n\left(x,y,z-h_z\right)\right),\end{aligned} \tag{7}$$

где $\overline{c}^n$ обозначает сеточную функцию $\overline{c}^n\equiv c(x,y,z,t_n)$, $(x, y, z)\in\omega$, а через c^n — достаточно гладкую функцию непрерывных переменных (x, y, z, t).

Для оператора диффузионного переноса в уравнении (5) имеем:

$$\begin{aligned}Dc^n\equiv&\frac{1}{h_x}\left(\mu\left(x+0{,}5h_x,y,z\right)\frac{\overline{c}^n\left(x+h_x,y,z\right)-\overline{c}^n\left(x,y,z\right)}{h_x}-\right.\\&\left.-\mu\left(x-0{,}5h_x,y,z\right)\frac{\overline{c}^n\left(x,y,z\right)-\overline{c}^n\left(x-h_x,y,z\right)}{h_x}\right)+\frac{1}{h_y}\left(\mu\left(x,y+0{,}5h_y,z\right)\frac{\overline{c}^n\left(x,y+h_y,z\right)-\overline{c}^n\left(x,y,z\right)}{h_y}-\right.\\&\left.-\mu\left(x,y-0{,}5h_y,z\right)\frac{\overline{c}^n\left(x,y,z\right)-\overline{c}^n\left(x,y-h_y,z\right)}{h_y}\right)+\frac{1}{h_z}\left(\nu\left(x,y,z+0{,}5h_z\right)\frac{\overline{c}^n\left(x,y,z+h_z\right)-\overline{c}^n\left(x,y,z\right)}{h_z}-\right.\\&\left.-\nu\left(x,y,z-0{,}5h_z\right)\cdot\frac{\overline{c}^n\left(x,y,z\right)-\overline{c}^n\left(x,y,z-h_z\right)}{h_z}\right).\end{aligned} \tag{8}$$

С учетом записанных аппроксимаций (7)–(8) получим следующий вид аппроксимации уравнения (5) во внутренних узлах сетки:

$$\begin{aligned}&\frac{\overline{c}^n-\overline{c}^{n-1}}{\tau}+\frac{1}{2h_x}\left(u^n\left(x+0{,}5h_x,y,z\right)\overline{c}^n\left(x+h_x,y,z\right)-u^n\left(x-0{,}5h_x,y,z\right)\overline{c}^n\left(x-h_x,y,z\right)\right)+\\&+\frac{1}{2h_y}\left(v^n\left(x,y+0{,}5h_y,z\right)\overline{c}^n\left(x,y+h_y,z\right)-v^n\left(x,y-0{,}5h_y,z\right)\overline{c}^n\left(x,y-h_y,z\right)\right)+\\&+\frac{1}{2h_z}\left(w^n\left(x,y,z+0{,}5h_z\right)\overline{c}^n\left(x,y,z+h_z\right)-w^n\left(x,y,z-0{,}5h_z\right)\overline{c}^n\left(x,y,z-h_z\right)\right)=\\&=\frac{1}{h_x}\left(\mu\left(\mathrm{x}+0{,}5h_x,y,z\right)\frac{\overline{c}^n\left(x+h_x,x,z\right)-\overline{c}^n\left(x,y,z\right)}{h_x}-\mu\left(x-0{,}5h_x,y,z\right)\frac{\overline{c}^n\left(x,y,z\right)-\overline{c}^n\left(x-h_x,y,z\right)}{h_x}\right)+\\&+\frac{1}{h_y}\left(\mu\left(x,y+0{,}5h_y,z\right)\frac{\overline{c}^n\left(x,y,z\right)-\overline{c}^n\left(x,y,z\right)}{h_y}-\mu\left(x,y-0{,}5h_y,z\right)\frac{\overline{c}^n\left(x,y,z\right)-\overline{c}^n\left(x,y-h_y,z\right)}{h_y}\right)+\\&+\frac{1}{h_z}\left(\nu\left(x,y,z+0{,}5h_z\right)\cdot\frac{\overline{c}^n\left(x,y,z+h_z\right)-\overline{c}^n\left(x,y,z\right)}{h_z}-\nu\left(x,y,z-0{,}5h_z\right)\frac{\overline{c}^n\left(x,y,z\right)-\overline{c}^n\left(x,y,z-h_z\right)}{h_z}\right).\end{aligned} \tag{9}$$

Дополним полученную аппроксимацию (9) начальными и граничными условиями. Для задания граничных условий на дне, свободной и боковой поверхностях рассматриваемой области $\overline{G}$ удобно ввести расширенную сетку [7] $\overline{\omega}^* = \overline{\omega}_x^* \times \overline{\omega}_y^* \times \overline{\omega}_z^*$,
где:

$$\overline{\omega}_x^* = \left\{x_i : x_i = ih_x;\ i = \overline{-1, N_x+1};\ h_x N_x = L_x\right\},$$

$$\overline{\omega}_y^* = \left\{y_j : y_j = jh_y;\ j = \overline{-1, N_y+1};\ h_y N_y = L_y\right\},$$

$$\overline{\omega}_z^* = \left\{z_k : z_k = kh_z;\ k = \overline{-1, N_z+1};\ h_z N_z = L_z\right\}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что:

$$\overline{c}^n(x,y,z) = 0,\ (x,y,z) \in \overline{\omega}^* \setminus \overline{\omega}, \tag{10}$$

где $\overline{\omega}^* \setminus \overline{\omega}$ — граничные узлы сетки $\overline{\omega}^*$.

Также считаем известными значения компонент вектора скоростей водной среды в узлах сетки $\overline{\omega}^* \setminus \overline{\omega}$ с дробными значениями индексов. Для узлов сетки $\overline{\omega}^* \setminus \overline{\omega}$, которые находятся вне водоема, значения компонент вектора скорости задаются равными нулю.

В случае потоков на боковых гранях области G, совпадающих по направлению с внешними нормалями к граням (случай $(\mathbf{V}, \mathbf{n}) \geq 0$), имеют место граничные условия Неймана. Данный случай можно записать в виде:

$$\begin{gathered} u^n(0{,}5h_x, y, z) + u^n(-0{,}5h_x, y, z) < 0, \\ u^n(L_x - 0{,}5h_x, y, z) + u^n(L_x + 0{,}5h_x, y, z) > 0, \\ v^n(x, 0{,}5h_y, z) + v^n(x, -0{,}5h_y, z) < 0, \\ v^n(x, 0{,}5h_y, z) + v^n(x, -0{,}5h_y, z) < 0, \end{gathered} \tag{11}$$

Запишем аппроксимацию граничных условий второго рода для оператора конвективного переноса.

Рассмотрим случай $x = 0,\ 0 < y < L_y,\ 0 < z < L_z$. В этом случае в качестве разностной аппроксимации конвективного члена можно рассматривать выражение:

$$\frac{1}{2h_x}\left(u^n(0{,}5h_x, y, z)\overline{c}^n(h_x, y, z) - u^n(-0{,}5h_x, y, z)\overline{c}^n(-h_x, y, z)\right). \tag{12}$$

Выражение (12) аппроксимирует конвективный член с погрешностью $O(h_x^2)$. Помимо формы (12) аппроксимацию конвективного члена с погрешностью $O(h_x^2)$ можно записать в виде:

$$\frac{\overline{c}^n(h_x, y, z) - \overline{c}^n(-h_x, y, z)}{2h_x} = 0,$$

откуда получаем:

$$\overline{c}^n(-h_x, y, z) = \overline{c}^n(h_x, y, z). \tag{13}$$

Из аппроксимаций (12) и (13) получаем:

$$C_x\left(c^n\right)\Big|_{x=0} \equiv \frac{1}{2h_x}\overline{c}^n(h_x, y, z)\left(u^n(0{,}5h_x, y, z) - u^n(-0{,}5h_x, y, z)\right). \tag{14}$$

Аналогично записываются случаи $x = L_x$, $y = 0$, $y = Ly$, $z = 0$ (граничное условие на свободной поверхности). Получим:

$$C_x\left(c^n\right)\Big|_{x=L_x} \equiv \frac{1}{2h_x}\cdot\overline{c}^n(L_x - h_x, y, z)\cdot\left(u^n(L_x + 0{,}5h_x, y, z) - u^n(L_x - 0{,}5h_x, y, z)\right), \tag{15}$$

$$C_y\left(c^n\right)\Big|_{y=0} \equiv \frac{1}{2h_y}\cdot\overline{c}^n(x, h_y, z)\cdot\left(v^n(x, 0{,}5h_y, z) - v^n(x, -0{,}5h_y, z)\right), \tag{16}$$

$$C_y\left(c^n\right)\Big|_{y=L_y} \equiv \frac{1}{2h_y}\cdot\overline{c}^n(x, L_y - h_y, z)\cdot\left(v^n(x, L_y + 0{,}5h_y, z) - v^n(x, L_y - 0{,}5h_y, z)\right), \tag{17}$$

$$C_z\left(c^n\right)\Big|_{z=0} \equiv \frac{1}{2h_z}\cdot\overline{c}^n(x, y, h_z)\cdot\left(w^n(x, y, 0{,}5h_z) - w^n(x, y, -0{,}5h_z)\right). \tag{18}$$

Запишем аппроксимацию граничных условий второго рода для оператора диффузионного переноса.

Рассмотрим случай $x = 0,\ 0 < y < L_y,\ 0 < z < L_z$. В этом случае в качестве разностной аппроксимации диффузионного члена на расширенной сетке можно рассматривать выражение:

$$D_x\left(c^n\right)\Big|_{x=0} \equiv \frac{1}{h_x}\left(\mu(0{,}5h_x, y, z)\frac{\overline{c}^n(h_x, y, z) - \overline{c}^n(0, y, z)}{h_x} - \right. \\ \left. - \mu(-0{,}5h_x, y, z)\cdot\frac{\overline{c}^n(0, y, z) - \overline{c}^n(-h_x, y, z)}{h_x}\right). \tag{19}$$

При выполнении первого условия из (11) получаем, что $\bar{c}^n(-h_x, y, z) = \bar{c}^n(h_x, y, z)$. Тогда с учетом последнего равенства и выражения (19), получаем следующую аппроксимацию оператора диффузионного переноса в случае $x = 0$, $0 < y < L_y$, $0 < z < L_z$:

$$D_x\left(c^n\right)\Big|_{x=0} \equiv \frac{1}{h_x^2}\Big(\big(\mu(0{,}5h_x, y, z) + \mu(-0{,}5h_x, y, z)\big)\big(\bar{c}^n(h_x, y, z) - \bar{c}^n(0, y, z)\big)\Big). \tag{20}$$

Аналогично записываются случаи $x = L_x$, $y = 0$, $y = L_y$. Например, в случае $x = L_x$, $0 < y < L_y$, $0 < z < L_z$, при выполнении второго условия из (11) и с учетом равенства $\bar{c}^n(L_x + h_x, y, z) = \bar{c}^n(L_x - h_x, y, z)$, получаем:

$$D_x\left(c^n\right)\Big|_{x=L_x} \equiv \frac{1}{h_x^2}\Big(\big(\mu(L_x + 0{,}5h_x, y, z) + \mu(L_x - 0{,}5h_x, y, z)\big)\big(\bar{c}^n(L_x - h_x, y, z) - \bar{c}^n(L_x, y, z)\big)\Big). \tag{21}$$

Аналогично для $y = 0$ и $y = L_y$:

$$D_y\left(c^n\right)\Big|_{y=0} \equiv \frac{1}{h_y^2}\Big(\big(\mu(x, 0{,}5h_y, z) + \mu(x, -0{,}5h_y, z)\big)\big(\bar{c}^n(x, h_y, z) - \bar{c}^n(x, 0, z)\big)\Big), \tag{22}$$

$$D_y\left(c^n\right)\Big|_{y=L_y} \equiv \frac{1}{h_y^2}\Big(\big(\mu(x, L_y + 0{,}5h_y, z) + \mu(x, L_y - 0{,}5h_y, z)\big)\big(\bar{c}^n(x, L_y - h_y, z) - \bar{c}^n(x, L_y, z)\big)\Big). \tag{23}$$

