ТОМ 7, №4, 2023
eISSN 2587-8999
РЕЦЕНЗИРУЕМЫЙ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Computational Mathematics and Information Technologies

Вычислительная математика / Computational Mathematics

Математическое моделирование / Mathematical Modelling

Информационные технологии / Information Technologies

www.cmit-journal.ru
DOI 10.23947/2587-8999

Computational Mathematics and Information Technologies

Рецензируемый научно-теоретический журнал (издаётся с 2017 года)

eISSN 2587-8999
DOI: 10.23947/2587-8999

Том 7, № 4, 2023

Журнал «Computational Mathematics and Information Technologies» ориентирован на фундаментальные и прикладные исследования по следующим научным разделам:

1. Вычислительная математика
2. Математическое моделирование
3. Информационные технологии

Индексация:	РИНЦ, CrossRef, CyberLeninka
Наименование органа, зарегистрировавшего издание	Свидетельство о регистрации средства массовой информации ЭЛ № ФС 77 – 66529 от 21 июля 2016 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Учредитель и издатель	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ)
Периодичность	4 выпуска в год
Адрес учредителя и издателя	344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1
E-mail	CMIT-EJ@yandex.ru
Телефон	+7(863) 273–85–14
Сайт	https://cmit-journal.ru
Дата выхода в свет	29.12.2023

Computational Mathematics and Information Technologies

Peer-reviewed scientific and theoretical journal (published since 2017)

eISSN 2587-8999
DOI: 10.23947/2587-8999

Vol. 7, no. 4, 2023

The scope of "Computational Mathematics and Information Technologies" is focused on fundamental and applied research according to the following scientific sections:

1. Computational Mathematics
2. Mathematical Modelling
3. Information Technologies

Indexing:	Russian Scientific Citation Index, Crossref, Cyberleninka
Name of the body that registered the publication	Mass media registration certificate ЭЛ № ФС 77-66529 dated July 21, 2016 issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media.
Founder and publisher	Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education Don State Technical University (DSTU)
Periodicity	4 issues per year
Address of the founder and publisher	Gagarin Sq. 1, Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation
E-mail	CMIT-EJ@yandex.ru
Telephone	+7(863) 273–85–14
Website	https://cmit-journal.ru
Date of publication	29.12.2023

Содержание

Contents

ЮБИЛЕЙ УЧЕНОГО
ANNIVERSARY OF THE SCIENTIST

Поздравление с юбилеем академика РАН В.П. Дымникова

26 ноября 2023 года Валентину Павловичу Дымникову — академику РАН, доктору физико-математических наук, профессору, исполнилось 85 лет. Валентин Павлович Дымников — выдающийся деятель российской науки, специалист в области математических моделей и численных методов в области задач геофизической гидро-аэрогидродинамики, взаимодействия океана и атмосферы. Ему принадлежат основополагающие разработки глобальных моделей атмосферных процессов, климата и создание научной основы для изучения предсказуемости его изменений.

В.П. Дымников родился 26 ноября 1938 г. в поселке Юрино Марийской АССР. В 1955 г. с серебряной медалью окончил 11 мужскую среднюю школу г. Йошкар-Ола, а в 1961 году — Московский инженерно-физический институт. Является учеником академика Г.И. Марчука, последнего Президента Академии наук СССР, основателя Института Вычислительной математики РАН.

В.П. Дымников возглавлял Институт вычислительной математики РАН (ныне ИВМ РАН им. Г.И. Марчука) в период с 2000 по 2010 г. Под его руководством воспитана плеяда молодых перспективных докторов и кандидатов наук. В.П. Дымников является автором более 200 научных работ, в том числе — 15 монографий и учебных пособий.

Является членом редколлегий ряда авторитетных журналов: «Известия РАН. Физика атмосферы и океана», «Доклады академии наук», «Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling», «Экологический вестник научных центров черноморского экономического сотрудничества», членом издательского совета «Синергетика».

В.П. Дымников является членом ряда международных научных комитетов и комиссий, в частности, Международной комиссии по динамической метеорологии, руководящего научного комитета международной программы ТОГА (тропический океан и глобальная атмосфера), руководящего научного комитета Всемирной климатической программы. Член Американского метеорологического общества. В 2004 году избран членом Европейской академии наук. В.П. Дымников награжден орденом Почета, является Лауреатом Государственной премии РФ. Удостоен премии им. А.А. Фридмана РАН за цикл работ по теории крупномасштабных атмосферных процессов и теории климата.

Коллектив редколлегии журнала «Вычислительная математика и информационные технологии», коллеги Валентина Павловича сердечно поздравляют дорогого и глубоко уважаемого юбиляра с 85-ым днем рождения, желают ему крепкого здоровья, новых идей и творческих достижений в области вычислительный математики, решения задач климата и геофизической гидро-аэрогидродинамики, большого человеческого счастья!

Редакционная коллегия журнала
Computational Mathematics and Information Technologies
Главный редактор — Сухинов Александр Иванович,
Заместитель главного редактора — Якобовский Михаил Владимирович,
Ответственный секретарь — Петров Александр Пхоун Чжо,
Воеводин Владимир Валентинович,
Гасилов Владимир Анатольевич,
Гущин Валентин Анатольевич,
Марчук Владимир Иванович,
Петров Игорь Борисович,
Поляков Сергей Владимирович,
Тишкин Владимир Федорович,
Четверушкин Борис Николаевич,
Чистяков Александр Евгеньевич,
Василевский Юрий Викторович.

Краткая справка об основных научных достижениях академика РАН В.П. Дымникова

Академиком получены фундаментальные научные результаты в рамках ряда направлений современной геофизики и математического моделирования. В области *переноса полей влажности в атмосфере* им исследованы микрофизические процессы адаптации полей влажности и облачности, сформулировано новое уравнение переноса этих полей, а также предложены методы его решения, решена задача параметризации разорванной облачности, предложен метод параметризации влажной конвекции и др.

Под руководством В.П. Дымникова разработана и внедрена в оперативную практику полностью автоматизированная система *прогноза погоды* на ограниченной территории. Работы, выполненные под его руководством совместно со специально созданной лабораторией в Гидрометцентре России, приняты в 2007 году к внедрению в оперативную практику Росгидромета.

В области *теории гидродинамической устойчивости* им решена задача развития бароклинной неустойчивости в атмосфере при наличии конденсации, исследована проблема аппроксимации по спектру. Изучена проблема симметрии показателей Ляпунова для регулярных систем с рэлеевским трением, проблема неустойчивости зонально-несимметричных атмосферных потоков и др.

В.П. Дымниковым было предложено и обосновано динамико-стохастическое уравнение для описания *низкочастотной изменчивости атмосферной циркуляции* и исследована связь сингулярных векторов динамического оператора с собственными векторами ковариационной матрицы, исследованы наиболее скоррелированные распределения поверхностной температуры океана и характеристик атмосферной циркуляции.

В области *численных методов решения дифференциальных уравнений* предложен метод построения абсолютно устойчивых разностных схем для уравнений гидротермодинамики атмосферы, обладающий точным аналогом квадратичного закона сохранения энергии на основе симметризации исходной системы уравнений. Предложен метод построения разностных схем, обладающих заданным набором интегральных законов сохранения на основе использования сопряженных уравнений.

Под руководством В.П. Дымникова разработаны оригинальные глобальные модели *общей циркуляции атмосферы, зонально-осреднённые модели общей циркуляции атмосферы и океана*, а также получен ряд важных результатов по моделированию современного климата и его изменений.

Сформировано новое направление в *теории климата* — математическая теория климата, основой которой является исследование структуры аттракторов климатических изменений моделей, их устойчивости и чувствительности к изменениям параметров. Исследована структура аттракторов атмосферных моделей, диссипационно-флуктуационные соотношения применены для построения оператора отклика моделей на малые внешние воздействия, что позволяет исследовать чувствительность реальной климатической системы.

Исследована и доказана применимость *сопряженных уравнений нелинейных систем гидродинамического типа* для построения известных интегральных законов сохранения, получены новые законы сохранения. Предложен метод построения оптимального возбуждения *крупномасштабных компонентов атмосферной циркуляции*, сформулирована задача о потенциальной предсказуемости первого рода и предложен метод её решения на основе сведения динамической системы к динамико-стохастической.

Под руководством В.П. Дымникова в ИВМ РАН разработана *глобальная математическая модель климата мирового уровня*, которая позволяет оценить будущие изменения климата на основе совместных интерактивных моделей общей циркуляции атмосферы, океана, криосферы и суши. В рамках проекта создания модели Земной системы разработаны оригинальные модели верхней атмосферы и ионосферы. С целью внедрения разработанных моделей в оперативную практику В.П. Дымниковым организована лаборатория моделирования ионосферы в Институте прикладной геофизики им. Е.К. Фёдорова.

В.П. Дымников — руководитель ведущей научной школы «Математическое моделирование климата», поддержанной грантом Президента России. По инициативе академика В.П. Дымникова и под его научным руководством с 2001 года в различных городах Западной Сибири регулярно проводится школа молодых учёных «Вычислительные и информационные технологии в науке об окружающей среде». Им подготовлено 8 докторов и 12 кандидатов наук. Ученый является руководителем семинара «Математическое моделирование геофизических процессов», соруководителем семинара «Глобальные изменения природной среды и климата».

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
COMPUTATIONAL MATHEMATICS

Научная статья

УДК 519.6
https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-9-21

Двумерная гидродинамическая модель прибрежных систем, учитывающая испарение

А.И. Сухинов[1], О.В. Колгунова[2], М.З. Гирмай[1], О.С. Нахом[1]

[1]Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация
[2]Северо-Осетинский государственный университет, г. Владикавказ, Российская Федерация

sukhinov@gmail.com

Аннотация

Введение. Несмотря на развитие численных методов морской гидродинамики, ориентированных на использование пространственно-трехмерных моделей, применение двумерных гидродинамических моделей по-прежнему остается актуальным. Прежде всего это касается моделирования гидродинамических процессов в мелководных и прибрежных системах при решении практически важных задач прогнозирования переноса загрязняющих веществ во взвешенной и растворенной формах. Испарение для морских прибрежных систем, располагающихся на Юге России (Азовское море, Северный Каспий и др.), а тем более в прибрежных районах Красного моря, является существенным фактором, который влияет не только на баланс водных масс, но и вносит изменения в импульс системы и распределение вектора скорости водной среды. Этот эффект заметен для прибрежных течений и мелководных систем.

Материалы и методы. В данной работе при построении пространственно-двумерной (2D) модели гидродинамики морских прибрежных систем при интегрировании по вертикальной координате не применялась традиционная методика преобразования членов уравнений Навье-Стокса, содержащих дифференцирование по горизонтальным пространственным переменным, предполагающая перестановку операций дифференцирования по горизонтальным пространственным координатам и интегрирование по вертикальной координате. Это позволило избежать появления в пространственно-двумерной модели нефизических источников энергии и импульса, которые могут иметь существенное значение в традиционных 2D-моделях при значительных перепадах глубин, характерных для прибрежных систем. Дополнительно в работе исследовано выполнение аналога закона сохранения полной механической энергии системы для построенной 2D-модели.

Результаты исследования. С помощью корректного преобразования 3D-модели (интегрирования уравнений Навье-Стокса и неразрывности по вертикальной координате с учетом испарения со свободной поверхности) построены пространственно-двумерные модели гидродинамики, для которых выполняются основные законы сохранения, в том числе массы и полной механической энергии системы. Исследовано выполнение аналога закона сохранения полной механической энергии для различных типов граничных условий, в том числе на дне. Выполнен корректный учет испарения со свободной поверхности не только в уравнении неразрывности, но и в уравнениях движения с учетом ветра и волн.

Обсуждение и заключение. Построена и исследована двумерная модель гидродинамики, учитывающая испарение не только в уравнении баланса масс (неразрывности), но и в уравнениях движения (Навье-Стокса). Предложенная модель может быть использована для прогнозного моделирования гидрофизических процессов, в том числе распространения загрязняющих веществ в водной среде прибрежных систем и мелководных водоемов применительно к таким морским системам, как Азовское море, Северный Каспий, прибрежные районы Красного моря и др. Пространственно-двумерные модели морской гидродинамики, не заменяя трехмерных моделей, могут служить модельной основой для оперативного прогнозирования ситуаций в прибрежных системах и мелководных объектах с использованием вычислительных систем с относительно невысокой производительностью и умеренным объемом оперативной памяти (5–10 Тфлопс, 2–4 ТБ соответственно).

Ключевые слова: прибрежные морские системы, испарение, 2D-модели гидродинамики, законы сохранения массы и полной механической энергии

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке по гранту РНФ № 22-11-00295.

Для цитирования. Сухинов А.И., Колгунова О.В., Гирмай М.З., Нахом О.С. Двумерная гидродинамическая модель прибрежных систем, учитывающая испарение. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):9‒21. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-9-21

Original article

Two Dimensional Hydrodynamics Model with Evaporation for Coastal Systems

Alexander I. Sukhinov[1], Olesya V. Kolgunova[2], Mebrakhtu Z. Ghirmay[1], Ogbamikael S. Nahom[1]

[1]Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

[2]North-Osetian State University, Vladikavkaz, Russian Federation

✉sukhinov@gmail.com

Abstract

Introduction. The use of two-dimensional (2D) hydrodynamic models is relevant, despite the development of numerical methods of marine hydrodynamics focused on the use of three-dimensional spatial models. This is due to the modelling of hydrodynamic processes in shallow and coastal systems in solving practically important problems of predicting the transport of pollutants in suspended and dissolved forms. Evaporation for the Southern of Russia marine coastal systems (the Azov Sea, the Northern Caspian, etc.), and even more so in the coastal areas of the Red Sea, is a significant factor that affects not only the balance of water masses, but also makes changes in the momentum of the system and the distribution of the velocity vector of the aquatic environment. This effect is significant for coastal currents and shallow-water systems.

Materials and Methods. The traditional method of converting the terms of the Navier-Stokes equations containing differentiation by horizontal spatial variables was used, involving the rearrangement of differentiation operations by horizontal spatial coordinates and integration by vertical coordinate when constructing a spatially two-dimensional model of hydrodynamics of marine coastal systems when integrated by vertical coordinate. This made it possible to avoid the appearance of non-physical sources of energy and momentum in the spatially two-dimensional model, which can be essential in traditional 2D models with significant depth differences characteristic of coastal systems. The implementation of the analogue of the law of conservation of the total mechanical energy of the system for the constructed 2D model is investigated.

Results. Using the correct transformation of the 3D model (integration of the Navier-Stokes equations and continuity along a vertical coordinate, taking into account evaporation from a free surface), spatially two-dimensional models of hydrodynamics are constructed, for which the basic conservation laws, including mass and total mechanical energy of the system, are fulfilled. The implementation of an analogue of the law of conservation of total mechanical energy for various types of boundary conditions, including at the bottom, is investigated. The evaporation from the free surface is correctly accounted for not only in the continuity equation, but also in the equations of motion taking into account wind and waves.

Discussion and Conclusion. 2D model of hydrodynamics has been constructed and studied, taking into account evaporation not only in the mass balance equation (continuity), but also in the Navier-Stokes equations of motion. The proposed model can be used for predictive modelling of hydrophysical processes, including the spread of pollutants in the aquatic environment of coastal systems and shallow reservoirs in relation to marine systems such as the Sea of Azov, the Northern Caspian Sea, coastal areas of the Red Sea, etc. Spatially two-dimensional models of marine hydrodynamics, without replacing three-dimensional models, can serve as a model basis for operational forecasting of situations in coastal systems and shallow-water objects using computing systems with relatively low performance and a moderate amount of RAM (5–10 Tflops, 2–4 TB, respectively).

Keywords: Coastal Systems, Evaporation, 2D Hydrodynamics Models, Mass Conservation Law, Mechanical Energy Conservation Law

Financing. The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 22-11-00295.

For citation. Sukhinov A.I., Kolgunova O.V., Ghirmay M.Z., Nahom O.S. Two Dimensional Hydrodynamics Model with Evaporation for Coastal Systems. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):9‒21. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-9-21

Введение. Несмотря на развитие численных методов морской гидродинамики, ориентированных на использование пространственно-трехмерных моделей, применение двумерных гидродинамических моделей остается востребованным [1–4]. Прежде всего это касается гидродинамических процессов в мелководных и прибрежных системах при решении практически важных задач оперативного прогноза распространения загрязняющих веществ во взвешенной и растворенной формах, движения осадков и донных отложений. Испарение для морских прибрежных систем, располагающихся на Юге России (Азовское море, Северный Каспий и др.), а тем более для прибрежных районов Красного моря является существенным фактором, который влияет не только на баланс водных масс, но и вносит изменения в импульс системы и распределение вектора скорости водной среды. Этот эффект очень заметен для прибрежных течений и мелководных систем [5−8]. Цель работы — построить консервативную пространственно-двумерную гидродинамическую модель, для которой выполняются законы сохранения баланса массы и полной механической энергии с учетом испарения воды со свободной поверхности водного объекта.

Прибрежные морские системы характеризуются высокой интенсивностью движения водной среды, большими перепадами глубин, сложной формой береговой линии, а в ряде случаев — наличием различных гидротехнических сооружений. Наибольший вред водным ресурсам наносит промышленное загрязнение [9−10]. В результате деятельности береговых предприятий и морского флота в воду попадают полихлорированные бифенилы, тяжелые металлы, поверхностно-активные вещества, легкоокисляемая органика, полиароматические углеводороды и др. Особую опасность представляют отходы нефтехимической и нефтеперерабатывающей промышленности. Нефтяное загрязнение является одной из наиболее вредных и трудноразрешимых чрезвычайных ситуаций [11–12].

Испарение — важный процесс при большинстве разливов нефти. Легкая нефть очень резко изменяется с жидкой на вязкую. В условиях, когда пограничный слой воздуха неподвижен (нет ветра) или имеет низкую турбулентность, воздух непосредственно над водой быстро насыщается и испарение замедляется [13]. Когда скорость ветра увеличивается, скорость испарения существенно возрастает и является нелинейно зависящей функцией от высоты волн. В настоящей работе используется относительно простая модель испарения, которая позволяет учесть эти эффекты.

Другая особенность полученных пространственно-двумерных моделей гидродинамики — учет того факта, что операции дифференцирования по пространственным переменным в горизонтальных направлениях не являются, как показано А.И. Сухиновым, коммутативными по отношению к операции интегрирования по вертикальной пространственной координате. В случае прибрежных систем, где наблюдается существенный перепад глубин, произвольное изменение порядка следования данных операций, выполненное для «удобства и простоты» получения пространственно-двумерных уравнений движения водной среды, может привести к появлению фиктивных, физически необоснованных источников импульса в уравнениях Навье-Стокса. Предложенный авторами способ построения двумерных уравнений движения позволяет исключить данный негативный эффект.

Материалы и методы. Для моделирования гидродинамического процесса с испарением на открытой акватории используются уравнения сохранения массы, импульса и энергии, описывающие перенос как жидкой, так и газовой фазы. Вводится прямоугольная декартова система координат. Ось Oz направим противоположно направлению g из некоторой точки на невозмущенной поверхности жидкости, ось Ox — на восток, ось Oy — на север. Поскольку вклад центробежной силы составляет ≈ 0,2 % от вклада гравитационной силы притяжения к Земле, угол ϑ между вектором угловой скоростью вращения Земли и вертикалью Oz можно считать дополняющим до $\pi/2$ широтой места.

Результаты исследования. При выводе 2D-модели гидродинамики выполним интегрирование 3D-уравнения неразрывности

$$u'_x + v'_y + w'_z = 0$$

и 3D-уравнений Навье-Стокса

$$u'_t + \left(u^2\right)'_x + (uv)'_y + (uw)'_z = -\rho^{-1} p'_x - \varphi'_x + \eta\rho^{-1}\left(u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}\right) + 2\Omega\left(v\sin\vartheta - w\cos\vartheta\right),$$

$$v'_t + (uv)'_x + \left(v^2\right)'_y + (vw)'_z = -\rho^{-1} p'_y - \varphi'_y + \eta\rho^{-1}\left(v''_{xx} + v''_{yy} + v''_{zz}\right) - 2\Omega\, u\sin\vartheta,$$

$$w'_t + (uw)'_x + (vw)'_y + \left(w^2\right)'_z = -\rho^{-1} p'_z - \varphi'_z + \eta\rho^{-1}\left(w''_{xx} + w''_{yy} + w''_{zz}\right) + 2\Omega\, u\cos\vartheta$$

для вязкой (в линейном приближении) несжимаемой (плотность ρ = const) жидкости, вращающейся с угловой скоростью

$$\mathbf{\Omega} = \Omega\left(\mathbf{j}\cos\vartheta + \mathbf{k}\sin\vartheta\right),$$

где **i, j, k** — единичные орты; $u = u\,(x, y, z, t)$, $v = v\,(x, y, z, t)$, $w = w\,(x, y, z, t)$ — компоненты вектора скорости жидкости в точке (x, y, z) в момент времени t; p — полное гидростатическое давление; φ — гравитационный потенциал; η —первый коэффициент вязкости в однородном поле тяжести $\nabla\varphi = -\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ = const; $p_a = p_a\,(x, y, t)$ — атмосферное давление, $p = p_a + \rho g(\xi - z)$, $\nabla p = g\left(\zeta'_x\mathbf{i} + \zeta'_y\mathbf{j} - \mathbf{k}\right)$, $-h \le z \le \xi$,
где $\xi = \xi\ (x, y, z)$ — поднятие уровня свободной поверхности жидкости по отношению к невозмущенному состоянию; $h = h\,(x, y, z)$ — высота столба жидкости под невозмущенной поверхностью.

Подставляя в 3D уравнения Навье-Стокса выражения для гравитационного потенциала и давления получим:

$$u'_x + v'_y + w'_z = 0,$$

$$u'_t + \left(u^2\right)'_x + (uv)'_y + (uw)'_z = -g\zeta'_x - \rho^{-1}\left(p_a\right)'_x + \eta\rho^{-1}\left(u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}\right) + 2\Omega\left(v\sin\vartheta - w\cos\vartheta\right),$$

$$v'_t + (uv)'_x + \left(v^2\right)'_y + (vw)'_z = -g\zeta'_y - \rho^{-1}\left(p_a\right)'_y + \eta\rho^{-1}\left(v''_{xx} + v''_{yy} + v''_{zz}\right) - 2\Omega u\sin\vartheta,$$

$$w_t' + (uw)_x' + (vw)_y' + (w^2)_z' = \eta\rho^{-1}\left(w_{xx}'' + w_{yy}'' + w_{zz}''\right) + 2\Omega u\cos\vartheta .$$

Интегрируем полученные уравнения по вертикальной координате z от $-h$ до ξ с учетом соотношений для дифференцируемых функций $f = f(x, y, z, t)$, $\xi = \xi\ (x, y, t)$, $h = h\ (x, y, t)$:

$$\int_{-h}^{\zeta} f_t' dz = \left(\int_{-h}^{\zeta} f dz\right)_t' - f_s\zeta_t' + f_b\left(-h_t'\right),$$

$$\int_{-h}^{\zeta} f_x' dz = \left(\int_{-h}^{\zeta} f dz\right)_x' - f_s\zeta_x' + f_b\left(-h_x'\right),$$

$$\int_{-h}^{\zeta} f_y' dz = \left(\int_{-h}^{\zeta} f dz\right)_y' - f_s\zeta_y' + f_b\left(-h_y'\right),$$

$$\int_{-h}^{\zeta} f_z' dz = f_s - f_b ,$$

где $f_s = f(x, y, \xi, t)$, $f_b = f(x, y, -h, t)$ — значения функции f на поверхности и дне соответственно.

Получаем следующие уравнения:

$$\left(U_x' - u_s\zeta_x' - u_b h_x'\right) + \left(V_x' - v_s\zeta_y' - v_b h_y'\right) + \left(w_s - w_b\right) = 0,$$

$$\left(U_t' - u_s\zeta_t' - u_b h_t'\right) + \left(\left(\int_{-h}^{\zeta} u^2 dz\right)_x' - u_s^2\zeta_x' - u_b^2 h_x'\right) + \left(\left(\int_{-h}^{\zeta} uv dz\right)_y' - u_s v_s\zeta_y' - u_b v_b h_y'\right) + \left(u_s w_s - u_b w_b\right) =$$

$$= -gH\zeta_x' - \frac{H}{\rho}\left(p_a\right)_x' + \frac{\eta}{\rho}\left(\left(\left(\int_{-h}^{\zeta} u_x' dz\right)_x' - \left(u_x'\right)_s\zeta_x' - \left(u_x'\right)_b h_x'\right) + \left(\left(\int_{-h}^{\zeta} u_y' dz\right)_y' - \left(u_y'\right)_s\zeta_y' - \left(u_y'\right)_b h_y'\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\left(u_z'\right)_s - \left(u_z'\right)_b\right)\right) + 2\Omega\left(V\sin\vartheta - W\cos\vartheta\right), \tag{1}$$

$$\left(V_t' - v_s\zeta_t' - v_b h_t'\right) + \left(\left(\int_{-h}^{\zeta} uv dz\right)_x' - u_s v_s\zeta_x' - u_b v_b h_x'\right) + \left(\left(\int_{-h}^{\zeta} v^2 dz\right)_y' - v_s^2\zeta_y' - v_b^2 h_y'\right) + \left(v_s w_s - v_b w_b\right) =$$

$$= -gH\zeta_y' - \frac{H}{\rho}\left(p_a\right)_y' + \frac{\eta}{\rho}\left(\left(\left(\int_{-h}^{\zeta} v_x' dz\right)_x' - \left(v_x'\right)_s\zeta_x' - \left(v_x'\right)_b h_x'\right) + \left(\left(\int_{-h}^{\zeta} v_y' dz\right)_y' - \left(v_y'\right)_s\zeta_y' - \left(v_y'\right)_b h_y'\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\left(v_z'\right)_s - \left(v_z'\right)_b\right)\right) - 2\Omega U\sin\vartheta, \tag{2}$$

$$\left(W_t' - w_s\zeta_t' - w_b h_t'\right) + \left(\left(\int_{-h}^{\zeta} uw dz\right)_x' - u_s w_s\zeta_x' - u_b w_b h_x'\right) + \left(\left(\int_{-h}^{\zeta} vw dz\right)_y' - v_s w_s\zeta_y' - v_b w_b h_y'\right) +$$

$$+ \left(w_s^2 - w_b^2\right) = \frac{\eta}{\rho}\left(\left(\left(\int_{-h}^{\zeta} w_x' dz\right)_x' - \left(w_x'\right)_s\zeta_x' - \left(w_x'\right)_b h_x'\right) + \left(\left(\int_{-h}^{\zeta} w_y' dz\right)_y' - \left(w_y'\right)_s\zeta_y' - \left(w_y'\right)_b h_y'\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\left(w_z'\right)_s - \left(w_z'\right)_b\right)\right) + 2\Omega U\cos\vartheta, \tag{3}$$

где $U = \int_{-h}^{\zeta} u dz$, $V = \int_{-h}^{\zeta} v dz$, $W = \int_{-h}^{\zeta} w dz$; — полная глубина.

Перегруппировав слагаемые, получим:

$$U_x' + V_y' + \left(-u_s\zeta_x' - v_s\zeta_y' + w_s\right) - \left(u_b h_x' + v_b h_y' + w_b\right) = 0,$$

$$U_t' + \left(\int_{-h}^{\zeta} u^2 dz\right)_x' + \left(\int_{-h}^{\zeta} uv dz\right)_y' - u_s\left(\zeta_t' + u_s\zeta_x' + v_s\zeta_y' - w_s\right) - u_b\left(h_t' + u_b h_x' + v_b h_y' + w_b\right) =$$

$$= -gH\zeta'_x + \frac{\eta}{\rho}\Big(\big(U'_x - u_s\zeta'_x - u_b h'_x\big)'_x + \big(U'_y - u_s\zeta'_y - u_b h'_y\big)'_y \Big) + \big(F_s\big)_x + \big(F_b\big)_x + 2\Omega\big(V\sin\vartheta - W\cos\vartheta\big),$$

$$V'_t + \left(\int_{-h}^{\zeta} uvdz\right)'_x + \left(\int_{-h}^{\zeta} v^2 dz\right)'_y - v_s\big(\zeta'_t + u_s\zeta'_x + v_s\zeta'_y - w_s\big) - v_b\big(h'_t + u_b h'_x + v_b h'_y + w_b\big) =$$

$$= -gH\zeta'_y + \frac{\eta}{\rho}\Big(\big(V'_x - v_s\zeta'_x - v_b h'_x\big)'_x + \big(V'_y - v_s\zeta'_y - v_b h'_y\big)'_y \Big) + \big(F_s\big)_y + \big(F_b\big)_y - 2\Omega U\sin\vartheta,$$

$$W'_t + \left(\int_{-h}^{\zeta} uwdz\right)'_x + \left(\int_{-h}^{\zeta} vwdz\right)'_y - w_s\big(\zeta'_t + u_s\zeta'_x + v_s\zeta'_y - w_s\big) - w_b\big(h'_t + u_b h'_x + v_b h'_y + w_b\big) =$$

$$= \frac{\eta}{\rho}\Big(\big(W'_x - w_s\zeta'_x - w_b h'_x\big)'_x + \big(W'_y - w_s\zeta'_y - w_b h'_y\big)'_y \Big) + \big(F_s\big)_z + \big(F_b\big)_z + 2\Omega U\cos\vartheta,$$

где граничные вязкие напряжения на поверхности жидкости отнесены на счет силы трения ветра о поверхность

$$\mathbf{F}_s = \big(F_s\big)_x\mathbf{i} + \big(F_s\big)_y\mathbf{j} + \big(F_s\big)_z\mathbf{k} = \Big(-H\rho^{-1}\big(p_a\big)'_x + \eta\rho^{-1}\Big(-\big(u'_x\big)_s\zeta'_x - \big(u'_y\big)_s\zeta'_y + \big(u'_z\big)_s\Big)\Big)\mathbf{i} +$$

$$+\Big(-H\rho^{-1}\big(p_a\big)'_y + \eta\rho^{-1}\Big(-\big(v'_x\big)_s\zeta'_x - \big(v'_y\big)_s\zeta'_y + \big(v'_z\big)_s\Big)\Big)\mathbf{j} + \Big(\eta\rho^{-1}\Big(-\big(w'_x\big)_s\zeta'_x - \big(w'_y\big)_s\zeta'_y + \big(w'_z\big)_s\Big)\Big)\mathbf{k},$$

а вязкие напряжения на дне отнесены на счет силы трения о дно

$$\mathbf{F}_b = \big(F_b\big)_x\mathbf{i} + \big(F_b\big)_y\mathbf{j} + \big(F_b\big)_z\mathbf{k} = \eta\rho^{-1}\Big(\Big(-\big(u'_x\big)_b h'_x - \big(u'_y\big)_b h'_y - \big(u'_z\big)_b\Big)\mathbf{i} +$$

$$+\Big(-\big(v'_x\big)_s\zeta'_x - \big(v'_y\big)_s\zeta'_y + \big(v'_z\big)_s\Big)\mathbf{j} + \Big(-\big(w'_x\big)_s\zeta'_x - \big(w'_y\big)_s\zeta'_y + \big(w'_z\big)_s\Big)\mathbf{k}\Big).$$

С учетом кинематических условий на поверхности и дне

$$-u_s\zeta'_x - v_s\zeta'_y + w_s = \zeta'_t + \omega\rho^{-1},\ u_b h'_x + v_b h'_y + w_b = -h'_t,$$

где $\omega\rho^{-1}$ — испаряющийся в единицу времени слой жидкости, получим

$$H'_t + U'_x + V'_y + \frac{\omega}{\rho} = 0.$$

Для определения скорости испарения с единичной площади использовалась следующая эмпирическая формула:

$$\omega\left(\frac{g}{h}\right) = e\left(P_{us} - P_{set}\right),$$

где P_{us} — давление паров насыщенного воздуха, мбар; P_{set} — парциальное давление водяного пара при заданной температуре и влажности воздуха, мбар; e — эмпирический коэффициент, г/м^2/ч/мбар, который зависит от интенсивности образования брызг в бассейне.

Рассмотрим двумерную задачу определения скорости испарения с поверхности воды при движении воздуха с постоянной скоростью при скорости ветра V, влажности воздуха f, температуре воздуха T_a, температуре воды T_w. Скорость испарения с поверхности бассейна W определяют в г/сек/м^2 (рис. 1).

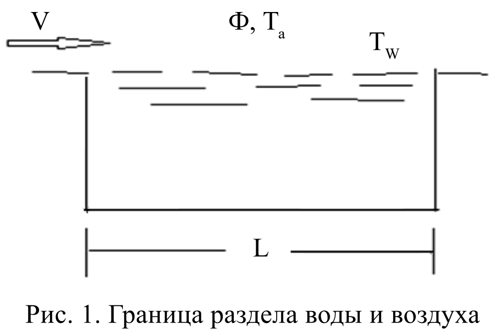


Рис. 1. Граница раздела воды и воздуха

На основании экспериментальных данных определим эмпирические зависимости для расчета скорости испарения по формуле из расчета на единицу площади:

$$\omega = \frac{\left(A + B\cdot V\right)\left(P_w - \varphi\cdot P_a\right)}{r_w},$$

где P_w — давление насыщенного пара при температуре воды; P_a — давление насыщенного пара при температуре воздуха; r_w — теплота парообразования (r_w = 2,2582 Дж/кг при нормальном атмосферном давлении); A и B — эмпирические константы. Разброс скоростей испарения по разным источникам составляет +100 %–80 %.

Существует ряд стандартов, дающих аналогичные результаты в середине этого диапазона: ВМО (1966) СССР, Сартори (1989), Мак-Миллана (1971) и др. Согласно стандарту ВМО (1966) СССР, коэффициенты A = 0,0369, B = 0,0266. Следует отметить, что скорость испарения, рассчитанная по указанному стандарту для V = 0 м/с, согласуется со скоростью испарения, определенной по стандарту VDI 2089 для фиксированной (невозмущенной) поверхности, с точностью до 10–15 %.

Расчеты могут проводиться как в ламинарной, так и в турбулентной постановках с калибровкой числа Шмидта S_c и турбулентного числа Шмидта Sc_t. Данное число калибруется в зависимости от разницы скоростей воды и ветра в районе границы раздела сред. На основе имеющихся инструментов пакета гидродинамики STAR-CCM скорость в области границы раздела сред может определяться как

$$V_b = \nabla V \cdot G^{(1/3)},$$

где ∇V — градиент скорости, определяемый по текущему полю скоростей; $G^{1/3}$ — характерный размер ячейки, рассчитываемый по ее объему. Зависимость турбулентного числа Шмидта от скорости в области границы раздела сред для прогнозирования скорости испарения на волнах. При высоте волны 1,5 м, длине 10 м, скорости 3 м/с:

$$Sc_t(V_B) = (-0{,}333\, V_B^{\;2} + 6{,}667\, V_B + 3)\cdot 3{,}5.$$

Приведенная выше формула используется для прогнозирования скорости испарения при наличии волн. Дальнейшее уточнение процесса испарения мы не рассматриваем и продолжим получение 2D модели:

$$U_t' + \left(\int_{-h}^{\zeta} u^2 dz\right)'_x + \left(\int_{-h}^{\zeta} uvdz\right)'_y + \frac{\omega}{\rho}u_s = -gH\zeta_x' + \frac{\eta}{\rho}\Big(\big(U_{xx}'' - u_s\zeta_{xx}'' - u_b h_{xx}''\big) + \big(U_{yy}'' - u_s\zeta_{yy}'' - u_b h_{yy}''\big)\Big) +$$
$$+\left((F_s)_x - \frac{\eta}{\rho}\Big((u_s)'_x\zeta_x' + (u_s)'_y\zeta_y'\Big)\right) + \left((F_b)_x - \frac{\eta}{\rho}\Big((u_b)'_x h_x' + (u_b)'_y h_y'\Big)\right) + 2\Omega\left(V\sin\vartheta - W\cos\vartheta\right),$$

$$V_t' + \left(\int_{-h}^{\zeta} uvdz\right)'_x + \left(\int_{-h}^{\zeta} v^2 dz\right)'_y + \frac{\omega}{\rho}v_s = -gH\zeta_y' + \frac{\eta}{\rho}\Big(\big(V_{xx}'' - v_s\zeta_{xx}'' - v_b h_{xx}''\big) + \big(V_{yy}'' - v_s\zeta_{yy}'' - v_b h_{yy}''\big)\Big) +$$
$$+\left((F_s)_y - \frac{\eta}{\rho}\Big((v_s)'_x\zeta_x' + (v_s)'_y\zeta_y'\Big)\right) + \left((F_b)_y - \frac{\eta}{\rho}\Big((v_b)'_x h_x' + (v_b)'_y h_y'\Big)\right) - 2\Omega U\sin\vartheta,$$

$$W_t' + \left(\int_{-h}^{\zeta} uwdz\right)'_x + \left(\int_{-h}^{\zeta} vwdz\right)'_y + \frac{\omega}{\rho}w_s = \frac{\eta}{\rho}\Big(\big(W_{xx}'' - w_s\zeta_{xx}'' - w_b h_{xx}''\big) + \big(W_{yy}'' - w_s\zeta_{yy}'' - w_b h_{yy}''\big)\Big) +$$
$$+\left((F_s)_z - \frac{\eta}{\rho}\Big((w_s)'_x\zeta_x' + (w_s)'_y\zeta_y'\Big)\right) + \left((F_b)_z - \frac{\eta}{\rho}\Big((w_b)'_x h_x' + (w_b)'_y h_y'\Big)\right) + 2\Omega U\cos\zeta.$$

Выделяя в производных

$$(f_s)'_x = (f_x')_s + (f_z')_s\zeta_x', \quad (f_b)'_x = (f_x')_b - (f_z')_b h_x',$$
$$(f_s)'_y = (f_y')_s + (f_z')_s\zeta_y', \quad (f_b)'_y = (f_y')_b - (f_y')_b h_y',$$

сложных функций $f_s = f(x, y, \xi, t), t)$, $f_b = f(x, y, -h(x, y, t)\, t)$ слагаемые, имеющие вид и размерность вязких напряжений, следовательно, изменяющихся непрерывно при переходе границ раздела «атмосфера — жидкость» и «жидкость — дно», и относя их на счет обобщенных сил трения ветра о поверхность $\mathbf{F}_s^*$ и жидкости о дно $\mathbf{F}_b^*$, получим:

$$H_t' + U_x' + V_y' + \frac{\omega}{\rho} = 0,$$

$$U_t' + \left(\int_{-h}^{\zeta} u^2 dz\right)'_x + \left(\int_{-h}^{\zeta} uvdz\right)'_y + \frac{\omega}{\rho}u_s = -gH\zeta_x' + \frac{\eta}{\rho}\Big(\big(U_{xx}'' + U_{yy}''\big) - u_s\big(\zeta_{xx}'' + \zeta_{yy}''\big) - u_b\big(h_{xx}'' + h_{yy}''\big)\Big) +$$
$$+\left(F_s^*\right)_x + \left(F_b^*\right)_x + 2\Omega\left(V\sin\vartheta - W\cos\vartheta\right), \tag{4}$$

$$V_t' + \left(\int_{-h}^{\zeta} uvdz\right)'_x + \left(\int_{-h}^{\zeta} v^2 dz\right)'_y + \frac{\omega}{\rho}v_s = -gH\zeta_y' + \frac{\eta}{\rho}\Big(\big(V_{xx}'' + V_{yy}''\big) - v_s\big(\zeta_{xx}'' + \zeta_{yy}''\big) - v_b\big(h_{xx}'' + h_{yy}''\big)\Big) +$$
$$+\left(F_s^*\right)_y + \left(F_b^*\right)_y - 2\Omega U\sin\vartheta, \tag{5}$$

$$W_t' + \left(\int_{-h}^{\zeta} uwdz \right)'_x + \left(\int_{-h}^{\zeta} vwdz \right)'_y + \frac{\omega}{\rho} w_s = \frac{\eta}{\rho} \left(\left(W''_{xx} + W''_{yy} \right) - w_s \left(\zeta''_{xx} + \zeta''_{yy} \right) - w_b \left(h''_{xx} + h''_{yy} \right) \right) +$$

$$+ \left(F_s^* \right)_z + \left(F_b^* \right)_z + 2\Omega U \cos\vartheta, \tag{6}$$

где

$$\mathbf{F}_s^* = \left(\left(F_s \right)_x - \eta\rho^{-1} \left(\left(u_x' \right)_s \zeta_x' + \left(u_y' \right)_s \zeta_y' + \left(u_z' \right)_s \left(\left(\zeta_x' \right)^2 + \left(\zeta_y' \right)^2 \right) \right) \right) \mathbf{i} +$$

$$+ \left(\left(F_s \right)_y - \eta\rho^{-1} \left(\left(v_x' \right)_s \zeta_x' + \left(v_y' \right)_s \zeta_y' + \left(v_z' \right)_s \left(\left(\zeta_x' \right)^2 + \left(\zeta_y' \right)^2 \right) \right) \right) \mathbf{j} +$$

$$+ \left(\left(F_s \right)_z - \eta\rho^{-1} \left(\left(w_x' \right)_s \zeta_x' + \left(w_y' \right)_s \zeta_y' + \left(w_z' \right)_s \left(\left(\zeta_x' \right)^2 + \left(\zeta_y' \right)^2 \right) \right) \right) \mathbf{k},$$

$$\mathbf{F}_b^* = \left(\left(F_b \right)_x - \eta\rho^{-1} \left(\left(u_x' \right)_b h_x' + \left(u_y' \right)_b h_y' + \left(u_z' \right)_b \left(\left(h_x' \right)^2 + \left(h_y' \right)^2 \right) \right) \right) \mathbf{i} +$$

$$+ \left(\left(F_b \right)_y - \eta\rho^{-1} \left(\left(v_x' \right)_b h_x' + \left(v_y' \right)_b h_y' + \left(v_z' \right)_b \left(\left(h_x' \right)^2 + \left(h_y' \right)^2 \right) \right) \right) \mathbf{j} +$$

$$+ \left(\left(F_b \right)_z - \eta\rho^{-1} \left(\left(w_x' \right)_b h_x' + \left(w_y' \right)_b h_y' + \left(w_z' \right)_b \left(\left(h_x' \right)^2 + \left(h_y' \right)^2 \right) \right) \right) \mathbf{k},$$

равны по величине и направлены противоположно силам, действующим со стороны столба жидкости на столб атмосферного воздуха над ним и участком дна под ним. Слагаемые, изменяющиеся при переходе границ раздела «атмосфера — жидкость» и «жидкость — дно» скачкообразно, оставлены на счету сил внутреннего вязкого трения.

При

$$W \cos\vartheta << V \sin\vartheta$$

решения уравнений (4) и (5) не зависят от решения уравнения (6), которое исключаем

$$H_t' + U_x' + V_y' + \frac{\omega}{\rho} = 0, \tag{7}$$

$$U_t' + \left(\int_{-h}^{\zeta} u^2 dz \right)'_x + \left(\int_{-h}^{\zeta} uvdz \right)'_y + \frac{\omega}{\rho} u_s = -gH\zeta_x' + \frac{\eta}{\rho} \left(\Delta U - u_s \Delta\zeta - u_b \Delta h \right) +$$

$$+ \left(F_s^* \right)_x + \left(F_b^* \right)_x + 2\Omega V \sin\vartheta, \tag{8}$$

$$V_t' + \left(\int_{-h}^{\zeta} uvdz \right)'_x + \left(\int_{-h}^{\zeta} v^2 dz \right)'_y + \frac{\omega}{\rho} v_s = -gH\zeta_y' + \frac{\eta}{\rho} \left(\Delta V - v_s \Delta\zeta - v_b \Delta h \right) +$$

$$+ \left(F_s^* \right)_y + \left(F_b^* \right)_y - 2\Omega U \sin\vartheta, \tag{9}$$

где $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ — двумерный оператор Лапласа.

Вводя коэффициенты C_{uu}, C_{uv}, C_{vv}, C_u, C_v:

$$\int_{-h}^{\zeta} u^2 dz = C_{uu} H^{-1} U^2, \quad \int_{-h}^{\zeta} uvdz = C_{uv} H^{-1} UV, \quad \int_{-h}^{\zeta} v^2 dz = C_{vv} H^{-1} V^2, \; u_s = C_u H^{-1} U, \, v_s = C_v H^{-1} V,$$

уравнения (7)–(9) можно переписать в виде

$$H_t' + U_x' + V_y' + (\omega/\rho) = 0,$$

$$U_t' + \left(C_{uu} U^2 / H \right)'_x + \left(C_{uv} UV / H \right)'_y + (\omega/\rho) C_u (U/H) = -gH\zeta_x' + (\eta/\rho) \left(\Delta U - C_u (U/H) \Delta\zeta - u_b \Delta h \right) +$$

$$+ \left(F_s^* \right)_x + \left(F_b^* \right)_x + 2\Omega V \sin\vartheta,$$

$$V_t' + \left(C_{uv} UV / H \right)'_x + \left(C_{vv} V^2 / H \right)'_y + (\omega/\rho) C_v (V/H) = -gH\zeta_y' + (\eta/\rho) \left(\Delta V - C_v (V/H) \Delta\zeta - v_b \Delta h \right) +$$

$$+ \left(F_s^* \right)_y + \left(F_b^* \right)_y - 2\Omega U \sin\vartheta.$$

В силу неравенства Коши-Буняковского имеются следующие ограничения для коэффициентов C_{uu} и C_{vv}:

$$U^2 = \left(\int_{-h}^{\zeta} udz \right)^2 \le H \int_{-h}^{\zeta} u^2 dz \Rightarrow C_{uu} \ge 1, \;\; V^2 = (v)^2 \le H \int_{-h}^{\zeta} v^2 dz \Rightarrow C_{vv} \ge 1,$$

а в силу положительной полуопределенности квадратичной формы

$$H\int_{-h}^{\zeta}(u-v)^2\,dz = H\left(\int_{-h}^{\zeta}u^2dz - 2\int_{-h}^{\zeta}uvdz + \int_{-h}^{\zeta}v^2dz\right) = C_{uu}U^2 - 2C_{uv}UV + C_{vv}V^2 \geq 0,$$

— ограничение для C_{uv}

$$C_{uv}{}^2 \leq C_{uu}C_{vv}.$$

Следующим этапом исследования является получение и анализ уравнения баланса полной механической энергии при определенных упрощениях.

При $C_{uu} \equiv C_{uv} \equiv C_{vv} \equiv 1$ для упрощенной модели получаем:

$$H'_t + U'_x + V'_y + (\omega/\rho) = 0,$$

$$U'_t + \left(U^2/H\right)'_x + \left(UV/H\right)'_y + (\omega/\rho)C_u(U/H) = -gH\zeta'_x + (\eta/\rho)\left(\Delta U - C_u(U/H)\Delta\zeta - u_b\Delta h\right) +$$
$$+ \left(F_s^*\right)_x + \left(F_b^*\right)_x + 2\Omega V\sin\vartheta, \tag{10}$$

$$V'_t + \left(UV/H\right)'_x + \left(V^2/H\right)'_y + (\omega/\rho)C_v(V/H) = -gH\zeta'_y + (\eta/\rho)\left(\Delta V - C_v(V/H)\Delta\zeta - v_b\Delta h\right) +$$
$$+ \left(F_s^*\right)_y + \left(F_b^*\right)_y - 2\Omega U\sin\vartheta. \tag{11}$$

Выполняется закон сохранения полной механической энергии — суммы потенциальной энергии в результирующем поле тяжести и положительно определенной квадратичной формы интегралов U и V, приемлемой в качестве оценки кинетической энергии столба жидкости.

Умножая (10) на U/H:

$$(U/H)U'_t + (U/H)\left(U^2/H\right)'_x + (U/H)\left(UV/H\right)'_y + (\omega/\rho)C_u\left(U^2/H^2\right) + gU\zeta'_x =$$
$$= (\eta/\rho)(U/H)\left(\Delta U - C_u(U/H)\Delta\zeta - u_b\Delta h\right) + (U/H)\left(\left(F_s^*\right)_x + \left(F_b^*\right)_x\right) + 2\Omega\sin\vartheta(UV/H),$$

а (11) — на V/H:

$$(V/H)V'_t + (V/H)\left(UV/H\right)'_x + (V/H)\left(V^2/H\right)'_y + (\omega/\rho)C_v\left(V^2/H^2\right) + gV\zeta'_y =$$
$$= (\eta/\rho)(V/H)\left(\Delta V - C_v(V/H)\Delta\zeta - v_b\Delta h\right) + (V/H)\left(\left(F_s^*\right)_y + \left(F_b^*\right)_y\right) - 2\Omega\sin\vartheta(UV/H)$$

и учитывая соотношения

$$(U/H)U'_t = \left(U^2/(2H)\right)'_t + \left(U^2/\left(2H^2\right)\right)H'_t,$$

$$(V/H)V'_t = \left(V^2/(2H)\right)'_t + \left(V^2/\left(2H^2\right)\right)H'_t,$$

$$(U/H)\left(U^2/H\right)'_x = \left(U^2/\left(2H^2\right)\right)U'_x + \left((U/H)\left(U^2/(2H)\right)\right)'_x,$$

$$(U/H)\left(UV/H\right)'_y = \left(U^2/\left(2H^2\right)\right)V'_y + \left((V/H)\left(U^2/(2H)\right)\right)'_y,$$

$$(V/H)\left(UV/H\right)'_x = \left(V^2/\left(2H^2\right)\right)U'_x + \left((U/H)\left(V^2/(2H)\right)\right)'_x,$$

$$(V/H)\left(V^2/H\right)'_y = \left(V^2/\left(2H^2\right)\right)V'_y + \left((V/H)\left(V^2/(2H)\right)\right)'_y,$$

получим

$$\left(U^2/(2H)\right)'_t + \left((U/H)\left(U^2/(2H)\right)\right)'_x + \left((V/H)\left(U^2/(2H)\right)\right)'_y + \left(U^2/\left(2H^2\right)\right)\left(H'_t + U'_x + V'_y + (\omega/\rho)\right) + \tag{12}$$
$$+ (\omega/\rho)\left(C_u - 1/2\right)(U/H)^2 + g\left((U\zeta)'_x - \zeta U'_x\right) =$$
$$= (\eta/\rho)(U/H)\left(\Delta U - C_u(U/H)\Delta\zeta - u_b\Delta h\right) + (U/H)\left(\left(F_s^*\right)_x + \left(F_b^*\right)_x\right) + 2\Omega\sin\vartheta(UV/H),$$

$$\left(V^2/(2H)\right)'_t + \left((U/H)\left(V^2/(2H)\right)\right)'_x + \left((V/H)\left(V^2/(2H)\right)\right)'_y + \left(V^2/\left(2H^2\right)\right)\left(H'_t + U'_x + V'_y + (\omega/\rho)\right) + \tag{13}$$
$$+ (\omega/\rho)\left(C_v - 1/2\right)(V/H)^2 + g\left((V\zeta)'_y - \zeta V'_y\right) =$$
$$= (\eta/\rho)(V/H)\left(\Delta V - C_v(V/H)\Delta\zeta - v_b\Delta h\right) + (V/H)\left(\left(F_s^*\right)_y + \left(F_b^*\right)_y\right) - 2\Omega\sin\vartheta(UV/H).$$

Складывая (12) и (13), приходим к

$$\left(\left(U^2 + V^2\right)/(2H)\right)'_t + \left((U/H)\left(\left(U^2+V^2\right)/(2H) + gH\zeta\right)\right)'_x + \left((V/H)\left(\left(U^2+V^2\right)/(2H) + gH\zeta\right)\right)'_y +$$
$$+ (\omega/(\rho H))\left(\left(2C_u - 1\right)U^2 + \left(2C_v - 1\right)V^2\right)/(2H) - g\zeta\left(U'_x + V'_y\right) =$$

$$=(\eta/\rho)\Big((U/H)\Delta U+(V/H)\Delta V-\big(C_u(U/H)^2+C_v(V/H)^2\big)\Delta\zeta-\big((U/H)u_b+(V/H)v_b\big)\Delta h\Big)+$$
$$+\Big(U\big((F_s^*)_x+(F_b^*)_x\big)+V\big((F_s^*)_y+(F_b^*)_y\big)\Big)\Big/H.$$

Над неподвижным ($h_0'\equiv 0$) дном выполняется

$$-g\zeta(U'_x+V'_y)=g\zeta(\zeta'_t+(\omega/\rho))=\big(g(\zeta^2-h^2)/2\big)'_t+(\omega/(\rho H))gH\zeta=$$
$$=\big(gH(\zeta-h)/2\big)'_t+(\omega/(\rho H))\big(gH(\zeta-h)/2+gH^2/2\big).$$

В итоге приходим к уравнению, которое является аналогом уравнения баланса полной механической энергии в дифференциальной форме

$$(\mathrm{K}+\Pi)'_t+\big((U/H)(\mathrm{K}+\Pi+P)\big)'_x+\big((V/H)(\mathrm{K}+\Pi+P)\big)'_y+(\omega/(\rho H))(\Pi+P)+ \tag{14}$$
$$+(\omega/(\rho H))\big((2C_u-1)U^2+(2C_v-1)V^2\big)/(2H)=$$
$$=(\eta/\rho)\Big((U/H)\Delta U+(V/H)\Delta V-\big(C_u(U/H)^2+C_v(V/H)^2\big)\Delta\zeta-\big((U/H)u_b+(V/H)v_b\big)\Delta h\Big)+$$
$$+\Big(U\big((F_s^*)_x+(F_b^*)_x\big)+V\big((F_s^*)_y+(F_b^*)_y\big)\Big)\Big/H,$$

где $K=(U^2+V^2)/(2H)$, $\Pi=gH(\xi-h)/2$, $\mathrm{P}=gH^2/2$, $\Pi+P=gH\xi$.

Для положительной функции $E=E(x,y,t)>0$, удовлетворяющей уравнению переноса

$$E'_t+(U/H)E'_x+(V/H)E'_y=0,$$

уравнение (4) справедливо и для обобщения оценки кинетической энергии

$$K=E\cdot(U^2+V^2)/(2H).$$

Если считать неподвижной и границу ∂G области G, то

$$\iint_G(\mathrm{K}+\Pi)'_t\,dxdy=\left(\iint_G(\mathrm{K}+\Pi)dxdy\right)'_t,$$

а используя формулы Грина

$$\iint_G\Big(\big((U/H)(\mathrm{K}+\Pi+P)\big)'_x+\big((V/H)(\mathrm{K}+\Pi+P)\big)'_y\Big)dxdy=\oint_{\partial G}(\mathrm{K}+\Pi+P)(Udx-Vdy)/H=$$
$$=\oint_{\partial G}(\mathrm{K}+\Pi+P)(U\mathbf{i}+V\mathbf{j},\mathbf{n})dl/H,$$

$$\iint_G\big((U/H)\Delta U+(V/H)\Delta V\big)dxdy=$$
$$=\oint_{\partial G}(\nabla\mathrm{K},\mathbf{n})dl-\iint_G H\big(|\nabla(U/H)|^2+|\nabla(V/H)|^2\big)dxdy+\iint_G(\mathrm{K}/H)\Delta H dxdy,$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к границе ∂G области G и полагая $C_u\equiv C_v\equiv C$, получим уравнение баланса аналога полной механической энергии жидкости в интегральной форме:

$$\left(\iint_G(\mathrm{K}+\Pi)dxdy\right)'_t+\oint_{\partial G}(\mathrm{K}+\Pi+P)(U\mathbf{i}+V\mathbf{j},\mathbf{n})dl/H+\iint(\omega/(\rho H))\big((2C-1)\mathrm{K}+\Pi+P\big)dxdy= \tag{15}$$
$$=(\eta/\rho)\left(\oint_{\partial G}(\nabla\mathrm{K},\mathbf{n})dl-\iint_G H\big(|\nabla(U/H)|^2+|\nabla(V/H)|^2\big)dxdy-(2C-1)\iint_G(\mathrm{K}/H)\Delta\zeta dxdy+\right.$$
$$\left.+\iint_G\big((\mathrm{K}/H)-((U/H)u_b+(V/H)v_b)\big)\Delta h dxdy\right)+$$
$$+\iint_G\Big(U\big((F_s^*)_x+(F_b^*)_x\big)+V\big((F_s^*)_y+(F_b^*)_y\big)\Big)dxdy\Big/H.$$

Если на поверхности дна выполняются условия «прилипания»

$$u_b\equiv v_b\equiv w_b\equiv 0,$$

то слагаемое

$$\iint_G\big((U/H)u_b+(V/H)v_b\big)\Delta h dxdy=0$$

в уравнении баланса (15) отсутствует, а над поверхностью дна, являющейся гармонической функцией

$$\Delta h \equiv 0 \tag{16}$$

отсутствует и слагаемое

$$\iint_G (\mathrm{K}/H)\Delta h dxdy = 0$$

и модель

$$\zeta'_t + U'_x + V'_y + (\omega/\rho) = 0 \text{ или } H'_t + U'_x + V'_y + (\omega/\rho) = 0, \tag{17}$$

$$U'_t + \left(U^2/H\right)'_x + \left(UV/H\right)'_y + (\omega/\rho)C(U/H) = -gH\zeta'_x + (\eta/\rho)(\Delta U - C(U/H)\Delta\zeta) + \\ + \left(F_s^*\right)_x + \left(F_b^*\right)_x + 2\Omega V \sin\vartheta, \tag{18}$$

$$V'_t + \left(UV/H\right)'_x + \left(V^2/H\right)'_y + (\omega/\rho)C(V/H) = -gH\zeta'_y + (\eta/\rho)(\Delta V - C(V/H)\Delta\zeta) + \\ + \left(F_s^*\right)_y + \left(F_b^*\right)_y - 2\Omega U \sin\vartheta \tag{19}$$

оказывается строго диссипативной за счет действия сил внутреннего вязкого трения.

Соответствующая (17)–(19) система уравнений в усредненных значениях скоростей $\overline{u} = U/H$ и $\overline{v} = V/H$ будет иметь вид:

$$\zeta'_t + \left(H\overline{u}\right)'_x + \left(H\overline{v}\right)'_y + (\omega/\rho) = 0 \text{ или } H'_t + \left(H\overline{u}\right)'_x + \left(H\overline{v}\right)'_y + (\omega/\rho) = 0, \tag{20}$$

$$\left(H\overline{u}\right)'_t + \left(H\overline{u}^2\right)'_x + \left(H\overline{u}\,\overline{v}\right)'_y + (\omega/\rho)C\overline{u} = -gH\zeta'_x + (\eta/\rho)\left(\Delta\left(H\overline{u}\right) - C\overline{u}\Delta\zeta\right) + \\ + \left(F_s^*\right)_x + \left(F_b^*\right)_x + 2\Omega H\overline{v} \sin\vartheta, \tag{21}$$

$$\left(H\overline{v}\right)'_t + \left(H\overline{u}\,\overline{v}\right)'_x + \left(H\overline{v}^2\right)'_y + (\omega/\rho)C\overline{v} = -gH\zeta'_y + (\eta/\rho)\left(\Delta\left(H\overline{v}\right) - C\overline{v}\Delta\zeta\right) + \\ + \left(F_s^*\right)_y + \left(F_b^*\right)_y - 2\Omega H\overline{u} \sin\vartheta \tag{22}$$

или, в силу уравнения неразрывности:

$$\zeta'_t + \left(H\overline{u}\right)'_x + \left(H\overline{v}\right)'_y + (\omega/\rho) = 0 \text{ или } H'_t + \left(H\overline{u}\right)'_x + \left(H\overline{v}\right)'_y + (\omega/\rho) = 0, \tag{23}$$

$$\overline{u}'_t + \overline{u}\,\overline{u}'_x + \overline{v}\,\overline{u}'_y + (\omega/\rho)(C-1)(\overline{u}/H) = -g\zeta'_x + (\eta/(\rho H))\left(\Delta\left(H\overline{u}\right) - C\overline{u}\Delta\zeta\right) + \\ + \left(\left(F_s^*\right)_x + \left(F_b^*\right)_x\right)/H + 2\Omega\overline{v} \sin\vartheta, \tag{24}$$

$$\overline{v}'_t + \overline{u}\,\overline{v}'_x + \overline{v}\,\overline{v}'_y + (\omega/\rho)(C-1)(\overline{v}/H) = -g\zeta'_y + (\eta/(\rho H))\left(\Delta\left(H\overline{v}\right) - C\overline{v}\Delta\zeta\right) + \\ + \left(\left(F_s^*\right)_y + \left(F_b^*\right)_y\right)/H - 2\Omega\overline{u} \sin\vartheta. \tag{25}$$

Можно также получить другие пространственно-двумерные гидродинамические модели прибрежных систем и мелководных водоемов.

Вводя упрощения

$$\int_{-h}^{\zeta} u'_x dz \to H(U/H)'_x, \quad \int_{-h}^{\zeta} u'_y dz \to H(U/H)'_y, \quad \int_{-h}^{\zeta} v'_x dz \to H(V/H)'_x, \quad \int_{-h}^{\zeta} v'_y dz \to H(V/H)'_y$$

на этапе (1)–(3) и рассуждая аналогично вышеизложенному, придем к следующей модели

$$\zeta'_t + U'_x + V'_y + (\omega/\rho) = 0, \tag{26}$$

$$U'_t + \left(U^2/H\right)'_x + \left(UV/H\right)'_y + (\omega/\rho)C(U/H) = -gH\zeta'_x + (\eta/\rho)\left(\left(H(U/H)'_x\right)'_x + \left(H(U/H)'_y\right)'_y\right) + \\ + \left(F_s^*\right)_x + \left(F_b^*\right)_x + 2\Omega V \sin\vartheta, \tag{27}$$

$$V'_t + \left(UV/H\right)'_x + \left(V^2/H\right)'_y + (\omega/\rho)C(V/H) = -gH\zeta'_y + (\eta/\rho)\left(\left(H(V/H)'_x\right)'_x + \left(H(V/H)'_y\right)'_y\right) + \\ + \left(F_s^*\right)_y + \left(F_b^*\right)_y - 2\Omega U \sin\vartheta \tag{28}$$

или, в усредненных значениях скоростей

$$H'_t + \left(H\overline{u}\right)'_x + \left(H\overline{v}\right)'_y + (\omega/\rho) = 0, \tag{29}$$

$$\overline{u}'_t + \overline{u}\,\overline{u}'_x + \overline{v}\,\overline{u}'_y + (\omega/\rho)(C-1)(\overline{u}/H) = -g\zeta'_x + (\eta/(\rho H))\left(\left(H\overline{u}'_x\right)'_x + \left(H\overline{u}'_y\right)'_y\right) +$$

$$+\left(\left(F_s^*\right)_x+\left(F_b^*\right)_x\right)/H+2\Omega\bar{v}\sin\vartheta, \tag{30}$$

$$\bar{v}_t'+\bar{u}\bar{v}_x'+\bar{v}\bar{v}_y'+(\omega/\rho)(C-1)(\bar{v}/H)=-g\zeta_y'+(\eta/(\rho H))\left(\left(H\bar{v}_x'\right)'_x+\left(H\bar{v}_y'\right)'_y\right)+$$

$$+\left(\left(F_s^*\right)_y+\left(F_b^*\right)_y\right)/H-2\Omega\bar{u}\sin\vartheta, \tag{31}$$

с учетом равенств и в предположении выполнения аналога уравнения баланса полной механической энергии

$$\iint_G\left((U/H)\left(\left(H(U/H)'_x\right)'_x+\left(H(U/H)'_y\right)'_y\right)+(V/H)\left(\left(H(V/H)'_x\right)'_x+\left(H(V/H)'_y\right)'_y\right)\right)dxdy=$$

$$=\oint_{\partial G}H\left(\nabla(\mathrm{K}/H),\mathbf{n}\right)dl-\iint_G H\left(\left|\nabla(U/H)\right|^2+\left|\nabla(V/H)\right|^2\right)dxdy,$$

в виде

$$\left(\iint_G(\mathrm{K}+\Pi)dxdy\right)'_t+\oint_{\partial G}(\mathrm{K}+\Pi+P)(U\mathbf{i}+V\mathbf{j},\mathbf{n})dl/H+\iint(\omega/(\rho H))((2C-1)\mathrm{K}+\Pi+P)dxdy=$$

$$=(\eta/\rho)\left(\oint_{\partial G}H\left(\nabla(\mathrm{K}/H),\mathbf{n}\right)dl-\iint_G H\left(\left|\nabla(U/H)\right|^2+\left|\nabla(V/H)\right|^2\right)dxdy-(2C-1)\iint_G(\mathrm{K}/H)\Delta\zeta dxdy\right)+$$

$$+\iint_G\left(U\left(\left(F_s^*\right)_x+\left(F_b^*\right)_x\right)+V\left(\left(F_s^*\right)_y+\left(F_b^*\right)_y\right)\right)dxdy/H.$$

Другое семейство моделей можно получить, оставляя на счету сил внутреннего вязкого трения только слагаемые, не препятствующие получению уравнения баланса со строгой диссипацией аналога полной механической энергии системы за счет действия сил внутреннего вязкого трения и перенося остальные слагаемые на счет интенсивности испарения, где добавляется слагаемое типа избыточного (под поверхностью жидкости выпуклой вверх) или недостаточного (под поверхностью жидкости выпуклой вниз) лапласова давления:

$$U_t'+\left(U^2/H\right)'_x+(UV/H)'_y+(\omega/\rho)^*C(U/H)=-gH\zeta_x'+(\eta/\rho)(\Delta U-(1/2)(U/H)\Delta H)+ \tag{32}$$

$$+\left(F_s^*\right)_x+\left(F_b^*\right)_x+2\Omega V\sin\vartheta,$$

$$V_t'+(UV/H)'_x+\left(V^2/H\right)'_y+(\omega/\rho)^*C(V/H)=-gH\zeta_y'+(\eta/\rho)(\Delta V-(1/2)(V/H)\Delta H)+$$

$$+\left(F_s^*\right)_y+\left(F_b^*\right)_y-2\Omega U\sin\vartheta, \tag{33}$$

$$H_t'+U_x'+V_y'+(\omega/\rho)^*-(\eta/\rho)\left(\left(1-(2C)^{-1}\right)\Delta H-\Delta h\right)=0$$

или

$$\zeta_t'+U_x'+V_y'+(\omega/\rho)^*-(\eta/\rho)\left(\left(1-(2C)^{-1}\right)\Delta\zeta-(2C)^{-1}\Delta h\right)=0. \tag{34}$$

Уравнение аналога баланса полной механической энергии для модели (32)–(34) отличается от (15) заменой (ω/ρ) на

$$(\omega/\rho)^*-(\eta/\rho)\left(\left(1-(2C)^{-1}\right)\Delta H-\Delta h\right)=(\omega/\rho)^*-(\eta/\rho)\left(\left(1-(2C)^{-1}\right)\Delta\zeta-(2C)^{-1}\Delta h\right).$$

В ходе работы построена и исследована двумерная модель гидродинамического процесса, учитывающая существенные особенности прибрежных систем, исходя из баланса массы, энергии и импульса. Предложенная модель может быть использована для прогнозного моделирования гидрофизических процессов, в том числе распространения загрязняющих веществ в водной среде морских и прибрежных систем.

Заключение и обсуждение. Особенность полученных пространственно-двумерных моделей гидродинамики учитывает тот факт, что операции дифференцирования по пространственным переменным в горизонтальных направлениях не являются коммутативными по отношению к операции интегрирования по вертикальной пространственной координате. В прибрежных системах, где наблюдается существенный перепад глубин, произвольное изменение порядка следования данных операций, выполненное для получения пространственно-двумерных уравнений движения водной среды, может привести к появлению фиктивных, физически необоснованных источников импульса в уравнениях Навье-Стокса. Разработанный авторами способ построения двумерных уравнений движения позволяет исключить данный негативный эффект, а сохранение порядка операций гарантирует выполнение корректного учета испарения со свободной поверхности не только в уравнении неразрывности, но и в уравнениях движения с учетом ветра и волн.

Список литературы

1. Сухинов А.И., Проценко Е.А., Сидорякина В.В. и др. Численные эксперименты моделирования транспорта наносов и динамики изменения рельефа дна мелководных водоемов. В: *Сборник трудов по материалам VI Международной конференции и молодежной школы «Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2020)»*. 2020:255–261.

2. Сухинов А.И., Белова Ю.В., Чистяков А.Е. Моделирование биогеохимических циклов в прибрежных системах Юга России. *Математическое моделирование*. 2021;33(3):20–38. https://doi.org/10.20948/mm-2021-03-02

3. Атаян А.М., Никитина А.В., Сухинов А.И. и др. Математическое моделирование опасных явлений природного характера в мелководном водоеме. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2022;62(2):270–288. https://doi.org/10.31857/S0044466921120048

4. Дымников В.П., Залесный В.Б. *Основы вычислительной геофизической гидродинамики*. Москва: ГЕОС; 2019. 448 с.

5. Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б., Лыкосов В.Н., Галин В.Я. *Математическое моделирование общей циркуляции атмосферы и океана*. Ленинград: Гидрометеоиздат; 1984. 320 с.

6. Самарский А.А., Михайлов А.П. *Математическое моделирование*. Москва: Физико-математическая литература; 2002. 320 с.

7. Воронина Е.Б., Калясов П.С., Кудрявцев А.Ю. и др. Определение скорости испарения с поверхности бассейна при активном волнообразовании. *Математическое моделирование.* 2023;35(5):117–126. https://doi.org/10.20948/mm-2023-05-08

8. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Никитина А.В. и др. Математическое моделирование гидродинамики и процессов переноса солей и тепла в мелководных водоемах. В: *Сборник трудов всероссийской научной конференции с международным участием «Земля и космос» к столетию академика РАН К.Я. Кондратьева*. 2020:51–76.

9. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Filina A.A., et al. Super Computer Simulation of Oil Spills in the Azov Sea. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS)*. 2019;12(3):115–129. https://doi.org10.14529/mmp190310

10. SukhinovA.I., Filina A.A., Nikitina A.V., et al. Modeling of Microbiological Destruction of Oil Pollution in Coastal Systems on Supercomputer. *Parallel computational technologies*. PCT'2019. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=37327253 (дата обращения: 05.11.2023).

11. Fingas M.F. *Evaporation of oil spills*. The eighteenth arctic marine oil spil program technical seminar. Evironment Canada, Ottawa, Ontario. 1995:43–60.

12. Fingas M.F. Studies on the Evaporation Regulation Mechanisms of Crude Oil and Petroleum Products. *Advances in Chemical Engineering and Science*. 2012;2:246–256. http://dx.doi.org/10.4236/aces.2012.22029

13. Aldarabesh S.M. Evaporation rate from water surface. *WesternMachigan University 4-2020*. URL: https://scholarworks.wmich.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=4599&context=dissertations (дата обращения: 05.11.2023).

References

1. Sukhinov A.I., Protsenko E.A., Sidoryakina V.V., et al. Numerical experiments for modeling sediment transport and dynamics of changes in the bottom relief of shallow reservoirs. In: *VI International Conference and Youth School Information Technologies and Nanotechnology (ITNT-2020)*. 2020:255–261. (In Russ.).

2. Sukhinov A.I., Belova Yu.V., Chistyakov A.E. Modeling of biogeochemical cycles in coastal systems of Southern Russia. Mathematical modeling. 2021;33(3):20–38. (In Russ.). https://doi.org/10.20948/mm-2021-03-02

3. Atayan A.M., Nikitina A.V., Sukhinov A.I., et al. Mathematical modeling of natural hazards in a shallow reservoir. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2022;62(2):270–288. (In Russ.). https://doi.org/10.31857/S0044466921120048

4. Dymnikov V.P., Zalesny V.B. *Fundamentals of computational geophysical hydrodynamics*. Moscow: GEOS; 2019. 448 p. (In Russ.).

5. Marchuk G.I., Dymnikov V.P., Zalesny V.B., et al. *Mathematical modeling of the general circulation of the atmosphere and ocean*. Leningrad: Hydrometeorological Publishing House; 1984. 320 p. (In Russ.).

6. Samarskiy A.A., Mikhailov A.P. *Mathematical modeling.* Moscow: Physico-mathematical literature; 2002. 320 p. (In Russ.).

7. Voronina E.B., Kalyasov P.S., Kudryavtsev A.Yu., et al. Determination of the evaporation rate from the surface of the pool during active wave formation. *Mathematical modeling*. 2023;35(5):117–126. (In Russ.). https://doi.org/10.20948/mm-2023-05-08

8. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Nikitina A.V., et al. Mathematical modeling of hydrodynamics and processes of salt and heat transfer in shallow waters. *Proceedings scientific conference Earth and Space*. 2020:51–76. (In Russ.).

9. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Filina A.A., et al. Super Computer Simulation of Oil Spills in the Azov Sea. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS)*. 2019;12(3):115–129. https://doi.org10.14529/mmp190310

10. Sukhinov A.I., Filina A.A., Nikitina A.V., et al. Modeling of Microbiological Destruction of Oil Pollution in Coastal Systems on Supercomputer. *Parallel computational technologies*. PCT'2019. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=37327253 (accessed: 05.11.2023).

11. Fingas M.F. *Evaporation of oil spills*. The eighteenth arctic marine oil spil program technical seminar. Evironment Canada, Ottawa, Ontario. 1995:43–60.

12. Fingas M.F. Studies on the Evaporation Regulation Mechanisms of Crude Oil and Petroleum Products. *Advances in Chemical Engineering and Science*. 2012;2:246–256. http://dx.doi.org/10.4236/aces.2012.22029

13. Aldarabesh S.M. Evaporation rate from water surface. *WesternMachigan University 4-2020*. URL: https://scholarworks.wmich.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=4599&context=dissertations (accessed: 05.11.2023).

Поступила в редакцию 04.11.2023
Поступила после рецензирования 07.12.2023
Принята к публикации 11.12.2023

Об авторах:

Сухинов Александр Иванович, член-корреспондент РАН, профессор, директор НИИ Математического моделирования и прогнозирования сложных систем, Донской государственный технический университет (РФ, 344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), доктор физико-математических наук, ORCID, MathSciNet, eLibrary.ru, ResearcherID, ScopusID, sukhinov@gmail.com

Колгунова Олеся Владимировна, старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики, Северо-Осетинский государственный университет (РФ, 362025, г. Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46), кандидат физико-математических наук, kolev2003@mail.ru

Зерее Мебрахту Гирмай, аспирант, Донской государственный технический университет (РФ, 344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), kokobrimna@gmail.com

Самуэль Огбамикаэль Нахом, аспирант, Донской государственный технический университет (РФ, 344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), nahom20samuel@gmail.com

Заявленный вклад соавторов:
Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Конфликт интересов
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Received 04.11.2023
Revised 07.12.2023
Accepted 11.12.2023

About the Authors:

Alexander I. Sukhinov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Professor, Director of the Research Institute for Mathematical Modeling and Forecasting of Complex Systems, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), Doctor of Physical and Mathematical Sciences, ORCID, MathSciNet, eLibrary.ru, ResearcherID, ScopusID, sukhinov@gmail.com

Olesya V. Kolgunova, Senior Lecturer at the Department of Applied Mathematics and Computer Science, North Ossetian State University (44–46, Vatutina Str., Vladikavkaz, 362025, RF), PhD (Physical and Mathematical Sciences), kolev2003@mail.ru

Mebrakhtu G. Zeree, PhD student, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), kokobrimna@gmail.com

Ogbamikael N. Samuel, PhD student, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), nahom20samuel@gmail.com

Claimed contributorship:
All authors have made an equivalent contribution to the preparation of the publication.

Conflict of interest statement
The authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
MATHEMATICAL MODELLING

Check for updates

УДК 911.2, 504.05, 551.582

https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-22-29

Научная статья

Математическое моделирование распространения пыли от хвостохранилища в Алагирском ущелье РСО-Алания

Е.С. Каменецкий, А.А. Радионов✉, В.Ю. Тимченко, О.С. Панаэтова

Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН, г. Владикавказ, Российская Федерация

✉aar200772@mail.ru

Аннотация

Введение. Математическое моделирование аэродинамики горных ущелий и возможных техногенных выбросов в различных метеорологических условиях, особенно увеличивающих перенос загрязняющих веществ в направлении густонаселенных районов, является актуальным средством исследования этих процессов. Аэродинамика и климатические условия уникальны для различных горных ущелий, что требует проведения отдельного исследования для каждого конкретного случая. В работе рассматривается распространение пылевого аэрозоля от Унальского хвостохранилища, расположенного вблизи поселка Верхний Унал (Алагирское ущелье, РСО-Алания, РФ), в случае возникновения южных и юго-восточных ветров. При этих направлениях ветра пыль хвостохранилища переносится течениями воздуха в северном направлении, в сторону Алагира. Целью исследования является получение прогноза для приземной концентрации пыли с повышенным содержанием свинца, цинка и других элементов вблизи густонаселенных районов равнинной части РСО-Алания.

Материалы и методы. Модель учитывает ландшафт местности, приземные розы ветров и процессы осаждения пыли. Вычисления проводились для случая нейтральной стратификации и без учета влияния сезонных факторов с использованием математической модели, ранее опубликованной авторами.

Результаты исследования. Выполнен модельный прогноз распределения концентрации пыли. Проанализированы частоты и амплитуды осцилляций нестационарных струйных течений в поперечном сечении Алагирского ущелья. На основе данных спутникового зондирования земной атмосферы оценена повторяемость ветров, приводящих к переносу пыли в направлении густонаселенных районов.

Обсуждение и заключение. Унальское хвостохранилище является источником загрязняющих веществ и за годы его существования загрязнение почвы может быть значительным. Авторами сделан вывод о необходимости полевых исследований почвы в районе Алагира и, возможно, принятия мер по ее рекультивации.

Ключевые слова: горное ущелье, пыль, хвостохранилище, математическая модель, сложный рельеф

Для цитирования. Каменецкий Е.С., Радионов А.А., Тимченко В.Ю., Панаэтова О.С. Математическое моделирование распространения пыли от хвостохранилища в Алагирском ущелье РСО-Алания. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):22–29. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-22-29

Original article

Mathematical Modelling of Dust Transfer from the Tailings in the Alagir Gorge of the RNO-Alania

Evgeniy S. Kamenetsky, Anatoliy A. Radionoff✉, Vasiliy Yu. Timchenko, Olga S. Panaetova

Southern Mathematical Institute — the Affiliate of Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russian Federation

✉aar200772@mail.ru

Abstract

Introduction. Mathematical modelling of the aerodynamics of mountain gorges is an actual means of studying possible man-made emissions in various meteorological conditions that increase the transfer of pollutants in the direction of densely populated areas. Aerodynamics and climatic conditions are unique for various mountain gorges. This requires

a separate study for each specific case. The paper studies the distribution of dust aerosol from the Unal tailings dump, located near the village of Verkhny Unal (Alagir Gorge, RNO-Alania, RF), with south and south-easterly winds. With these wind directions, the dust of the tailings dump is carried by air currents in the north direction, towards Alagir. The aim of the study is to obtain a forecast for the surface concentration of dust with an increased content of lead, zinc and other elements near densely populated areas of the flat part of RNO-Alania.
Materials and Methods. The model takes into account the terrain, surface wind roses and dust deposition processes. The calculations were carried out for the case of neutral stratification and without taking into account the influence of seasonal factors using a mathematical model previously published by the authors.
Results. The model prediction of the dust concentration distribution obtained from calculations is shown. The frequencies and amplitudes of oscillations of unsteady jet streams in the cross section of the Alagir gorge are analyzed. Based on the data of satellite sensing of the Earth's atmosphere, the frequency of winds leading to the transfer of dust in the direction of densely populated areas is estimated.
Discussion and Conclusion. The Unal tailings dump is a source of pollutants and over many years of its existence, soil contamination can be significant. Field studies of the soil in the Alagir area and, possibly, measures for its reclamation are necessary.

Keywords: mountain ravine, dust, mine tailings, mathematical model, complex terrain

For citation. Kamenetsky E.S., Radionoff A.A., Timchenko V.Yu., Panaetova O.S. Mathematical Modelling of Dust Transfer from the Tailings in the Alagir Gorge of the RNO-Alania. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):22–29. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-22-29

Введение. Хвостохранилища содержат мелкодисперсные отходы деятельности горно-обогатительных комбинатов, которые, как правило, хранятся открытым способом и попадают в атмосферу горных ущелий в виде пылевого аэрозоля. Зачастую в горных ущельях метеорологические измерения проводятся не в полном объеме или вовсе отсутствуют, а имеющихся данных недостаточно для прогноза распределения загрязняющих веществ (ЗВ). Частично этот недостаток можно устранить, используя математическое моделирование и данные метеоспутников. Опыт использования математического моделирования с учетом данных дистанционного зондирования Земли приведен в [1–4].

Исследование атмосферы горных территорий при помощи математического моделирования проводится для широкого круга задач [3–11]. В [5–7; 11–13] представлены современные математические модели, методы решения и основные закономерности аэродинамики горных ущелий. По причине многофакторности аэродинамики [7] часто моделируются ущелья идеализированной формы и рассматриваются упрощенные синоптические условия [5–6; 8].

Рассеяние пылевого аэрозоля в горных ущельях и на равнинных территориях отличается [12–13]. Кроме того, каждое горное ущелье имеет уникальный климат и аэродинамику, для исследования которой подробная математическая модель должна включать в себя множество массивов исходных данных, граничных условий и состояния погодных условий, что крайне ресурсоемко и зачастую сталкивается с отсутствием необходимых данных.

В [3–4] используется математическая модель горного ущелья, не требующая подробных входных данных, но учитывающая основные факторы: горный ландшафт местности, приземные розы ветров, процессы осаждения пыли, атмосферную турбулентность. Используются стандартизованные алгоритмы решения уравнений гидродинамики вычислительного пакета OpenFOAM, реализующего метод конечных объемов.

Авторами рассматривается вынос ЗВ из чаши Унальского хвостохранилища Садонского свинцово-цинкового комбината, расположенного в излучине реки Ардон вблизи селения Унал (Алагирский район, РСО-Алания, РФ), в Алагирском ущелье, Северной части Кавказского хребта, на 42,862° с. ш. и 44,145° в. д., на высоте около 1700 метров над уровнем моря. Ширина ущелья вблизи хвостохранилища достигает 3000 м, высота склонов — 2570 м. Хвостохранилище создано более 50 лет назад и содержит порядка 2,6 млн тонн хвостов, в которых содержится 0,21 % масс. Pb, 0,32 % масс. Zn, а также другие элементы. Мероприятия по рекультивации заметно уменьшают процессы пыления, однако значительное количество пыли содержится на склонах ущелья и в почвах вблизи хвостохранилища. Результатам полевых исследований содержания хвостов на склонах ущелья от Унальского хвостохранилища посвящены работы [14–16].

Условия отрыва частиц пылевого аэрозоля от поверхности, полученные в экспериментах, представлены в [17–18]. Определяющими факторами являются сила ветра и турбулентность атмосферы, а распределение пыли, осаждающейся на склонах, обусловливается топографией и розой ветров. В [8–9; 19–23] применяется математическое моделирование аэродинамики и распространения пыли для реальных задач.

В данной работе рассматриваются синоптические ситуации, связанные с восточным и юго-восточными ветрами над Алагирским ущельем, при которых пыль от хвостохранилища распространяется в северном направлении, в сторону Алагира (РСО-Алания). Обсуждается возникновение нестационарных струйных течений, которые выносят пыль в северном направлении.

Материалы и методы. Используемая математическая модель, представленная в [3–4], является достаточно простым и работоспособным инструментом, полезным для оценки концентрации ЗВ в горной атмосфере. Проведенное сопоставление прогнозных значений и данных полевых измерений показало удовлетворительную точность, достаточную для практических приложений.

Результаты исследования. Проводилось 16 расчетов с различными граничными условиями для ветра на верхней границе расчетной области с шагом 22,5°: северное, северо-северо-западное, северо-западное и т. д. В каждом расчете вычислялись аэродинамические поля и концентрация ЗВ от модельного источника, расположенного в чаше хвостохранилища Алагирского ущелья. В результате осреднения и нормирования этих расчетов получается средняя концентрация ЗВ, приведенная в [3]. Здесь показаны нормированные поля концентрации ЗВ, полученные для юго-восточного, юго-юго-восточного и южного направлений внешнего ветра. В остальных расчетных случаях ЗВ перемещаются не в сторону Алагира, а в направлении мало населенных территорий, достигая которых, концентрация ЗВ уменьшается ниже ПДК (указываются согласно Федеральному закону Российской Федерации «О санитарно-эпидемиологическом благополучии населения» № 52-ФЗ от 30 марта 1999 г.).

На рис. 1 *а* изображена концентрация ЗВ, полученная при расчетах юго-восточного направления ветра; на рис. 1 *б* — юго-юго-восточного ветра; на рис. 1 *в* — южного ветра; на рис. 1 *г* — топографическая карта расчетной области, экспортированная из вычислительной сетки. Местоположение источника ЗВ отмечено белым кружком; показаны значения $0 < C < 0{,}1C_{max}$, где C_{max} — концентрация вблизи источника. Треугольником отмечены южные пригороды Алагира. Применялась нормировка, использованная в [3]. В областях, отмеченных синим цветом, концентрация превосходит значение $0{,}1C_{max}$.

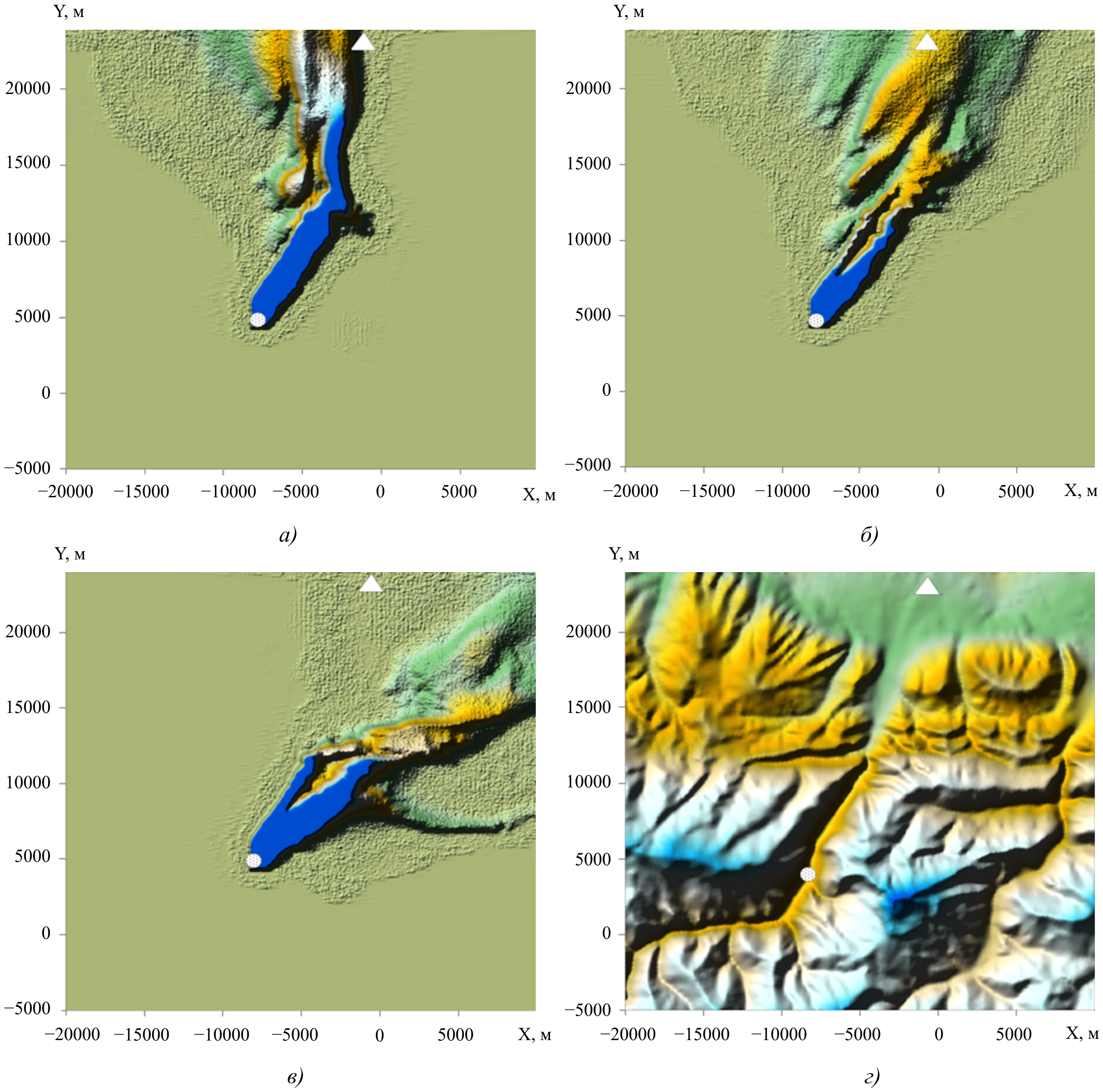


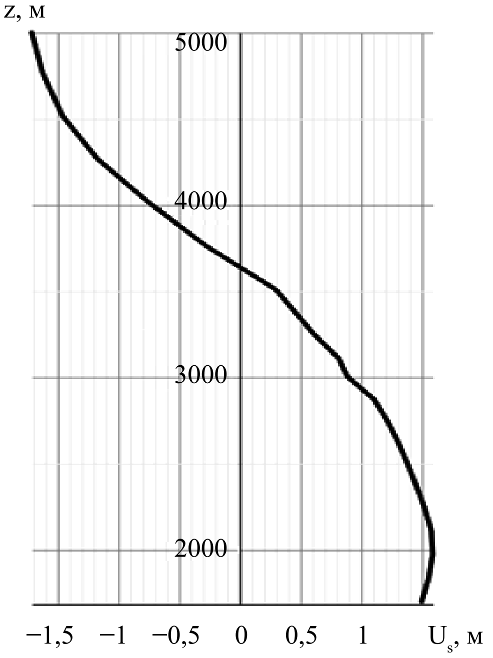
Рис. 1. Прогнозные карты концентрации загрязняющих веществ (ЗВ):
а — юго-восточный ветер; *б* — юго-юго-восточный ветер; *в* — южный ветер; *г* — высоты.
Ось *x* направлена на восток, *y* — на север; начало отсчета выбрано на топографической карте произвольно, вблизи хвостохранилища

Рис. 1 демонстрирует прогнозное значение концентрации ЗВ на склонах Алагирского ущелья и в районе выхода ущелья на равнину вблизи Алагира для синоптических ситуаций, при которых концентрация ЗВ будет максимальна. Концентрация ЗВ $0{,}1C_{max}$, представленная на рис. 1, превышает ПДК (по свинцу и цинку) в 2–3 раза.

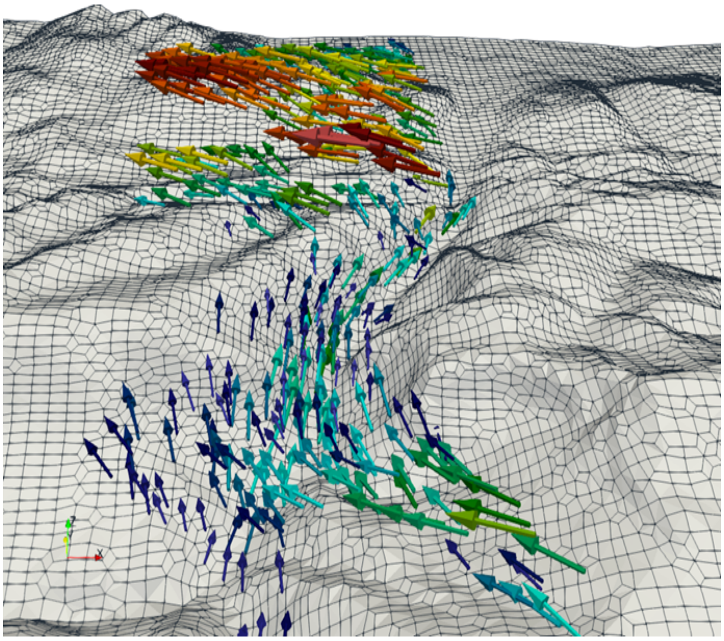
Из рис. 1 *а* видно, что концентрация ЗВ на склонах ущелий отслеживает топографию поверхности: пылевой аэрозоль распространяется вдоль оси ущелья, а также захватывается областями повышенной турбулентности и переносится ветром. На рис. 1 *в* проиллюстрировано распространение ЗВ на северо-восток при южном ветре, причем лишь незначительное их количество попадает в пригороды Алагира. Для юго-восточного и юго-юго-восточного случаев вблизи Алагира достигается количество ЗВ, превышающее ПДК в 2–3 раза как по свинцу, так и по цинку.

1. Струйные течения. Распространение ЗВ вдоль ущелья определяется не только внешним ветром, но и струйным течением, которое возникает в направлении, перпендикулярном поперечному сечению ущелья. Во всех расчетах используется геострофическое приближение, при котором в свободной атмосфере соблюдается баланс между перепадом давления и силой Кориолиса, что позволяет рассчитывать стационарные течения воздуха над равнинной поверхностью. Внутри поперечного сечения ущелья этот баланс нарушается, в результате формируется поток воздуха внутри ущелья с мощностью, зависящей от барического градиента.

Для примера на рис. 2 *а* приведен профиль северной компоненты скорости ветра (перпендикулярной к внешнему ветру) над хвостохранилищем для случая восточного ветра. Северная компонента скорости ветра, направленная вдоль ущелья, достигает значения 1,5 м/с, при этом ветер над ущельем не имеет северной компоненты. На рис. 2 *б* для этого же случая представлено пространственное распределение северной компоненты скорости ветра. На выходе из ущелья струйное течение разворачивается на запад под действием внешнего ветра. Практически во всех расчетных случаях возникает подобное струйное течение, внутри которого располагается источник ЗВ, что меняет картину их рассеяния, которое распространяется преимущественно на север или на юг вдоль ущелья.



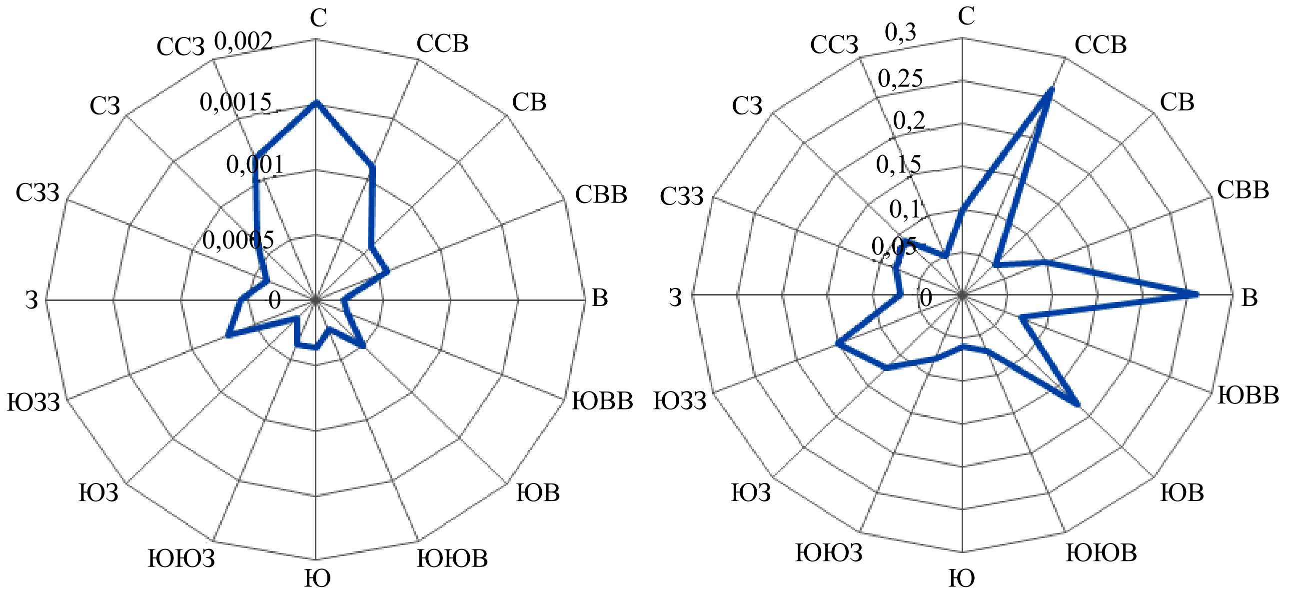
а)



б)

Рис. 2. Струйное течение в Алагирском ущелье:
а — профиль северной компоненты скорости ветра над хвостохранилищем;
б — пространственное поведение струйного течения
(вид с юга на Алагирское ущелье в районе хвостохранилища)

2. Частоты пульсаций струйных течений. В точке вычислительной сетки, расположенной над хвостохранилищем, выполнялась запись всех вычисляемых полей после каждого шага по времени. Анализ этих данных показал, что течение над хвостохранилищем в большинстве расчетов является нестационарным при постоянных граничных условиях. Для юго-восточного ветра частота составляет 0,0005 Гц и амплитуда пульсации ≈0,18 м/с; для юго-юго-восточного — 0,00024 Гц и ≈0,07 м/с соответственно; для южного ветра — 0,00037 Гц и ≈0,06 м/с.



а) *б)*

Рис. 3. Частоты и амплитуды осцилляций в точке, расположенной над хвостохранилищем на высоте около 20 метров: *а* — частоты и *б* — амплитуды осцилляций

На рис. 3 представлены частоты (рис. 3 *а*) и амплитуды осцилляций (рис. 3 *б*), полученные в результате 16 расчетов для различных направлений ветра на верхней границе, в точке, расположенной над хвостохранилищем на высоте около 20 метров. Видно, что частоты (рис. 3 *а*) вытянуты вдоль северного направления, близкого к направлению оси ущелья, а наибольшие амплитуды пульсаций (рис. 3 *б*) расположены в северо-северо-восточном направлении, совпадающим с осью ущелья, а также в восточном и юго-восточном направлениях, когда возникают струйные течения.

Вероятно, столь медленные и небольшие изменения скорости ветра внутри ущелья не приводят к заметным изменениям переноса ЗВ. В случае северо-северо-восточного ветра осцилляция происходит за 15 минут на 0,25 м/с, что приводит к появлению клубов пыли, увеличению турбулентности и увеличенному выносу ЗВ из ущелья.

3. Розы ветров. Розы ветров и сила ветров по направлениям, построенные на основании данных спутниковых измерений характеристик атмосферы, предоставляемых Европейской системой глобального мониторинга Copernicus (метеоспутники EuMetSAT и Sentinel) [24–25] и измерений, предоставляемых системой метеоспутников NASA (GEOS, Terra, Aqua) [26] за 20 лет измерений, приведены в [4] (рис. 2). Наблюдаемые там различия можно отнести к несовпадению площадей (порядка 10×10 км или более для разных метеоспутников), для которых предоставлены измерения, а также времени осреднения этих измерений.

На основании имеющихся данных можно сделать выводы о повторяемости рассматриваемых в настоящей работе синоптических ситуаций: повторяемость южного ветра составляет 15,0 % по данным Copernicus (модель реанализа ERA-5) и 10,1 % — по данным NASA (модель реанализа MERRA2); юго-восточного — 10,4 % и 3,3 %, соответственно; юго-юго-восточного — 20,9 % и 5,2 %. Таким образом, рассматриваемые синоптические ситуации возникают достаточно часто, их общая повторяемость составляет 46,3 % по данным Copernicus и 18,6 % — по данным NASA, а их последствия нуждаются в анализе и мониторинге.

Проводилось сравнение точности розы ветров, полученной по 16 вычислительным экспериментам для 16 направлений внешнего ветра и розы ветров, измеренной метеостанцией, расположенной в Алагирском ущелье вблизи Унальского хвостохранилища. Это сравнение описано в [4] (рис. 3) и показывает удовлетворительное согласие за исключением южных ветров, которых в модельной розе ветров больше. И форма розы ветров, и повторяемость остальных направлений ветра практически совпадают.

Обсуждение и заключение. Полученные результаты показывают, что Унальское хвостохранилище является источником пыли, содержащим загрязняющие почву вещества. За время существования хвостохранилища загрязнение может стать весьма масштабным, в результате чего требуются полевые исследования почвы в районе Алагира, а также принятие мер по ее рекультивации в случае необходимости.

Список литературы

1. Сухинов А.И., Проценко С.В., Панасенко Н.Д. Математическое моделирование и экологическое проектирование состояния морских систем с учетом разномасштабной турбулентности с использованием данных дистанционного зондирования. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2022;1(3):104–113. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2022-1-3-104-113

2. Белова Ю.В., Проценко Е.А., Атаян А.М. и др. Моделирование прибрежной аэродинамики с учетом лесных насаждений. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2018;2(2):91–105.

3. Каменецкий Е.С., Радионов А.А., Тимченко В.Ю. и др. Математическое моделирование распределения пыли по склонам горного ущелья от хвостохранилища, расположенного в Алагирском ущелье. *Горный информационно-аналитический бюллетень*. 2020;11(1):118–134. https://doi.org/10.25018/0236-1493-2020-111-0-118-134

4. Каменецкий Е.С., Радионов А.А., Тимченко В.Ю. и др. Математическое моделирование распределения химических веществ и твердой фазы хвостов, осаждающихся на горных склонах в районе Фиагдонского хвостохранилища РСО-Алания. *Устойчивое развитие горных территорий*. 2022;14(3):349–361. https://doi.org/10.21177/1998-4502-2022-14-3-349-361

5. Kok J.F., Mahowald N.M., Fratini G., et al. An improved dust emission model — Part 1: Model description and comparison against measurements. *Atmospheric Chemistry and Physics*. 2014;14:13023–13041. https://doi.org/10.5194/acp-14-13023-2014

6. Roache P.J. *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*. Albuquerque, NM: Hermosa Publishers; 1998.

7. Stern F., Wilson R.V., Coleman H.W., et al. Comprehensive approach to verification and validation of CFD simulations Part 1: methodology procedures. *Journal of Fluids Engineering*. 2001;123:793–802.

8. Stovern M., et al. Simulation of windblown dust transport from a mine tailings impoundment using a computational fluid dynamics model. *Aeolian Research*. 2014;14:75–83. https://doi.org/10.1016/j.aeolia.2014.02.008

9. Turpin C., Harion J.L. Effect of the topography of an industrial site on dust emissions from open storage yards. *Environmental Fluid Mechanics*. 2010;10:677. https://doi.org/10.1007/s10652-010-9170-3

10. Алоян А.Е. Динамика и кинетика газовых примесей и аэрозолей в атмосфере. *Курс лекций*. Москва: ИВМ РАН; 2002. 201 с.

11. Берлянд М.Е. *Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы*. Ленинград: Гидрометеоиздат; 1975. 448 с.

12. Teixeira M.A.C., Kirshbaum D.J., Olafsson H., et al. *The atmosphere over mountainous regions. Frontiers in Earch Science*. Frontiers Media SA: Lausanne; Switzerland. 2016. Pp. 162.

13. Chow F.K., De Wekker S.F.J., Snyder B. J. *Mountain Weather Research and Forecasting, Recent Progress and Current Challenges*. Springer-Verlag Berlin: Heidelberg; 2013. Pp. 750.