Для свободной поверхности (случай $y = 0$) с учетом $\nu(x, y, -0{,}5h_z) = 0$ аппроксимация диффузионного оператора запишется в виде:

$$D_z\left(c^n\right)\Big|_{z=0} \equiv \frac{1}{h_z^2}\nu(x, y, 0{,}5h_z)\big(\bar{c}^n(x, y, h_z) - \bar{c}^n(x, y, 0)\big). \tag{24}$$

Рассмотрим аппроксимацию оператора диффузионного переноса на донной поверхности ($z = L_z$) на расширенной сетке. Формально аппроксимация диффузионного члена может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} D_z\left(c^n\right)\Big|_{z=L_z} \equiv \frac{1}{h_z}\Bigg(&\nu(x, y, L_z + 0{,}5h_z)\frac{\big(\bar{c}^n(x, y, L_z + h_z) - \bar{c}^n(x, y, L_z)\big)}{h_z} - \\ &-\nu(x, y, L_z - 0{,}5h_z)\frac{\big(\bar{c}^n(x, y, L_z) - \bar{c}^n(x, y, L_z - h_z)\big)}{h_z}\Bigg). \end{aligned} \tag{25}$$

Воспользуемся аппроксимацией второго порядка точности $O(h_z^2)$ граничного условия третьего рода $\nu\left(c^n\right)'_z = -w_s c^n$, (x, y, z) $\in \Sigma_H$ соотношением:

$$\nu(x, y, L_z)\frac{\big(\bar{c}^n(x, y, L_z + h_z) - \bar{c}^n(x, y, L_z - h_z)\big)}{2h_z} = -w_s\bar{c}^n(x, y, L_z). \tag{26}$$

Воспользуемся соотношением:

$$\nu(x, y, L_z) = \frac{1}{2}\big(\nu(x, y, L_z + 0{,}5h_z) + \nu(x, y, L_z - 0{,}5h_z)\big) + O\left(h_z^2\right). \tag{27}$$

Подставляя (27) в (26), получим:

$$\big(\nu(x, y, L_z + 0{,}5h_z) + \nu(x, y, L_z - 0{,}5h_z)\big)\frac{\big(\bar{c}^n(x, y, L_z + h_z) - \bar{c}^n(x, y, L_z - h_z)\big)}{4h_z} = -w_s\bar{c}^n(x, y, L_z). \tag{28}$$

Из (28) имеем:

$$\bar{c}^n(x, y, L_z + h_z) = -\frac{4w_s h_z}{\big(\nu(x, y, L_z + 0{,}5h_z) + \nu(x, y, L_z - 0{,}5h_z)\big)}\bar{c}^n(x, y, L_z) + \bar{c}^n(x, y, L_z - h_z). \tag{29}$$

Тогда аппроксимация диффузионного члена в уравнении диффузии-конвекции взвеси имеет вид:

$$\begin{aligned} D_z\left(c^n\right)\Big|_{z=L_z} \equiv \frac{1}{h_z}\Bigg(&\frac{4w_s\nu(x, y, L_z + 0{,}5h_z)}{\nu(x, y, L_z + 0{,}5h_z) + \nu(x, y, L_z - 0{,}5h_z)}\bar{c}^n(x, y, L_z) + \\ &+\frac{1}{h_z}\nu(x, y, L_z + 0{,}5h_z)\big(\bar{c}^n(x, y, L_z - h_z) - \bar{c}^n(x, y, L_z)\big) - \\ &-\nu(x, y, L_z - 0{,}5h_z)\frac{\big(\bar{c}^n(x, y, L_z) - \bar{c}^n(x, y, L_z - h_z)\big)}{h_z}\Bigg). \end{aligned} \tag{30}$$

Аналогичным способом можно получить аппроксимацию конвективного оператора при $z = L_z$:

$$C_z\left(c^n\right)\Big|_{z=L_z} \equiv \frac{1}{2h_z}\Bigg(\frac{4w_s h_z w^n(x, y, z + 0{,}5h_z)}{\nu(x, y, L_z + 0{,}5h_z) + \nu(x, y, L_z - 0{,}5h_z)}\bar{c}^n(x, y, L_z) + \tag{31}$$

$$+\left(w^n\left(x,y,L_z+0{,}5h_z\right)-w^n\left(x,y,L_z-0{,}5h_z\right)\right)\overline{c}^n\left(x,y,L_z-h_z\right)\Big).$$

Полученные аппроксимации операторов диффузионного (30) и конвективного (31) переносов в граничных узлах (при $z = L_z$) подходят для дна с различными морфологическими характеристиками («жидкое» дно, непроницаемое дно и т. п.) при задании соответствующим образом коэффициента турбулентного обмена ν.

После построения схемы необходимо исследовать монотонность, устойчивость и сходимость разностной схемы. Исследование этих свойств использует физически мотивированные ограничения сеточного числа Пекле и числа Куранта, базируется на сеточном принципе максимума и ввиду ограниченности объема статьи здесь не приводится.

3. Аппроксимация трехмерной модели гидродинамики. Аппроксимацию модели (2)–(3) будем проводить на расчетной сетке $\overline{\omega}=\overline{\omega}_\tau\times\overline{\omega}_h$. Для аппроксимации модели (2)–(3) воспользуемся схемами расщепления по физическим процессам [8]. Согласно данному методу, исходная модель гидродинамики (2)–(3) разобьется на три подзадачи [6; 9].

Первая подзадача представлена уравнением диффузии-конвекции, на основе которого вычисляются компоненты поля вектора скорости водного потока на промежуточном временном слое:

$$\frac{\tilde{u}-u}{\tau}+u\overline{u}_x'+v\overline{u}_y'+w\overline{u}_z'=\left(\mu\overline{u}_x'\right)_x'+\left(\mu\overline{u}_y'\right)_y'+\left(\nu\overline{u}_z'\right)_z',$$

$$\frac{\tilde{v}-v}{\tau}+u\overline{v}_x'+v\overline{v}_y'+w\overline{v}_z'=\left(\mu\overline{v}_x'\right)_x'+\left(\mu\overline{v}_y'\right)_y'+\left(\nu\overline{v}_z'\right)_z',$$

$$\frac{\tilde{w}-w}{\tau}+u\overline{w}_x'+v\overline{w}_y'+w\overline{w}_z'=\left(\mu\overline{w}_x'\right)_x'+\left(\mu\overline{w}_y'\right)_y'+\left(\nu\overline{w}_z'\right)_z'+g\left(\frac{\rho_0}{\rho}-1\right),$$

где u, v, w — компоненты вектора скорости на предыдущем временном слое; $\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}$ — компоненты вектора скорости на промежуточном временном слое; $\overline{u}=\sigma\tilde{u}+(1-\sigma)u$, $\sigma\in[0,1]$ — весовой коэффициент или вес схемы.

На основе второй подзадачи вычисляется поле давления:

$$P_{xx}''+P_{yy}''+P_{zz}''=\frac{\hat{\rho}-\rho}{\tau^2}+\frac{\left(\hat{\rho}\tilde{u}\right)_x'}{\tau}+\frac{\left(\hat{\rho}\tilde{v}\right)_y'}{\tau}+\frac{\left(\hat{\rho}\tilde{w}\right)_z'}{\tau}.$$

На основе третьей подзадачи по явным формулам вычисляются компоненты поля вектора скорости водного потока на следующем временном слое:

$$\frac{\hat{u}-\tilde{u}}{\tau}=-\frac{1}{\hat{\rho}}P_x',\quad \frac{\hat{v}-\tilde{v}}{\tau}=-\frac{1}{\hat{\rho}}P_y',\quad \frac{\hat{w}-\tilde{w}}{\tau}=-\frac{1}{\rho}P_z',$$

где $\hat{u},\hat{v},\hat{w}$ — компоненты вектора скорости на текущем временном слое.

Аппроксимация задачи расчета поля скорости движения водной среды по пространственным переменным выполнена на основе метода баланса.

Результаты исследования. На основе представленной математической модели транспорта многокомпонентной взвеси разработан программный комплекс на языке *C*++, учитывающий различные факторы, оказывающие влияние на точность полученных прогнозов, среди которых можно выделить сложную геометрию дна и береговой линии, ветровые течения и трение о дно, наличие существенного градиента плотности водной среды. Разработанный программный комплекс позволяет рассчитывать:

– скорость течения водного потока на основе системы уравнений (2)–(3);
– процесс транспорта взвешенных частиц в толще воды с учетом полученной скорости течения водного потока;
– процесс оседания взвеси на дне на основе модели (1)–(3).

В качестве примера работы программного комплекса приведем результаты численного моделирования задачи транспорта трехкомпонентной взвеси при моделировании процесса дампинга грунта в ходе проведения дноуглубительных работ.

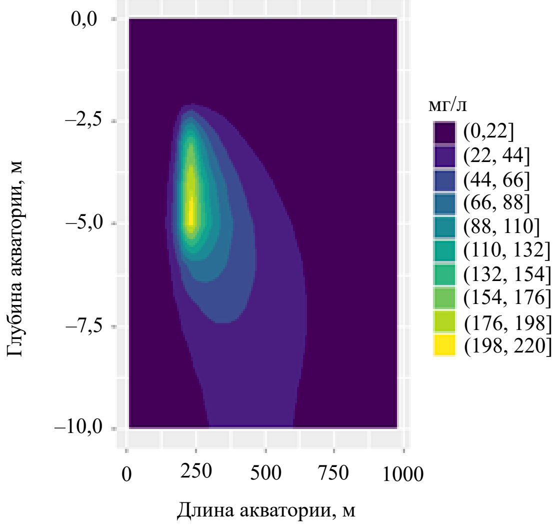
Параметры расчетной области: длина — 1 км; ширина — 720 м; глубина — 10 м.

Параметры расчетной сетки: шаги по горизонтальной и вертикальной пространственным координатам составили 10 и 1 м, соответственно; расчетный интервал — 2 ч, шаг по времени — 5 с. Ось O_x направлена вдоль расчетной области, ось O_y — по ширине расчетной области, ось O_z — по глубине расчетной области (от 0 до –10 м, где отметка 0 соответствует поверхности воды, –10 – дну водоема).

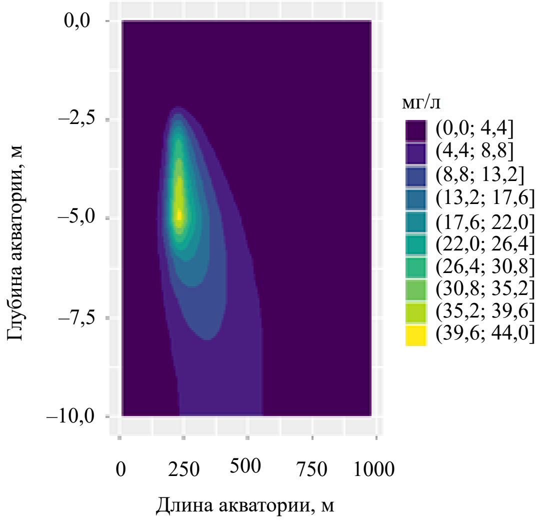
Входные параметры модели: среднее расстояние от точки выгрузки грунта до дна водоема в районе проведения дноуглубительных работ составляет 5,5 м; область выгрузки грунта вдоль оси O_x (по длине водоема) размещена в пределах от 200 до 250 м; область выгрузки грунта вдоль оси O_y (по ширине водоема) размещена в пределах от 300 до 400 м; скорость течения на глубинах от 4 до 10 м составляла 0,075 м/с (течения направлены слева направо); плотность пресной воды при нормальных условиях — 1000 кг/м^3; плотность взвесей — 2700 кг/м^3; коэффициент формы частицы для всех трех взвесей — 0,222 (шарообразная форма); начальная вязкость воды — 1,002 мПа·с (при температуре 20 °С); диаметр частицы фракции А — 0,05 мм; скорость осаждения фракции А — 2,31 мм/с; процентное содержание фракции А — 20 %; диаметр частицы фракции Б — 0,04 мм; скорость осаждения фракции Б — 1,48 мм/с, процентное содержание фракции Б — 30 %; диаметр частицы фракции В — 0,03 мм; скорость осаждения фракции В — 0,83 мм/с, процентное содержание фракции В — 50 %.

На рисунке 1 представлены результаты моделирования процесса транспорта трехкомпонентной взвеси в толщи воды. Горизонтальная ось направлена вдоль течения, срез представлен посередине расчетной области, где наблюдается максимальная концентрация взвешенных частиц (в плоскости $y = 360$ м).