14. Лолаев А.Б., Гурбанов А.Г., Дзебоев С.О. и др. Загрязнение прилегающих территорий в районе деятельности Садонского свинцово-цинкового комбината (Республика Северная Осетия-Алания). *Вестник ВНЦ РАН*. 2017;6(2):177–180.

15. Гурбанов А.Г., Кусраев А.Г., Лолаев А.Б. и др. Геохимические особенности промышленных отходов мизурской горно-обогатительной фабрики (унальское хвостохранилище, республика Северная Осетия-Алания) как основа для оценки масштабов загрязнения ими почв прилегающих территорий. *Геология и геофизика Юга России*. 2018;(1):34–47. https://doi.org/10.23671/VNC.2018.1.11242

16. Гурбанов А.Г., Шаззо Ю.К., Лескин А.Б. и др. Промышленные отходы Мизурской горно-обогатительной фабрики Садонского свинцово-цинкового комбината. *Вестник Владикавказского научного центра РАН*. 2012;12(4):27–40.

17. *EPA. Iron King Mine and Humboldt Smelter.* 2010. URL: https://www.epa.gov/ air-emissions-factors-and-quantification/ap-42-compilation-air-emissions-factors (дата обращения: 09.10.2023).

18. Gillies J.A. Fundamentals of aeolian sediment transport: dust emissions and transport — near surface. In: Shroder, J. (ed. in Chief), Lancaster N., Sherman D.J., Baas A.C.W. (eds.). *Treatise on Geomorphology*. Academic Press: San Diego, CA: 2013;11:43–63.

19. Pathirana A., Herath S., Yamada T. Simulating orographic rainfall with a limited-area, non-hydrostatic atmospheric model under idealized forcing. *Atmospheric Chemistry and Physics*. 2005;(5):215–226.

20. Lehner M., Whiteman C.D., Dorninger M. Inversion Build-Up and Cold-Air Outflow in a Small Alpine Sinkhole. *Boundary-Layer Meteorology*. 2017;(163):497–522. https://doi.org/10.1007/s10546-017-0232-7

21. Issa R.I. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *Journal of Computational Physics*. 1986;62(1):40–65. https://doi.org/10.1016/0021-9991(86)90099-9

22. Hargreaves D.M., Wright N.G. In the use of the k-Epsilon model in commercial CFD software to model the neutral atmospheric boundary layer. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2007;95:355–269.

23. Muñoz-Sabater J. *ERA5-Land hourly data from 1981 to present. Copernicus Climate Change Service (C3S) Climate Data Store (CDS).* 2019. (Accessed on 01.11.2021). https://doi.org/10.24381/cds.e2161bac

24. Muñoz-Sabater J., Dutra E., Agustí-Panareda A., et al. *ERA5-Land: A state-of-the-art global reanalysis dataset for land applications, Earth Syst*. Sci. Data Discuss. [preprint]. In review, 2021. https://doi.org/10.5194/essd-2021-82

25. Hersbach H., Bell B., Berrisford P., et al. *ERA5 hourly data on pressure levels from 1959 to present. Copernicus Climate Change Service (C3S) Climate Data Store (CDS)*. 2018. https://doi.org/10.24381/cds.bd0915c6

26. *MERRA-2 (NASA's-Modern Era Retrospective-Analysis for Research and Applications*. URL: https://gmao.gsfc.nasa.gov/reanalysis/MERRA-2/ (дата обращения: 09.10.2023).

References

1. Sukhinov A.I., Protsenko S.V., Panasenko N.D. Mathematical modeling and ecological design of the marine systems taking into account multi-scale turbulence using remote sensing data. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2022;1(3):104–113. (In Russ.). https://doi.org/10.23947/2587-8999-2022-1-3-104-113

2. Belova Yu.V., Protsenko E.A., Atayan A.M., et al. Simulation of coastal aerodynamics taking into account forest plantations. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2018;2(2):91–105. (In Russ.)

3. Kamenetsky E.S., Radionoff A.A., Timchenko V.U., et al. Mathematical modeling of dust distribution from a mine tailings located in alagir's mountain valley. *Mining informational and analytical bulletin*. 2020;11(1):118–134. (In Russ.). https://doi.org/10.25018/0236-1493-2020-111-0-118-134

4. Kamenetsky E.S., Radionoff A.A., Timchenko V.U., et al. Mathematical modeling of distribution of the chemicals and the solid phase of tailings deposited on the mountain gorge slopes near the Fiagdonskoye tailings, North Ossetia-Alania. *Sustainable Development of Mountain Territories*. 2022;14(3):349–361. (In Russ.). https://doi.org/10.21177/1998-4502-2022-14-3-349-361

5. Kok J.F., Mahowald N.M., Fratini G., et al. An improved dust emission model – Part 1: Model description and comparison against measurements. *Atmospheric Chemistry and Physics*. 2014;14:13023–13041. https://doi.org/10.5194/acp-14-13023-2014

6. Roache P.J. *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*. Albuquerque, NM: Hermosa Publishers; 1998.

7. Stern F., Wilson R.V., Coleman H.W., et al. Comprehensive approach to verification and validation of CFD simulations Part 1: methodology procedures. *Journal of Fluids Engineering*. 2001;123:793–802.

8. Stovern M. et al. Simulation of windblown dust transport from a mine tailings impoundment using a computational fluid dynamics model. *Aeolian Research*. 2014;14:75–83. https://doi.org/10.1016/j.aeolia.2014.02.008

9. Turpin C., Harion J.L. Effect of the topography of an industrial site on dust emissions from open storage yards. *Environmental Fluid Mechanics*. 2010;10:677. https://doi.org/10.1007/s10652-010-9170-3

10. Alojan A.E. Dynamics and kinetics of gas contaminants and aerosols in the atmosphere. *Course of lectures*. Moscow: IVM RAN; 2002. 201 p. (In Russ.).

11. Berljand M.E. *Modern problems of atmospheric diffusion and air pollution*. Leningrad: Gidrometeoizdat; 1975. 448 p. (In Russ.).

12. Teixeira M.A.C., Kirshbaum D.J., Olafsson H., et al. *The atmosphere over mountainous regions. Frontiers in Earch Science*. Frontiers Media SA: Lausanne; Switzerland. 2016. Pp. 162.

13. Chow F.K., De Wekker S.F.J., Snyder BJ. *Mountain Weather Research and Forecasting, Recent Progress and Current Challenges.* Springer-Verlag Berlin: Heidelberg; 2013. Pp. 750.

14. Lolaev A.B., Gurbanov A.G., Dzeboev S.O., et al. Contamination of adjacent territories in the area of the Sadon Lead-Zinc Plant (Republic of North Ossetia-Alania). *Vestnik VNC RAN*. 2017;6(2):177–180. (In Russ.).

15. Gurbanov A.G., Kusraev A.G., Lolaev A.B., et al. Geochemical features of Mizur mining and concentration factory industrial wastes (Unal tailing, republic of northern Ossetia-Alania) as a basis for the estimation of pollution scale by IT'S the soil of the adjacent area. *Geology and Geophysics of Russia South*. 2018;(1):34–47. (In Russ.). https://doi.org/10.23671/VNC.2018.1.11242

16. Gurbanov A.G., Shazzo Yu.K., Leksin A.B., et al. Industrial waste from the Mizursk mining and processing plant of the Sadonsky lead-zinc plant. *Vestnik VNC RAN*. 2012;12(4):27– 40. (In Russ.).

17. *EPA. Iron King Mine and Humboldt Smelter*. 2010. URL: https://www.epa.gov/ air-emissions-factors-and-quantification/ap-42-compilation-air-emissions-factors (accessed: 09.10.2019).

18. Gillies J.A. Fundamentals of aeolian sediment transport: dust emissions and transport – near surface. In: Shroder J. (ed. in Chief), Lancaster N., Sherman D.J., Baas A.C.W. (eds.). *Treatise on Geomorphology*. Academic Press: San Diego, CA: 2013;11:43–63.

19. Pathirana A., Herath S., Yamada T. Simulating orographic rainfall with a limited-area, non-hydrostatic atmospheric model under idealized forcing. *Atmospheric Chemistry and Physics*. 2005;(5):215–226.

20. Lehner M., Whiteman C.D., Dorninger M. Inversion Build-Up and Cold-Air Outflow in a Small Alpine Sinkhole. *Boundary-Layer Meteorology*. 2017;(163):497–522. https://doi.org/10.1007/s10546-017-0232-7

21. Issa R.I. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *Journal of Computational Physics*. 1986;62(1):40–65. https://doi.org/10.1016/0021-9991(86)90099-9

22. Hargreaves D.M., Wright N.G. In the use of the k-Epsilon model in commercial CFD software to model the neutral atmospheric boundary layer. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2007;95:355–269.

23. Muñoz Sabater J. (2019): *ERA5-Land hourly data from 1981 to present. Copernicus Climate Change Service (C3S) Climate Data Store (CDS)*. https://doi.org/10.24381/cds.e2161bac

24. Muñoz-Sabater J., Dutra E., Agustí-Panareda A., et al. *ERA5-Land: A state-of-the-art global reanalysis dataset for land applications, Earth Syst*. Sci. Data Discuss. [preprint]. In review, 2021. https://doi.org/10.5194/essd-2021-82

25. Hersbach H., Bell B., Berrisford P., et al. *ERA5 hourly data on pressure levels from 1959 to present. Copernicus Climate Change Service (C3S) Climate Data Store (CDS)*. 2018. https://doi.org/10.24381/cds.bd0915c6

26. *MERRA-2 (NASA's-Modern Era Retrospective-Analysis for Research and Applications*. URL: https://gmao.gsfc.nasa.gov/reanalysis/MERRA-2/ (accessed: 09.10.2023).

Поступила в редакцию 01.10.2023
Поступила после рецензирования 14.11.2023
Принята к публикации 17.11.2023

Об авторах:

Каменецкий Евгений Самойлович, главный научный сотрудник лаборатории Математического моделирования, ЮМИ ВНЦ РАН (362027, РФ, г. Владикавказ, ул. Ватутина, 53), доктор ф.-м. наук, ORCID, esk@smath.ru

Радионов Анатолий Анатольевич, научный сотрудник лаборатории Математического моделирования, ЮМИ ВНЦ РАН (362027, РФ, г. Владикавказ, ул. Ватутина, 53), кандидат технических наук, ORCID, aar200772@mail.ru

Тимченко Василий Юрьевич, соискатель лаборатории Математического моделирования, ЮМИ ВНЦ РАН (362027, РФ, г. Владикавказ, ул. Ватутина, 53), ORCID, timchenko.vasily@mail.ru

Панаэтова Ольга Софокловна, аспирант лаборатории Математического моделирования, ЮМИ ВНЦ РАН (362027, РФ, г. Владикавказ, ул. Ватутина, 53), ORCID

Заявленный вклад соавторов:
Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Конфликт интересов
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Received 01.10.2023
Revised 14.11.2023
Accepted 17.11.2023

About the Authors:

Evgeny S. Kamenetsky, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, Department of Mathematical Modeling, SMI VSC RAS (53, Vatutina St., Vladikavkaz, RF, 362027), ORCID, esk@smath.ru

Anatoly A. Radionoff, candidate of technical sciences, Researcher, Department of Mathematical Modeling, SMI VSC RAS (53, Vatutina St., Vladikavkaz, RF, 362027), ORCID, aar200772@mail.ru

Vasily Yu. Timchenko, graduate student, Department of Mathematical Modeling, SMI VSC RAS (53, Vatutina St., Vladikavkaz, RF, 362027), ORCID, timchenko.vasily@mail.ru

Olga S. Panaetova, graduate student, Department of Mathematical Modeling, SMI VSC RAS (53, Vatutina St., Vladikavkaz, RF, 362027), ORCID

Contribution of co-authors:
All authors have made an equivalent contribution to the preparation of the publication.

Conflict of interest statement
The authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
MATHEMATICAL MODELLING

Check for updates

Научная статья

УДК 519.6
https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-30-38

Математическое моделирование стационарных и нестационарных периодических течений с использованием различных моделей вихревой вязкости

Е.А. Проценко✉**, С.В. Проценко**

Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), г. Таганрог, Российская Федерация

✉eapros@rambler.ru

Аннотация

Введение. Математическое моделирование течений является актуальной исследовательской темой в области гидродинамики и океанографии. Несмотря на непрекращающиеся исследования в области разработки точных и эффективных численных методов для решения уравнений Навье-Стокса, учитывающих вихревую вязкость, задачи точного предсказания и контроля турбулентности остаются нерешенными. Также актуальными остаются вопросы влияния нелинейных эффектов в моделях вихревой вязкости на точность прогнозов и их применимость к различным условиям течения. Целью исследования является изучение влияния линеаризованного и квадратичного донного трения и двух моделей турбулентности на численное решение стационарных и нестационарных периодических течений. Особый акцент сделан на сравнении численных результатов с аналитическими решениями в рамках использования различных моделей донного трения.

Материалы и методы. Вычислительные модели, применяемые в этом исследовании, основаны на упрощенной двумерной волновой модели и полных трехмерных уравнениях Навье-Стокса. Классическая модель движения мелкой воды и 2D-модель без учета динамического изменения геометрии поверхности водоема получены из системы уравнений для пространственно-неоднородной трехмерной математической модели волновой гидродинамики мелководного водоема. Аналитические решения были найдены путем линеаризации уравнений, что, очевидно, имеет свои ограничения. Проводится различие между нелинейностями, вызванными членами более высокого порядка в уравнениях движения (т. е. членами адвективного ускорения и трения), и геометрическими нелинейностями, связанными, например, с различной глубиной воды и шириной водоема, что будет важно при моделировании реального моря.

Результаты исследования. Представлены результаты моделирования стационарных и нестационарных периодических течений в схематизированном прямоугольном бассейне с использованием линеаризованного донного трения. Исследовано влияние линеаризации на численное решение в сравнении с аналитическими профилями, использующими модели, рассчитывающие донное трение в квадратичной формулировке. В сочетании с квадратичным трением о дно изучаются две модели турбулентности: постоянная вихревая вязкость и модель длины перемешивания Прандтля. Результаты, полученные в результате трехмерного моделирования, сравниваются с результатами двумерного моделирования и аналитическими решениями, усредненными по глубине.

Обсуждение и заключение. Предложены новые подходы к моделированию и исследованию течений с переменной вихревой вязкостью, включая анализ влияния линеаризации и использование различных моделей турбулентности. Для линеаризованной и квадратичной формулировок донного трения доказано, что численные результаты для случая стационарного течения демонстрируют большое сходство с аналитическими решениями, поскольку высота поверхности намного меньше глубины воды и адвекцией можно пренебречь. Численные результаты для нестационарного течения также показывают хорошее соответствие теории. В отличие от аналитических решений численное моделирование имеет незначительные отклонения в долгосрочной перспективе. Исследование течений, в рамках использования различных моделей турбулентности, позволит осуществить учет влияния нелинейных эффектов в моделях вихревой вязкости на точность прогнозов и их применимость к различным условиям течения. Полученные результаты позволяют лучше понять и описать физические процессы, происходящие в мелководных водоемах. Это открывает новые возможности применения математического моделирования для прогнозирования и анализа воздействия человеческой деятельности на морскую среду и для решения других задач в области океанологии и геофизики.

Ключевые слова: гидродинамика, мелководный водоем, волновое движение, численное моделирование

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00210. https://rscf.ru/project/23-21-00210/

Для цитирования. Проценко Е.А., Проценко С.В. Математическое моделирование стационарных и нестационарных периодических течений с использованием различных моделей вихревой вязкости. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):30–38. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-30-38

Original article

Stationary and Non-Stationary Periodic Flows Mathematical Modelling using Various Vortex Viscosity Models

Elena A. Protsenko, **Sofia V. Protsenko**

Taganrog Institute named after A.P. Chekhov (branch) of RSUE, Taganrog, Russian Federation

eapros@rambler.ru

Abstract

Introduction. Mathematical modelling of currents is an urgent research topic in the field of hydrodynamics and oceanography. Despite ongoing research in the field of developing accurate and efficient numerical methods for solving Navier-Stokes equations that take into account vortex viscosity, the problems of accurate prediction and control of turbulence remain unresolved. The influence of nonlinear effects in vortex viscosity models on the accuracy of forecasts and their applicability to various flow conditions also remains relevant. The aim of the study is to study the influence of linearized and quadratic bottom friction and two turbulence models on the numerical solution of stationary and non-stationary periodic flows. Special emphasis is placed on comparing numerical results with analytical solutions within the framework of using various models of bottom friction.

Materials and Methods. The computational models used in this study are based on a simplified two-dimensional wave model and full three-dimensional Navier-Stokes equations. The classical model of shallow water motion and the 2D model without taking into account dynamic changes in the geometry of the reservoir surface are derived from a system of equations for a spatially inhomogeneous three-dimensional mathematical model of wave hydrodynamics of a shallow reservoir. Analytical solutions were found by linearization of the equations, which obviously has its limitations. A distinction is made between two types of nonlinear effects – nonlinearities caused by higher-order terms in the equations of motion, i. e. terms of advective acceleration and friction, and nonlinear effects caused by geometric nonlinearities, this is due, for example, to different water depths and reservoir widths, which will be important when modelling a real sea.

Results. The results of modeling stationary and non-stationary periodic flows in a schematized rectangular basin using linearized bottom friction are presented. The influence of linearization on the numerical solution is investigated in comparison with analytical profiles using models calculating bottom friction in a quadratic formulation. In combination with quadratic bottom friction, two turbulence models are studied: the constant vortex viscosity and the Prandtl mixing length model. The results obtained as a result of three-dimensional modelling are compared with the results of two-dimensional modeling and analytical solutions averaged in depth.

Discussion and Conclusion. New approaches to modelling and studying flows with variable vortex viscosity are proposed, including analysis of the influence of linearization and the use of various turbulence models. For the linearized and quadratic formulations of bottom friction, it is proved that the numerical results for the case of stationary flow show great similarity with analytical solutions, since the surface height is much less than the water depth and advection can be neglected. The numerical results for the unsteady flow also show a good agreement with the theory. Unlike analytical solutions, numerical modelling has minor deviations in the long run. The study of flows, within the framework of using various turbulence models, will make it possible to take into account the influence of nonlinear effects in vortex viscosity models on the accuracy of forecasts and their applicability to various flow conditions. The results obtained make it possible to better understand and describe the physical processes occurring in shallow waters. This opens up new possibilities for applying mathematical modelling to predict and analyze the impact of human activities on the marine environment and to solve other problems in the field of oceanology and geophysics.

Keywords: hydrodynamics, shallow water reservoir, wave motion, numerical modelling

Funding information. The study was supported by the Russian Science Foundation grant no. 23-21-00210. https://rscf.ru/project/23-21-00210/

For citation. Protsenko E.A., Protsenko S.V. Stationary and non-stationary periodic flows mathematical modelling using various vortex viscosity models. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):30–38. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-30-38

Введение. Математическое моделирование течений является важным и актуальным инструментом научных и инженерных исследований, позволяющим выявлять возможные риски, оптимизировать процессы и исследовать сложные физические явления, которые трудно или невозможно изучить экспериментально. Применение метода математического моделирования позволяет исследовать основные характеристики течений: скорость, давление, концентрацию, температуру, которые невозможно измерить непосредственно. Например, моделирование может помочь предсказать распространение загрязнений в водных системах или определить оптимальную стратегию борьбы с наводнениями.

Множество ученых занимаются исследованиями течений с использованием различных моделей вихревой вязкости. Анализ исследований [1–10], связанных с разработкой численных методов, направленных на решение уравнений Навье-Стокса для сложных периодических течений в области турбулентности и динамики жидкости, позволяет говорить о том, что моделирование стационарных и нестационарных периодических течений остается важной научной и прикладной проблемой.

Несмотря на успехи в этом направлении — разработку более точных и эффективных численных методов для решения уравнений Навье-Стокса, учитывающих вихревую вязкость (эти методы позволяют более точно моделировать сложные течения, такие как обтекание тел с высокой степенью вихревой активности), есть и нерешенные задачи. Это, например, точное предсказание и контроль турбулентности. Также актуальными остаются вопросы влияния нелинейных эффектов в моделях вихревой вязкости на точность прогнозов и их применимость к различным условиям течения. Такие модели позволяют получить более точное и реалистичное описание поведения течения жидкости. Это особенно важно при изучении турбулентных потоков, где вихревая вязкость является одним из ключевых факторов, влияющих на характер движения жидкости. Моделирование таких течений позволяет уточнить параметры вихрей, определить их влияние на другие физические процессы и разработать методы контроля или управления течением.

Использование различных моделей вихревой вязкости позволяет учесть особенности течения, такие как геометрия потока, присутствие препятствий, изменение плотности или вязкости. Каждая модель вихревой вязкости имеет свои ограничения и ее выбор зависит от конкретных факторов и целей моделирования. Сравнение результатов, полученных с использованием различных моделей, позволяет их уточнить и проверить, а также сделать более точные выводы о поведении течения.

Материалы и методы. Вычислительные модели, применяемые в данном исследовании, основаны на упрощенной двумерной волновой модели и полных трехмерных уравнениях Навье-Стокса.

Пространственно-неоднородная трехмерная математическая модель волновой гидродинамики мелководного водоема включает [1]:

– уравнения движения (Навье-Стокса):

$$\begin{gathered}
u'_t + uu'_x + vu'_y + wu'_z = -\frac{1}{\rho}P'_x + \left(\mu u'_x\right)'_x + \left(\mu u'_y\right)'_y + \left(\nu u'_z\right)'_z,\\
v'_t + uv'_x + vv'_y + wv'_z = -\frac{1}{\rho}P'_y + \left(\mu v'_x\right)'_x + \left(\mu v'_y\right)'_y + \left(\nu v'_z\right)'_z,\\
w'_t + uw'_x + vw'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho}P'_z + \left(\mu w'_x\right)'_x + \left(\mu w'_y\right)'_y + \left(\nu w'_z\right)'_z + g;
\end{gathered} \tag{1}$$

– уравнение неразрывности:

$$\rho'_t + \left(\rho u\right)'_x + \left(\rho v\right)'_y + \left(\rho w\right)'_z = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{V} = \{u, v, w\}$ — вектор скорости водного потока мелководного водоема; ρ — плотность водной среды; P — гидродинамическое давление; g — ускорение свободного падения; μ, ν — коэффициенты турбулентного обмена в горизонтальном и вертикальном направлениях; $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности, описывающей границу расчетной области.

Для построения двумерной математической модели движения водной среды использовалась трехмерная гидростатическая модель, включающая:

– уравнения Навье-Стокса:

$$\begin{gathered}
u'_t + uu'_x + vu'_y + wu'_z = -\frac{1}{\rho}P'_x + \left(\mu u'_x\right)'_x + \left(\mu u'_y\right)'_y + \left(\eta u'_z\right)'_z,\\
v'_t + uv'_x + vv'_y + wv'_z = -\frac{1}{\rho}P'_y + \left(\mu v'_x\right)'_x + \left(\mu v'_y\right)'_y + \left(\eta v'_z\right)'_z;
\end{gathered}$$

– уравнение неразрывности (для несжимаемой жидкости): $u'_x + v'_y + w'_z = 0$;

– уравнение гидростатики: $P = \rho g\,(z + \xi)$.

В гидростатическом случае уравнение неразрывности имеет вид [11, 12]:

$$\theta'_t + (Hu)'_x + (Hv)'_y = 0,$$

где $\theta = \min(\chi, \xi)$; $H = h + \theta$, h — глубина водоема.

Из разработанной системы уравнений можно получить классическую модель движения мелкой воды и 2D-модель без учета динамического изменения геометрии поверхности водоема.

Аналитическими решениями для модели, усредненной по глубине, и модели, которая содержит информацию по вертикали, являются:

$$U = \widetilde{A} \cdot \left(\frac{1}{1 - i\sigma_1}\right) e^{i\omega t},$$

$$\overline{u} = \widetilde{A} \cdot \left(1 - \frac{\widetilde{\gamma}}{bd}\tanh(bd)\right) e^{i\omega t},$$

где $\widetilde{\gamma}$ — функция только от σ_2 и bd.

Таким образом, усредненные по глубине скорости в обеих моделях выглядят очень похоже и могут быть описаны функцией безразмерного σ_1-параметра или безразмерного σ_2-параметра и безразмерного bd-параметра соответственно, где:

$$\sigma_1 = \frac{8}{3\pi} c_{f_1} \frac{\widehat{U}}{\omega d}, \quad \sigma_2 = \frac{8}{3\pi} c_{f_2} \frac{\widetilde{u}_b}{\omega d}, \quad bd = \sqrt{\frac{i\omega d^2}{\nu_t}}.$$

Аналитические решения были найдены путем линеаризации уравнений, что имеет свои ограничения. Проводится различие между двумя видами нелинейных эффектов:

1. Нелинейности, вызванные членами более высокого порядка в уравнениях движения, т. е. членами адвективного ускорения и трения. Линеаризация трения kU основана на оптимальном воспроизведении преобладающей сингулярной прогрессивной волны. Хотя такая линеаризация эффективна для целей данного исследования, она искажает распространение и генерацию других составляющих движения водной среды.

2. Нелинейные эффекты, вызванные геометрическими нелинейностями, которые являются результатом зависимости поперечного сечения от высоты поверхности ζ. Это связано, например, с различной глубиной воды и шириной водоема, что будет важно при моделировании реального моря.

Моделирование турбулентности. Турбулентная вязкость выражает перенос импульса в турбулентном потоке. Доступно несколько моделей турбулентной вязкости:

− модель постоянной вихревой вязкости;

− модель смешивания по длине Прандтля;

− модель k−ε;

− метод моделирования крупных вихрей (LES) [4, 7–8].

Модель постоянной вихревой вязкости — это простая модель, описывающая вихревую вязкость как произведение скорости и масштаба длины:

$$\nu_e = \frac{1}{6}\kappa d u_*.$$

Модель длины перемешивания Прандтля использует гипотезу длины перемешивания, в которой скорость, характеризующая турбулентные флуктуации, пропорциональна разнице скоростей в среднем потоке на расстоянии l_m, на котором происходит перемешивание или перенос импульса, и определяется как $l_m \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial x}\cdot$ При повторном использовании l_m в качестве управляющей шкалы длины вихревую вязкость можно записать как произведение этой шкалы в квадрате на локальный градиент скорости [13–15].

Модель k−ε связывает вязкость турбулентности с кинетической энергией турбулентности k и скоростью рассеивания турбулентности ϵ. Эволюция k и ϵ во времени описывается уравнениями переноса.

При работе с большими когерентными турбулентными структурами следует использовать метод моделирования крупных вихрей (LES). В моделях LES большие масштабы турбулентности непосредственно разрешаются на вычислительной сетке, в то время как меньшие масштабы учитываются с помощью формулировки замыкания.

Моделирование выполняется с использованием следующих граничных условий:

− замкнутые границы на дне, насыпи или стене (с трением о стену или без него);

− граница свободной поверхности;

− постоянный уровень воды на открытых границах;

− гармонично изменяющийся уровень воды.

Коэффициент трения в модели, усредненной по глубине (c_{f1}), отличался от коэффициента трения в модели с вертикальной информацией (c_{f2}), в то время как использовалась постоянная вертикальная вихревая вязкость.

При численном моделировании на практике обычно используется вязкость, изменяющаяся по вертикали в соответствии с моделью турбулентного перемешивания по длине. Использование этого определения вихревой вязкости и интегрирование по глубине воды обеспечивают логарифмический профиль скорости:

$$u(z)=\frac{u_*}{\kappa}\ln\left(\frac{z+d}{z_0}\right), \tag{3}$$

где u_* — скорость напряжения сдвига; κ — постоянная фон Кармана (не путать с коэффициентами трения дна κ_1 и κ_2). Параметр z_0 может быть связан с фактической шероховатостью:

$$z_0=\frac{\kappa_N}{30},$$

где κ_N известна как эмпирически определяемая высота шероховатости.

Для модели, усредненной по глубине, напряжение сдвига пласта может быть связано со скоростью, усредненной по глубине, через $\tau_b=c_{f_1}|U|U=u_*^2$. В сочетании с логарифмическим профилем уравнения (3) найдено выражение для коэффициента трения c_{f1}:

$$\frac{1}{\sqrt{c_{f_1}}}=\frac{1}{\kappa}\ln\left(e^{-1}\frac{d}{z_0}\right). \tag{4}$$

Для 3D модели с вертикальным размером напряжение сдвига слоя может быть связано с коэффициентом трения (c_{f2}) через $\tau_b=c_{f2}\,|u_b|\,u_b$. Донное напряжение определим как:

$$\tau_b=|u_*|u_*\Rightarrow u_b=\frac{u_*}{\sqrt{c_{f_2}}}.$$

В результате будет получено выражение для коэффициента трения:

$$\frac{1}{\sqrt{c_{f_2}}}=\frac{1}{\kappa}\ln\left(e^{-2}\frac{\Delta z_b}{z_0}\right). \tag{5}$$

Соотношение между c_{f1} и c_{f2} найдено путем приравнивания (4) и (5):

$$\frac{1}{\sqrt{c_{f_1}}}=\frac{1}{\sqrt{c_{f_2}}}-\frac{1}{\kappa}\ln\left(e^{-1}\frac{\Delta z_b}{d}\right).$$

Результаты исследования. Расчеты выполнены для стационарного и нестационарного (периодический поток) течения. В стационарном случае градиент уровня воды постоянен во времени. В нестационарном случае исследуется периодически изменяющийся поток. В обоих случаях проводится численное моделирование с использованием линеаризованного донного трения, соответствующего аналитическому подходу. Численный отклик горизонтальных (усредненных по глубине) скоростей должен соответствовать аналитическим профилям скорости, усредненным по глубине. Наблюдаемая разница может быть вызвана только численными приближениями, то есть интегрированием по времени и (горизонтальной) дискретизацией.

Для обоих случаев течения геометрия расчетной области представлена в виде прямоугольного бассейна с двумя открытыми границами на коротких сторонах и глубиной воды 12 м. Ширина бассейнов невелика (40 м) по сравнению с длиной. Для случая устойчивого течения бассейн вытянут в длину на 20 000 м. Бассейн такой длины необходим для полного развития градиента уровня воды.

Граничные условия для стационарного случая определяют уровень воды 20 см на границе притока (слева), уровень воды 0 м — на границе оттока (справа) и нулевую нормальную скорость на боковых стенках и поверхности (верхняя граница). Таким образом, уровень воды фиксируется с уклоном $i_w=10^{-5}$ (рис. 1).

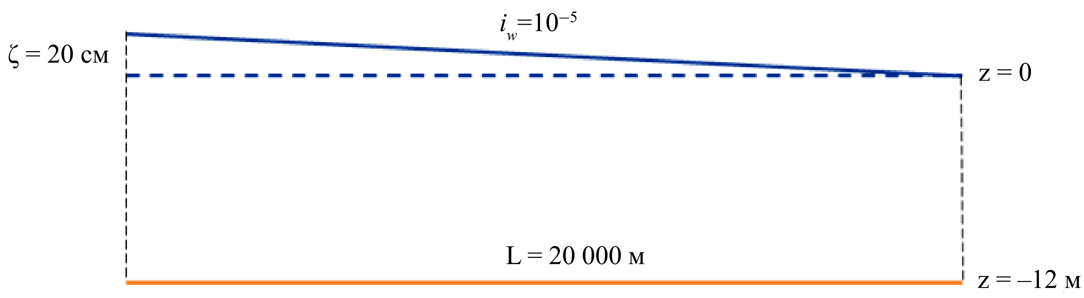


Рис. 1. Устойчивый поток в длинном канале

Когда 3D-результаты усредняются по глубине (3D-DA), их можно непосредственно сравнить с соответствующими результатами 2D-модели. Выбраны одинаковые значения для коэффициента шероховатости κ_N в обеих моделях, c_{f1} был выбран равным 0,002, κ_N должно составлять 0,086 м, следовательно, c_{f2} будет равно 0,0042. Это входные данные для модели с линеаризованным нижним трением.

Таким образом, моделирование с квадратичным трением дна фактически было выполнено до линеаризованного случая. Это позволяет проводить сравнение между всеми моделями (2D и 3D, линейными и квадратичными).

В сочетании с квадратичным трением о дно изучаются две модели турбулентности: постоянная вихревая вязкость и модель длины перемешивания Прандтля. В конечном итоге оба вычисления приведут к одинаковой скорости, усредненной по глубине, при условии, что для вязкости вертикального вихря выбрано определенное значение, соответствующее выбранным конкретным коэффициентам донного трения, в результате чего $v_t = 0{,}22$ м²/с (таблица 1).

Таблица 1

Входные параметры для случая установившегося потока

Параметр	Расчетное значение параметра
c_{f1}	0,002
c_{f2}	0,004
κ_1	$2{,}9 \cdot 10^{-5}$
κ_2	$8{,}3 \cdot 10^{-5}$
v_t	0,22 м²/с

Моделирование выполнено для длинного канала с линеаризованным донным трением. Значения входных параметров, использованных для этого моделирования, обобщены в таблице 2. Теоретические профили скорости для установившегося течения с линеаризованным донным трением используются для сравнения численных результатов с аналитическими. В отличие от аналитических решений, численное моделирование имеет незначительные отклонения в долгосрочной перспективе.

Таблица 2

Входные параметры для стационарного течения с линеаризованным нижним трением

Фундаментальные параметры	Производные параметры
$i_\omega = 10^{-5}$	$\Delta z_b = d/nz = 2$ м
$d = 12$ м	0,004
$\kappa_N = 0{,}086$ м	$\kappa_1 = 5{,}7 \cdot 10^{-5}$
$nz = 6$	$\kappa_2 = 8{,}3 \cdot 10^{-5}$
v_t	$v_t = 0{,}22$ м²/с

Как в 2D, так и в 3D численные результаты согласуются с аналитическими решениями. При построении профиля скорости $u(z)$ в AZOV3D продемонстрировано идеальное соответствие теоретическому параболическому профилю (рис. 2, зеленым показан результат AZOV3D, черным — аналитическое решение).

Далее приведен пример, в котором исследуется влияние линеаризации на численное решение в сравнении с аналитическими профилями для того же длинного канала. Для этого примера используются модели AZOV3D, рассчитывающие донное трение в квадратичной формулировке.