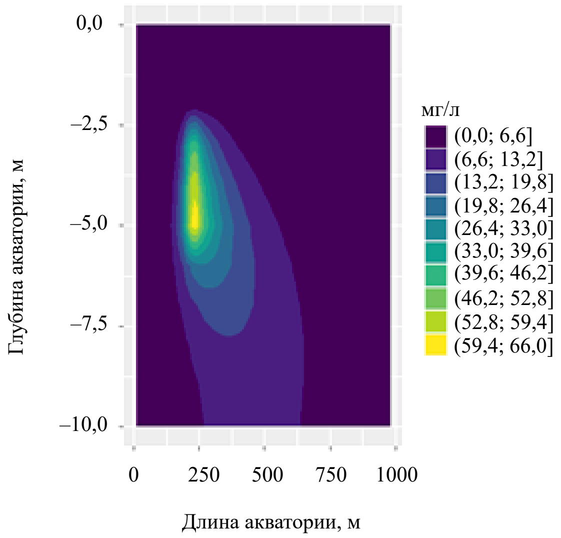
Из рисунка 1 видно, что более тяжелая фракция А осаждается ближе к зоне проведения дноуглубительных работ, чем более легкие фракции Б и В. Более мелкие фракции Б и В равномернее распределяются по дну акватории.



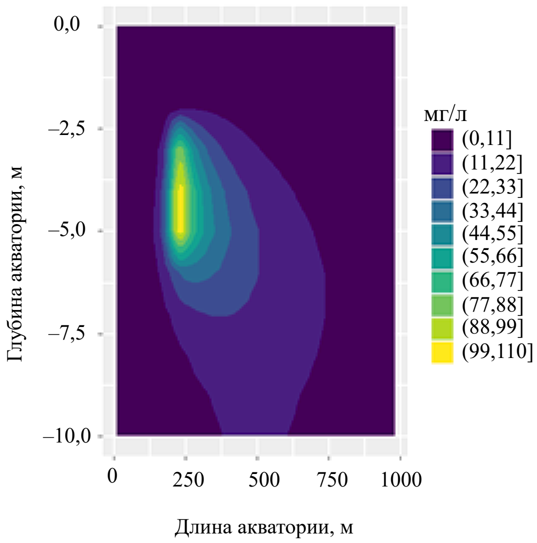
а)



б)



в)



г)

Рис. 1. Концентрация взвеси в толще воды спустя 2 часа после выгрузки:
а) — общая концентрация взвеси; б) — фракция А; в) — фракция Б; г) — фракция В

Обсуждение и заключения. В работе представлена трехмерная математическая модель транспорта многокомпонентной взвеси, дополненная трехмерной моделью гидродинамики мелководного водоема. Представленная модель учитывает состав грунта (различный диаметр частиц взвеси), скорость течения водного потока, сложную геометрию береговой линии и дна, сгонно-нагонные явления, ветровые течения и трение о дно, турбулентный обмен, что позволяет повысить точность моделирования.

Аппроксимация предложенной модели транспорта многокомпонентной взвеси на основе трехмерного уравнения диффузии-конвекции выполнена со вторым порядком точности относительно шагов пространственной сетки с учетом граничных условий второго и третьего рода. Аппроксимация трехмерной математической модели гидродинамики выполнена на равномерной прямоугольной расчетной сетке с использованием схем расщепления по физическим процессам.

Для численного решения полученных дискретных моделей разработан программный комплекс, позволяющий моделировать процесс осаждения взвешенных частиц различного диаметра на дно, и оценивать его влияние на рельеф дна и изменение состава дна. Разработанный программный комплекс также позволяет анализировать процесс движения наносов в случае взмучивания многокомпонентных донных отложений водоема, вызывающий вторичное загрязнение водоема.

Список литературы

1. Матишов Г.Г., Ильичев В.Г. Об оптимальной эксплуатации водных ресурсов. Концепция внутренних цен. *Доклады Академии наук*. 2006;406(2):249–251.

2. Ковтун И.И., Проценко Е.А., Сухинов А.И. и др. Расчет воздействия на водные биоресурсы дноуглубительных работ в Белом море. *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2016;9(2):27–38.

3. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Атаян А.М. Математическая модель процесса осаждения на дно многокомпонентной взвеси и изменения состава донных материалов. *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета.* 2022;60:73–89. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2022-60-05

4. Сухинов А.И., Кузнецова И.Ю., Чистяков А.Е. и др. Исследование точности и применимости разностной схемы для решения задачи диффузии-конвекции при больших сеточных числах Пекле. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2020;13(4):437–448. https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.4.34

5. Кузнецова И.Ю., Сухинов А.И., Чистяков А.Е. и др. Математическая модель гидродинамики устьевых районов. *Сборник трудов международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики»*. 2021:960–965.

6. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. *Численные методы решения задач конвекции-диффузии*. Москва: URSS. 2009:248.

7. Самарский А.А., Николаев Е.С. *Методы решения сеточных уравнений.* Москва: Наука. 1978:592

8. Белоцерковский О.М., Гущин В.А., Щенников В.В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1975;15(1):197–207. https://doi.org/10.1016/0041-5553(75)90146-9

9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. 7-е изд. Москва: Наука: Издательство Московского университета, 2004:798.

References

1. Matishov GG, Ilyichev VG. On optimal exploitation of water resources. The concept of internal prices. *Reports of the Academy of Sciences*. 2006;406(2):249–251. (In Russ.).

2. Kovtun II, Protsenko EA, Sukhinov AI, et al. Calculating the Impact on Aquatic Resources Dredging in the White Sea. *Fundamental and Applied Hydrophysics.* 2016;9(2):27–38. (In Russ.).

3. Sukhinov AI, Chistyakov AE, Atayan AM, et al. Mathematical model of process of sedimentation of multicomponent suspension on the bottom and changesin the composition of bottom materials, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2022;60:73–89. (In Russ.). https://doi.org/10.35634/2226-3594-2022-60-05

4. Sukhinov AI, Kuznetsova IYu, Chistyakov AE. Study of the accuracy and applicability of the difference scheme for solving the diffusion-convection problem at large grid péclet numbers. *Computational Continuum Mechanics*. (In Russ.). https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.4.34

5. Kuznetsova IYu, Sukhinov AI, Chistyakov AE, et al. Mathematical model of hydrodynamics of estuarine areas. *Proceedings of the International scientific conference "Actual problems of applied Mathematics, computer science and Mechanics"*. 2021:960–965. (In Russ.).

6. Samarskiy AA, Vabishevich PN. *Numerical methods for solving convection-diffusion problems*. Moscow: URSS. 2009:248. (In Russ.).

7. Samarskiy AA, Nikolaev ES. *Methods for solving grid equations*. Moscow: Nauka. 1978:592. (In Russ.).

8. Belotserkovsky OM, Gushchin VA, Schennikov VV. Splitting method applied to solving problems of dynamics of viscous incompressible fluid. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1975;15(1):197–207. (In Russ.). https://doi.org/10.1016/0041-5553(75)90146-9

9. Tikhonov AN, Samarskiy AA. *Equations of mathematical physics*. 7th ed. Moscow: Nauka: Moscow University Press, 2004:798. (In Russ.).

Об авторах:

Сухинов Александр Иванович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, директор НИИ Математического моделирования и прогнозирования сложных систем, Донской государственный технический университет (РФ, 344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), ORCID, MathSciNet, eLibrary.ru, ResearcherID, ScopusID, sukhinov@gmail.com

Кузнецова Инна Юрьевна, старший преподаватель кафедры интеллектуальных и многопроцессорных систем, НИЦ супер-ЭВМ и нейрокомпьютеров (РФ, 347900, г. Таганрог, пер. Итальянский, 106), ORCID, Scopus ID, elibrary.ru, ResearcherID, inna.yu.kuznetsova@gmail.com

Заявленный вклад соавторов:
Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Поступила в редакцию 02.08.2023
Поступила после рецензирования 24.08.2023
Принята к публикации 25.08.2023

Конфликт интересов
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Alexander I Sukhinov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Director of the Research Institute for Mathematical Modeling and Forecasting of Complex Systems, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), ORCID, MathSciNet, eLibrary.ru, ResearcherID, ScopusID, sukhinov@gmail.com

Inna Yu Kuznetsova, Senior Lecturer of the Department of Intelligent and Multiprocessor Systems, SIC Supercomputers and Neurocomputers (106, Italian Lane, Taganrog, 347900, RF), ORCID, ScopusID, elibrary.ru, ResearcherID, inna.yu.kuznetsova@gmail.com

Claimed contributorship:
all authors have made an equivalent contribution to the preparation of the publication.

Received 02.08.2023
Revised 24.08.2023
Accepted 25.08.2023

Conflict of interest statement
the authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
MATHEMATICAL MODELING

Check for updates

УДК 519.6

Научная статья

https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-49-63

Сопоставление результатов численного моделирования процессов гидродинамики в мелководных водоемах на основе трехмерной модели и двумерной модели, усредненной по глубине

С.В. Проценко, Е.А. Проценко✉, А.В. Харченко

Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), Российская Федерация, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48

✉ eapros@rambler.ru

Аннотация

Введение. Двумерные гидродинамические модели доказали свою способность адекватно описывать процессы стока и транспортировки в реках, озерах, эстуариях, дельтах и морях. Практика показывает, что даже там, где ожидаются значительные трехмерные эффекты, например, при ветровых потоках, двумерный подход может работать эффективно. Однако в некоторых случаях двумерная модель недостаточно точно отражает фактические структуры потока. Например, в мелководных водоемах со сложной батиметрией неоднородный рельеф и динамика могут привести к тому, что профиль скорости будет неоднородным. Целью исследования является разработка основы для определения того, в каких случаях двумерной модели, усредненной по глубине, достаточно для моделирования процессов гидродинамики в мелководных водоемах, подобных Азовскому морю, а в каких случаях для получения точных результатов целесообразно использование трехмерной модели.

Материалы и методы. Локальные аналитические решения получены для распространения преобладающей сингулярной прогрессивной волны в мелководном, хорошо перемешанном водоеме. Адвективными слагаемыми и слагаемыми Кориолиса пренебрегают, вихревая вязкость принимается постоянной, а слагаемое нижнего трения линеаризуется. Последнему уделяется особое внимание, поскольку характеристики моделей существенно зависят от способа определения коэффициентов нижнего трения. Аналитический метод, разработанный в исследовании, показывает, что определенные комбинации более высоких скоростей течения ($u \approx> 1$ м/с) и глубин воды ($d > 50$ м) могут вызывать значительные различия между результатами модели, усредненной по глубине, и модели, содержащей информацию по вертикали.

Результаты исследования. Полученные результаты проверяются численным моделированием стационарных и нестационарных периодических течений в схематизированном прямоугольном бассейне. Результаты, полученные в результате трехмерного моделирования, сравниваются с результатами двумерного моделирования, усредненного по глубине. Оба моделирования показывают хорошее соответствие аналитическим решениям.

Обсуждение и заключения. Аналитические решения были найдены путем линеаризации уравнений, что, очевидно, имеет свои ограничения. Отмечается два вида нелинейных эффектов — вызванных членами более высокого порядка в уравнениях движения, т. е. членами адвективного ускорения и трения и вызванных геометрическими нелинейностями, что связано, например, с различной глубиной воды и шириной водоема, что будет важно при моделировании реального моря.

Ключевые слова: гидродинамика, мелководный водоем, волновое движение, численное моделирование

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-00015. https://rscf.ru/project/22-71-00015/

Для цитирования. Проценко С.В., Проценко Е.А., Харченко А.В. Сопоставление результатов численного моделирования процессов гидродинамики в мелководных водоемах с аналитическим решением. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):49–63 https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-49-63

Original article

Comparison of Hydrodynamic Processes Modelling Results in Shallow Water Bodies Based on 3D Model and 2D Model Averaged by Depth

Sofia V Protsenko, Elena A Protsenko✉, Anton V Kharchenko

Taganrog Institute named after A.P. Chekhov (branch) of RSUE, 48, Initiative St., Taganrog, Russian Federation

✉ eapros@rambler.ru

Abstract

Introduction. Two-dimensional hydrodynamic models have proven their ability to adequately describe the processes of runoff and transportation in rivers, lakes, estuaries, deltas and seas. Practice shows that even where significant three-dimensional effects are expected, for example, with wind flows, a two-dimensional approach can work effectively. However, in some cases, the two-dimensional model does not accurately reflect the actual flow structures. For example, in shallow waters with complex bathymetry, heterogeneous terrain and dynamics can lead to a non-uniform velocity profile. The aim of the study is to develop a basis for determining in which cases a two-dimensional model averaged in depth is sufficient for modelling hydrodynamic processes in shallow waters like the Azov Sea, and in which cases it is advisable to use a three-dimensional model to obtain accurate results.

Materials and Methods. Local analytical solutions have been obtained for the propagation of the predominant singular progressive wave in a shallow, well-mixed reservoir. Advective terms and Coriolis terms are neglected, the vortex viscosity is assumed to be constant, and the lower friction term is linearized. Special attention is paid to the latter, since the characteristics of the models significantly depend on the method of determining the coefficients of lower friction. The analytical method developed in the study shows that certain combinations of higher flow velocities ($u \gtrapprox 1$ m/s) and water depths ($d > 50$ m) can cause significant differences between the results of the depth-averaged model and the model containing vertical information.

Results. The results obtained are verified by numerical simulation of stationary and non-stationary periodic flows in a schematized rectangular basin. The results obtained as a result of three-dimensional modelling are compared with the results of two-dimensional modelling averaged in depth. Both simulations show good compliance with analytical solutions.

Discussion and Conclusions. Analytical solutions were found by linearization of the equations, which obviously has its limitations. A distinction is made between two types of nonlinear effects — nonlinearities caused by higher-order terms in the equations of motion, i.e. terms of advective acceleration and friction, and nonlinear effects caused by geometric nonlinearities, this is due, for example, to different water depths and reservoir widths, which will be important when modelling a real sea.

Keywords: hydrodynamics, shallow water reservoir, wave motion, numerical modelling

Funding information. The study was supported by the Russian Science Foundation grant no. 22-71-00015. https://rscf.ru/project/22-71-00015/

For citation. Protsenko SV, Protsenko EA, Kharchenko AV. Comparison of Hydrodynamic Processes Modelling Results in Shallow Water Bodies Based on 3D Model and 2D Model Averaged by Depth. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):49–63. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-49-63

Введение. В мелководных водоемах со сложной батиметрией неоднородный рельеф и динамика могут привести к тому, что профиль скорости будет неоднородным, в данном случае двумерная модель недостаточно точно отражает фактические структуры потока. Основной целью данного исследования является разработка теоретической основы для определения того, в каких конкретных случаях двумерной модели достаточно для моделирования процессов течения в мелководных морях типа Азовского моря. С этой целью изучено, оказывает ли сокращение с 3D до 2D существенное влияние на выходные данные модели гидродинамики, такие как уровни воды и усредненные по глубине скорости течения. Изучено, какие упрощения применяются к задаче о течении, чтобы позволить использовать двумерные уравнения, усредненные по глубине, а не трехмерные уравнения для мелководья. Исследовано, какие параметры важны при сравнении модели, усредненной по глубине, с моделью, содержащей информацию по вертикали; в каких случаях двумерная модель, усредненная по глубине, является репрезентативной. Аналитический подход позволил выявить эффект усреднения по глубине с помощью аналитических решений для сильно упрощенных ситуаций.

Несмотря на проведение широкого круга исследований, ориентированных на рассматриваемую проблему, в них недостаточно полно отражена вся совокупность разнообразных факторов и процессов: гидрофизических, гидродинамических, гидробиологических, метеорологических и антропогенных [1–2]. Областями применения представленных в исследовании моделей являются приливы и отливы, вызванные ветром (например, штормовые нагоны). Речные потоки и стратифицированные потоки, определяемые плотностью, выходят за рамки данного исследования [3–5].

Рассмотрим наиболее важные явления для мелководных морей, подобных Азовскому морю, и определим характерные масштабы протяженности, времени и скорости. В Азовском море формирование течений в основном обусловлено тремя факторами: ветровым режимом, стоком впадающих рек и водообменом с Чёрным морем. Большая изменчивость течений является следствием неустойчивости ветрового режима, мелководности моря и его сравнительно небольшой площади. В открытых районах моря под действием ветра, как правило, происходит поступательное движение водной среды, охватывающее всю толщу от поверхности до придонных горизонтов. Преобладающая скорость течений в Азовском море составляет 10–20 см/с, максимальная скорость — 180–100 см/с [6].

Режим волнения Азовского моря обусловлен небольшой площадью моря, малыми глубинами и значительной изрезанностью берегов. В описываемом районе преобладают высоты волн менее 1 м (повторяемость их достигает 75 %). Повторяемость высот волн 1–2 м составляет 20–45 %, а высот волн 2–3 м — не более 13 %. В центральной, самой глубоководной части моря, высоты волн не превышают 3,5 м и только в очень редких случаях они достигают 4 м. В наиболее штормовые месяцы (декабрь-март) развитие волнения в описываемом районе ограничивается наличием льда [6]. Как и для нагонных явлений, перед которыми зачастую возникает мощный по силе сгон, для сильного волнения характерно некоторое уменьшение высоты волн перед началом шторма и далее — их стремительное увеличение. Нередко процессы развития и затухания сгонно-нагонных и штормовых явлений в Азовском море являются синхронными, таким образом, возникают опасные явления.

В Азовском море наблюдаются волны, имеющие длину в основном 15–25 м, и только иногда — 80 м. Период волны обычно менее 5 с, крайне редко — 7–8 с. В описываемом районе отмечаются короткие и очень крутые волны, представляющие опасность для малых судов.

В мелководном Азовском море сейшевые колебания происходят постоянно. Сейши — это свободные колебания, которые происходят в бассейнах умеренного размера (гаванях, озерах, заливах или даже в море). Это стоячие волны с частотой, равной резонансной частоте бассейна, в котором они возникают. Продолжительность сейшей может варьироваться от нескольких минут до нескольких часов. Причиной их появления в Азовском море становится не только изменение ветра или атмосферного давления над морем, но и волны штормовых нагонов из Чёрного моря. Поскольку сейши являются резонансным явлением, очевидно, что размер бассейна по отношению к длине волны является важным фактором.

Материалы и методы

1. Постановка задачи. Трехмерные уравнения Навье-Стокса используются в качестве основы для решения задач о течении жидкости [7–8]. Предполагая, что вода является несжимаемой жидкостью, применяют уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial z}=0$$

с компонентами скорости u, υ, ω в направлении x, y и z соответственно. Сохранение импульса выражается следующим образом:

$$\frac{\partial(pu)}{\partial t}+\frac{\partial(pu^2)}{\partial x}+\frac{\partial(pu\upsilon)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho u\omega)}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho f\upsilon+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial(p\upsilon)}{\partial t}+\frac{\partial(pu\upsilon)}{\partial x}+\frac{\partial(p\upsilon^2)}{\partial y}+\frac{\partial(p\upsilon\omega)}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial y}-\rho fu+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial(p\omega)}{\partial t}+\frac{\partial(pu\omega)}{\partial x}+\frac{\partial(p\upsilon\omega)}{\partial y}+\frac{\partial(p\omega^2)}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial y}-\rho g+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z},$$

где ρ — плотность воды; p — давление; f — параметр Кориолиса; τ_{ij} — вязкое напряжение сдвига в i-направлении на j-плоскости.

Напряжения определяют как:

$$\tau_{ij}=\rho\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$

где ν — кинематическая вязкость.

Используется также сокращенное обозначение, где $x_i=(x,y,z)$ и $u_i=(u,\upsilon,\omega)$ для $i=1,2,3$.

Для учета турбулентности в уравнениях Навье-Стокса переменные разлагаются на среднее значение и вариацию: $u=\bar{u}+u'$. Подставим разложение по всем переменным в уравнения импульса и средние результаты — в усредненные по Рейнольдсу уравнения движения, которые имеют ту же форму, что и исходные уравнения Навье-Стокса, с дополнительными турбулентными напряжениями, называемыми напряжениями Рейнольдса: $\tau_{ij}=\rho\overline{u_i'u_j'}$ [9].

Проблема замыкания является одной из основных задач исследования турбулентности. Простая модель турбулентности использует гипотезу Буссинеска для описания турбулентных движений аналогично молекулярным движениям, но с коэффициентами вихревой вязкости ν_t^h и ν_t^υ для горизонтального и вертикального направлений [10].

Все вышесказанное приводит к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}+\omega\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}+f\upsilon+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_t^h\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t^h\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t^\upsilon\frac{\partial u}{\partial z}\right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+\omega\frac{\partial \upsilon}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}-fu+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_t^h\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t^h\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t^\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial z}\right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+u\frac{\partial \omega}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial \omega}{\partial y}+\omega\frac{\partial \omega}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\rho}{\rho_0}g+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_t^h\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t^h\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t^\upsilon\frac{\partial \omega}{\partial z}\right). \quad (3)$$

Для усредненного по глубине потока предполагается, что напряжение сдвига в слое, вызванное турбулентным потоком, определяется квадратичным законом трения:

$$\tau_b=\frac{\rho_0 g|U|U}{C_1^2}=\rho_0 c_{f_1}|U|U,$$

где $|U|$ — величина усредненной по глубине горизонтальной скорости, а C_1 – коэффициент Шези (Chezy) для модели, усредненной по глубине [11].

Для моделей с вертикальной информацией (2DV или 3D), используется квадратичная формулировка напряжений в пласте. Напряжение сдвига слоя в 3D может быть связано с током непосредственно над слоем:

$$\tau_b=\rho_0 c_{f_2}|u_b|u_b,$$

где u_b — величина горизонтальной скорости непосредственно над слоем.

2. Аналитическое исследование. Предположим, что U характеризует масштабы горизонтальных скоростей u и v; L характеризует горизонтальные масштабы длины x и y; H — вертикальный масштаб z. Затем масштабирование уравнения неразрывности приводит к выражению для шкалы вертикальной скорости W:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial z}=0,$$

$$\frac{U}{L}+\frac{U}{L}+\frac{W}{H}=0 \Rightarrow W\approx O\left(\frac{UH}{L}\right).$$

Согласно данным Единой государственной системы информации об обстановке в Мировом океане [6], горизонтальная составляющая скорости на несколько порядков больше вертикальной составляющей скорости для приливов, штормовых волн и сейш в Азовском море. Следовательно, вертикальной составляющей скорости можно пренебречь, в данном исследовании она не будет рассматриваться.

Уравнение вертикального импульса сводится к гидростатическому балансу:

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g.$$

Интегрирование данного уравнения в вертикальном направлении дает:

$$p(z)=-\rho g(\zeta-z)+p_{atm}, \text{ при } \frac{\partial \rho}{\partial z}=0,$$

где ζ — высота свободной поверхности (рис. 1); p_{atm} — атмосферное давление на свободной поверхности.

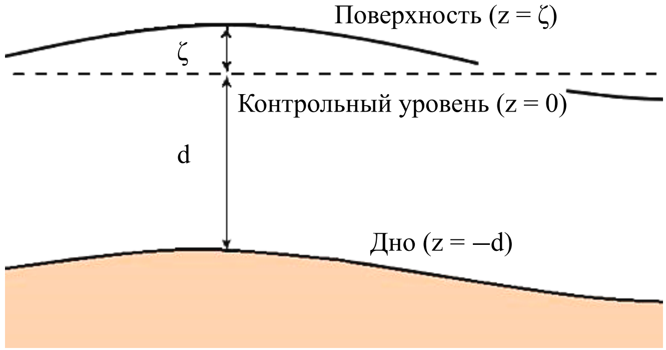


Рис. 1. Определение высоты поверхности ζ и глубины невозмущенной воды d

Теперь:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\rho g\frac{\partial \zeta}{\partial x},\ \frac{\partial p}{\partial y}=\rho g\frac{\partial \zeta}{\partial y}, \text{ если } \frac{\partial \rho}{\partial x}=\frac{\partial \rho}{\partial y}=0. \quad (4)$$

Подставляя это в уравнения горизонтального импульса (1) и (2), получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-g\frac{\partial\zeta}{\partial x}+f\upsilon, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t\frac{\partial \upsilon}{\partial z}\right)=-g\frac{\partial\zeta}{\partial y}-fu. \quad (6)$$

Наряду с пренебрежением вертикальной составляющей скорости и заменой градиента давления градиентом уровня воды, были проигнорированы несколько других членов, чтобы перейти от уравнений (1) и (2) к (5)–(6). Вязкие напряжения не принимаются во внимание в силу того, что турбулентные напряжения на много порядков превышают вязкие напряжения, поскольку молекулярная вязкость важна только в пределах нескольких миллиметров от границы. Кроме того, не учитываются горизонтальные турбулентные напряжения.