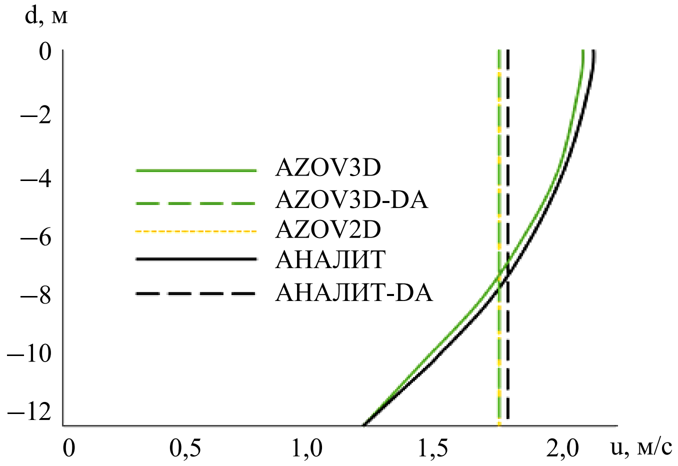


Рис. 2. Параболические профили скорости для установившегося течения с линеаризованным донным трением и постоянной вертикальной вихревой вязкостью

Сначала проводится моделирование с постоянной вихревой вязкостью, а затем тестируется другая модель турбулентности — модель длины перемешивания. Значения входных параметров, использованных для этого моделирования, приведены в таблице 3.

Таблица 3

Входные параметры для стационарного случая с квадратичным нижним трением

Фундаментальные параметры	Производные параметры
$i_\omega = 10^{-5}$ $d = 12$ м $\kappa_N = 0{,}086$ м $nz = 6$ $\kappa = 0{,}4$	$\Delta z_b = d/nz = 2$ м $c_{f1} = 0{,}002$ $c_{f2} = 0{,}0042$ $\nu_t = 0{,}22$ м²/с $u_* = 0{,}077$ м/с

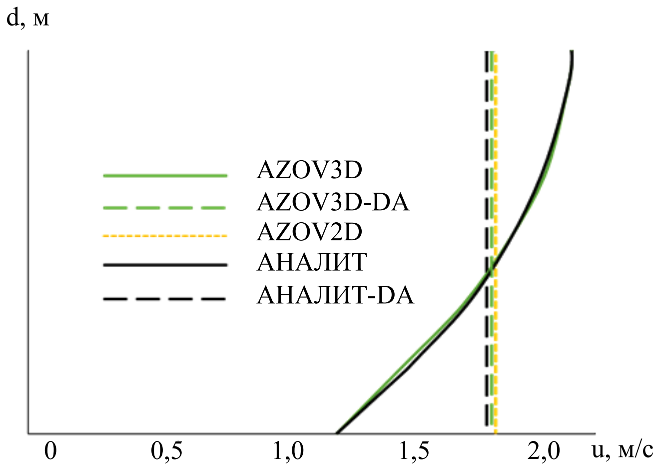


Рис. 3. Параболические профили скорости для установившегося течения с квадратичным придонным трением и постоянной вертикальной вихревой вязкостью

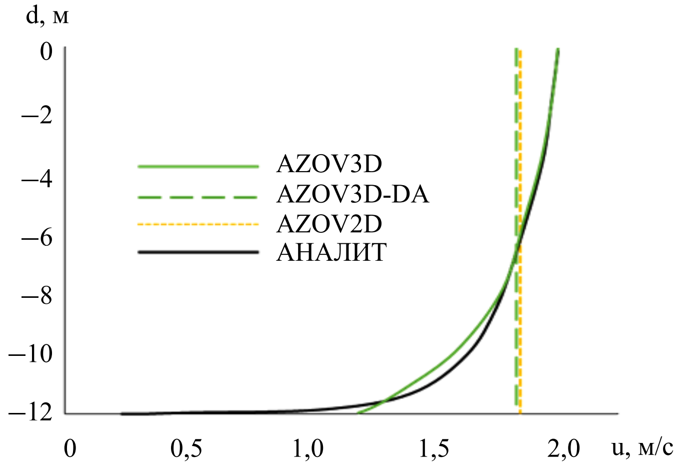


Рис. 4. Логарифмические профили скорости для установившегося течения с квадратичным придонным трением и вязкостью, определяемыми моделью длины перемешивания

Численные результаты сравниваются с теоретическим профилем скорости аналогично линеаризованному случаю и полностью согласуются с аналитическим решением, как показано на рис. 3 для случая с постоянной вихревой вязкостью и на рис. 4 — для случая с моделью длины перемешивания. Профили скоростей воспроизводятся правильно: в случае постоянной вихревой вязкости — параболический профиль скорости, а в случае модели длины перемешивания — логарифмический профиль. Как 2D, так и 3D-моделирование соответствуют теории.

И для линеаризованной формулировки донного трения, и для квадратичной доказано, что численные результаты для стационарного течения, как и ожидалось, демонстрируют большое сходство с аналитическими решениями. Поскольку высота поверхности намного меньше глубины воды, адвекцией можно пренебречь, так что численная характеристика воспроизводится в полном соответствии с теорией, обеспечивая хорошую отправную точку для нестационарного течения.

Численные результаты для нестационарного течения показывают хорошее соответствие теории. Кроме того, аналитический подход показал, что скорость, вычисленная с помощью 2D-модели, с большей вероятностью будет больше 3D-скорости, чем наоборот. Такое поведение, безусловно, отражено в приведенных выше числовых примерах, поскольку все рассчитанные соотношения больше единицы.

Обсуждение и заключение. Выполнены расчеты для стационарного и нестационарного (периодический поток) течений с использованием линеаризованного донного трения. Как в 2D, так и в 3D численные результаты согласуются с аналитическими решениями. При построении профиля скорости в AZOV3D показано идеальное соответствие теоретическому параболическому профилю.

Исследовано влияние линеаризации на численное решение в сравнении с аналитическими профилями с использованием моделей, рассчитывающих донное трение в квадратичной формулировке. В сочетании с квадратичным трением о дно изучаются две модели турбулентности: постоянная вихревая вязкость и модель длины перемешивания Прандтля. Численные результаты сравниваются с теоретическим профилем скорости аналогично линеаризованному случаю и согласуются с аналитическим решением, но в отличие от аналитических решений, численное моделирование имеет незначительные отклонения в долгосрочной перспективе. Получен параболический профиль скорости в случае постоянной вихревой вязкости, логарифмический — в случае модели длины перемешивания.

Для линеаризованной и квадратичной формулировок донного трения доказано, что численные результаты для случая стационарного течения демонстрируют большое сходство с аналитическими решениями, поскольку высота поверхности намного меньше глубины воды и адвекцией можно пренебречь. Численные результаты для нестационарного течения также показывают хорошее соответствие теории. Аналитический подход показал, что скорость, вычисленная с помощью 2D-модели, с высокой вероятностью будет больше 3D-скорости, что подтверждено числовыми данными. Исследование течений в различных моделях турбулентности позволяет определить влияние нелинейных эффектов на точность прогнозов в моделях вихревой вязкости и их применимость к различным условиям течения.

Список литературы

1. Alekseenko E., Roux B., Sukhinov A., et. al. Nonlinear hydrodynamics in a mediterranean lagoon.*Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2017;57(6):978–994. https://doi.org/10.5194/npg-20-189-2013

2. Battjes J., Labeur R. *Unsteady Flow in Open Channels*. Cambridge University Press. 2017. 312 p.

3. Bijlsma A.C., Uittenbogaard R.E., Blokland T. Horizontal large eddy simulation applied to stratified tidal flows. *Proceedings of the International Symposium on Shallow Flows*. Delft, Netherlands. 2003:559–566.

4. Breugem W.P. The influence of wall permeability on laminar and turbulent flows. *PhD thesis, Delft University of Technology.* 2004.

5. Chamecki M., Chor T., Yang D., et al. Material transport in the ocean mixed layer: recent developments enabled by large eddy simulations. *Rev. Geophys*. 2019;57:1338–1371. https://doi.org/10.1029/2019RG000655

6. Fischer H. *Mixing in Inland and Coastal Waters*. Academic Press. 1979. 483 p.

7. Gushchin V.A., Mitkin V.V., Rozhdestvenskaya T.I., et al. Numerical and experimental study of the fine structure of a stratified fluid flow over a circular cylinder. *Applied Mechanics and Technical Physics*. 2007;48:34–43.

8. Jirka G.H. Large scale flow structures and mixing processes in shallow flows. *Journal of Hydraulic Research.* 2001;39(6):567–573.

9. Lorentz H.A. Sketches of his work on slow viscous flow and some other areas in fluid mechanics and the background against which it arose. *Journal of Engineering Mathematics*.1996;30. https://doi.org/10.1007/BF00118820

10. Smit, P. B., Janssen, T. T., and Herbers, T. H. Nonlinear wave kinematics near the ocean surface. *J. Phys. Oceanogr.* 2017;47:1657–1673. https://doi.org/10.1175/JPO-D-16-0281.1

11. Protsenko S.V., Protsenko E.A., Kharchenko A.V. Comparison of hydrodynamic processes modeling results in shallow water bodies based on 3D model and 2D model averaged by depth. Computational Mathematics and Information Technologies (Russia). 2023; 6(2):49–63.

12. Vasil'ev V.S., Suhinov A.I. Precision Two-Dimensional Models of Shallow Water Bodies. Matematicheskoe modelirovanie. *Matematicheskoe modelirovanie*. 2003;15(10):17–34.

13. Vreugdenhil C.B. *Numerical Methods for Shallow-Water Flow.* Springer, Berlin, Heidelberg, New York. 1994. 262 p.

14. Белоцерковский О.М. *Турбулентность: новые подходы*. Москва: Наука; 2003. 285 с.

15. Монин А.С. Турбулентность и микроструктура в океане. *Успехи физических наук*. 1973;109(2):333–354.

References

1. Alekseenko E., Roux B., Sukhinov A., et al. Nonlinear hydrodynamics in a mediterranean lagoon. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2017;57(6):978–994. https://doi.org/10.5194/npg-20-189-2013

2. Battjes J., Labeur R. *Unsteady Flow in Open Channels*. Cambridge University Press. 2017. 312 p.

3. Bijlsma A.C., Uittenbogaard R.E., Blokland T. Horizontal large eddy simulation applied to stratified tidal flows. *Proceedings of the International Symposium on Shallow Flows*. Delft, Netherlands. 2003. p. 559–566.

4. Breugem W.P. The influence of wall permeability on laminar and turbulent flows. *PhD thesis, Delft University of Technology*. 2004.

5. Chamecki M., Chor T., Yang D., et al. Material transport in the ocean mixed layer: recent developments enabled by large eddy simulations. *Rev. Geophys*. 2019;57:1338–1371. https://doi.org/10.1029/2019RG000655

6. Fischer H. *Mixing in Inland and Coastal Waters*. Academic Press. 1979. 483 p.

7. Gushchin V.A., Mitkin V.V., Rozhdestvenskaya T.I., et al. Numerical and experimental study of the fine structure of a stratified fluid flow over a circular cylinder. *Applied Mechanics and Technical Physics*. 2007;48:34–43.

8. Jirka G.H. Large scale flow structures and mixing processes in shallow flows. *Journal of Hydraulic Research*. 2001;39(6):567–573.

9. Lorentz H.A. Sketches of his work on slow viscous flow and some other areas in fluid mechanics and the background against which it arose. *Journal of Engineering Mathematics*.1996;30. https://doi.org/10.1007/BF00118820

10. Smit P.B., Janssen T.T., Herbers T.H. Nonlinear wave kinematics near the ocean surface. *J. Phys. Oceanogr*. 2017;47:1657–1673. https://doi.org/10.1175/JPO-D-16-0281.1

11. Protsenko S.V., Protsenko E.A., Kharchenko A.V. Comparison of hydrodynamic processes modeling results in shal-low water bodies based on 3D model and 2D model averaged by depth. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023; 6(2):49–63.

12. Vasil'ev V.S., Suhinov A.I. Precision Two-Dimensional Models of Shallow Water Bodies. Matematicheskoe mode-lirovanie *Matematicheskoe modelirovanie*. 2003;15(10):17–34. (In Russ.).

13. Vreugdenhil C.B. *Numerical Methods for Shallow-Water Flow*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York. 1994. 262 p.

14. Belotserkovsky O.M. Turbulence: new approaches. Moscow: Nauka, 2003. (In Russ.).

15. Monin A.S. Turbulence and microstructure in the ocean. *The successes of the physical sciences*. 1973;109(2):333–354. (In Russ.).

Поступила в редакцию 14.10.2023
Поступила после рецензирования 24.11.2023
Принята к публикации 28.11.2023

Об авторах:

Проценко Елена Анатольевна, доцент кафедры математики, ведущий научный сотрудник, Таганрогский институт им. А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (347936, РФ, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), кандидат физико-математических наук, ORCID, eapros@rambler.ru

Проценко Софья Владимировна, доцент кафедры математики, научный сотрудник, Таганрогский институт им. А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (347936, РФ, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), кандидат физико-математических наук, ORCID, rab5555@rambler.ru

Заявленный вклад соавторов:
Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Конфликт интересов
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Received 14.10.2023
Revised 24.11.2023
Accepted 28.11.2023

About the Authors:

Elena A. Protsenko, Associate Professor of the Department of Mathematics, Leading Researcher, A.P. Chekhov Taganrog Institute (branch) Rostov State University of Economics (48, Initiative St., Taganrog, 347936, RF), Candidate of Physical and Mathematical Sciences, ORCID, eapros@rambler.ru

Sofia V. Protsenko, Associate Professor of the Department of Mathematics, Researcher, A.P. Chekhov Taganrog Institute (branch) Rostov State University of Economics (48, Initiative St., Taganrog, 347936, RF), Candidate of Physical and Mathematical Sciences, ORCID, rab5555@rambler.ru

Claimed contributor-ship:
All authors have made an equivalent contribution to the preparation of the publication.

Conflict of interest statement
The authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
MATHEMATICAL MODELLING

Check for updates

УДК 519.6
https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-39-46

Научная статья

Математическая модель процесса распространения нефтяных загрязнений в прибрежных морских системах

В.В. Сидорякина[1,2]

[1]Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация
[2]Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), г. Таганрог, Российская Федерация

✉cvv9@mail.ru

Аннотация

Введение. Негативные последствия, которые могут возникнуть по причине аварийного разлива нефти, носят, как правило, трудно учитываемый характер, поскольку нарушают многие естественные процессы и взаимосвязи внутри экосистемы водоёма. После разлива нефти на водной поверхности довольно быстро образуется плотный слой нефтяной пленки, препятствующий доступу воздуха и света (после разлива одной тонны нефти через 10 минут на поверхности водоёма образуется нефтяное пятно толщиной около 10 мм). Вследствие этого страдает животный и растительный мир водоема. Если авария произошла в прибрежной зоне неподалеку от населенного пункта, то токсический эффект усиливается, потому что нефть/нефтепродукты в сочетании с различными загрязнителями человеческого происхождения могут образовывать опасные соединения. Для территорий повышенного риска (основных маршрутов транспортировки нефтепродуктов, мест их бункеровки и выгрузки и др.) необходимо прогнозировать различные сценарии распространения и трансформации нефтяных загрязнений с учетом их многофракционного состава, турбулентной диффузии и адвективного переноса, деструкции под воздействием природных факторов и т. д. Целью работы является построение линеаризованной нестационарной пространственно-неоднородной математической модели транспорта и трансформации нефтяных загрязнений с учетом перечисленных выше факторов.

Материалы и методы. Попавшая в водную среду нефть представляется в виде поверхностной и взвешенной в водной толще субстанции. Нефть подвержена множеству трансформационных процессов: адвекции, гравитационному растеканию, эмульгированию, диспергированию, растворению, биодеградации и др. Исследование данных процессов и их прогнозирование, как правило, требует разработки математического и программного обеспечения. Как показывает мировой опыт и объективный анализ физической картины процессов, при математическом и численном моделировании следует отталкиваться от системы уравнений Навье-Стокса и уравнений неразрывности, а также вводить дополнительные физические допуски геометрии потока, приемлемые и обоснованные в каждом конкретном случае. С учетом данных соображений выполнено математическое моделирование процесса распространения нефти в прибрежных морских системах.

Результаты исследования. Создана математическая модель процесса распространения нефти, учитывающая её многофракционный состав. Предполагается, что фракции нефти могут находиться в воде в растворенном или нерастворенном состояниях. При моделировании учитываются такие физические характеристики частиц как плотность, ускорение свободного падения, молярная масса и др. После линеаризации рассматриваемой задачи были построены разностные схемы, использующие расширенные равномерные сетки.

Обсуждение и заключение. Загрязнение, вызванное разливом нефти в водной среде, происходит очень быстро и нередко является весьма разрушительным. В данной ситуации важным фактором будет оперативное реагирование, играющее решающую роль для минимизации его негативных последствий. Моделирование процесса разлива нефти может быть полезным для определения местоположения и состояния нефти в море, проведения риск-анализа распространения субстанции и разработке мер по локализации и ликвидации загрязнения.

Ключевые слова: прибрежные морские системы, аварийный разлив нефти, нефтяной слик, многофракционный состав нефти, концентрация частиц нефти, математическое моделирование, аппроксимация непрерывной модели

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00509. https://rscf.ru/project/23-21-00509

Для цитирования. Сидорякина В.В. Математическая модель процесса распространения нефтяных загрязнений в прибрежных морских системах. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):39–46. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-39-46

Original article

Mathematical Model of Spreading Oil Pollution in Coastal Marine Systems

Valentina V. Sidoryakina[1,2]

[1]Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

[2]Taganrog Institute named after A.P. Chekhov (branch) of RSUE, Taganrog, Russian Federation

cvv9@mail.ru

Abstract

Introduction. The negative consequences that may arise due to an accidental oil spill are difficult to account for, since they disrupt many natural processes and relationships within the ecosystem of the reservoir. After an oil spill, a dense layer of oil film forms on the water surface quite quickly, preventing access to air and light (after a spill of one ton of oil, an oil slick about 10 mm thick forms on the surface of the reservoir after 10 minutes). As a result, the fauna and flora of the reservoir suffer. If the accident occurred in the coastal zone near a populated area, then the toxic effect is enhanced, because petroleum products in combination with various pollutants of human origin can form dangerous compounds. For high-risk areas (the main routes of transportation of petroleum products, places of their bunkering and unloading, etc.), it is necessary to predict various scenarios for the spread and transformation of oil pollution, taking into account their multifractional composition, turbulent diffusion and advective transport, destruction under the influence of natural factors. The aim of the work is to build a linearized non-stationary spatially heterogeneous mathematical model of transport and transformation of oil pollution, taking into account the above factors.

Materials and Methods. The oil that has entered the aquatic environment is represented as a surface and suspended substance in the water column. Oil is subject to a variety of transformation processes: advection, gravitational spreading, emulsification, dispersion, dissolution, biodegradation, etc. The study of these processes and their forecasting, as a rule, requires the development of mathematical and software. In mathematical and numerical modeling, one should start from the system of Navier-Stokes equations and continuity equations, as well as introduce additional physical tolerances of the flow geometry, acceptable and justified in each case, as shown by world experience and objective analysis of the physical picture of processes. Mathematical modeling of the oil distribution process in coastal marine systems has been performed.

Results. Mathematical oil distribution model has been created, taking into account its multifractional composition. It is assumed that oil fractions can be in water in dissolved or undissolved states. The modeling takes into account such physical characteristics of particles as density, acceleration of gravity, molar mass, etc. After the linearization of the problem under consideration, difference schemes using extended uniform grids were constructed.

Discussion and Conclusion. Pollution caused by an oil spill in the aquatic environment occurs very quickly and is often very destructive. An important factor will be prompt response, which plays a crucial role in minimizing its negative consequences. Modeling of the oil spill process can be useful for determining the location and condition of oil at sea, conducting a risk analysis of the spread of the substance and developing measures to localize and eliminate pollution.

Keywords: coastal marine systems, emergency oil spill, oil slick, multi-fraction composition of oil, concentration of oil particles, mathematical modelling, continuous model approximation

Funding information. The study was supported by the Russian Science Foundation grant no. 23-21-00509. https://rscf.ru/project/23-21-00509

For citation. Sidoryakina V.V. Mathematical model of spreading oil pollution in coastal marine systems. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):39–46. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-39-46

Введение. В последнее время во всем мире наблюдается рост объемов торговли нефтью и нефтепродуктами, причем значительную долю в их транспортировке занимает морское судоходство. Для обеспечения экологической безопасности водных путей и находящейся вблизи инфраструктуры на протяжении всей перевозки товара соблюдаются определенные ограничения и меры. Несмотря на это, за последние 50 лет в мире зафиксировано 5,86 миллиона тонн нефти, разлитой в море. Причем около 80% этой нефти разлито на расстоянии не более 10 морских миль от берега [1]. Негативные последствия нефтяного загрязнения водоемов могут быть существенно уменьшены при своевременной локализации и ликвидации загрязнения. Для этих целей необходим разработанный комплекс мер для использования их службами быстрого реагирования. Данный комплекс мер, среди прочего, должен содержать некоторый аппарат, позволяющий осуществлять прогноз распределения нефтяных загрязнений. Эти прогнозы требуют привлечения методов математического и численного моделирования [2–4].

В России и за рубежом исследования в этой области проводятся такими научными центрами как институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН (Россия), институт водных проблем РАН (Россия), Государственный гидрологический институт (Россия), Китайский нефтяной университет и Институт океанологии Китайской Академии наук в Циндао (Китай), университеты Тасмании и Маккуори (Австралия), мемориальный университет Ньюфаундленда (Канада) и др. [5–9]. Накопление новых знаний и экспериментальных данных побуждает к получению новых результатов по интересующей нас проблеме.

В настоящей работе представлена математическая модель распределения нефтяных загрязнений, учитывающая следующие физические параметры и процессы: многофракционный состав нефти, турбулентную диффузию и адвективный перенос, испарение, деструкцию под воздействием микроорганизмов и др. Данная математическая модель скомплексирована с гидродинамической моделью, описанной, например, в работах [10, 11]. Для начально-краевой задачи, моделирующей рассматриваемые процессы, построены разностные схемы на сетках, имеющих неравномерные шаги в приграничных ячейках (вблизи границы).

Материалы и методы

Постановка задачи. Будем использовать прямоугольную декартовую систему координат $Oxyz$. Пусть $\Omega \subset R^3$ — расчетная область, $\Omega = \{0 < x < L_x, 0 < y < L_y, 0 < z < L_z\}$. Рассматриваем случай выброса нефти в течение короткого временного промежутка (одномоментный выброс) в рассматриваемую область. Поступившая в область Ω нефть на свободной поверхности Ω_0 образует пятно. Область покрытия первоначальным неразорвавшимся нефтяным пятном обозначим σ.

Заметим, что в начально-краевой задаче, моделирующей распространение нефтяного загрязнения, ряд процессов рассматривается на поверхности водоема и потому здесь используется двумерная постановка. Процесс распространения и трансформации нефти в прибрежной зоне опишем следующими уравнениями [12]:

– уравнения для концентрации фракции номера α нефти, находящейся в поверхностном слое:

$$\frac{\partial c_\alpha}{\partial t} + u\frac{\partial c_\alpha}{\partial x} + v\frac{\partial c_\alpha}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_h^*\frac{\partial c_\alpha}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_h^*\frac{\partial c_\alpha}{\partial y}\right) - \left(\frac{K_E P_\alpha}{R\theta} + K_D S_\alpha\right)X_\alpha m_\alpha - \frac{\omega_\alpha c_\alpha}{q\left(c_\alpha + K_s\right)}M, \quad (1)$$

$$c_\alpha\Big|_{t=0} = \begin{cases} 0, & (x,y)\notin\sigma, \\ c_{\alpha 0}, & (x,y)\in\sigma; \end{cases} \quad \frac{\partial c_\alpha}{\partial \vec{n}} = 0, \ (x,y)\in\gamma; \quad (2)$$

– уравнения для концентрации микроорганизмов — деструкторов нефти:

$$\frac{\partial M}{\partial t} + u\frac{\partial M}{\partial x} + v\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_h\frac{\partial M}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_h\frac{\partial M}{\partial y}\right) + \frac{\omega_\alpha c_\alpha}{c_\alpha + K_s}M - \lambda M, \quad (3)$$

$$M\Big|_{t=0} = M_0, \quad \frac{\partial M}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (x,y)\in\gamma; \quad (4)$$

– уравнения для концентрации фракции номера α нефти, находящейся в растворенном состоянии:

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t} + u\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x} + v\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y} + w\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_h\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_h\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_v\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial z}\right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial z} = K_D S_\alpha X_\alpha m_\alpha, \ (x,y,z)\in\Omega_0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (x,y,z)\in\Omega\setminus\Omega_0. \quad (7)$$

В уравнениях (1)–(7) используются следующие обозначения: u, v, w — компоненты вектора скорости движения водной среды; c_α — концентрация фракции номера α нефти, находящейся в поверхностном слое, $\alpha = \overline{1, A'}$; $\mu_h^* = \mu_h + (\rho_\alpha - \rho_w)gh^3/\mu_h$ (μ_h — коэффициент горизонтальной диффузии частиц, g — ускорение свободного падения, $\rho_\alpha \rho_w$ — плотности частиц фракции α и воды соответственно, h — толщина пленки нефти); K_E — коэффициент массопереноса для углеводорода, $K_E = 2{,}5 \cdot 10^{-3}U^{0,78}$ (U — скорость ветра относительно воды); P_α — давление паров частиц фракции α; R — универсальная газовая постоянная, $R = 8{,}314$; θ — температура окружающей среды над поверхностью пятна; K_D — коэффициент массопереноса растворения; S_α — растворимость в воде частиц фракции α, $\alpha = \overline{A'+1, A}$; X_α — молярная доля частиц фракции α; m_α — значение молярной массы частиц фракции α; q — значение коэффициента пропорциональности между количеством микроорганизмов и поглощенным субстратом; M — концентрация микроорганизмов; ω_α — значение максимальной скорости роста микроорганизмов при питании частицами фракции α; K_S — значение коэффициент насыщения; λ — скорость отмирания микроорганизмов; φ_α — концентрация фракции α нефти, находящейся в растворенном состоянии, $\alpha = \overline{A'+1, A}$; μ_v — коэффициент вертикальной диффузии; $\vec{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности, описывающей границу расчетной области; γ — область, описывающая поверхностные слои водоема.

Математическая модель распространения нефтяного загрязнения получается при использовании суперпозиции результатов решения задачи (1)–(7) для каждой фракции.

Результаты исследования.

Линеаризация задачи. На временном отрезке $0 < t \le T$ строится равномерная сетка с шагом τ: $\omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 1,...,N;\ N\tau \equiv T\}$. На временной сетке ω_τ выполнена линеаризация рассматриваемых задач. Линеаризация выполнена таким образом, что в уравнении (1), определяющем концентрацию фракции α на данном временном слое, использовались концентрации микроорганизмов на предыдущем временном слое.

На каждом шаге времени $n = 1,2,...,N$, $t_{n-1} < t \le t_n$ решениями уравнений (1)–(3) пусть будут функции $\tilde{c}_\alpha^n$, $\tilde{M}^n$, $\tilde{\varphi}_\alpha^n$, $n = 1,2,..., N+1$ соответственно. В этом случае линеаризованный аналог рассматриваемой задачи для всех интервалов $t_{n-1} < t \le t_n$, $n = 1,2,...,N$ запишется в виде:

$$\frac{\partial \tilde{c}_\alpha^n}{\partial t} + u^n \frac{\partial \tilde{c}_\alpha^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial \tilde{c}_\alpha^n}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_h^* \frac{\partial \tilde{c}_\alpha^n}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_h^* \frac{\partial \tilde{c}_\alpha^n}{\partial y}\right) - \left(\frac{K_E P_\alpha}{R\theta} + K_D S_\alpha\right) X_\alpha m_\alpha - \frac{\mu_\alpha \tilde{c}_\alpha^n}{q\left(\tilde{c}_\alpha^n + K_s\right)} \tilde{M}^{n-1}, \tag{8}$$

$$\begin{gathered} \tilde{c}_\alpha^1\Big|_{t=0} = \begin{cases} 0, & (x,y) \notin \sigma, \\ c_{\alpha 0}, & (x,y) \in \sigma, \end{cases} \\ \tilde{c}_\alpha^n(x,y,t_{n-1}) = \tilde{c}_\alpha^{n-1}(x,y,t_{n-1}),\ n = 2,...,N,\ (x,y) \in \gamma, \end{gathered} \tag{9}$$

$$\frac{\partial \tilde{c}_\alpha^n}{\partial \vec{n}} = 0,\ (x,y) \in \gamma; \tag{10}$$

$$\frac{\partial \tilde{M}^n}{\partial t} + u^n \frac{\partial \tilde{M}^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial \tilde{M}^n}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_h \frac{\partial \tilde{M}^n}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_h \frac{\partial \tilde{M}^n}{\partial y}\right) + \frac{\mu_\alpha \tilde{c}_\alpha^{n-1}}{\tilde{c}_\alpha^{n-1} + K_s} \tilde{M}^n - \lambda \tilde{M}^n, \tag{11}$$

$$\begin{gathered} \tilde{M}^1\Big|_{t=0} = M_0, \\ \tilde{M}^n(x,y,t_{n-1}) = \tilde{M}^n(x,y,t_{n-1}),\ n = 2,...,N,\ (x,y) \in \gamma, \end{gathered} \tag{12}$$

$$\frac{\partial \tilde{M}^n}{\partial \vec{n}} = 0,\ (x,y) \in \gamma; \tag{13}$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_\alpha^n}{\partial t} + u^n \frac{\partial \tilde{\varphi}_\alpha^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial \tilde{\varphi}_\alpha^n}{\partial y} + w^n \frac{\partial \tilde{\varphi}_\alpha^n}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_h \frac{\partial \tilde{\varphi}_\alpha^n}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_h \frac{\partial \tilde{\varphi}_\alpha^n}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_v \frac{\partial \tilde{\varphi}_\alpha^n}{\partial z}\right), \tag{14}$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_\alpha^n}{\partial z} = K_D S_\alpha X_\alpha m_\alpha,\ (x,y,z) \in \Omega_0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_\alpha^n}{\partial \vec{n}} = 0,\ (x,y,z) \in \Omega \setminus \Omega_0. \tag{16}$$

Если $n = 1$, то в качестве $\tilde{c}_\alpha^1(x,y,0)$ достаточно взять функции начальных условий из формул (9). Если $n = 2$, то из формул (12) берется функция начального условия $\tilde{M}^1(x,y,0)$, подставляется в уравнение (8) и далее проводится решение задач (8)–(10) и (14)–(16) на промежутке $t_1 < t \le t_2$, в ходе чего находятся значения концентраций $\tilde{c}_\alpha^2(x,y,t_1)$, $\tilde{\varphi}_\alpha^2(x,y,t_1)$. В свою очередь, уравнение (11), содержащее в правой части функцию $\tilde{c}_\alpha^1(x,y,0)$, имеет решением $\tilde{M}^2(x,y,t_1)$. При продолжении этого процесса для случаев $n = 3,...,N$ будем придерживаться описанной логики. Функции $\tilde{c}_\alpha^n(x,y,t_{n-1}) = \tilde{c}_\alpha^{n-1}(x,y,t_{n-1})$ и $\tilde{\varphi}_\alpha^n(x,y,z,t_{n-1}) = \tilde{\varphi}_\alpha^{n-1}(x,y,z,t_{n-1})$ определяются при решении задач (8)–(10) и (14)–(16) на промежутке $t_{n-1} < t \le t_{n-2}$, $n = 3,...,N$ из предположения, что известными являются функции $\tilde{M}^{n-1}(x,y,t_{n-1})$ для предыдущего временного промежутка $t_{n-2} < t \le t_{n-1}$.

Разностная схема для линеаризованной задачи. Члены, описывающие адвективный перенос частиц, из уравнений (8), (11) и (14) имеют вид в симметричной форме [13]:

$$\frac{1}{2}\left[u \frac{\partial \tilde{c}_\alpha^n}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{c}_\alpha^n}{\partial y} + \frac{\partial\left(u \tilde{c}_\alpha^n\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(v \tilde{c}_\alpha^n\right)}{\partial y}\right],$$

$$\frac{1}{2}\left[u \frac{\partial \tilde{M}^{n-1}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{M}^{n-1}}{\partial y} + \frac{\partial\left(u \tilde{M}^{n-1}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(v \tilde{M}^{n-1}\right)}{\partial y}\right],$$

$$\frac{1}{2}\left[u \frac{\partial \tilde{\varphi}_\alpha^n}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{\varphi}_\alpha^n}{\partial y} + w \frac{\partial \tilde{\varphi}_\alpha^n}{\partial z} + \frac{\partial\left(u \tilde{\varphi}_\alpha^n\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(v \tilde{\varphi}_\alpha^n\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(w \tilde{\varphi}_\alpha^n\right)}{\partial z}\right],$$

что позволяет в результате дискретизации построить разностный оператор адвективного переноса, обладающий свойством кососимметричности [14, 15].

В области $\overline{G}$ построим связную сетку $\overline{\omega}_h$, $\overline{\omega}_h = \overline{\omega}_x \times \overline{\omega}_y \times \overline{\omega}_z$, где $\overline{\omega}_x = \{x_i : x_i = ih_x; i = 0,1,...,N_x; N_x h_x \equiv L_x\}$, $\overline{\omega}_y = \{y_j : y_j = jh_x; j = 0,1,...,N_y; N_y h_y \equiv L_y\}$, $\overline{\omega}_z = \{z_k : z_k = kh_x; k = 0,1,...,N_y; N_z h_z \equiv L\}$. Множество внутренних узлов сеток $\overline{\omega}_h, \overline{\omega}_x, \overline{\omega}_y, \overline{\omega}_z$ будем обозначать, соответственно, как $\omega_h \omega_x \omega_y \omega_z$. На пространственно-временной сетке

$\omega_{\tau h} = \omega_\tau \times \omega_h$ аппроксимируем задачу (8)–(16) с заданием в узлах, сдвинутых на половину скоростей шага сетки и по соответствующему координатному направлению.

Далее символ «–» сверху над функциями c_α^n, $c_\alpha^{n-1}, \varphi_\alpha^n, \varphi_\alpha^{n-1}$ и M^n, M^{n-1} будет означать их принадлежность к классу сеточных функций. Функции $\tilde{c}_\alpha^n$, $\tilde{\varphi}_\alpha^n, \tilde{M}^n$ рассматриваются как достаточно гладкие функции непрерывных переменных.