Используя уравнения (5)–(6), определим относительные порядки величин слагаемых, чтобы получить представление о параметрах, которые являются наиболее важными в определенной ситуации, а какие незначительны. Рассмотрим каждое слагаемое по отдельности и проведем масштабирование:

– инерция: $\frac{\partial u}{\partial t}\approx\frac{U}{T}$;

– адвекция: $u\frac{\partial u}{\partial t}\approx\frac{U^2}{L}$;

– вертикальная диффузия импульса: $\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t\frac{\partial u}{\partial z}\right)\approx\nu\frac{U}{H^2}$;

– градиент давления: $-g\frac{\partial\zeta}{\partial y}\approx g\frac{\Delta H}{L}$;

– сила Кориолиса: $f\upsilon\approx fU$.

Важным в исследовании является слагаемое, отвечающее за трение, поскольку в моделях оно определяется по-разному. Для трехмерной модели соотношение между коэффициентом трения и коэффициентом инерции может быть выражено как:

$$\frac{friction}{inertia}\approx\frac{\nu U/H^2}{U/T}\approx\frac{\nu}{\omega H^2},$$

где $\omega\approx\frac{1}{T}$.

Кроме того, важными параметрами являются вязкость ν, частота волн ω и вертикальная шкала длины (например, глубина воды d). Безразмерная комбинация этих параметров ($\omega d^2/\nu$), широко используемая в аналитическом подходе, описана в [12], где проведено сравнение динамического выражения для напряжения фазового сдвига с выражением, в котором донное напряжение пропорционально усредненной по глубине скорости в установившемся состоянии. Результатом является соотношение, показанное на рисунке 2, только в зависимости от параметра $\omega d^2/\nu$.

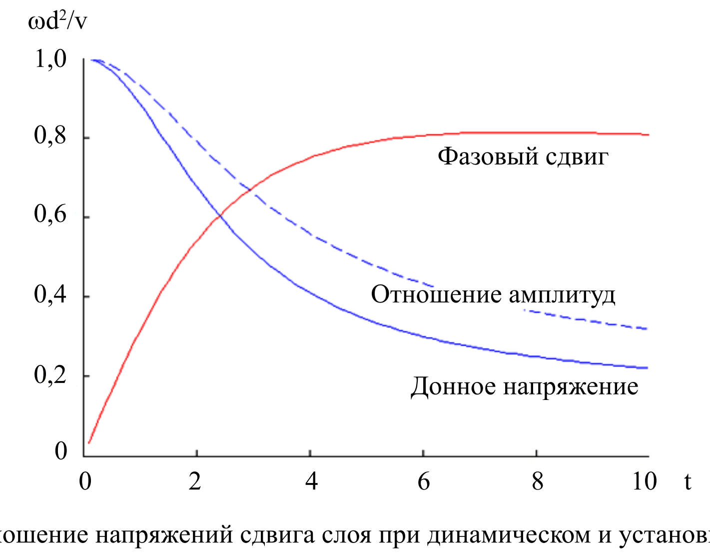


Рис. 2. Соотношение напряжений сдвига слоя при динамическом и установившемся течении

Когда $\omega d^2/\nu$ очень мало, отношение приближается к единице, это означает, что напряжение сдвига слоя реагирует на периодический поток так, как если бы оно было постоянным в каждый момент времени: $\omega d^2/\nu < 0{,}5$. Также это можно записать, как $d^2/\nu < 0{,}5\cdot T/2\pi\approx 0{,}08\cdot T$, где T — период колеблющегося потока. Величину d^2/ν

можно интерпретировать как время, необходимое вязкому потоку для изменения профиля скорости на глубине *d*. Таким образом, ожидается квазистационарное напряжение сдвига слоя, когда время регулировки составляет менее 8 % от периода.

Для турбулентного течения на мелководье оценка вихревой вязкости составляет [13]:

$$\nu = \frac{1}{6}\kappa d u_* = 0{,}067\, d u_* .$$

Здесь $u_* \approx \sqrt{c_f} \cdot \bar{u}$, при 0,0015 в качестве оценки для c_f становится $\nu = 0{,}0025\, d\,\bar{u}$. Для такого моря, как Азовское, со средней глубиной воды $d \approx 7{,}4$ м и средней амплитудой течения по глубине $\bar{u} \approx 0{,}5$ м/с, оценка вихревой вязкости — $\nu = 0{,}00925$ м/с.

Аналитические решения могут быть получены только для значительно упрощенных форм уравнений движения. Поскольку члены адвекции нелинейны, необходимо исключить их из уравнения импульса для аналитического подхода. Когда скорость распространения волны определяется как длина волны за период волны $c = L/T$, соотношение между членом адвекции и членом инерции приводит к числу Фруда, определяемому, как $F_r = u/c$. F_r<<1 означает, что член инерции намного важнее члена адвекции и поэтому членом адвекции можно пренебречь. Это относится к длинным волнам с малыми амплитудами по отношению к глубине воды. Набор уравнений без адвективных членов сводится к:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu_t \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} + f\upsilon, \qquad (7)$$
$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} - \nu_t \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial z^2} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial y} - fu, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

Будем рассматривать периодический поток, ограниченный одним горизонтальным измерением, заданным уравнением (7). Основное внимание будет уделено влиянию изменений в плоскости (*x*, *z*). С учетом этих допущений базовое уравнение 2DV принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu_t \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = F, \qquad (8)$$
$$F = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Уравнение (8) может быть интегрировано по глубине воды *d*, чтобы получить одномерное уравнение импульса в направлении *x*:

$$d\frac{\partial U}{\partial t} - \nu_t\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z_{(z=0)}} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z_{(z=-d)}}\right) = Fd,$$

где *U* — усредненная по глубине скорость.

На поверхности моря (*z* = 0) напряжение сдвига равно нулю, так как свободная поверхность не создает никакого трения (при отсутствии ветра). В пласте (*z* = –*d*) принято связывать напряжение сдвига со скоростью, усредненной по глубине, с коэффициентом трения c_f для модели, усредненной по глубине. Итак, при:

$$\nu_t \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_b \approx c_{f_1} |U| U,$$

одномерное усредненное по глубине уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{c_{f_1}|U|U}{d} = F. \qquad (9)$$

Здесь член трения пропорционален $|U|U$ и, следовательно, нелинеен. Поскольку линейные уравнения гораздо легче решать аналитически, удобно применять метод линеаризации. Лоренц [14] предложил такую линеаризацию напряжения сдвига слоя, которая на протяжении многих десятилетий служила основой для простых решений. Предположим, что скорость потока изменяется синусоидально во времени:

$$U(t) = \hat{U}\cos(\omega t). \qquad (10)$$

Рассматривается только действительная часть из выражения для *U*, которое используется далее. На рисунке 3 показано соответствующее $|U|U/\hat{U}^2 = |\cos(\omega t)|\cos(\omega t)$, которое представляет собой трение как функцию времени, показывающую отклонения от чистой функции косинуса.

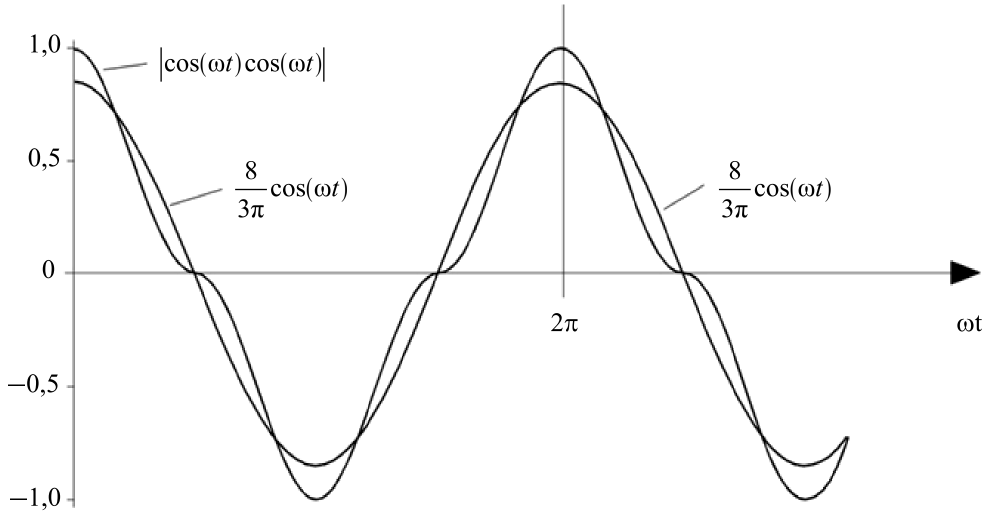


Рис. 3. Линеаризация квадратичного члена трения [15]

Обоснование линеаризации заключается в том факте, что она, как принято считать, не воспроизводит точную функцию косинуса до тех пор, пока сохраняется демпфирующий эффект трения. С этой целью энергия, которая теряется за цикл из-за трения, устанавливается равной для обоих случаев. Этот подход позволяет получить подходящую оценку константы линеаризации к:

$$\kappa_1 = \frac{8}{3\pi} c_{f_1} \frac{\widehat{U}}{d} \approx c_{f_1} \frac{|U|}{d},$$

где нижний индекс «1» указывает на одномерный случай. Это выражение содержит исходную скорость $\widehat{U}$, которая неизвестна. Хотя были предложены итеративные подходы к ее определению, эта константа линеаризации часто принимается в качестве калибровочного параметра.

Напряжение сдвига линеаризованного слоя становится: $\tau_b = c_{f_1}|U|U \approx \kappa_1 dU.$

Подставляя это в уравнение (9), получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \kappa_1 U = F. \tag{11}$$

Для динамического течения в одномерной ситуации используется данное линеаризованное уравнение, при этом вводится комплексное представление скорости потока:

$$U(t) = \widehat{U} e^{i\omega t}, \tag{12}$$

где $\widehat{U}$ — комплексная амплитуда; $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$, где i — мнимая единица, удовлетворяющая уравнению $i = \sqrt{-1}.$ Фактор $e^{i\omega t}$ вызывает вращение во времени с ω в качестве угловой частоты, которая равна $2\pi/T$.

Обратите внимание, что скорость, определенная в (10), равна действительной части выражения:

$$U(t) = \mathrm{Re}\left[\widehat{U} e^{i\omega t}\right] = \widehat{U}\cos(\omega t).$$

Подставляя комплексное периодическое решение (12) в уравнение (11), исключение изменения времени $e^{i\omega t}$ в каждом члене дает:

$$i\omega\widehat{U} + \kappa_1\widehat{U} = \widehat{F}, \quad (i\omega + \kappa_1)\widehat{U} = \widehat{F}, \quad \widehat{U} = \frac{\widehat{F}}{i\omega + \kappa_1}, \quad \widehat{U} = \frac{\widehat{F}}{i\omega} \cdot \frac{1}{1 + \kappa_1/i\omega}, \quad \widehat{U} = \widehat{A} \cdot \frac{1}{1 - i\sigma_1},$$

где $\widehat{A} = \frac{\widehat{F}}{i\omega} = -\frac{g}{i\omega}\frac{\partial\widehat{\zeta}}{\partial x};\quad \sigma_1 = \frac{\kappa_1}{\omega} = \frac{8}{3\pi} c_{f_1} \frac{\widehat{U}}{\omega d}.$

Итак, выражение для усредненной по глубине скорости в направлении x равно:

$$U = \widehat{A} \cdot \left(\frac{1}{1 - i\sigma_1}\right) e^{i\omega t}.$$

Таким образом, выражение для усредненной по глубине скорости U получено путем решения усредненного по глубине уравнения импульса. Далее сравним это выражение с аналогичным решением для усредненной по глубине скорости, вычисленной с помощью модели с вертикальной информацией.

Уравнение импульса $\frac{\partial u}{\partial t} - \nu_t \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = F$ с периодическим решением $u(z,t) = \tilde{u}(z)e^{i\omega t}$ (теперь $\tilde{u}$ — комплексная амплитуда как функция вертикальной координаты) и устранением $e^{i\omega t}$ принимает вид:

$$i\omega\tilde{u}(z) - \nu_t \frac{\partial^2}{\partial z^2}\tilde{u}(z) = \hat{F}$$

и представляет собой дифференциальное уравнение с однородным и частным решением:

$$\tilde{u}(z) = C_1 e^{bz} + C_2 e^{-bz} + \hat{A}, \quad b = \sqrt{\frac{i\omega}{\nu_t}} \quad \hat{A} = \frac{\hat{F}}{i\omega}.$$

На поверхности моря (z = 0) напряжение сдвига τ = 0 поскольку свободная поверхность не создает трения (при отсутствии ветра):

$$\left.\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}\right|_{(z=0)} = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 \Rightarrow \Rightarrow \tilde{u}(z) = C\cosh(bz) + \hat{A}. \tag{13}$$

Существует несколько вариантов граничного условия в слое, чтобы найти выражение для константы интегрирования C. Условие частичного скольжения предполагает скорость в слое $u \neq 0$. Предполагается, что напряжение сдвига в слое ($z = -d$) описывается линеаризованным квадратичным законом трения:

$$\nu_t \left.\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}\right|_{(z=-d)} = \tau_b \approx \kappa_2 d\,\tilde{u}, \tag{14}$$

где $\kappa_2 = \frac{8}{3\pi} c_{f_2} \frac{\tilde{u}_b}{d}$.

Нижний индекс «2» указывает на двумерный случай. Подставляя выражение для скорости потока (13) в уравнение (14), получаем:

$$\nu_t \cdot (Cb\sinh(-bd)) = \kappa_2 d \cdot (C\cosh(-bd) + \hat{A}),$$

$$C \cdot (-\nu_t b\sinh(-bd) - \kappa_2 d \cdot \cosh(bd)) = \kappa_2 d\hat{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = -\hat{A} \cdot \left(\frac{\nu_t b}{\kappa_2 d}\sinh(bd) + \cosh(bd)\right)^{-1}.$$

Решение для профиля скорости по вертикали теперь становится:

$$\tilde{u}(z) = \hat{A} \cdot \left(1 - \frac{\cosh(bz)}{\frac{\nu_t b}{\kappa_2 d}\sinh(bd) + \cosh(bd)}\right),$$

$$\tilde{u}(z) = \hat{A} \cdot \left(1 - \hat{\gamma}\frac{\cosh(bz)}{\cosh(bd)}\right), \tag{15}$$

где $\hat{\gamma} = \left(1 + \frac{\nu_t b}{\kappa_2 d}\tanh(bd)\right)^{-1} = \left(1 + \frac{i}{\sigma_2 bd}\tanh(bd)\right)^{-1}$.

Итак, профиль скорости, описываемый уравнением (15), является функцией безразмерного параметра:

$$bd = \sqrt{i\omega d^2/\nu_t}, \tag{16}$$

и безразмерного параметра σ_2, который определен, как:

$$\sigma_2 = \frac{\kappa_2}{\omega} = \frac{8}{3\pi} c_{f_2} \frac{\hat{u}_b}{\omega d}.$$

Параметр, аналогичный параметру в уравнении (16), уже обсуждался в контексте напряжения сдвига слоя $\omega d^2/\nu$.

Для усредненной по глубине скорости получено следующее:

$$\bar{u} = \frac{1}{d}\int_{-d}^{0}\tilde{u}(z)dz = \frac{1}{d}\int_{-d}^{0}\hat{A}\left(1 - \hat{\gamma}\frac{\cosh(bz)}{\cosh(bd)}\right)dz = \frac{\hat{A}}{d}\left[z - \frac{\hat{\gamma}}{b}\frac{\cosh(bz)}{\cosh(bd)}\right]_{-d}^{0};$$

$$\bar{u} = \hat{A} \cdot \left(1 - \frac{\hat{\gamma}}{bd} \tanh(bd)\right) e^{i\omega t}.$$

Уравнение для одномерной модели установившегося течения с линеаризованным донным трением (11) сводится к:

$$\kappa_1 U = F, \tag{17}$$

где $\kappa_1 \approx cf_1|U|/d$ — линеаризованный коэффициент трения для усредненного по глубине потока (для установившегося потока коэффициент 8/3π не учитывается); U — усредненная по глубине горизонтальная скорость и $F = -g\partial\zeta/\partial x$ — сокращенное обозначение градиента уровня воды. Выражение для усредненной по глубине скорости U следует из уравнения (17):

$$U = \frac{F}{\kappa_1} \cdot \tag{18}$$

В двумерной модели установившегося течения с линеаризованным донным трением уравнение (18) сводится к:

$$-\nu_t \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = F.$$

Поскольку предполагается, что F не зависит от z, интегрирование дает:

$$\nu_t \frac{\partial u}{\partial z} = -Fz + C_1.$$

На поверхности моря (z = 0) напряжение сдвига $\tau_0 = \nu_t \partial u/\partial z = 0$ означает, что постоянная интегрирования C_1= 0 и, следовательно:

$$\nu_t \frac{\partial u}{\partial z} = -Fz. \tag{19}$$

Таким образом, напряжение сдвига линейно распределено по вертикали с максимальным напряжением сдвига τ_b в слое ($z = -d$):

$$\tau_b = Fd. \tag{20}$$

При предположении постоянной вертикальной вихревой вязкости профиль скорости определяется интегрированием уравнения (19):

$$u(z) = C_2 - \frac{Fz^2}{2\nu_t} \cdot \tag{21}$$

Это параболический профиль скорости, где интегрирующая константа C_2 равна максимальной скорости на поверхности моря (z = 0). Чтобы найти константу C_2, необходимо наложить граничное условие на слой. Для реализации нижнего граничного условия возможны различные подходы.

Комбинация линеаризованного граничного условия $\tau_b = \kappa_2 du_b,\ \kappa_2 \approx c_{f_2}|u_b|/d$ и уравнения (20) приведет к выражению для скорости в слое. Подставляя это в уравнение (21), получаем выражение для C_2. Тогда профиль скорости становится:

$$u(z) = \frac{F}{2\nu_t}\left(d^2 - z^2\right) + \frac{F}{\kappa_2} \cdot$$

Интегрирование по глубине дает:

$$\bar{u} = \frac{1}{d}\int_{-d}^{0} u(z)dz = \frac{1}{d}\int_{-d}^{0}\left(\frac{F}{2\nu_t}\left(d^2 - z^2\right) + \frac{F}{\kappa_2}\right)dz = \frac{Fd^2}{3\nu_t} + \frac{Fd^2}{\kappa_2} \cdot \tag{22}$$

Таким образом, в стационарном случае также существуют два решения, (18) и (22), с двумя различными коэффициентами трения дна, где $\kappa_1 \neq \kappa_2$, поскольку напряжение сдвига слоя определяется по-разному в обоих случаях. Предположим, что усредненные по глубине скорости для обеих моделей равны $\bar{u} = U$ (метод, выбранный в данном исследовании). Это приводит к следующему соотношению между κ_1 и κ_2:

$$\frac{1}{\kappa_1} = \frac{1}{\kappa_2} + \frac{d^2}{3\nu_t} \cdot$$

Применяя σ = κ / ω, получим:

$$\frac{1}{\sigma_1} = \frac{1}{\sigma_2} + \frac{\omega d^2}{3\nu_t} \cdot \tag{23}$$

В соотношении между σ_1 и σ_2 фигурирует безразмерный параметр $\omega d^2/\nu$. Теперь выбор определенного диапазона для σ_1 приведет к получению σ_2 как функции безразмерного параметра для каждого значения σ_1. σ-соотношение (23) позволяет сравнивать амплитуды и фазы усредненных по глубине скоростей, вычисленных с помощью одномерной и двумерной модели соответственно.

На рисунках 4 и 5 это сделано с помощью соотношения амплитуды скорости и фазы для нескольких значений σ_1. На рисунках отношения амплитуд и фаз для соответствующих физических явлений обозначены точками. Таким образом, применение σ-соотношения ограничено ситуациями $\omega d^2/v_t > /\sigma_1$.

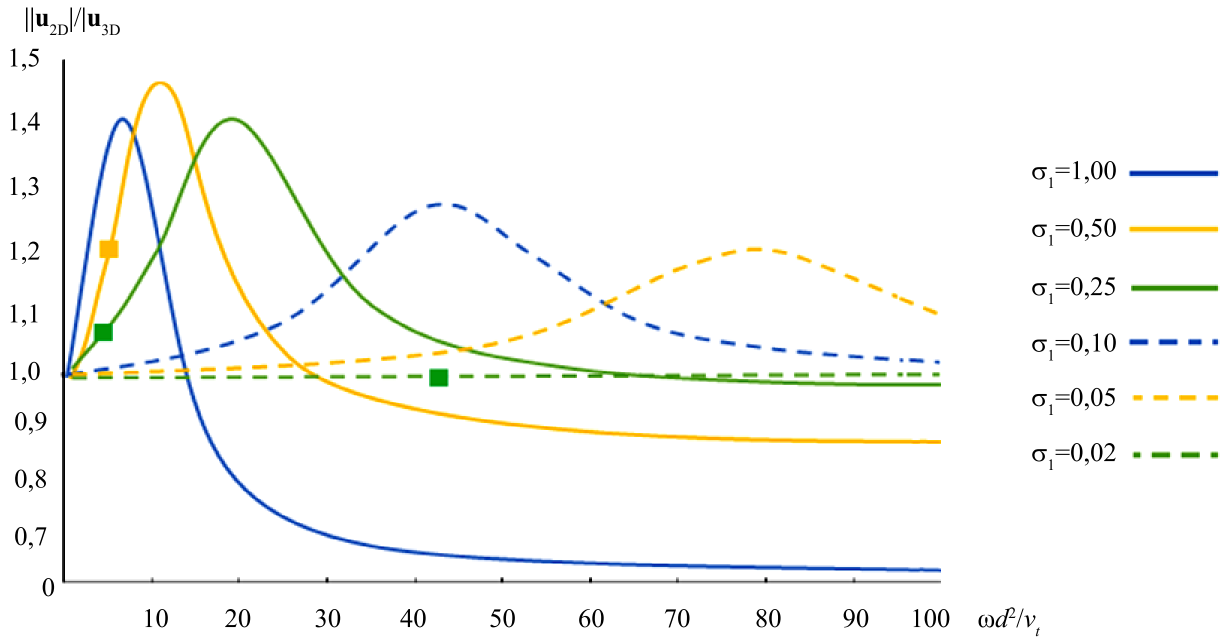


Рис. 4. Соотношение амплитуд между U и $\overline{u}$ как функция $\omega d^2/v_t$ и σ_1

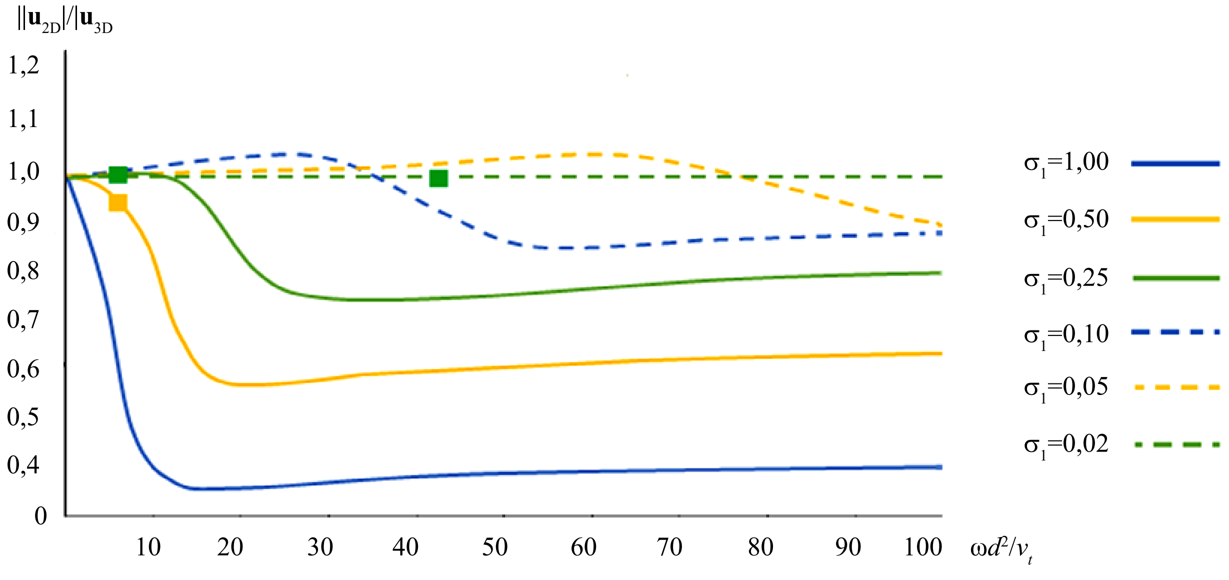


Рис. 5. Соотношение амплитуд между U и $\overline{u}$ как функция $\omega d^2/v_t$ и σ_1