После аппроксимации во внутренних узлах сетки $\bar{\omega}_h$ уравнения (8), (11) и (14) примут вид:

$$\begin{gathered}
\frac{\bar{c}_\alpha^n - \bar{c}_\alpha^{n-1}}{\tau} + \frac{1}{2h_x}\Big(u^n\big(x_i + 0{,}5h_x, y_j\big)\bar{c}_\alpha^n\big(x_i + h_x, y_j\big) - u^n\big(x_i - 0{,}5h_x, y_j\big)\bar{c}_\alpha^n\big(x_i - h_x, y_j\big)\Big) + \\
+ \frac{1}{2h_y}\Big(v^n\big(x_i, y_j + 0{,}5h_y\big)\bar{c}_\alpha^n\big(x_i, y_j + h_y\big) - v^n\big(x_i, y_j - 0{,}5h_y\big)\bar{c}_\alpha^n\big(x_i, y_j - h_y\big)\Big) = \\
= \frac{1}{h_x^2}\Big(\mu_h^*\big(x_i + 0{,}5h_x, y_j\big)\Big(\bar{c}_\alpha^n\big(x_i + h_x, y_j\big) - \bar{c}_\alpha^n\big(x_i, y_j\big)\Big) - \mu_h^*\big(x_i - 0{,}5h_x, y_j\big)\Big(\bar{c}_\alpha^n\big(x_i, y_j\big) - \bar{c}_\alpha^n\big(x_i + h_x, y_j\big)\Big)\Big) + \\
+ \frac{1}{h_y^2}\Big(\mu_h^*\big(x_i, y_j + 0{,}5h_y\big)\Big(\bar{c}_\alpha^n\big(x_i, y_j + h_y\big) - \bar{c}_\alpha^n\big(x_i, y_j\big)\Big) - \mu_h^*\big(x_i, y_j - 0{,}5h_y\big)\Big(\bar{c}_\alpha^n\big(x_i, y_j\big) - \bar{c}_\alpha^n\big(x_i, y_j - h_y\big)\Big)\Big) - \\
- \left(\frac{K_E P_\alpha}{R\theta} + K_D S_\alpha\right) X_\alpha m_\alpha - \frac{\omega_\alpha \bar{c}_\alpha^n\big(x_i, y_j\big)}{q\left(\bar{c}_\alpha^n\big(x_i, y_j\big) + K_s\right)}\bar{M}^{n-1}\big(x_i, y_j\big);
\end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\bar{M}^n - \bar{M}^{n-1}}{\tau} + \frac{1}{2h_x}\Big(u^n\big(x_i + 0{,}5h_x, y_j\big)\bar{M}^n\big(x_i + h_x, y_j\big) - u^n\big(x_i - 0{,}5h_x, y_j\big)\bar{M}^n\big(x_i - h_x, y_j\big)\Big) + \\
+ \frac{1}{2h_y}\Big(v^n\big(x_i, y_j + 0{,}5h_y\big)\bar{M}^n\big(x_i, y_j + h_y\big) - v^n\big(x_i, y_j - 0{,}5h_y\big)\bar{M}^n\big(x_i, y_j - h_y\big)\Big) = \frac{1}{h_x^2}\Big(\mu_h^*\big(x_i + 0{,}5h_x, y_j\big)\cdot \\
\cdot\Big(\bar{M}^n\big(x_i + h_x, y_j\big) - \bar{M}^n\big(x_i, y_j\big)\Big) - \mu_h^*\big(x_i - 0{,}5h_x, y_j\big)\Big(\bar{M}^n\big(x_i, y_j\big) - \bar{M}^n\big(x_i + h_x, y_j\big)\Big)\Big) + \\
+ \frac{1}{h_y^2}\Big(\mu_h^*\big(x_i, y_j + 0{,}5h_y\big)\Big(\bar{M}^n\big(x_i, y_j + h_y\big) - \bar{M}^n\big(x_i, y_j\big)\Big) - \mu_h^*\big(x_i, y_j - 0{,}5h_y\big); \\
\cdot\Big(\bar{M}^n\big(x_i, y_j, 0\big) - \bar{M}^n\big(x_i, y_j - h_y\big)\Big)\Big) + \frac{\omega_\alpha \bar{c}_\alpha^{n-1}\big(x_i, y_j\big)}{\bar{c}_\alpha^{n-1}\big(x_i, y_j\big) + K_s}\bar{M}^n\big(x_i, y_j\big) - \lambda\bar{M}^n\big(x_i, y_j\big);
\end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\bar{\varphi}_\alpha^n - \bar{\varphi}_\alpha^{n-1}}{\tau} + \frac{1}{2h_x}\Big(u^n\big(x_i + 0{,}5h_x, y_j, z_k\big)\bar{\varphi}_\alpha^n\big(x_i + h_x, y_j, z_k\big) - u^n\big(x_i - 0{,}5h_x, y_j, z_k\big)\bar{\varphi}_\alpha^n\big(x_i - h_x, y_j, z_k\big)\Big) + \\
+ \frac{1}{2h_y}\Big(v^n\big(x_i, y_j + 0{,}5h_y, z_k\big)\bar{\varphi}_\alpha^n\big(x_i, y_j + h_y, z_k\big) - v^n\big(x_i, y_j - 0{,}5h_y, z_k\big)\bar{\varphi}_\alpha^n\big(x_i, y_j - h_y, z_k\big)\Big) + \\
+ \frac{1}{2h_z}\Big(w^n\big(x_i, y_j, z_k + 0{,}5h_z\big)\bar{\varphi}_\alpha^n\big(x_i, y_j, z_k + h_z\big) - w^n\big(x_i, y_j, z_k - 0{,}5h_z\big)\bar{\varphi}_\alpha^n\big(x_i, y_j, z_k - h_z\big)\Big) = \\
= \frac{1}{h_x^2}\Big(\mu_h\big(x_i + 0{,}5h_x, y_j, z_k\big)\Big(\bar{\varphi}_\alpha^n\big(x_i + h_x, y_j, z_k\big) - \bar{\varphi}_\alpha^n\big(x_i, y_j, z_k\big)\Big) - \mu_h\big(x_i - 0{,}5h_x, y_j, z_k\big); \\
\big(x_i, y_j, z_k\big) - \bar{\varphi}_\alpha^n\big(x_i + h_x, y_j, z_k\big)\Big)\Big) + \frac{1}{h_y^2}\Big(\mu_h\big(x_i, y_j + 0{,}5h_y, z_k\big)\Big(\bar{\varphi}_\alpha^n\big(x_i, y_j + h_y, z_k\big) - \bar{\varphi}_\alpha^n\big(x_i, y_j, z_k\big)\Big) - \\
, y_j - 0{,}5h_y, z_k\big)\Big(\bar{\varphi}_\alpha^n\big(x_i, y_j, z_k\big) - \bar{\varphi}_\alpha^n\big(x_i, y_j - h_y, z_k\big)\Big)\Big) + \frac{1}{h_z^2}\Big(\mu_v\big(x_i, y_j, z_k + 0{,}5h_z\big)\Big(\bar{\varphi}_\alpha^n\big(x_i, y_j, z_k + h_z\big) - \\
- \bar{\varphi}_\alpha^n\big(x_i, y_j, z_k\big)\Big) - \mu_v\big(x_i, y_j, z_k - 0{,}5h_z\big)\Big(\bar{\varphi}_\alpha^n\big(x_i, y_j, z_k\big) - \bar{\varphi}_\alpha^n\big(x_i, y_j, z_k - h_z\big)\Big)\Big).
\end{gathered} \tag{19}$$

К разностным уравнениям (17)–(19) необходимо добавить начальные условия для $(x, y, z) \in \omega_h$, а также аппроксимацию граничных условий.

Для задания граничных условий удобно ввести расширенную сетку:

$$\bar{\omega}^* = \big\{\big(x_i, y_j, z_k\big), i = -1, 0, ..., N_x + 1;\ j = -1, 0, ..., N_y + 1;\ k = -1, 0, ..., N_z + 1;$$

$$x_i = ih_x;\ y_j = jh_j;\ z_k = kh_z;\ N_x h_x = L_x;\ N_y h_y = L_y;\ N_z h_z = L_z\big\}.$$

Будем считать известными значения компонент вектора скоростей водной среды в узлах сетки $\overline{\omega}^* \setminus \overline{\omega}_h$ с дробными значениями индексов, например, $u^n(-0{,}5h_x, y_j, z_k)$, $u^n(L_x + 0{,}5h_x, y_j, z_k)$, $v^n(x_i, -0{,}5\,h_y, z_k)$, $v^n(x_i, L_y + 0{,}5\,h_y, z_k)$, $w^n(x_i, y_j, -0{,}5\,h_z)$, $w^n(x_i, y_j, L_z + 0{,}5\,h_z)$ и т. д.

Аппроксимацию граничных условий проведем на примере условия (15). Аналогично проводятся рассуждения для граничных условий (10), (13) и (16).

Будем предполагать, что $\overline{\varphi}^n_\alpha(x, y, z) = 0$, если $(x, y, z) \in \overline{\omega}^* \setminus \overline{\omega}_h$. Для тех узлов сетки $\overline{\omega}^* \setminus \overline{\omega}_h$, которые находятся вне расчётной области, значение компонент вектора скорости водной среды предполагается равным нулю.

Формально запишем выражение:

$$C_z\left(\overline{\varphi}^n_\alpha\right)\Big|_{z=0} = \frac{1}{2h_z}\left(w^n\left(x_i, y_j, 0{,}5h_z\right)\overline{\varphi}^n_\alpha\left(x_j, y_j, h_z\right) - w^n\left(x_i, y_j, -0{,}5h_z\right)\overline{\varphi}^n_\alpha\left(x_j, y_j, -h_z\right)\right), \tag{17}$$

которое можно рассматривать как разностную аппроксимацию конвективного члена при $z = 0$.

Наряду с (17) можно для граничного условия (15) записать равенство:

$$\frac{\overline{\varphi}^n_\alpha\left(x_j, y_j, h_z\right) - \overline{\varphi}^n_\alpha\left(x_j, y_j, -h_z\right)}{2h_z} = K_D S_\alpha X_\alpha m_\alpha,$$

из которого получим:

$$\overline{\varphi}^n_\alpha\left(x_j, y_j, h_z\right) = \overline{\varphi}^n_\alpha\left(x_j, y_j, -h_z\right) + 2h_z K_D S_\alpha X_\alpha m_\alpha. \tag{18}$$

Из выражений (17) и (18) получаем:

$$C_z\left(\overline{\varphi}^n_\alpha\right)\Big|_{z=0} \equiv \frac{1}{2h_z}\left(w^n\left(x_i, y_j, 0{,}5h_z\right)\left(\overline{\varphi}^n_\alpha\left(x_i, y_j, -h_z\right) + 2h_z K_D S_\alpha X_\alpha m_\alpha\right) - w^n\left(x_i, y_j, -0{,}5h_z\right)\overline{\varphi}^n_\alpha\left(x_j, y_j, -h_z\right)\right). \tag{19}$$

Далее рассмотрим формально на расширенной сетке $\overline{\omega}^*$ равенство

$$D_z\left(\overline{\varphi}^n_\alpha\right)\Big|_{z=0} \equiv \frac{1}{h_z}\left(\mu_v\left(x_i, y_j, 0{,}5h_z\right)\frac{\overline{\varphi}^n_\alpha\left(x_i, y_j, h_z\right) - \overline{\varphi}^n_\alpha\left(x_i, y_j, 0\right)}{h_z} - \mu_v\left(x_i, y_j, -0{,}5h_z\right)\frac{\overline{\varphi}^n_\alpha\left(x_i, y_j, 0\right) - \overline{\varphi}^n_\alpha\left(x_i, y_j, -h_z\right)}{h_z}\right). \tag{20}$$

Поскольку на свободной невозмущенной поверхности водоема отсутствует турбулентная диффузия, то можем считать, что $\mu_v\,(x_i, y_j, -0{,}5\,h_z) \equiv 0$. С учетом этого из выражения (20) получаем

$$D_z\left(\overline{\varphi}^n_\alpha\right)\Big|_{z=0} \equiv \frac{1}{h_z^2}\mu_v\left(x_i, y_j, 0{,}5h_z\right)\left(\overline{\varphi}^n_\alpha\left(x_i, y_j, h_z\right) - \overline{\varphi}^n_\alpha\left(x_i, y_j, 0\right)\right). \tag{21}$$

Из (18) и (21) находим

$$D_z\left(\overline{\varphi}^n_\alpha\right)\Big|_{z=0} \equiv \frac{1}{h_z^2}\mu_v\left(x_i, y_j, 0{,}5h_z\right)\left(\overline{\varphi}^n_\alpha\left(x_j, y_j, -h_z\right) - \overline{\varphi}^n_\alpha\left(x_i, y_j, 0\right) + 2h_z K_D S_\alpha X_\alpha m_\alpha\right). \tag{22}$$

Обсуждение и заключение. В работе представлена математическая модель процесса распространения и трансформации нефтяных загрязнений в прибрежных морских системах. Данная модель учитывает многофракционный состав нефтяных загрязнений, турбулентную диффузию и адвективный перенос, деструкцию частиц нефти под воздействием микроорганизмов и т. д. Аппроксимация предложенной модели выполнена со вторым порядком точности относительно шагов пространственной сетки. Вопросы, связанные с исследованием монотонности построенной разностной схемы и её сходимости к решению исходной начально-краевой задачи являются предметом дальнейших исследований автора.

Список литературы

1. Ülker D., Burak S., Balas L., et al. Mathematical modelling of oil spill weathering processes for contingency planning in Izmit Bay. *Regional Studies in Marine Science*. 2022;50:102155. https://doi.org/10.1016/j.rsma.2021.102155

2. Chen H., An W., You Y., et al. Numerical study of underwater fate of oil spilled from deepwater blowout. *Ocean Engineering*. 2015;110(A):227–243. https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2015.10.025

3. Das T., Goerlandt F. Bayesian inference modeling to rank response technologies in arctic marine oil spills. *Marine Pollution Bulletin*. 2022;185(A):114203. https://doi.org/10.1016/j.marpolbul.2022.114203

4. Liu Z., Chen Q., Zhang Y., et al. Research on transport and weathering of oil spills in Jiaozhou Bight, China. *Regional Studies in Marine Science*. 2022;51:102197. https://doi.org/10.1016/j.rsma.2022.102197

5. Другов Ю.С. *Экологические анализы при разливах нефти и нефтепродуктов*. Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний; 2015. 273 с.

6. Нельсон-Смит А. *Нефть и экология моря*. Москва: Прогресс; 1977. 301с.

7. Li Y., Chen H., Lv X. Impact of error in ocean dynamical background, on the transport of underwater spilled oil. *Ocean Modelling*. 2018;132:30–45. https://doi.org/10.1016/j.ocemod.2018.10.003

8. Durgut I., Erdoğan M., Reed M. Extending Voronoi-diagram based modeling of oil slick spreading to surface tension-viscous spreading regime. *Marine Pollution Bulletin*. 2020;160:111663. https://doi.org/10.1016/j.marpolbul.2020.111663

9. Ворович И.И. *Рациональное использование водных ресурсов бассейна Азовского моря: Математические модели*. Москва: Наука; 1981. 360 с.

10. Сухинов А.И., Сидорякина В.В., Проценко Е.А. и др. Численное моделирование воздействия ветровых течений на прибрежную зону крупных водохранилищ. *Математическая физика и компьютерное моделирование*. 2022;25(3):15–30. https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2022.3.2

11. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. и др. Метод учета заполненности ячеек для решения задач гидродинамики со сложной геометрией расчетной области. *Математическое моделирование.* 2019;31(8):79–100. *Math. Models Comput. Simul*. 2020;12:2:232–245. https://doi.org/10.1134/S0234087919080057

12. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Filina A.A., et al. Supercomputer simulation of oil spills in the Azov Sea. *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*. 2019;12:3:115–129.

13. Самарский А.А. *Численные методы решения задач конвекции-диффузии*. Москва: Изд. УРСС;1998. 248 с.

14. Самарский А.А. *Методы решения сеточных уравнений*. Москва: Наука; 1978. 592 с.

15. Самарский А.А. *Теория разностных схем*. Москва: Наука; 1989. 616 с.

References

1. Ülker D., Burak S., Balas L., et al. Mathematical modelling of oil spill weathering processes for contingency planning in Izmit Bay. *Regional Studies in Marine Science*. 2022;50:102155. https://doi.org/10.1016/j.rsma.2021.102155

2. Chen H., An W., You Y., et al. Numerical study of underwater fate of oil spilled from deepwater blowout. *Ocean Engineering*. 2015;110(A):227–243. https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2015.10.025

3. Das T., Goerlandt F. Bayesian inference modeling to rank response technologies in arctic marine oil spills. *Marine Pollution Bulletin*. 2022;185(A):114203. https://doi.org/10.1016/j.marpolbul.2022.114203

4. Liu Z., Chen Q., Zhang Y., et al. Research on transport and weathering of oil spills in Jiaozhou Bight, China. *Regional Studies in Marine Science*. 2022;51:102197. https://doi.org/10.1016/j.rsma.2022.102197

5. Drugov Yu.S. *Environmental analyses in oil and petroleum product spills*. Moscow: BINOM. Laboratory of Knowledge; 2015. 273 p. (In Russ.).

6. Nelson-Smith A. *Oil and marine ecology.* Moscow: Progress; 1977. 301 p. (In Russ.).

7. Li Y., Chen H., Lv X. Impact of error in ocean dynamical background, on the transport of underwater spilled oil. *Ocean Modelling*. 2018;132:30–45. https://doi.org/10.1016/j.ocemod.2018.10.003

8. Durgut I., Erdoğan M., Reed M. Extending Voronoi-diagram based modeling of oil slick spreading to surface tension-viscous spreading regime. *Marine Pollution Bulletin*. 2020;160:111663. https://doi.org/10.1016/j.marpolbul.2020.111663

9. Vorovich I.I. *Rational use of water resources of the Azov Sea basin: Mathematical models*. Moscow: Nauka; 1981. 360 p. (In Russ.).

10. Sukhanov A.I., Sidorkina V.V., Protsenko E.A., et. al. Numerical modeling of the impact of wind currents on the coastal zone of large reservoirs. *Mathematical physics and computer modeling.* 2022;25(3):15–30. (In Russ.). https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2022.3.2

11. Sukhanov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A., et al. Method of accounting for cell occupancy for solving problems of hydrodynamics with complex geometry of the computational domain. *Mathematical modelling*. 2019;31(8):79–100. *Mathematics. Models calculate. Modeling*. 2020;12:2:232–245. (In Russ.). https://doi.org/10.1134/S0234087919080057

12. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Filina A.A., et al. Supercomputer simulation of oil spills in the Azov Sea. *Vestn. SUSU. Ser. Matem. modeling and programming.* 2019;12:3:115–129.

13. Samarskiy A.A. *Numerical methods for solving convection-diffusion problems*. Moscow: URSS Publishing House;1998. 248 p. (In Russ.).

14. Samarsky A.A. *Methods for solving grid equations*. Moscow: Nauka; 1978. 592 p. (In Russ.).

15. Samarskiy A.A. *Theory of difference schemes*. Moscow: Nauka; 1989. 616 p. (In Russ.).

Поступила в редакцию 15.11.2023
Поступила после рецензирования 01.12.2023
Принята к публикации 01.12.2023

Об авторе:

Сидорякина Валентина Владимировна, докторант кафедры математики и информатики, Донской государственный технический университет, (РФ, 344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1); доцент кафедры математики, Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), (РФ, 347936, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48); кандидат физико-математических наук, MathSciNet, eLibrary.ru, ORCID, ResearcherID, ScopusID, cvv9@mail.ru

Конфликт интересов
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Received 15.11.2023
Revised 01.12.2023
Accepted 01.12.2023

About the Author:

Valentina V. Sidoryakina, Doctoral student of the Mathematics Department and Computer Science, Don State Technical University, (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, RF); Associate Professor of the Department of Mathematics, A.P. Chekhov Taganrog Institute (branch) of the Russian State Economic University (RINH), (48, Initiativnaya St., Taganrog, 347936, RF); PhD (Physical and Mathematical Sciences), MathSciNet, eLibrary.ru, ORCID, ResearcherID, ScopusID, cvv9@mail.ru

Conflict of interest statement

The author declares that there is no conflict of interest.

The author read and approved the final version of the manuscript.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
MATHEMATICAL MODELLING

УДК 519.6
https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-47-53

Научная статья

Моделирование процесса распространения загрязнения водной экосистемы фосфатами

Т.В. Лященко[1,2,3] ✉, **А.Е. Чистяков**[2], **А.В. Никитина**[2]
[1]Таганрогский институт управления и экономики, г. Таганрог, Российская Федерация
[2]Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация
[3]Институт компьютерных технологий и информационной безопасности Южного федерального университета, г. Таганрог, Российская Федерация
✉t.lyashchenko@tmei.ru

Аннотация

Введение. Загрязнение мелководных водоемов является очень серьезной проблемой. Для защиты и восстановления таких уязвимых экосистем крайне важно изучить механизмы распространения в них загрязнений, разработать стратегии по развитию устойчивого и экологически чистого использования природных ресурсов, минимизации негативного влияния на окружающую среду. Частью этой работы является построение математической модели распространения загрязнений (в частности, фосфатов) в мелких водоемах. Целью работы является построение сценариев изменения концентрации фосфатов при различных параметрах модели.

Материалы и методы. С помощью модифицированного попеременно-треугольного итерационного метода решения сеточных уравнений (МПТМ) создается математическая модель транспорта фосфатов в мелководном водоеме.

Результаты исследования. Разработанная математическая модель численно реализована в виде программного модуля. Эта модель представляет собой важный инструмент для оценки и прогнозирования воздействия различных источников загрязнения на качество вод экосистем, таких как море, озеро и водохранилище.

Обсуждение и заключение. Полученная модель может быть использована для анализа различных сценариев загрязнения, например, для определения оптимальных стратегий управления отходами и предотвращения загрязнения водных ресурсов. Кроме того, разработанный авторами программный модуль позволяет моделировать процесс изменения концентрации фосфатов и может быть полезен для проведения научных и инженерных исследований в области водной экологии и разработки эффективных методов адаптации гидробиоценоза к изменениям водной экосистемы.

Ключевые слова: математическая модель, загрязняющие вещества, фосфаты, мелководный водоем, алгоритм, программный модуль

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00295. https://rscf.ru/project/22-11-00295/

Для цитирования. Лященко Т.В., Чистяков А.Е., Никитина А.В. Моделирование процесса распространения загрязнения фосфатами в водной экосистеме. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):47–53. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-47-53

Original article

Pollutions Spreading Process Modelling in an Aquatic Ecosystem

Tatyana V. Lyashchenko[1,2,3], **Alexander E. Chistyakov**[2], **Alla V. Nikitina**[2]
[1]Taganrog Management and Economics Institute, Taganrog, Russian Federation
[2]Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation
[3]Institute of Computer Technology and Information Security of the Southern Federal University, Taganrog, Russian Federation
✉t.lyashchenko@tmei.ru

Abstract

Introduction. Pollution of shallow waters is becoming an increasingly serious problem. It is important to study the mechanisms of pollution distribution in them to protect and restore such vulnerable ecosystems, it is necessary to develop strategies for the development of sustainable and environmentally friendly use of natural resources, minimizing the

negative impact on the environment. Part of this work is the construction of a mathematical model for the spread of pollutants (in particular, phosphates) in shallow reservoirs. The aim of the work is to construct scenarios for changes in the concentration of phosphates at various parameters of the model.
Materials and Methods. The phosphate transport mathematical model in a shallow reservoir is described, implemented using a modified alternating triangular iterative method to solving grid equations.
Results. The developed mathematical model is numerically implemented in the form of a software module. This model is an important tool for assessing and predicting the various pollution sources impact to the water quality of ecosystems such as lakes and reservoirs.
Discussion and Conclusion. The resulting model can be used to analyze various pollution scenarios, for example, to determine optimal waste management strategies and prevent pollution of water resources. In addition, the software module developed by the authors allows you to simulate the process of the phosphates concentration changing and can be useful for conducting scientific and engineering research in the aquatic ecology field and developing effective methods for adapting hydrobiocenosis to changes in the aquatic ecosystem.

Keywords: mathematical model, pollutants, shallow water body, phosphates, algorithm, software module

Funding information. The study was supported by the Russian Science Foundation grant no. 22-11-00295. https://rscf.ru/en/project/22-11-00295/

For citation. Lyashchenko T.V., Chistyakov A.E., Nikitina A.V. Pollutions spreading process modelling in an aquatic ecosystem. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):47–53. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-47-53

Введение. Мелководные водоемы являются уязвимыми экосистемами, подверженными воздействию различных источников загрязнения. Это становится все более серьезной проблемой, особенно для таких систем, как Азовское море, Цимлянское и Рыбинское водохранилища, небольшие озера и т. д. Загрязнение мелководных водоемов происходит за счет выбросов различных вредоносных, токсичных и недостаточно очищенных веществ, которые могут оказывать негативное воздействие на живые организмы и экосистемы водоемов. Отходы сельхозпроизводства, промышленности, транспорта становятся постоянными источниками загрязнения водных систем. Математическое моделирование позволяет более полно понять механизмы переноса загрязнений, изменение их концентраций и влияние на окружающую среду. Это, в свою очередь, поможет разработать эффективные меры по предотвращению и уменьшению загрязнения водоемов, а также оценить эффективность уже предпринятых действий.

Различные загрязняющие вещества имеют широкий спектр характерных для них свойств, отличаются также способы их транспортировки в водных системах. Некоторые вещества могут быть растворимы в воде и равномерно распределяются в ней, в то время как другие могут скапливаться в виде частиц или оседать на дно водоема. Это может вызывать неравномерное распределение загрязнений в водной среде и оказывать негативное воздействие на живые организмы. Также важно учитывать факторы, связанные с биологической активностью загрязнений. Некоторые вещества могут подвергаться биохимическому разложению, что влияет на их концентрацию и степень токсичности. Кроме того, загрязняющие вещества могут накапливаться в живых организмах, причиняя им значительный вред. Например, тяжелые металлы аккумулируются в тканях рыб и других водных организмов, что может приводить к нарушениям их жизнедеятельности и даже угрожать здоровью человека при употреблении такой рыбы и других гидробионтов в пищу. Для эффективного контроля и предотвращения загрязнения водоемов важно исследовать не только физико-химические свойства загрязняющих веществ, но и параметры окружающей водной среды, активность биологических процессов и экологические взаимодействия водных организмов.

Фосфаты представляют собой химические соединения, которые оказывают влияние на качество воды путем стимулирования чрезмерного роста синезеленых водорослей. Хотя все растения нуждаются в фосфатах для нормального роста, концентрация фосфора в поверхностных водах должна составлять всего 0,02 частей на миллион. Присутствие большой концентрации фосфатов делает воду мутной, она становится зеленого цвета, имеет низкое содержание кислорода. Избыточное количество фосфатов в воде питает водоросли, которые бесконтрольно разрастаются в водных экосистемах, при разложении вырабатывают вредные токсины и создают дисбаланс, который приводит к уничтожению других форм жизни. Во время цветения, а потом отмирания микроводорослей образуются продукты анаэробного распада, появляется сероводород и возникают заморы рыб. На рис. 1 *а* продемонстрировано опасное явление — «цветение вод» Таганрогского залива в летний период, вызванное попаданием в водоем биогенных веществ (соединений азота, фосфора, кремния) со стоками рек Дон, Кубань и др., а также путем оседания на поверхность водоема из воздуха. Рис. 1 *б* демонстрирует такое же явление в Цимлянском водохранилище, а на рис. 1 *в* видно, что даже на расположенном гораздо севернее Рыбинском водохранилище при невысокой температуре воздуха вода становится зеленой. Проблему «цветения» воды и перебоев с водоснабжением городов нельзя полностью решить только такими методами, как вселение хлореллы или толстолобика [1, 2]. Необходимо знать, где данных водорослей скопится наибольшее количество (в том числе и с целью удешевления методов борьбы с ними). Эту проблему можно решить на основе математического моделирования процесса распространения загрязняющих веществ, включая основные виды биогенов. К ним отнесем соединения фосфора, натрия и кремния. Модель строится в предположении, что уменьшение концентрации фосфатов происходит в том числе и за счет расхода на рост клеток фитопланктона.

а) *б)* *в)*

Рис. 1. Водные экосистемы, подверженные опасному явлению — «цветению вод»:
а — Таганрогский залив Азовского моря; *б* — Цимлянское водохранилище;
в — Рыбинское водохранилище

Математическое моделирование транспорта загрязняющих веществ в водоемах представляет собой эффективный метод, используемый в экологических исследованиях. Этот подход позволяет более глубоко и систематически изучать процессы распространения загрязнений, предсказывать их потенциальные последствия, способствует разработке эффективных стратегий управления и защиты водных ресурсов [3, 4].

Материалы и методы. Математическая модель транспорта загрязняющих веществ (ЗВ), которая позволяет оценивать и прогнозировать влияние различных источников загрязнения на качество воды в мелководном водоеме, имеет вид:

$$\frac{\partial S_i}{\partial t}+u\frac{\partial S_i}{\partial x}+v\frac{\partial S_i}{\partial y}+(w-w_{gi})\frac{\partial S_i}{\partial z}=\mu_i\Delta S_i+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_i\frac{\partial S_i}{\partial z}\right)-(k_i+d_i)S_i+\psi_i(x,y,z,t), \qquad (1)$$

где S_i — концентрация i-й примеси, $i=\overline{1,6}$, причем 1 — общий органический азот (N); 2 — фосфаты (PO_4); 3 — фитопланктон; 4 — зоопланктон; 5 — растворенный кислород (O_2); 6 — сероводород (H_2S); $\mathbf{U}=(u, v, w)^\tau$ — вектор скорости водного потока; w_{gi} — скорость оседания; μ_i, ν_i — коэффициенты турбулентного обмена соответственно по горизонтальному и вертикальному направлениям; k_i — коэффициент растворимости для ЗВ, убыли — для кислорода и сероводорода, смертности — для гидробионта; d_i — коэффициент уменьшения ЗВ за счет поедания синезеленых водорослей (цианопрокариот), уменьшения за счет дыхания (для кислорода) и химических реакций (для кислорода и углекислого газа), коэффициент выедания гидробионтов представителями высших трофических уровней; ψ_i — химико-биологический источник (сток) [5].

К системе (1) добавляются начальные и граничные условия, учитывающие вид и концентрацию ЗВ, оседающих на поверхность водоема из воздушной среды.

Область решения задачи G представляет собой замкнутый бассейн, ограниченный невозмущенной поверхностью моря $z = 0$, дном $H_0 = H_0(x, y)$ — глубиной до твердой поверхности водоема (без учета наносов). Граничные условия:

– на поверхности моря, при: $z = -\xi(x, y, t)$: $S_i = \varphi_i(S_i)$, где φ_i — известные функции;

– на дне океана при $z = H(x, y)$ для скорости течения и прилипания:

$$u = 0,\ v = 0,\ w = 0,\ S_i = 0, \text{ если } \mathbf{U_n} > 0;\ \ \frac{\partial S_i}{\partial \mathbf{n}}=0, \text{ если } \mathbf{U_n} < 0;\ \ \frac{\partial S_i}{\partial z}=-\varepsilon_i S_i,$$

где $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности, ε_i — коэффициент поглощения i-й компоненты донными отложениями.

В постановке начально-краевой задачи для системы достаточно задать начальные условия для функций u, v, w, S_i:

$$u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z);\ v(x, y, z, 0) = v_0(x, y, z);\ w(x, y, z, 0) = w_0(x, y, z);\ S_i = S_{i,0},\ i=\overline{1,6}.$$

Исходная модель гидрофизики решается методом поправки к давлению, при этом система разбивается на две подзадачи: первая включает уравнения диффузии, вторая конвекции и неразрывности.

Результаты исследования. Рассмотрим дискретные аналоги операторов конвективного (uS'_x) и диффузионного $(\mu S'_x)'_x$ переносов для концентрации фосфатов S_2, которые могут быть записаны в следующем виде:

$$\left(q_0\right)_{i,j} uS'_x = \left(q_1\right)_{i,j} u_{i+1/2,j} \frac{S_{i+1,j} - S_{i,j}}{2h_x} + \left(q_2\right)_{i,j} u_{i-1/2,j} \frac{S_{i,j} - S_{i-1,j}}{2h_x}, \tag{2}$$

$$\left(q_0\right)_{i,j} \left(\mu S'_x\right)'_x = \left(q_1\right)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{S_{i+1,j} - S_{i,j}}{h_x^2} - \left(q_2\right)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{S_{i,j} - S_{i-1,j}}{h_x^2} - \tag{3}$$

$$- \left|\left(q_1\right)_{i,j} - \left(q_2\right)_{i,j}\right| \mu_{i,j} \frac{\alpha_x S_{i,j} + \beta_x}{h_x},$$

где q_0, q_1, q_2 — коэффициенты заполненности контрольных областей; α, β — коэффициенты, стоящие в граничных условиях [6].