Отношение амплитуд скорости больше 1 при условии, что $\omega d^2/v_t < 65$. Это означает, что скорость, вычисленная с помощью модели, усредненной по глубине, будет больше амплитуды скорости, которая содержит информацию о вертикали, чем наоборот. Кроме того, следует отметить, что для морей, подобных Азовскому (зеленая точка на линии $\sigma_1 = 0{,}25$) на рисунках показано отношение амплитуды скорости к 1,06 и отношение фазы к 1,01. Ожидается отклонение амплитуд на 6 % для значений параметров, которые с большой вероятностью произойдут на практике. При том же значении $\omega d^2/v_t$ но более высоком значении различия увеличиваются (желтая точка на линии $\sigma_1 = 0{,}50$). Единственной причиной увеличения σ_1, когда ω, d и v_t остаются постоянными, было бы увеличение скорости $\widehat{U}$. Итак, начальная исходная скорость была оценена как $\widehat{U} = 0{,}5$ м/с, но для $\widehat{U} = 1{,}0$ м/с желтая точка указывает на отношение амплитуд скорости 1,23 и отношение фаз 0,94.

При меньших значениях σ_1 отношение амплитуд скорости практически всегда больше 1 независимо от значения $\omega d^2/v_t$. В случае доминирования инерции (например, для сейша) не следует ожидать какой-либо разницы между расчетами с вертикальной информацией и без нее. На это указывает зеленая точка на линии $\sigma_1 = 0{,}02$.

Результат соотношения амплитуды и фазы, по-видимому, значительно чувствителен к оценке амплитуд скорости $\widehat{U}$, а также к коэффициенту донного трения c_f. Можно сделать вывод, что регионы, в которых следует ожидать значительных различий (более 20 %), трудно поддаются количественной оценке в общем смысле, кроме того, существуют определенные комбинации скорости потока и глубины воды, которые могут привести к значительному отличию результатов.

В одномерной модели установившегося течения с квадратичным придонным трением одномерное уравнение импульса сводится к:

$$\frac{c_{f_1}|U|U}{d}=F,$$

где c_{f1} — коэффициент трения для потока, усредненного по глубине.

Поскольку U можно считать положительным при установившемся течении, выражение для усредненной по глубине скорости становится:

$$U=\sqrt{\frac{Fd}{c_{f_1}}}\cdot$$

Отправной точкой для установившегося течения с квадратичным придонным трением для двумерной модели является уравнение (21). Константа интегрирования C_2 снова находится путем наложения граничного условия на слой. Комбинация квадратичного граничного условия $(\tau_b=c_{f_2}|u_b|u_b)$ и уравнения (20) приведет к выражению для скорости в слое. Подставляя это в уравнение (21), получаем выражение для C_2, таким образом, профиль скорости становится:

$$u(z)=\frac{F}{2\nu_t}\left(d^2-z^2\right)+\sqrt{\frac{Fd}{c_{f_2}}},$$

где c_{f2} — коэффициент трения для модели, содержащей информацию в вертикальном направлении. Интегрирование по глубине дает:

$$\overline{u}=\frac{1}{d}\int_{-d}^{0}u(z)dz=\frac{1}{d}\int_{-d}^{0}\left(\frac{F}{2\nu_t}\left(d^2-z^2\right)+\sqrt{\frac{Fd}{c_{f_2}}}\right)dz=\frac{Fd^2}{3\nu_t}+\sqrt{\frac{Fd}{c_{f_2}}}\cdot$$

Аналогично линеаризованному случаю, при предположении $\overline{u}=U$ следует соотношение между c_{f1} и c_{f2}:

$$\frac{1}{\sqrt{c_{f_1}}}=\frac{1}{\sqrt{c_{f_2}}}+\frac{\sqrt{Fd^3}}{3\nu_t},$$

также $c_{f1}\neq c_{f2}$ и c_{f2}, поскольку напряжение сдвига слоя определяется по-разному. Функция возвышения уровня может быть включена в этот анализ с помощью уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial z}=0.$$

Усредненная по глубине версия уравнения неразрывности равна:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+d\frac{\partial U}{\partial x}=0, \tag{24}$$

где ξ — высота над уровнем моря на свободной поверхности; d — глубина воды; U — усредненная по глубине скорость. Высоту поверхности можно найти, подставив выражение для усредненной по глубине скорости, вычисленной с помощью двух моделей.

Ранее полученная одномерная усредненная по глубине скорость U равна:

$$U=A\left(\frac{1}{1-i\sigma_1}\right)e^{i\,\omega t},$$

где $A = F/\,iw$ и $F=-g\partial\zeta\,/\,\partial x$.

Подставляя это в усредненное по глубине уравнение непрерывности (24), получаем:

$$i\omega\tilde{\zeta}-\frac{dg}{i\,\omega}\frac{\partial^2\tilde{\zeta}}{\partial x^2}\left(\frac{1}{1-i\sigma_1}\right)e^{i\,\omega t}=0.$$

Подставляя $\zeta(x,t)=\tilde{\zeta}(x,t)e^{i\,\omega t}$, получаем: $i\omega\tilde{\zeta}-\frac{dg}{i\,\omega}\frac{\partial^2\tilde{\zeta}}{\partial x^2}\left(\frac{1}{1-i\sigma_1}\right)e^{i\,\omega t}=0.$

Это дифференциальное уравнение имеет следующее однородное решение:

$$\tilde{\zeta}(x) = C_+ e^{-px} + C_- e^{px}, \tag{25}$$

где $\pm p_1 = \pm ik_0\sqrt{1 - i\sigma_1}$, $k_0 = \omega/c_0$ — волновое число без трения; $c_0 = \sqrt{gd}$ — скорость волны без трения.

Общее периодическое решение, заданное уравнением (25), содержит две экспоненциально затухающие волны, распространяющиеся в противоположном направлении. Здесь $\pm ik_0$ представляет распространение при отсутствии трения, $\sqrt{1 - i\sigma_1}$ представляет собой влияние трения. Переписываем p как $p_1 = \mu + ik$:

$$\mathrm{Im}(p) = k_1 = \frac{k_0}{\sqrt{1 - \tan^2\delta}}, \quad \mathrm{Re}(p) = \mu_1 = k_1 \tan\delta,$$

где $\tan^2\delta \equiv \sigma_1 = \frac{k_1}{\omega}$ или $\tan 2\delta \equiv \sigma_1 = \frac{k_1}{\omega}$.

Здесь вместо того, чтобы работать с σ (отношением трения к инерции), определяется так называемый «угол трения» δ, поскольку это представляется более удобным. Общее периодическое решение уравнения (25) может быть записано в виде:

$$\tilde{\zeta}(x) = C_+ e^{-p_1 x} + C_- e^{p_1 x}, \quad \tilde{\zeta}(x) = C_+ e^{-\mu_1 x} e^{-i k_1 x} + C_- 2e^{\mu_1 x} e^{-i k_1 x}, \quad \tilde{\zeta}(x) = \tilde{\zeta}_+ + \tilde{\zeta}_-. \tag{26}$$

Это сокращенное обозначение для двух волн, распространяющихся в противоположном направлении.

Аналогично u подставляется в уравнение непрерывности, что приводит к следующему комплексному корню:

$$\pm p_2 = \pm ik_0 \left(1 - \frac{\tilde{\gamma}}{bd}\tanh(bd)\right)^{-1/2},$$

где $\tilde{\gamma} = \left(1 + \frac{i}{\sigma_2 bd}\tanh(bd)\right)^{-1}$, $\sigma_2 = \frac{\kappa_2}{\omega}$, $bd = \sqrt{\frac{i\omega}{\nu_t}}d$.

Следующий раздел иллюстрирует некоторые из предыдущих разработок для сингулярной поступательной волны и волн в бассейне, закрытом с одного конца, как для двумерного, так и для трехмерного случая.

Результаты исследования. Для интерпретации решения для сингулярной прогрессивной волны будем использовать:

$$\zeta(x,t) = Re\{\tilde{\zeta} e^{i\omega t}\}.$$

Рассматривается сингулярная бегущая волна, поэтому будем использовать ζ_+ из уравнения (26):

$$\zeta_+(x,t) = \mathrm{Re}\{\tilde{\zeta}_+(x) e^{i\omega t}\} = \mathrm{Re}\{C_+ e^{-\rho x} e^{i\omega t}\}.$$

Подставляя $p_2 = \mu + ik$ и записывая C_1 по модулю и аргументу, получаем:

$$\zeta_+(x,t) = \mathrm{Re}\{|C_+| e^{-\mu x} e^{i(\omega t - kx + \arg C_+)}\} \text{ или } \zeta_+(x,t) = \tilde{\zeta}_+(x) e^{i(\omega t - kx + \arg C_+)},$$

где $\tilde{\zeta}_+(x) = |C_+| e^{-\mu x}$.

Это решение показывает высоту поверхности сингулярной поступательной волны с k (мнимая часть p) в качестве волнового числа (изменение фазы на единицу длины). Поскольку фаза изменяется в зависимости от x и t через $\omega t - kx$, это относится к прогрессивной волне в положительном направлении x, с фазовой скоростью $c = \omega/k$, а аргумент C_+ является начальной фазой (фазой, когда $\omega t = 0$) ζ_+ при $x = 0$. Амплитуда $\zeta_+(x, t)$ при $x = 0$ задается через $|C_+|$, и она экспоненциально уменьшается в положительном направлении по оси x со скоростью затухания μ.

Результаты численных экспериментов представлены в таблице 1. Случай 1 иллюстрирует ситуацию, в которой донное трение не вносит существенный вклад в решение ($\sigma_1 = 0{,}05$; $d = 60$ м); для случая 2 трение имеет существенное значение ($\sigma_1 = 0{,}50$; $d = 20$ м).

Амплитуда подъема поверхности уменьшается с коэффициентом $e^{i-\mu\Delta x}$.exp $(-\mu\Delta x)$. На расстоянии $\Delta x = 10$ км одномерный коэффициент уменьшения для случая 1 равен $e^{(-0{,}015)} \approx 0{,}99$, двумерный также равен $e^{(-0{,}015)} \approx 0{,}99$. Для случая 2 одномерный коэффициент уменьшения равен $\exp(-0{,}24) \approx 0{,}78$, двумерный — $\exp(-0{,}16) \approx 0{,}86$. Можно сделать вывод, что различия между одномерными и двумерными результатами не существенны, когда донное трение не вносит существенный вклад в решение.