Для определения погрешности аппроксимации выражений (2), (3) доопределим расчетную область. Выражение (2) можно рассмотреть в случае $(q_1)_{i,j} = (q_2)_{i,j} = 0$, при этом будем утверждать, что погрешность аппроксимации полученного выражения равна погрешности исходного выражения. Для определения погрешности аппроксимации выражения (3) нужно рассмотреть два случая: первый случай не учитывает влияние границы $(q_1)_{i,j} = (q_2)_{i,j} = 1$, второй — учитывает $(q_1)_{i,j} = 1$; $(q_2)_{i,j} = 0$, т. к. аппроксимация (3) может быть записана через линейную комбинацию аппроксимаций, полученных в описанных ранее двух случаях. Таким образом, для определения погрешностей достаточно исследовать точность следующих аппроксимаций:

– дискретный аналог оператора конвективного переноса в случае отсутствия влияния границы области

$$uS'_x = u_{i+1/2,j} \frac{S_{i+1,j} - S_{i,j}}{2h_x} + u_{i-1/2,j} \frac{S_{i,j} - S_{i-1,j}}{2h_x}, \tag{4}$$

– дискретный аналог оператора диффузионного переноса в случае отсутствия влияния границы области

$$\left(\mu S_x\right)'_x = \mu_{i+1/2,j} \frac{S_{i+1,j} - S_{i,j}}{h_x^2} - \mu_{i-1/2,j} \frac{S_{i,j} - S_{i-1,j}}{h_x^2}. \tag{5}$$

Для нахождения погрешности аппроксимации выражения (4) необходимо воспользоваться разложением в ряд Тейлора относительно узла (i, j) значений функций в узлах $(i + 1, j)$ и $(i - 1, j)$:

$$S_{i+1,j} = S_{i,j} + \left(S_{i,j}\right)' h_x + \left(S_{i,j}\right)'' \frac{h_x^2}{2} + O\left(h_x^3\right),$$

$$S_{i-1,j} = S_{i,j} - \left(S_{i,j}\right)' h_x + \left(S_{i,j}\right)'' \frac{h_x^2}{2} + O\left(h_x^3\right).$$

С учетом аппроксимации (4) запишем как

$$u\overline{S'_x} = \frac{u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j}}{2}\left(S_{i,j}\right)' + \frac{u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}}{4}\left(S_{i,j}\right)'' h_x + O\left(h_x^2\right).$$

Принимая во внимание выражение

$$u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j} = 2u_{i,j} + O\left(h_x^2\right),\quad u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j} = O\left(h_x\right),$$

установим, что дискретный аналог оператора конвективного переноса примет вид

$$u_{i+1/2,j} \frac{S_{i+1,j} - S_{i,j}}{2h_x} + u_{i-1/2,j} \frac{S_{i,j} - S_{i-1,j}}{2h_x} = u_{i,j}\left(S_{i,j}\right)' + O\left(h_x^2\right).$$

Для нахождения погрешности аппроксимации выражения (5) воспользуемся разложением в ряд Тейлора в узле (i, j) расчетной функции S в узлах $(i + 1, j)$ и $(i - 1, j)$ [7, 8]:

$$S_{i+1,j} = S_{i,j} + \left(S_{i,j}\right)' h_x + \left(S_{i,j}\right)'' \frac{h_x^2}{2} + O\left(h_x^3\right),$$

$$S_{i-1,j} = S_{i,j} - \left(S_{i,j}\right)' h_x + \left(S_{i,j}\right)'' \frac{h_x^2}{2} + O\left(h_x^3\right).$$

С учетом аппроксимации (5) запишется в виде:

$$\left(\mu S'_x\right)'_x = \frac{\mu_{i+1/2,j} - \mu_{i-1/2,j}}{h_x}\left(S_{i,j}\right)' + \frac{\mu_{i+1/2,j} + \mu_{i-1/2,j}}{2}\left(S_{i,j}\right)'' + \left(\mu_{i+1/2,j} - \mu_{i-1/2,j}\right)\left(S_{i,j}\right)''' \frac{h_x}{6} + O\left(h_x^2\right).$$

Принимая во внимание выражения:

$$\mu_{i+1/2,j} + \mu_{i-1/2,j} = 2\mu_{i,j} + O\left(h_x^2\right),$$

$$\mu_{i+1/2,j} - \mu_{i-1/2,j} = \left(\mu_{i,j}\right)' h_x + O\left(h_x^2\right),$$

получим, что дискретный аналог оператора диффузионного переноса в случае отсутствия влияния границы области примет вид [5]:

$$\mu_{i+1/2,j}\frac{S_{i+1,j}-S_{i,j}}{h_x^2}-\mu_{i-1/2,j}\frac{S_{i+1,j,}-S_{i-1,j}}{h_x^2}=\left(\mu_{i,j}\left(S_{i,j}\right)'\right)'+O\left(h_x^3\right).$$

Для вычисления относительной погрешности решения использовалась формула [8]:

$$\delta S=\frac{\Delta S}{|S|}=\frac{\sum_1^N\left|\frac{\partial S(x_1,x_2,...,x_N)}{\partial x_i}\right|\Delta x_i}{|S(x_1,x_2,...,x_N)|}=\sum_1^N\left|\frac{\partial\left(\ln S(x_1,x_2,...,x_N)\right)}{\partial x_i}x_i\right|\delta x_i .$$

Минимальная относительная погрешность принимает значение 0,002 при оптимальном шаге по времени 0,001. В ходе исследования рассмотрены различные оценки погрешности схемы для решения уравнения распространения ЗВ, проведена оптимизация шага по времени.

Рассмотрим следующий сценарий: конвективный перенос практически отсутствует. Постоянная равномерная функция источника загрязнения на поверхности области. Вид примеси: тяжелая равномерная; источник загрязнения $f = 10$. На рис. 2 представлено изменение концентрации фосфатов с коэффициентом убывания $d = 1$ в вертикальном срезе на основе численного эксперимента с разработанным программным модулем.

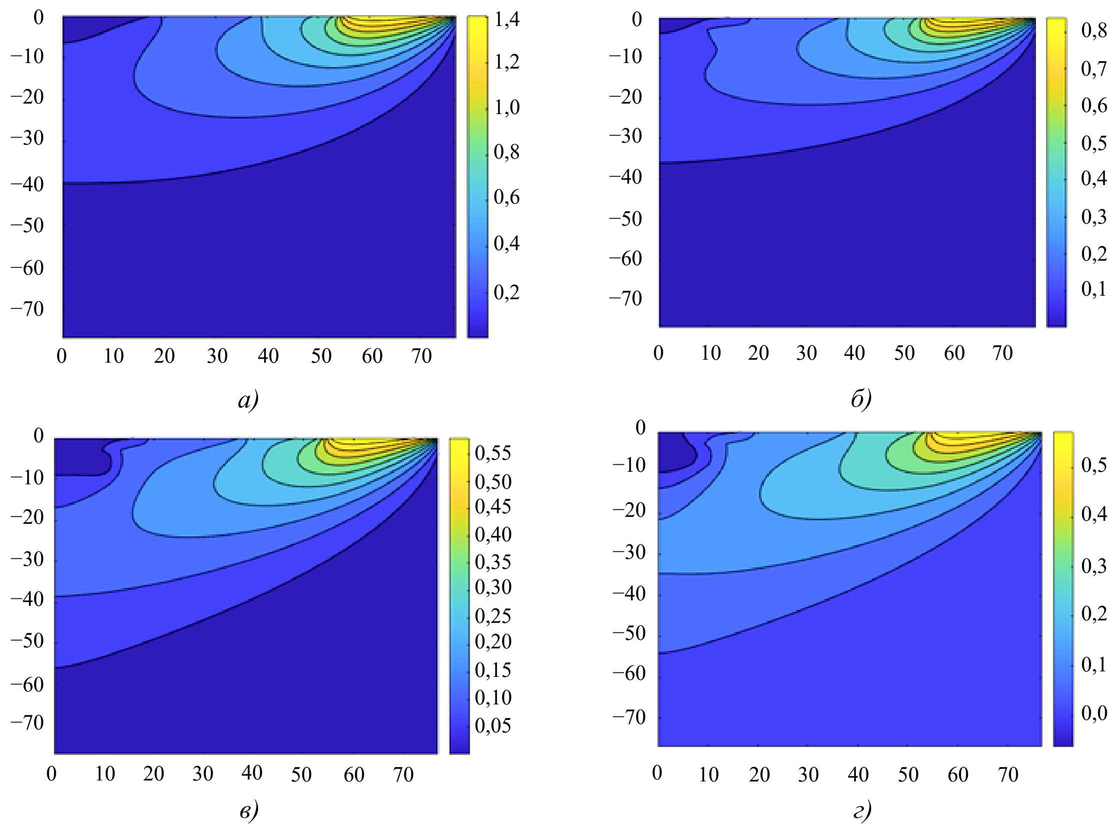


Рис. 2. Распределение концентрации ЗВ: *а* — время $t = 5$, значения коэффициентов: $\mu = 0{,}005$, $\nu = 0{,}1$, $d = 1$; *б* — время $t = 20$, значения коэффициентов: $\mu = 0{,}01$, $\nu = 0{,}1$, $d = 1$; *в* — время $t = 60$, значения коэффициентов: $\mu = 0{,}005$, $\nu=0{,}1$, d = 1; *г* — время $t = 100$, значения коэффициентов: $\mu = 0{,}01$, $\nu = 0{,}1$, $d = 1$

Предложенная модель позволяет изучать процессы распространения различных типов загрязняющих веществ с поверхности водоема с учетом их растворения и оседания на дно. Приведены результаты расчетов распространения загрязнений с различными скоростями течения, коэффициентами диффузии, интенсивностью загрязняющих стоков и коэффициентов растворимости различных фосфатов. Проведен сравнительный анализ полученных результатов, показавший, что разработанная модель адекватно отображает процесс транспорта ЗВ. В численных экспериментах использовался разработанный программный модуль, который реализует алгоритм для математической модели растекания и растворения фосфатов с разными коэффициентами растворимости. Этот модуль позволяет прогнозировать и визуализировать процесс транспорта загрязняющих веществ в водных экосистемах.

Обсуждение и заключение. Для решения полученной в процессе дискретизации задачи транспорта ЗВ в мелководном водоеме использован адаптивный модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод. Для повышения точности расчетов разработаны схемы повышенного порядка точности, которые обеспечивают лучшую аппроксимацию границ разделов среды. Разработанная модель может быть использована для анализа различных сценариев загрязнения водных экосистем и определения оптимальных мер по предотвращению или снижению их загрязнения. Например, она может помочь определить оптимальные места для размещения очистных сооружений или оценить эффективность мер по снижению выбросов загрязняющих веществ. Кроме того, разработанный алгоритм программного модуля позволяет проводить мониторинг загрязнения водных ресурсов в реальном времени, что позволяет оперативно реагировать на возможные угрозы для окружающей среды и принимать необходимые меры по защите водных ресурсов.

Список литературы

1. Матишов Г.Г., Ковалёва Г.В. «Цветение» воды в водоёмах Юга России и сбои в водоснабжении (на примере г. Волгодонска). *Вестник ЮНЦ РАН*. 2010;6(1):71–79.

2. Лукьяненков В.И. *Экологические аспекты ихтиотоксикологии*. Москва: Агропромиздат; 1987. 240 с.

3. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Лященко Т.В. и др. Предсказательное моделирование заморных явлений в мелководных водоемах. *Вестник компьютерных и информационных технологий*. 2017;1(151):3–9.

4. Litvinov V.N., Rudenko N.B., Filina A.A., et al. Mathematical modeling of the pollutant distribution process in the Gelendzhik Bay. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021:032049. http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/2131/3/032049

5. Марчук Г.И. *Математическое моделирование в проблеме окружающей среды*. Москва: Наука;1982. 320 с.

6. Проценко Е.А., Панасенко Н.Д., Стражко А.В. Моделирование пространственно-трехмерных волновых процессов в мелководных водоемах с учетом особенностей вертикального турбулентного обмена. *Computational Mathematics and Information Technologies.* 2023;7(1):34–40. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-6-1-34-40

7. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. и др. Повышение гладкости численного решения моделирования задач гидродинамики на прямоугольных сетках. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2019;3(1):1–16.

8. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Сидорякина В.В. и др. Экономичные явно-неявные схемы решения многомерных задач диффузии-конвекции. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2019;12(4):435–445. https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.4.37

References

1. Matishov G.G., Kovaleva G.V. “Flowering” of water in reservoirs in the South of Russia and failures in water supply (on the example of Volgodonsk). *Bulletin of the YUNTS RAS*. 2010;6(1):71–79. (In Russ.).

2. Lukyanenkov V.I. Ecological aspects of ichthyotoxicology Moscow: Nauka, IN “Agropromizdat”,1987:240. (In Russ.).

3. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Lyashchenko T.V., et al. Predictive modelling of offshore phenomena in shallow waters. *Bulletin of computer and information technologies*. 2017;1(151):3−9. (In Russ.).

4. Litvinov V.N., Rudenko N.B., Filina A.A. Mathematical modelling of the pollutant distribution process in the Gelendzhik Bay. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021:032049. http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/2131/3/032049

5. Marchuk G.I. *Mathematical modelling in the problem of the environment.* Moscow: Nauka, 1982:320. (In Russ.).

6. Protsenko E.A., Panasenko N.D., Strazhko A.V. Original article Spatial-three-dimensional wave processes’ modelling in shallow water bodies taking into account the vertical turbulent exchange features. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(1):34−40. (In Russ.). https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-6-1-34-40

7. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A., et al. Improvement of numerical solution smoothness for the hydrodynamics problems modeling on rectangular grids. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2019:3(1). (In Russ.).

8. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Sidoryakina V.V., et al. Economical explicit-implicit schemes for solving multidimensional diffusion-convection problems. *Computational mechanics of continuous media*. 2019;12(4):435−445. (In Russ.).

Поступила в редакцию 20.10.2023
Поступила после рецензирования 27.11.2023
Принята к публикации 04.12.2023

Об авторах:

Лященко Татьяна Владимировна, старший преподаватель кафедры экономики и финансов, Таганрогский институт управления и экономики (РФ, 347900, г. Таганрог, ул. Петровская, 45), ORCID, t.lyashchenko@tmei.ru

Чистяков Александр Евгеньевич, профессор кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем, Донской государственный технический университет (РФ, 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), доктор физико-математических наук, ORCID, MathSciNet, ScopusID, cheese_05@mail.ru

Никитина Алла Валерьевна, профессор кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем, Донской государственный технический университет (РФ, 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), доктор технических наук, ORCID, MathSciNet, ScopusID, nikitina.vm@gmail.com

Заявленный вклад соавторов:
Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Конфликт интересов
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Received 20.10.2023
Revised 27.11.2023
Accepted 04.12.2023

About the Authors:

Tatyana V. Lyashchenko, Senior Lecturer of the Department of Economics and Finance, Taganrog Institute of Management and Economics (45, Petrovskaya St.,Taganrog, 347900, RF), ORCID, t.lyashchenko@tmei.ru

Alexander E. Chistyakov, Professor of the Department of Computer Science and Automated Systems Software, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344000, RF), Doctor of Physical and Mathematical Sciences, ORCID, MathSciNet, ScopusID, cheese_05@mail.ru

Alla V. Nikitina, Professor of the Department of Computer Science and Automated Systems Software, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344000, RF), Doctor of Technical Sciences, ORCID, MathSciNet, ScopusID, nikitina.vm@gmail.com

Claimed contributor-ship:
All authors have made an equivalent contribution to the preparation of the publication.

Conflict of interest statement
The authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
INFORMATION TECHNOLOGIES

УДК 004.93'1, 004.932, 004.942
https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-54-65

Научная статья

Прогноз состояния прибрежных систем с помощью математического моделирования на основе космических снимков

Н.Д. Панасенко

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация,

natalija93_93@mail.ru

Аннотация

Введение. Прибрежные системы Юга России постоянно подвергаются воздействию биотических, абиотических и антропогенных факторов. В связи с этим возникает необходимость разработки нестационарных пространственно-неоднородных взаимосвязанных математических моделей, позволяющих «проигрывать» различные сценарии динамики биологических и геохимических процессов в прибрежных системах. Также существует проблема практического использования математического моделирования, а именно его оснащения реальными входными данными (граничными и начальными условиями, информацией о функциях-источниках). Оперативным источником натурной информации могут стать данные, получаемые от искусственных спутников Земли. Поэтому возникает задача идентификации и определения границ расположения фитопланктонных популяций (имеющих, как правило, пятнистую структуру) на снимках водоемов при малом контрасте изображений по отношению к фону.

Материалы и методы. Автором используются методы математического анализа, математической физики, функционального анализа, теории разностных схем, а также методов решения сеточных уравнений. Биогеохимические процессы описаны на основе уравнений конвекции-диффузии-реакции; линеаризация построенной модели производится на временной сетке с шагом τ. Строится метод распознавания границ пятнистых структур на основе данных дистанционного зондирования Земли. В качестве алгоритмов обработки изображений рассматривается комбинация методов локальных бинарных шаблонов (LBP) и двухслойной нейронной сети.

Результаты исследования. Разработан программно-алгоритмический инструментарий распознавания космических снимков, основанный на комбинации методов локальных бинарных шаблонов (LBP) и технологий нейронных сетей, ориентированный на последующий ввод полученных начальных условий для задачи динамики фитопланктона в математическую модель. Предложена и исследована непрерывная линеаризованная математическая модель, а на ее основе — линеаризованная дискретная модель биогеохимических циклов в прибрежных системах. Установлены практически допустимые значения шага по времени при численном (прогностическом) моделировании задач динамики планктонных популяций и биогеохимических циклов, в том числе при возникновении заморных явлений, что позволяет сократить время оперативного прогноза. При этом для построенной дискретной модели гарантированно выполняются практически значимые для дискретных моделей свойства: устойчивость, монотонность и сходимость разностной схемы, что важно для достоверных прогнозов неблагоприятных и опасных явлений. В процессе работы, обращаясь к космическим снимкам, которые позволяют получить состояние прибрежных систем с высокой точностью, вносятся начальные условия в математическую (компьютерную) модель. Модель анализирует данные спутниковых изображений и определяет уровни «загрязнения», образование зон заморов и другие факторы, которые могут угрожать природе.

Обсуждение и заключение. С помощью разработанной модели можно предсказывать изменения в прибрежных экосистемах и разрабатывать стратегии по их защите. Полученные результаты позволяют существенно сократить время прогностических расчетов (на 20–30 %) и повысить вероятность заблаговременного обнаружения неблагоприятных и опасных явлений, таких как интенсивное «цветение» водной среды и образование зон заморов в прибрежных системах.

Ключевые слова: математическая модель, биогеохимические циклы, данные дистанционного зондирования, нейросеть-LBP

Благодарности: автор благодарит своего научного руководителя Сухинова Александра Ивановича (члена-корреспондента РАН, д-ра физ.-мат. наук, профессора, заведующего кафедрой Донского государственного технического университета) за бесценную помощь и советы.

Финансирование. Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 21–71–20050).

Для цитирования. Панасенко Н.Д. Прогноз состояния прибрежных систем с помощью математического моделирования на основе космических снимков. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):54–65. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-54-65

Original article

Forecasting the Coastal Systems State using Mathematical Modelling Based on Satellite Images

Natalya D. Panasenko

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

natalija93_93@mail.ru

Abstract

Introduction. Coastal systems of Southern Russia are constantly exposed to biotic, abiotic and anthropogenic factors. In this regard, there is a need to develop non-stationary spatially inhomogeneous interconnected mathematical models that make it possible to reproduce various scenarios for the dynamics of biological and geochemical processes in coastal systems. There is also the problem of the practical use of mathematical modelling, namely its equipping with real input data (boundary, initial conditions, information about source functions). An operational source of field information can be data received from artificial Earth satellites. Therefore, the problem arises of identifying phytoplankton populations in images of reservoirs, which, as a rule, have a spotty structure, with low image contrast relative to the background, as well as determining the boundaries of their location.

Materials and Methods. This work is based on the correct application of modern mathematical analysis methods, mathematical physics and functional analysis, the theory of difference schemes, as well as methods for solving grid equations. Biogeochemical processes are described based on convection-diffusion-reaction equations. Linearization of the constructed model is carried out on a time grid with step τ. A method for recognizing the boundaries of spotted structures is being developed based on Earth remote sensing data. A combination of methods is considered as image processing algorithms: local binary patterns (LBP) and a two-layer neural network.

Results. The developed software-algorithmic tools for space image recognition are presented, based on a combination of methods — local binary patterns (LBP) and neural network technologies, focused on the subsequent input of the obtained initial conditions for the problem of phytoplankton dynamics into a mathematical model. Regarding the necessary mathematical model, a continuous linearized model has been proposed and studied, and on its basis a linearized discrete model of biogeochemical cycles in coastal systems, for which practically acceptable time step values have been established for numerical (predictive) modelling of problems of the dynamics of planktonic populations and biogeochemical cycles, including in the event of death phenomena, which makes it possible to reduce the time of operational forecasting. At the same time, for the constructed discrete model, properties that are practically significant for discrete models are guaranteed to be satisfied: stability, monotonicity and convergence of the difference scheme, which is important for reliable forecasts of adverse and dangerous phenomena.

In the process of work, referring to satellite images, which make it possible to obtain the state of coastal systems with high accuracy, initial conditions are entered into the mathematical (computer) model. The model analyzes satellite image data and determines levels of “pollution”, the formation of extinction zones and other factors that may threaten nature.

Discussion and Conclusion. Discussion and conclusions. Using this model, it is possible to predict possible changes in coastal ecosystems and develop strategies to protect them. The results obtained make it possible to significantly reduce the time of forecast calculations (by 20–30 %) and increase the likelihood of early detection of unfavorable and dangerous phenomena, such as intense “blooming” of the aquatic environment and the formation of extinction zones in coastal systems.

Keywords: mathematical model, biogeochemical cycles, remote sensing data, neural network-LBP

Acknowledgements. The author thanks his scientific supervisor Alexander Ivanovich Sukhinov (corresponding member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of the department of Don State Technical University) for his invaluable help and advice.

Funding information. The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation (project no. 21–71–20050).

For citation. Panasenko N.D. Forecasting the coastal systems state using mathematical modelling based on satellite images. *Computational Mathematics and Information Technologies.* 2023;7(4):54–65. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-54-65

Введение. Прибрежные системы играют важную роль в экосистеме нашей планеты, обеспечивая условия для жизни множества видов растений и животных. Однако из-за негативных и катастрофических явлений прибрежные системы могут находится под угрозой. Приведем несколько выдержек из источников [1, 2]: «… замор рыбы в июле 2020 г. в юго-восточном секторе Азовского моря нанес значительный ущерб процессу воспроизводства промысловых рыб; обширные зоны гипоксии и сероводородного заражения произошли в восточной части Азовского моря в 2001 г.; катастрофический шторм в ноябре 2006 г., штормовые нагоны в 2007, 2014 гг.; обмеление Азовского моря у берегов Таганрога (Ростовская область) и реки Дон в 2019, 2021, 2022 гг.». Так как изменения в системах происходят в течение нескольких недель, то требуется оперативное прогнозирование неблагоприятных явлений. Поэтому математическое моделирование, в частности на основе космических снимков, может быть полезным инструментом для прогнозирования состояния прибрежных систем и оценки эффективности мер по их сохранению.

Материалы и методы. Проблема прогнозирования динамики фито- и зоопланктона является актуальной для морских и прибрежных систем. С одной стороны, они составляют более 95 % биомассы морских и прибрежных систем и являются «фундаментом» трофической пирамиды (основа питания для ее вышестоящих уровней). С другой стороны, избыток планктона приводит к цветению и заморным явлениям, а экстремально большой избыток биогенных веществ перестает быть кормовой базой для планктона, являясь токсикантом для живой среды.

Данные задачи, применительно к Азовскому морю и подобным ему морским и прибрежным системам, сводятся к системе из 10 уравнений диффузии-конвекции-реакции, с функциями правых частей, нелинейно зависящими от искомых решений. Непосредственная декомпозиция данных задач невозможна и для последующего численного решения требуется корректная линеаризация соответствующей начально-краевой задачи по правым частям. Несмотря на большое число работ, посвященных данной проблематике, некоторые важные этапы их исследования и численной реализации не имеют в данное время удовлетворительного решения. В числе недостаточно исследованных задач построения математических моделей динамики фитопланктона и их применения для оперативного прогноза следует отметить разработку и исследование линейной непрерывной математической модели биогеохимических процессов, аппроксимирующей исходную нелинейную задачу, построение для нее дискретного аналога, обладающего свойствами монотонности, аппроксимации, устойчивости и сходимости, а также создание программы распознавания границ структур планктонных популяций (граничных контуров) на космических снимках, обладающих улучшенными характеристиками их идентификации в условиях малой контрастности объектов.

Данная задача является трудоемкой в вычислительном отношении, так как полученные в результате аппроксимации сеточные уравнения имеют размерность от нескольких миллионов до сотен миллионов. Решая реальные задачи прогноза биогеохимических процессов за приемлемое время (десятки минут — десятки часов) необходимо оперативно и надежно распознавать данные дистанционного зондирования — расположение и границы планктонных популяций и других субстанций.

Схематически процесс исследования динамики морских и прибрежных систем представлен на рис. 1. Для заблаговременного принятия решений необходимы валидные модели и данные, позволяющие этим моделям надежно работать.

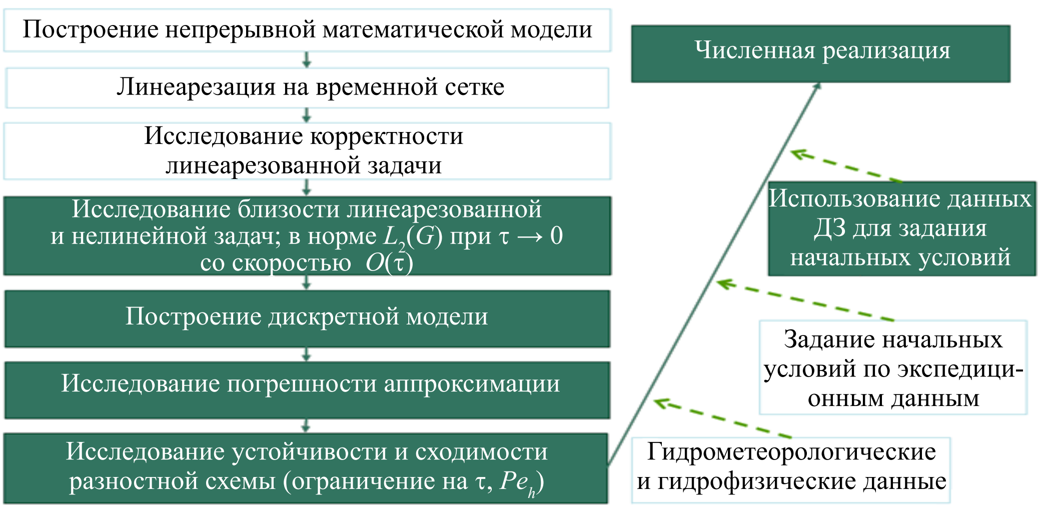


Рис. 1. Схема исследования непрерывной и дискретной математических моделей

Результаты исследования

Программа распознавания объектов «нейросеть-LBP». Использование математических моделей требует наличия реальных входных данных (граничных и начальных условий, информации о функциях-источниках), которые позволяют корректно ставить начально-краевые задачи для систем нелинейных уравнений с частными производными, а также определять различные функциональные зависимости, входящие в построенные модели. В процессе принятия решений, связанных с опасными природными явлениями и катастрофами, до 50 % от общего компьютерного времени прогнозирования может занимать распознавание ситуации, а именно определение места и размеров пятна планктонного цветения и других исходных данных.

Доступным источником натурной информации для математического моделирования могут быть данные дистанционного зондирования Земли. Их распознавание и ввод в качестве начальных и граничных условий является весьма трудоемкой процедурой и требует разработки соответствующих алгоритмов.

В процессе исследования разработан алгоритм идентификации планктонных популяций, имеющих сложную структуру и малую контрастность (отличия оттенков зеленого цвета) фона и области — «нейросеть-LBP». Подробное описание данного алгоритма можно найти в работах [3–5].

Программный модуль (на основе алгоритма «нейросеть-LBP») включен в исследовательский прогнозный комплекс (ИПК) «Azov3d», разработанный в научной школе А.И. Сухинова. Он позволяет получить начальные данные для прогностического моделирования. Результаты численных экспериментов с программным модулем, на примере Таганрогского залива, представлены на рис. 2.

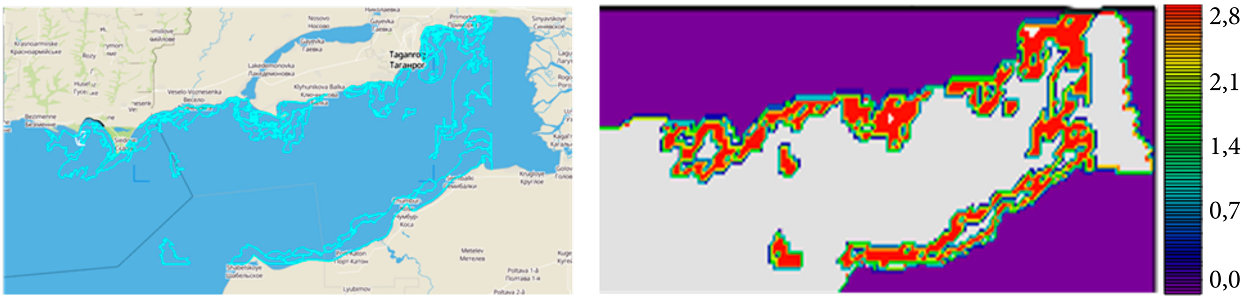


Рис. 2. Задание начального моделирования динамики концентраций фитопланктона ИПК «Azov3d»

Данные, полученные с помощью программных модулей «нейросеть-LBP», и биогеохимические циклы, входящие в ИПК «Azov3d», позволяют прогнозировать динамику изменения концентраций трех, наиболее распространенных в летний период, видов фитопланктона и семи биогенных веществ.

Математическая модель. Динамика планктонных популяций должна рассматриваться в связи с динамикой основных биогенных веществ: фосфатов, органического фосфора во взвешенном состоянии, растворенного фосфора, растворенного кислорода, нитратов, нитритов, аммония (аммонийного азота), общего органического азота, растворенного неорганического кремния (включая кремнезем и силикаты), сероводорода (включая и элементарную серу).

Рассмотрим построенную математическую модель динамики биогеохимических циклов, включающую уравнения динамики фитопланктонных популяций и основных биогенных веществ [5–8]:

$$\frac{\partial q_i}{\partial t}+u\frac{\partial q_i}{\partial x}+v\frac{\partial q_i}{\partial y}+w\frac{\partial q_i}{\partial z}=\operatorname{div}\left(\vec{k}\cdot\operatorname{grad} q_i\right)+R_{q_i},\quad (x,y,z)\in G,\ \ 0<t\le T, \tag{1}$$

где q_i является концентрацией соответствующего компонента под номером i, $i \in M$, $M = \{F_1, F_2, F_3, PO_4, POP, DOP, O_2, NO_3, NO_2, NH_4, N, Si, H_2S\}$; F_1 означает, что рассматривается концентрация зеленой водоросли, F_2 — сине-зеленой водоросли и F_3 — диатомовой водоросли.

Далее указаны биогенные компоненты: PO_4 — означает принадлежность компонента к фосфатам, POP — к органическому фосфору во взвешенном состоянии, DOP — к растворенному фосфору, O_2 — к растворенному кислороду, NO_3 — к нитратам, NO_2 — к нитритам, NH_4 — к аммонию (аммонийному азоту), N — к общему органическому азоту, Si — к растворенному неорганическому кремнию (включая кремнезем и силикаты), H_2S — к сероводороду (включая и элементарную серу).

$\vec{V} \equiv (u,v,w)^T$ — трехмерный вектор скорости водной среды, u, v, w — компоненты вектора $\vec{V}$, направленные вдоль координатных осей Ox, Oy и Oz соответственно. Предполагается, что ось Ox направлена на север, Oy — на восток, Oz — вертикально вниз, так что заданная система координат образует правую тройку векторов. Начало системы координат располагается на невозмущенной поверхности воды, $\vec{k} = (K_h, K_h, K_v)^T$ — коэффициент турбулентного обмена (турбулентной диффузии), где K_h — коэффициент турбулентной диффузии по каждому из координатных направлений Ox и Oy, который для простоты будем считать постоянным, K_v — коэффициент турбулентного обмена по вертикальному направлению Oz.

Сформулируем математическую модель применительно к Таганрогскому заливу и Азовскому морю. Заметим, что она описывается 10 уравнениями вида (1), т. е. уравнениями диффузии-конвекции функций правых частей $R_{qi} = R_{qi}(x, y, z, t)$, зависящими от искомых решений, от температуры водной среды (T_{temp}) и её солености (S) в соответствии с уравнениями (2)–(14) [8]:

$$R_{F_i}=C_{F_i}\left(1-K_{F_iR}\right)q_{F_i}-K_{F_iD}q_{F_i}-K_{F_iE}q_{F_i},\quad i=\overline{1,3}, \tag{2}$$

$$R_{POP}=\sum_{i=1}^{3}s_P K_{F_iD}q_{F_i}-K_{PD}q_{POP}-K_{PN}q_{POP}, \tag{3}$$

$$R_{DOP}=\sum_{i=1}^{3}s_P K_{F_iE}q_{F_i}+K_{PD}q_{POP}-K_{DN}q_{DOP}, \tag{4}$$

$$R_{PO_4}=\sum_{i=1}^{3}s_P C_{F_i}\left(K_{F_iR}-1\right)q_{F_i}+K_{PN}q_{POP}+K_{DN}q_{DOP}, \tag{5}$$

$$R_{NH_4}=\sum_{i=1}^{3}s_N C_{F_i}\left(K_{F_iR}-1\right)\frac{f_N^{(2)}\left(q_{NH_4}\right)}{f_N\left(q_{NO_3},q_{NO_2},q_{NH_4}\right)}q_{F_i}+\sum_{i=1}^{3}s_N\left(K_{F_iD}+K_{F_iE}\right)q_{F_i}-K_{42}q_{NH_4}, \tag{6}$$

$$R_{NO_2}=\sum_{i=1}^{3}s_N C_{F_i}(K_{F_iR}-1)\frac{f_N^{(1)}\left(q_{NO_3},q_{NO_2},q_{NH_4}\right)}{f_N\left(q_{NO_3},q_{NO_2},q_{NH_4}\right)}\cdot\frac{q_{NO_2}}{q_{NO_2}+q_{NO_3}}q_{F_i}+K_{42}q_{NH_4}-K_{23}q_{NO_2}, \tag{7}$$

$$R_{NO_3}=\sum_{i=1}^{3}s_N C_{F_i}\left(K_{F_iR}-1\right)\frac{f_N^{(1)}\left(q_{NO_3},q_{NO_2},q_{NH_4}\right)}{f_N\left(q_{NO_3},q_{NO_2},q_{NH_4}\right)}\cdot\frac{q_{NO_3}}{q_{NO_2}+q_{NO_3}}q_{F_i}+K_{23}q_{NO_2}, \tag{8}$$

$$R_{Si}=s_{Si}C_{F_3}\left(K_{F_3R}-1\right)q_{F_3}+s_{Si}K_{F_3D}q_{F_3}, \tag{9}$$

где K_{FiR} — удельная скорость дыхания фитопланктона; K_{FiD} — удельная скорость отмирания фитопланктона; K_{FiE} — удельная скорость экскреции фитопланктона; K_{PD} — удельная скорость автолиза POP; K_{PN} — коэффициент фосфатофикации POP; K_{DN} — коэффициент фосфатофикации DOP; K_{42} — удельная скорость окисления аммония до нитритов в процессе нитрификации; K_{23} — удельная скорость окисления нитритов до нитратов в процессе нитрификации; S_P, S_N, S_{Si} — нормировочные коэффициенты между содержанием N, P, Si в органическом веществе [6].

Скорость роста фитопланктона определяется выражениями:

$$C_{F_{1,2}}=K_{NF_{1,2}}\ f_{T_{\text{temp}}}(T_{\text{temp}})f_S(S)\min\{f_P(q_{PO_4}),f_N(q_{NO_3},q_{NO_2},q_{NH_4})\}, \tag{10}$$

$$C_{F_3}=K_{NF_3}\ f_{T_{\text{temp}}}(T_{\text{temp}})f_S(S)\min\{f_P(q_{PO_4}),f_N(q_{NO_3},q_{NO_2},q_{NH_4}),f_{Si}(q_{Si})\}, \tag{11}$$

где K_{NF} означает максимальную удельную скорость роста фитопланктона.

Функции зависимости скорости роста гидробионтов от температуры и солености:

$$f_{T_{\text{temp}}}(T_{\text{temp}})=\exp\left(-a_l\{(T_{\text{temp}}-T_{\text{opt}})/T_{\text{opt}}\}^2\right),\quad l=\overline{1,3}, \tag{12}$$

$$f_S(S)=\exp\left(-b_l\{(S-S_{\text{opt}})/S_{\text{opt}}\}^2\right),\quad l=2,3, \tag{13}$$

$$f_S(S)=\begin{cases}k_s, \text{ для } S\le S_{\text{opt}},\\ \exp\left(-b_1\{(S-S_{\text{opt}})/S_{\text{opt}}\}^2\right), \text{ для } S>S_{\text{opt}},\end{cases} \tag{14}$$

где $k_s = 1$; T_{opt}, S_{opt} означают оптимальные температуру и соленость для данного вида фитопланктона; $a_l > 0$, $b_l > 0$ определяются как коэффициенты ширины диапазона толерантности фитопланктона к температуре и солености соответственно.

Граничные и начальные условия для системы уравнений формулируются уравнениями (15)–(17):

$$q_i=0, \text{ на } \sigma \text{ если } u_n<0;\quad \frac{\partial q_i}{\partial n}=0, \text{ на } \sigma, \text{ если } u_n\ge 0; \tag{15}$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial z}=0, \text{ на } \textstyle\sum_o;\quad \frac{\partial q_i}{\partial z}=-\varepsilon_i q_i \text{ на дне } \textstyle\sum_H, \tag{16}$$

$$q_i(x,y,z,0)=q_{0i}(x,y,z),\ \vec{V}(x,y,z,0)=\vec{V_0}(x,y,z),\ t=0,\ i\in M,$$
$$T_{\text{temp}}(x,y,z,0)=T_{\text{temp0}}(x,y,z),\ S(x,y,z,0)=S_0(x,y,z),\ (x,y,z)\in\overline{G}, \tag{17}$$

где ε_i — неотрицательные постоянные; $i \in M$; ε_i учитывает опускание водорослей на дно и их затопление для $i \in \{F_1, F_2, F_3\}$ и учитывает поглощение питательных веществ донными отложениями для $i \in \{PO_4, POP, DOP, O_2, NO_3, NO_2, NH_4, N, Si, H_2S\}$, $u_{\vec{n}}$ — нормальная по отношению к граничной поверхности составляющая вектора скорости водного потока, $\vec{n}$ — вектор внешней нормали к граничной поверхности, T_{temp} — температуры водной среды, S — соленость.

Графически процесс представлен на рис. 3. Отметим, что предполагается использование в функциях правых частей положительных констант.

Для наглядности представим модель и структуру связей рассматриваемой математической модели биологической кинетики и геохимических циклов в виде структурной схемы (рис. 4).

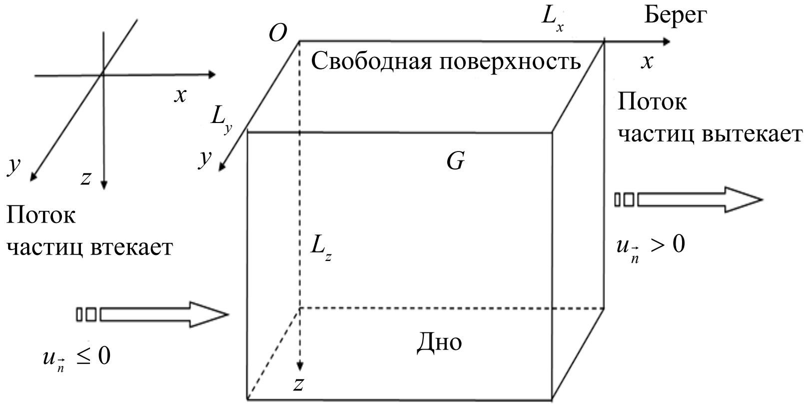


Рис. 3. Схематичное представление рассматриваемой области

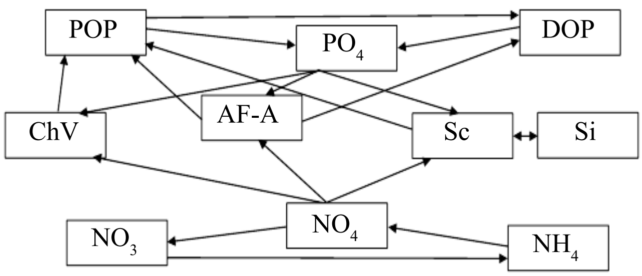


Рис. 4. Структура модели биогеохимической трансформации форм фосфора, азота и кремния

Данная структура была разработана в Институте океанологии им. П.П. Ширшова Российской академии наук Е.В. Якушевым [9–11], а также усовершенствована в работах А.И. Сухинова, А.В. Никитиной, Ю.В. Беловой [2, 3, 5–8]. Сравнение с многочисленными натурными данными подтвердили валидность структуры взаимосвязей между отдельными элементами модели.

Далее осуществлялось исследование существования и единственности решения линеаризованной по правой частям начально-краевой задачи динамики биогеохимических циклов при естественных ограничениях на гладкость входных данных [6–8].

Идея линеаризации состоит в том, что нелинейные правые части берутся с запаздыванием по отношению к моделируемому временному шагу. Предлагается осуществление линеаризации правых частей с использованием равномерной временной сетки ω_τ с шагом по времени τ:

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0,1,\ldots,N; N\tau = T\}.$$

На каждом шаге времени $t_{n-1} < t < t_n$ будем рассматривать линеаризованные по функциям правых частей R_{qi} $(i \in M)$ уравнения (1), решениями которых являются функции $\tilde{q}_i^n$ ($n = 1,2,...N$) вида:

$$\frac{\partial \tilde{q}_i^n}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\vec{V} \cdot \tilde{q}_i^n\right) = \operatorname{div}\left(k_h \frac{\partial \tilde{q}_i^n}{\partial x} + k_h \frac{\partial \tilde{q}_i^n}{\partial y} + k_v \frac{\partial \tilde{q}_i^n}{\partial z}\right) + \tilde{R}_{q_i}^n. \tag{18}$$

После этого можно переходить к исследованию близости решений линеаризованной и исходной начально-краевых задач [8].

Исследование близости решений линеаризованной и исходной начально-краевых задач. Возьмем уравнения (1) и (18) с соответствующими граничными и начальными условиями. Вычитая почленно из уравнений (18) соответствующие уравнения (1) и вводя функцию погрешности линеаризации, получаем задачу, которая имеет вид, характерный для линеаризованной задачи, где вместо функций правой части стоит погрешность аппроксимации правых частей исходной непрерывной задачи:

$$\frac{\partial z_i^n}{\partial t} + u\frac{\partial z_i^n}{\partial x} + v\frac{\partial z_i^n}{\partial y} + w\frac{\partial z_i^n}{\partial z} - \operatorname{div}\left(\vec{k} \cdot \operatorname{grad} z_i^n\right) = \tilde{R}_{q_i}^n - R_{q_i}^n, \tag{19}$$

$$i = 1,...,10,\ n = 1,...,N,\ (x, y, z) \in G,\ t_{n-1} < t < t_n.$$

К системе добавляем соответствующие начальные и граничные условия.

Будем предполагать, что каждая из функций q_i интегрируема «с квадратом» в области G. Введем скалярное произведение функций, таких, что для любого выбранного интервала от 0 до T существуют и ограничены интегралы, каждый из которых есть непрерывно дифференцируемая функция переменной t.

Вводим норму:

$$\|\xi\|_{L_2(x,y,z)} \equiv (\xi,\xi)^{\frac{1}{2}} \equiv \left(\iiint_G \xi^2(x,y,z)\, dxdydz \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, каждая такая норма является неотрицательной функцией переменной, непрерывно дифференцируемой по этой переменной. Умножая обе части уравнения (19) на функцию погрешности линеаризации, а затем интегрируя сначала по области G, а затем по временной переменной t получаем интегральное равенство, которое является квадратичным функционалом:

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iiint_G z_i^n \cdot \frac{\partial z_i^n}{\partial t} dG \right) dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iiint_G z_i^n \cdot \operatorname{div}\left(\vec{V} \cdot z_i^n\right) dG \right) dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iiint_G z_i^n \cdot \operatorname{div}\left(\vec{k} \cdot \operatorname{grad} z_i^n\right) dG \right) dt =$$

$$= \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iiint_G \left(\tilde{R}_{q_i}^n - R_{q_i}^n\right) z_i^n \, dG \right) dt.$$

Используя теорему Остроградского-Гаусса, формулу Грина и неравенства Пуанкаре, приходим к оценке (20):

$$\left\| z_1^n(x,y,z,t_n) \right\|_{L_2(G)}^2 \le \left\| z_1^{n-1}(x,y,z,t_{n-1}) \right\|_{L_2(G)}^2 + \tag{20}$$

$$+2\left[K_{NF_1}\left(1-K_{F_1R}\right) - K_{F_1D} - K_{F_1E} - 4\left[k_h \left(\frac{1}{H_x^2} + \frac{1}{H_y^2} \right) + k_{v_{\min}} \frac{1}{H_z^2} \right] \right] \cdot \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iiint_G \left(z_1^n(x,y,z,t) \right)^2 dG \right) dt,$$

гарантирующей близость (сходимость при $\tau \to 0$) решений линеаризованной и нелинейной задачи. Для субстанции F_1 (исходная функция $q_{F1} \equiv q_1$) в $L_2(G)$ на последовательности сеток, при неотрицательности выражения в квадратных скобках, получаем:

$$\omega_\tau(\tau \to 0): \quad \underset{C_1 \equiv \text{const}>0}{\left\| z_1^n(x,y,z,t_n) \right\|_{L_2(G)}} \le \underset{n=1,2,\ldots,N}{C_1 \tau}.$$

Аналогичным методом оценки можно доказать близость линеаризованных и исходных уравнений для остальных субстанций (биогенных компонентов). После проведенного исследования появляется основа для построения корректной разностной схемы.

Исследование разностной схемы для задачи динамики биогеохимических циклов. При построении дискретной модели будем ориентироваться на линеаризованную цепочку начально-краевых задач, построенную ранее с помощью уравнения (18). Построение выполняется стандартным способом, однако особенностью является кососимметричная запись оператора конвективного переноса, которая гарантирует монотонность при ограничении на шаг по времени и шаги пространства сетки.

При исследовании разностных схем учтены специфические особенности в задании правых частей. При последующем анализе появятся ограничения на величину допустимого шага по времени τ, тем более жесткие, чем больше положительное значение правой части, которая ответственна за рост численности (концентрации) субстанции для фитопланктонных популяций. Остальные функции правых частей ($i = 4,\ldots,10$) при условии непоступления биогенов в рассматриваемую область являются неположительными и поэтому рост концентраций в реальных задачах не наблюдается.

Также для простоты изложения в качестве выбранной области будем рассматривать параллелепипед:

$$G = \left\{ 0 < x < L_x, 0 < y < L_y, 0 < z < L_z \right\}.$$

Для задания сеточных функций концентраций планктонных популяций и биогенных веществ построим равномерную пространственно-временную сетку и будем использовать шаблон разностной схемы (контрольный объём), представленный на рис. 5.

Все неизвестные функции задаются и рассчитываются в узлах шаблона, а функции скоростей, так как они являются входными данными, которые вычисляются на этапе гидродинамического моделирования, рассчитываются в серединах ребер шаблона разностной схемы. Для корректного задания граничных условий второго и третьего родов в разностной схеме будем использовать расширенную пространственную разностную сетку, с отступлением от всех узлов в направлении нормали (перпендикуляра) наружу на расстояние одного шага сетки по соответствующему направлению. Для краткости этот этап опускаем.

Исходя из симметричной формы представления оператора конвективного переноса, приходим к данному оператору в кососимметричном виде: $(x, y, z) \in \omega$, $i = 1,\ldots,10$:

$$C_0 \overline{q}_i^n \equiv \left(\left(u_{r+0,5}^n \overline{q}_{i,r+1}^n - u_{r-0,5}^n \overline{q}_{i,r-1}^n \right) / 2h_x \right) + \left(\left(v_{r+0,5}^n \overline{q}_{i,r+1}^n - v_{r-0,5}^n \overline{q}_{i,r-1}^n \right) / 2h_y \right) \tag{21}$$

$$+ \left(\left(w_{r+0,5}^n \overline{q}_{i,r+1}^n - w_{r-0,5}^n \overline{q}_{i,r-1}^n \right) / 2h_z \right).$$

И к виду оператора диффузионного переноса: $(x, y, z) \in \omega$, $i \in \{F_1, F_2, F_3\}$:

$$Dq_i^n = \left(\left(k_{h,r+0,5}\left(\left(q_{i,r+1}^n - q_i^n\right)/h_x\right) - k_{h,r-0,5}\left(\left(q_i^n - q_{i,r-1}^n\right)/h_x\right)\right)/h_x\right) + \\ + \left(\left(k_{h,r+0,5}\left(\left(q_{i,r+1}^n - q_i^n\right)/h_y\right) - k_{h,r-0,5}\left(\left(q_i^n - q_{i,r-1}^n\right)/h_y\right)\right)/h_y\right) + \\ + \left(\left(k_{v,r+0,5}\left(\left(q_{i,r+1}^n - q_i^n\right)/h_z\right) - k_{v,r-0,5}\left(\left(q_i^n - q_{i,r-1}^n\right)/h_z\right)\right)/h_z\right). \tag{22}$$

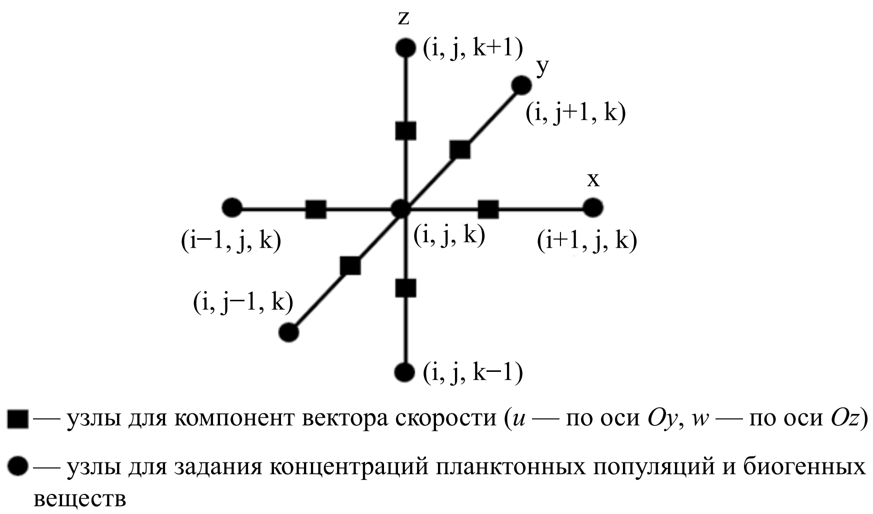


Рис. 5. Схематическое обозначение контрольного объёма и шаблона схемы

В направлении *Ox* и *Oy* аппроксимации имеют место граничные условия Неймана (второго рода). На дне водоёма (*Oz*) приведем результаты аппроксимации граничных условий третьего рода. Здесь и далее для кратности их опустим. Данные аппроксимации справедливы для узлов сетки и имеют погрешность аппроксимации для соответствующих непрерывных (дифференциальных) операторов $O(h^2)$.

Построенные соотношения гарантируют, что погрешность аппроксимации разностной схемы на сетке в норме C ограничена и оценивается неравенством:

$$\max_{1 \le n \le N_T}\left\{\max_{(x,y,z)\in\omega_h}\left|\Psi\left(x, y, z, t_n\right)\right|\right\} \le M \cdot \left(h^2 + \tau\right),\ h^2 \equiv h_x^2 + h_y^2 + h_z^2,\ \mathrm{M} \equiv \mathrm{const} > 0. \tag{23}$$

Предполагается, что на расширенной сетке, о которой говорилось выше, по горизонтальным направлениям существует водная среда и эти величины могут быть определены в гидродинамическом блоке объединённой модели «гидродинамика, фитопланктонные популяции и биогены».

Достаточные условия монотонности и сходимости к решению линеаризованной задачи. При доказательстве монотонности разностной схемы и её сходимости при $|h| \to 0$ и $\tau \to 0$ применим сеточный принцип максимума и следствие из него — оценку решения неоднородного сеточного уравнения в норме *C*. Для удобства последующих выкладок приведем шаблон разностной схемы (рис. 6) с обозначением узлов, которые будут использоваться в канонической форме записи сеточных уравнений общего вида.

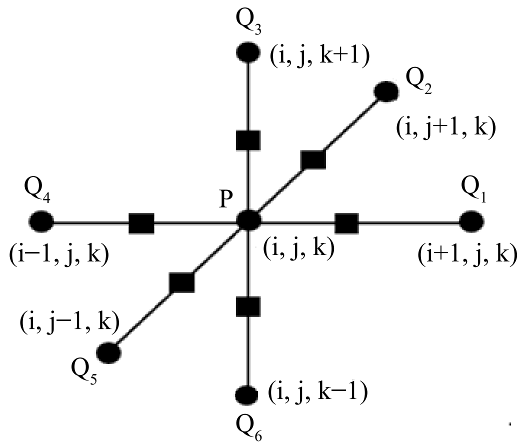


Рис. 6. Шаблон разностной схемы с обозначением узлов

На построенной ранее пространственной сетке будем рассматривать (на верхнем временном слое) сеточное уравнение в канонической форме:

$$A(P)\cdot Y(P)=\sum_{\substack{Q_m\in Ш'(P)\\ m=1,2,\ldots,6}} B(P,Q_m)\cdot Y(Q_m)+F(P), \tag{24}$$

$$P\in\omega,\ P\equiv(x_i,y_j,z_k),\ Y(P)\equiv\bar{q}^n(x_i,y_j,z_k).$$

Значения коэффициентов, а также правых частей будут сформированы для внутренних и граничных узлов отдельно. Следует отметить, что значения компонента вектора скорости, определяемые в полуцелых узлах сетки в гидродинамическом блоке модели, участвуют в формировании всех коэффициентов сеточного уравнения.

При выполнении условия (неравенства) Куранта и ограничения на сеточное число Пекле, определяем допустимые значения шагов по времени τ порядка 20 секунд для прибрежных систем:

$$10^{-4}\le\frac{\left|u^n(x_i\pm0{,}5h_x,y_j,z_k)\right|h_x}{k_h(x_i\pm0{,}5h_x,y_j,z_k)}\le1,\quad \tau\le\frac{10^2}{6\cdot1\,\text{м}/\text{c}}\cong16{,}6\,[\text{c}], \tag{25}$$

$$10^{-4}\le\frac{\left|v^n(x_i,y_j\pm0{,}5h_y,z_k)\right|h_y}{k_h(x_i,y_j\pm0{,}5h_y,z_k)}\le1,\quad \tau\sim16{,}6\,[\text{c}], \tag{26}$$

$$10^{-4}\le\frac{\left|w^n(x_i,y_j,z_k\pm0{,}5h_z)\right|h_y}{k_v(x_i,y_j,z_k\pm0{,}5h_z)}\le1,\quad \tau\le\frac{10^{-1}}{6\cdot10^{-3}\,\text{м}/\text{c}}\cong16{,}6\,[\text{c}]. \tag{27}$$

Для дальнейших исследований устойчивости разностной схемы и сходимости потребуется оценка коэффициентов. Сформулируем теорему применительно к рассматриваемой задаче, используя теорему оценки решения неоднородного сеточного уравнения:

$$z^n(x_i,y_j,z_k)\equiv z^n(P)=0,\ P\in\overline{\omega}^*\setminus\overline{\omega}.$$

Для удобства применения используем расширенную сетку, на которой выполняются условия теоремы.

Теорема. Если:

$$D(P)\equiv A(P)-\sum_{\substack{Q_m\in Ш'(P)\\ m=1,2,\ldots,6}} B(P,Q_m)>0,\ B(P,Q_m)\ge0,\ m=1,2,\ldots,6,$$

во всех узлах связанной сетки $\overline{\omega}$, то для решения задачи:

$$A(P)z^n(P)-\sum_{\substack{Q_m\in Ш'(P)\\ m=1,2,\ldots,6}} B(P,Q_m)z^n(Q_m)=F(P),-P\in\overline{\omega},\ z^n(P)=0,\ P\in\Upsilon_n^*\equiv\overline{\omega}^*\setminus\overline{\omega},$$

справедлива оценка:

$$\left\|z^n\right\|_{C(\overline{\omega})}\le\left\|\frac{\Psi(x,y,z,t_n)}{D(x,y,z,t_n)}\right\|_{C(\overline{\omega})}.$$

Ориентируясь на каноническую форму сеточного уравнения для построенной разностной схемы во внутренних и граничных узлах основной сетки, при выполнении условия (неравенства) Куранта и ограничения на сеточное число Пекле, при оценке для $D(P)$ снизу:

$$D(P)\equiv A(P)-\sum_{m=1}^{6}B(P,Q_m)\ge\frac{1}{\tau}-\frac{1}{4\tau}-\frac{1}{2\tau}=\frac{1}{4\tau},$$

гарантируем монотонность и устойчивость.

Таким образом, можно вернуться к оценке погрешности на основе построенной дискретной модели. При переходе с временного слоя номера «n–1» на временной слой «n» в соответствии с **Теоремой** имеем:

$$\left\|z^n\right\|_{C(\overline{\omega})}\le\left\|\frac{\Psi(x,y,z,t_n)}{D(x,y,z,t_n)}\right\|\le4M\left(h^2+\tau\right)\tau,$$

$$\left\|z^n\right\|^T\le\left\|z^{N_T}\right\|\le4\sum_{n=1}^{N_T}M\left(h^2+\tau\right)\tau=4MN_T\tau\left(h^2+\tau\right)\le4MT\left(h^2+\tau\right)\equiv K\left(h^2+\tau\right),$$

где $K\equiv4MT$ — константа.

С учетом полученной оценки погрешности аппроксимации получаем сходимость разностной схемы со скоростью $O(|h|^2+\tau)$. Полученная система сеточных уравнений для всех субстанций (концентраций фитопланктона, а также биогенных веществ) имеет в реальных задачах высокую размерность.

О численной реализации построенной разностной схемы. Систему решаемых сеточных уравнений в операторном виде можно представить в виде:

$$\frac{\overline{q}_i^{\,n+1}-\overline{q}_i^{\,n}}{\tau}+C_0 q_i^{n+1}-Dq_i^{n+1}-Q_i q_i^{n+1}=R_i^n,\ n=0,1,\ldots,N\mp1,\ i\in\{F_1,F_2,F_3,4,\ldots,10\}.$$

С учётом особенной построенной разностной схемы за счёт выбора достаточно малого шага по времени τ и можно использовать метод Зейделя $(D_i \neq D)$.

Пусть

$$A_i \equiv A_i^- + D_i + A_i^+,$$

$$\left(A_i^- + D_i\right)\overline{q}_i^{\,n+1,S+1} = A_i^+\overline{q}_i^{\,n+1,S} + R_i^n,$$

где начальные приближения на каждом временном слое $n = 1, 2, \ldots, N_T$ задаются исходя из полученных «финальных» значений итерационного процесса для искомой сеточной функции на предыдущем временном слое, а $n=0,\ n+1=1,\ \overline{q}_i^{\,1,0}$ для определяется исходя из начальных условий для исходной краевой задачи.

Анализ показывает, что знаменатель ρ геометрической прогрессии входит в оценку:

$$\left\|z_i^{n+1,S+1}\right\|_{C(\overline{\omega})} \le \rho \left\|z_i^{n+1,S}\right\|_{C(\overline{\omega})}.$$

Число временных шагов, для которых необходимо решать данные системы, составит от 10^3 до 10^5 итераций. Указанные особенности сеточных задач, особенно при оперативном прогнозе водной экосистемы, могут потребовать применения высокопроизводительных вычислительных систем со многими тысячами процессоров, однако эта тематика выходит за границы данного исследования, в котором параллельные алгоритмы не рассматриваются.

Поскольку схема является системой сеточных уравнений с гарантированным диагональным преобладанием, возникает возможность использовать простой, но достаточно эффективный метод Зейделя, который будет сходиться при решении сеточных уравнений высокой размерности со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем 0,75–0,8.

Обсуждение и заключение. Для проверки соответствия составленных математических моделей гидродинамики и биологической кинетики автор использовал экспедиционные данные. Программный модуль «Azov3d», основываясь на полученных начальных данных, введенных в систему автоматически, моделирует динамику изменения концентраций трех видов фитопланктона и биогенных веществ в Таганрогском заливе для временного интервала 30 суток (06.08.2020 –10.09.2020 г.), рис. 7.

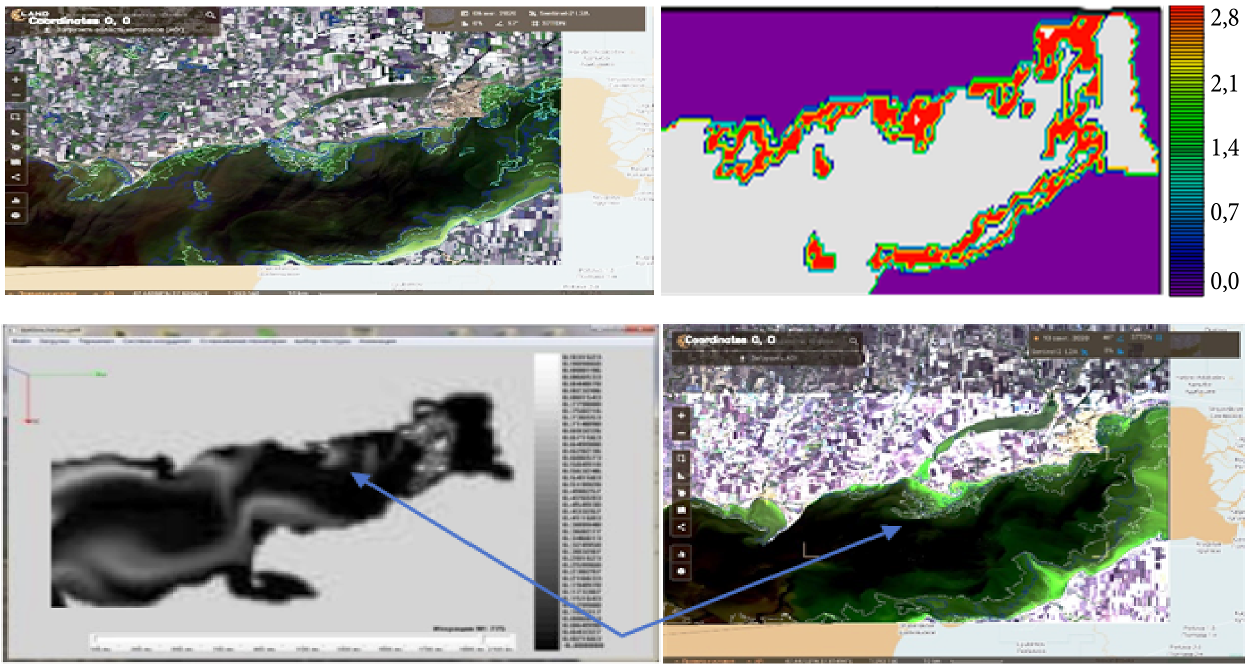


Рис. 7. Моделирование динамики концентраций фитопланктона ИПК «Azov3d»

Результаты работы программного модуля, входящего в состав ИПК «Azov3d», наглядно иллюстрируют возможности определения контуров на поверхности воды и позволяют проследить их изменение с течением времени в поверхностном слое водоема. С помощью этой модели можно предсказывать возможные изменения в прибрежных экосистемах и разрабатывать стратегии по их защите. Полученные результаты позволяют существенно сократить время прогностических расчетов (на 20–30 %) и повысить вероятность заблаговременного обнаружения неблагоприятных и опасных явлений, таких как интенсивное «цветение» водной среды и образование зон заморов в прибрежных системах.

Математическое моделирование на основе космических снимков может быть полезным инструментом для проведения исследований прибрежных систем и разработки стратегий сохранения её экосистемы. Однако для эффективного использования этого метода необходимо продолжать совершенствовать математические модели и улучшать доступ к данным, собранным с помощью космических аппаратов.

Список литературы

1. Панасенко Н.Д., Атаян А.М., Мотуз Н.С. Обработка и усвоение данных космического зондирования для осуществления мониторинга текущего состояния разнородных объектов на поверхности водоемов. *Инженерный вестник Дона*. 2020;12(72):121–134.

2. Сухинов А.И., Атаян А.М., Белова Ю.В. и др. Обработка данных натурных измерений экспедиционных исследований для математического моделирования гидродинамических процессов Азовского моря. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2020;13(2):161–174. https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.2.13

3. Sukhinov A., Panasenko N., Simorin A. Algorithms and programs based on neural networks and local binary patterns approaches for monitoring plankton populations in sea systems. In: *E3S Web of Conferences*. 2022;363:02027. https://doi.org/10.1051/e3sconf/202236302027

4. Panasenko N.D., Poluyan A.Y., Motuz N.S. Algorithm for monitoring the plankton population dynamics based on satellite sensing data. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021;2131(3):032052.

5. Sukhinov A.I., Protsenko S.V., Panasenko N.D. Mathematical modeling and ecological design of the marine systems taking into account multi-scale turbulence using remote sensing data. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2022;6(3):104–113. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2022-1-3-104-113

6. Sukhinov A., Belova Y., Nikitina, A., et al. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the dynamics of biogeochemical cycles in coastal systems problem. *Mathematics*. 2022;10(12):2092. https://doi.org/10.3390/math10122092

7. Сухинов А.И., Белова Ю.В., Чистяков А.Е. Моделирование биогеохимических циклов в прибрежных системах Юга России. *Математическое моделирование.* 2021;33(3):20–38. https://doi.org/10.20948/mm-2021-03-02

8. Sukhinov A., Belova Y., Panasenko N., et al. Research of the solutions proximity of linearized and nonlinear problems of the biogeochemical process dynamics in coastal systems. *Mathematics*. 2023;11(3):575. https://doi.org/10.3390/math11030575

9. Yakushev E.V., Pollehne F., Jost G., et al. Analysis of the water column oxic/anoxic interface in the Black and Baltic seas with a numerical model. *Marine Chemistry*. 2007;107:388–410. https://doi.org/10.1016/j.marchem.2007.06.003

10. Yakushev E.V., Wallhead P., Renaud P.E., et al. Understanding the biogeochemical impacts of fish farms using a benthic-pelagic model. *Water* (Switzerland). 2020;12(9):2384. https://doi.org/10.3390/W12092384

11. Yakushev E., Pogojeva M., Polukhin A., et al. Arctic inshore biogeochemical regime influenced by coastal runoff and glacial melting (case study for the Templefjord, Spitsbergen). *Geosciences* (Switzerland). 2022;12(1):44. https://doi.org/10.3390/geosciences12010044

References

1. Panasenko N.D., Atayan A.M., Motuz N.S. Processing and assimilation of space sensing data for monitoring the current state of heterogeneous objects on the surface of reservoirs. *Engineering Bulletin of the Don*. 2020;12(72):121–134. (In Russ.).

2. Sukhinov A.I., Atayan A.M., Belova Yu.V., et al. Processing data from field measurements of expeditionary research for mathematical modeling of hydrodynamic processes in the Sea of Azov. *Computational continuum mechanics*. 2020;13(2):161–174. (In Russ.). https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.2.13

3. Sukhinov A., Panasenko N., Simorin A. Algorithms and programs based on neural networks and local binary patterns approaches for monitoring plankton populations in sea systems. In: *E3S Web of Conferences*. 2022;363:02027. https://doi.org/10.1051/e3sconf/202236302027

4. Panasenko N.D., Poluyan A.Y., Motuz N.S. Algorithm for monitoring the plankton population dynamics based on satellite sensing data. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021;2131(3):032052.

5. Sukhinov A.I., Protsenko S.V., Panasenko N.D. Mathematical modeling and ecological design of the marine systems taking into account multi-scale turbulence using remote sensing data. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2022;6(3):104–113. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2022-1-3-104-113

6. Sukhinov A., Belova Y., Nikitina A., et al. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the dynamics of biogeochemical cycles in coastal systems problem. *Mathematics.* 2022;10(12):2092. https://doi/org/10.3390/math10122092

7. Sukhinov A.I., Belova Yu.V., Chistyakov A.E. Modelling of biogeochemical cycles in coastal systems of the South of Russia. *Mathematical modelling*. 2021;33(3):20–38. (In Russ.). https://doi.org/10.20948/mm-2021-03-02

8. Sukhinov A., Belova Y., Panasenko N., et al. Research of the solutions proximity of linearized and nonlinear problems of the biogeochemical process dynamics in coastal systems. *Mathematics*. 2023;11(3):575. https://doi.org/10.3390/math11030575

9. Yakushev E.V., Pollehne F., Jost G., et al. Analysis of the water column oxic/anoxic interface in the Black and Baltic seas with a numerical model. *Marine Chemistry*. 2007;107:388–410. https://doi.org/10.1016/j.marchem.2007.06.003

10. Yakushev E.V., Wallhead P., Renaud P.E., et al. Understanding the biogeochemical impacts of fish farms using a benthic-pelagic model. *Water* (Switzerland). 2020;12(9):2384. https://doi.org/10.3390/W12092384

11. Yakushev E., Pogojeva M., Polukhin A., et al. Arctic inshore biogeochemical regime influenced by coastal runoff and glacial melting (case study for the Templefjord, Spitsbergen). *Geosciences* (Switzerland). 2022;12(1):44. https://doi.org/10.3390/geosciences12010044

Поступила в редакцию 10.10.2023
Поступила после рецензирования 30.10.2023
Принята к публикации 07.11.2023

Об авторе:

Панасенко Наталья Дмитриевна, старший преподаватель кафедры вычислительных систем и информационной безопасности, Донской государственный технический университет (РФ, 344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), ORCID, ScopusID, ResearcherID, AutorID, natalija93_93@mail.ru

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Received 10.10.2023
Revised 30.10.2023
Accepted 07.11.2023

About the Author:

Natalya D. Panasenko, Senior Lecturer of the Department of Computer Systems and Information Security, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, RF, 344003), ORCID, ScopusID, ResearcherID, AutorID, natalija93_93@ mail.ru

Conflict of interest statement

The author declares that there is no conflict of interest.

The author read and approved the final version of the manuscript.