Таблица 1

Расчетные параметры волны с постоянной вязкостью $\nu_t = 0{,}05$ м²/с

Параметр	Формула	Случай 1	Случай 2
σ_1		0,05	0,50
σ_2		0,06	0,62
d		60 [м]	20 [м]
c_0	$\sqrt{gd}$	24,3 [м/с]	14,0 [м/с]
k_0	ω / c	$5{,}80 \cdot 10^{-6}$	$1{,}00 \cdot 10^{-5}$
k_1	Im (p_1)	$5{,}80 \cdot 10^{-6}$	$1{,}03 \cdot 10^{-5}$
k_2	Im (p_2)	$5{,}81 \cdot 10^{-6}$	$8{,}79 \cdot 10^{-6}$
μ_1	Re (p_1)	$1{,}45 \cdot 10^{-7}$	$2{,}44 \cdot 10^{-6}$
μ_2	Re (p_2)	$1{,}50 \cdot 10^{-7}$	$1{,}56 \cdot 10^{-6}$

Аналитическими решениями для модели, усредненной по глубине, и модели, которая содержит информацию по вертикали, являются:

$$U = \tilde{A} \cdot \left(\frac{1}{1 - i\sigma_1} \right) e^{i\omega t}, \quad \bar{u} = \tilde{A} \cdot \left(1 - \frac{\tilde{\gamma}}{bd} \tanh(bd) \right) e^{i\omega t},$$

где $\tilde{\gamma}$ — функция только от σ_2 и bd. Таким образом, усредненные по глубине скорости в обеих моделях выглядят очень похоже и могут быть описаны функцией безразмерного σ_1-параметра (или безразмерного σ_2-параметра) и безразмерного bd-параметра, соответственно, где:

$$\sigma_1 = \frac{8}{3\pi} c_{f_1} \frac{\hat{U}}{\omega d}, \quad \sigma_2 = \frac{8}{3\pi} c_{f_2} \frac{\tilde{u}_b}{\omega d}, \quad bd = \sqrt{\frac{i\omega d^2}{\nu_t}}.$$

Чтобы связать вышеприведенные решения, будем считать, что усредненные по глубине скорости в обоих случаях равны для установившегося течения.

Концентрируясь на распространении одной преобладающей сингулярной прогрессивной волны, аналитический подход, показывает, что определенные условия могут вызывать значительные различия между усредненными по глубине скоростями, рассчитанными с помощью двумерной и трехмерной моделей. Однако тщательное исследование привело к выводу, что найти такие условия на практике довольно сложно. Таким образом, в сочетании с неопределенностями, связанными с соотношением между двумя моделями, наибольшие различия следует ожидать в местах с большей глубиной воды ($d > 60$ м) и высокими скоростями ($u \gtrapprox 1$ м/с). Также следует отметить, что отношение амплитуд практически всегда больше 1, а отношение фаз < 1 для морей.

Аналитические решения были найдены путем линеаризации уравнений, что, очевидно, имеет свои ограничения. Приводится различие между двумя видами нелинейных эффектов:

1. Нелинейности, вызванные членами более высокого порядка в уравнениях движения, т. е. членами адвективного ускорения и трения. Линеаризация термина трения kU основана на оптимальном воспроизведении преобладающей сингулярной прогрессивной волны. Хотя такая линеаризация эффективна для целей данного исследования, она искажает распространение и генерацию других составляющих движения водной среды.

2. Нелинейные эффекты, вызванные геометрическими нелинейностями, которые являются результатом зависимости поперечного сечения от высоты поверхности ζ. Это связано, например, с различной глубиной воды и шириной водоема, что будет важно при моделировании реального моря.

Список литературы

1. Bijlsma A.C., Uittenbogaard R.E., Blokland T. Horizontal large eddy simulation applied to stratified tidal flows. *Proceedings of the International Symposium on Shallow Flows.* Delft, Netherlands. 2003:559–566. https://doi.org/10.1201/9780203027325.ch70

2. Chamecki M., Chor T., Yang D., et al. Material transport in the ocean mixed layer: recent developments enabled by large eddy simulations. *Reviews of Geophys*. 2019;57:1338–1371. https://doi.org/10.1029/2019RG000655

3. Гущин В.А., Миткин В.В., Рождественская Т.И. и др. Численное и экспериментальное исследование тонкой структуры течения стратифицированной жидкости вблизи кругового цилиндра. *Прикладная механика и техническая физика.* 2007;48(1(281)):43–54. https://doi.org/10.1007/s10808-007-0006-y

4. Jirka G.H. Large scale flow structures and mixing processes in shallow flows. *Journal of Hydraulic Research.* 2001;39(6):567–573. https://doi.org/10.1080/00221686.2001.9628285

5. Smit P. B., Janssen T.T., Herbers T.H. Nonlinear wave kinematics near the ocean surface. *Journal of Oceanography*. 2017;47:1657–1673. https://doi.org/10.1175/JPO-D-16-0281.1

6. Единая государственная система информации об обстановке в Мировом океане. URL: http://portal.esimo.ru (дата обращения: 10.06.2023).

7. Alekseenko E., Roux B., Sukhinov A., et al. Nonlinear hydrodynamics in a mediterranean lagoon. *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2013;20(2):189–198. https://doi.org/10.5194/npg-20-189-2013

8. Battjes J., Labeur R. *Unsteady Flow in Open Channels*. Cambridge University Press, 2017. 312 p. https://doi.org/10.1017/9781316576878

9. Белоцерковский О.М. *Турбулентность: новые подходы*. Москва : Наука, 2003. 285 с.

10. Монин А.С. Турбулентность и микроструктура в океане. *Успехи физических наук*. 1973;109(2):333–354. https://doi.org/10.1070/PU1973v016n01ABEH005153

11. Breugem W.P. The influence of wall permeability on laminar and turbulent flows. *PhD thesis*. Delft University of Technology, 2004. 206 p.

12. Vreugdenhil C.B. *Numerical Methods for Shallow-Water Flow*. Springer, Berlin; Heidelberg, New York, 1994. 262 p.

13. Fischer H. *Mixing in Inland and Coastal Waters*. Academic Press, 1979. 483 p

14. Lorentz H.A. Sketches of his work on slow viscous flow and some other areas in fluid mechanics and the background against which it arose. *Journal of Engineering Mathematics*. 1996;30(1–2):1–18. https://doi.org/10.1007/BF00118820

15. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Алексеенко Е.В. Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе. *Математические моделирование*. 2011;3(5):562–574. https://doi.org/10.1134/S2070048211050115

16. Сухинов А.И., Чистяков А.Е. Параллельная реализация трехмерной модели гидродинамики мелководных водоемов на супервычислительной системе. *Вычислительные методы и программирование*. 2012;13(1):290–297.

17. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Фоменко Н.А. Методика построения разностных схем для задачи диффузии-конвекции-реакции, учитывающих степень заполненности контрольных ячеек. *Известия ЮФУ. Технические науки.* 2013;4(141): 87–98.

18. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежных водных системах на многопроцессорной вычислительной системе. *Вычислительные методы и программирование.* 2014;15:610–620.

19. Васильев В.С., Сухинов А.И. Прецизионные двумерные модели мелких водоемов. *Математическое моделирование.* 2003;15(10):17–34.

20. Самарский А.А. *Теория разностных схем*. Москва: Наука, 1989. 553 с.

21. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. *Численные методы решения задач конвекции-диффузии*. Москва: Наука, 2015.

References

1. Bijlsma AC, Uittenbogaard RE, Blokland T. Horizontal large eddy simulation applied to stratified tidal flows. *Proceedings of the International Symposium on Shallow Flows*. Delft, Netherlands. 2003:559–566. https://doi.org/10.1201/9780203027325.ch70

2. Chamecki M, Chor T, Yang D, et al. Material transport in the ocean mixed layer: recent developments enabled by large eddy simulations. *Reviews of Geophys*. 2019;57:1338–1371. https://doi.org/10.1029/2019RG000655

3. Gushchin VA, Mitkin VV, Rozhdestvenskaya TI, et al. Numerical and experimental study of the fine structure of a stratified fluid flow over a circular cylinder. *Applied Mechanics and Technical Physics*. 2007;48(1(281)):43–54. (In Russ.). https://doi.org/10.1007/s10808-007-0006-y

4. Jirka GH. Large scale flow structures and mixing processes in shallow flows. *Journal of Hydraulic Research*. 2001;39(6):567–573. https://doi.org/10.1080/00221686.2001.9628285

5. Smit PB, Janssen TT, Herbers TH. Nonlinear wave kinematics near the ocean surface. *Journal of Oceanography.* 2017;47:1657–1673. https://doi.org/10.1175/JPO-D-16-0281.1

6. Unified state information system on the situation in the World Ocean. URL: http://portal.esimo.ru (Accessed 10.06.2023).

7. Alekseenko E, Roux B, Sukhinov A, et al. Nonlinear hydrodynamics in a mediterranean lagoon. *Nonlinear Processes in Geophysics.* 2013;20(2):189–198. https://doi.org/10.5194/npg-20-189-2013

8. Battjes J, Labeur R. *Unsteady Flow in Open Channels*. Cambridge University Press, 2017. 312 p. https://doi.org/10.1017/9781316576878

9. Belocerkovskij OM. *Turbulence: new approaches*. Moscow : Nauka, 2003. 285 c.

10. Monin AS. Turbulence and microstructure in the ocean. *Soviet Physics Uspekhi*. 1973;109(2):333–354. (In Russ.). https://doi.org/10.1070/PU1973v016n01ABEH005153

11. Breugem WP. The influence of wall permeability on laminar and turbulent flows. PhD thesis. *Delft University of Technology*, 2004. 206 p.

12. Vreugdenhil CB. *Numerical Methods for Shallow-Water Flow*. Springer, Berlin; Heidelberg, New York, 1994. 262 p.

13. Fischer H. *Mixing in Inland and Coastal Waters.* Academic Press, 1979. 483 p.

14. Lorentz HA. Sketches of his work on slow viscous flow and some other areas in fluid mechanics and the background against which it arose. *Journal of Engineering Mathematics*. 1996;30(1–2):1–18. https://doi.org/10.1007/BF00118820

15. Sukhinov AI, Chistyakov AE, Alekseenko EV. Numerical realization of the three-dimensional model of hydrodynamics for shallow water basins on a high-performance system. *Matematicheskoe modelirovanie*. 2011;3(5):562–574. (In Russ.). https://doi.org/10.1134/S2070048211050115

16. Suhinov AI, Chistyakov AE. Parallel implementation of a three-dimensional hydrodynamic model of shallow water basins on supercomputing systems. *Numerical methods and programming*. 2012;13(1):290–297. (In Russ.).

17. Suhinov AI, Chistyakov AE, Fomenko NA. A Method of Constructing Difference Scheme for Problems of Diffusion-Convection-Reaction, Takes Into the Degree of Filling of the Control Volume. Proceedings of the Southern Federal University. *Technical sciences*. 2013;4(141): 87–98. (In Russ.).

18. Sukhinov AI, Chistyakov AE, Procenko EA. Sediment Transport mathematical modeling in a coastal zone using multiprocessorComputational. *Numerical methods and programming*. 2014;15:610–620. (In Russ.).

19. Vasil'ev VS, Suhinov AI. Precise Two-Dimensional Models for Shallow Water Basins. *Matematicheskoe modelirovanie*. 2003;15(10):17–34. (In Russ.).

20. Samarskiy AA. *The Theory of difference schemes*. Moscow: Nauka, 1989. 553 p. (In Russ.).

21. Samarskiy AA, Vabishevich PN. *Numerical methods for solving convection-diffusion problems*. Moscow: Nauka, 2015. (In Russ.).

Об авторах:

Проценко Софья Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, научный сотрудник, Таганрогский институт им. А. П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (347936, РФ, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), ORCID, rab5555@rambler.ru

Проценко Елена Анатольевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, ведущий научный сотрудник, Таганрогский институт им. А. П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (347936, РФ, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), ORCID, eapros@rambler.ru

Харченко Антон Владимирович, магистрант, Таганрогский институт им. А. П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (347936, РФ, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), av.kharchenko91@mail.ru

Заявленный вклад соавторов:
все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Поступила в редакцию 19.07.2023
Поступила после рецензирования 10.08.2023
Принята к публикации 11.08.2023

Конфликт интересов
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Sofia V Protsenko, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Researcher, A. P. Chekhov Taganrog Institute (branch) Rostov State University of Economics (48, Initiative St., Taganrog, 347936, RF), ORCID, rab5555@rambler.ru

Elena A Protsenko, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Leading Researcher, A. P. Chekhov Taganrog Institute (branch) Rostov State University of Economics (48, Initiative St., Taganrog, 347936, RF), ORCID, eapros@rambler.ru

Anton V Kharchenko, Master's student, A. P. Chekhov Taganrog Institute (branch) Rostov State University of Economics (48, Initiative St., Taganrog, 347936, RF), av.kharchenko91@mail.ru

Claimed contributorship:
all authors have made an equivalent contribution to the preparation of the publication.

Received 19.07.2023
Revised 10.08.2023
Accepted 11.08.2023

Conflict of interest statement
the authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.