

# Computational Mathematics and Information Technologies

Вычислительная  
математика /  
Computational  
Mathematics

Математическое  
моделирование /  
Mathematical Modelling

Информационные  
технологии /  
Information Technologies





# Computational Mathematics and Information Technologies

Рецензируемый научно-теоретический журнал (издаётся с 2017 года)

eISSN 2587-8999

DOI: 10.23947/2587-8999

Том 8, № 1, 2024

Журнал «Computational Mathematics and Information Technologies» ориентирован на фундаментальные и прикладные исследования по следующим научным разделам:

1. Вычислительная математика
2. Математическое моделирование
3. Информационные технологии

---

<i>Индексация</i>	РИНЦ, CrossRef, CyberLeninka
<i>Наименование органа, зарегистрировавшего издание</i>	Свидетельство о регистрации средства массовой информации ЭЛ № ФС 77 – 66529 от 21 июля 2016 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций
<i>Учредитель и издатель</i>	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ)
<i>Периодичность</i>	4 выпуска в год
<i>Адрес учредителя и издателя</i>	344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1
<i>E-mail</i>	<a href="mailto:CMIT-EJ@yandex.ru">CMIT-EJ@yandex.ru</a>
<i>Телефон</i>	+7(863) 273–85–14
<i>Сайт</i>	<a href="https://cmit-journal.ru">https://cmit-journal.ru</a>
<i>Дата выхода в свет</i>	29.03.2024



# Computational Mathematics and Information Technologies

Peer-reviewed scientific and theoretical journal (published since 2017)

eISSN 2587-8999

DOI: 10.23947/2587-8999

Vol. 8, no. 1, 2024

The scope of “Computational Mathematics and Information Technologies” is focused on fundamental and applied research according to the following scientific sections:

1. Computational Mathematics
2. Mathematical Modelling
3. Information Technologies

---

<i>Indexing</i>	RSCI, Crossref, Cyberleninka
<i>Name of the body that registered the publication</i>	Mass media registration certificate ЭЛ № ФС 77-66529 dated July 21, 2016 issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media
<i>Founder and publisher</i>	Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education Don State Technical University (DSTU)
<i>Periodicity</i>	4 issues per year
<i>Address of the founder and publisher</i>	1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation
<i>E-mail</i>	<a href="mailto:CMIT-EJ@yandex.ru">CMIT-EJ@yandex.ru</a>
<i>Telephone</i>	+7(863) 273–85–14
<i>Website</i>	<a href="https://cmit-journal.ru">https://cmit-journal.ru</a>
<i>Date of publication</i>	29.03.2024

**Редакционная коллегия**

**Главный редактор**, Сухинов Александр Иванович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Россия), [MathSciNet](#), [eLibrary.ru](#), [ORCID](#), [ResearcherID](#), [Scopus](#), [sukhinov@gmail.com](mailto:sukhinov@gmail.com), [spu-40.4@donstu.ru](mailto:spu-40.4@donstu.ru)

**Заместитель главного редактора**, Якобовский Михаил Владимирович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия), [eLibrary.ru](#), [ORCID](#)

**Ответственный секретарь**, Петров Александр Пхоун Чжо, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия), [eLibrary.ru](#), [ИСТИНА](#), [ORCID](#), [ResearcherID](#), [Scopus](#)

**Воеводин Владимир Валентинович**, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

**Гасилов Владимир Анатольевич**, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

**Гущин Валентин Анатольевич**, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт автоматизации проектирования РАН (Москва, Россия)

**Лазарева Галина Геннадьевна**, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор РАН, Российский университет дружбы народов (Москва, Россия)

**Марчук Владимир Иванович**, доктор технических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Россия)

**Петров Игорь Борисович**, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Московский физико-технический институт (государственный университет) (Москва, Россия)

**Поляков Сергей Владимирович**, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

**Тишкин Владимир Федорович**, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

**Четверушкин Борис Николаевич**, академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор, научный руководитель Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

**Чистяков Александр Евгеньевич**, доктор физико-математических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Россия)

## Editorial Board

**Editor-in-Chief**, Alexander I. Sukhinov, Corresponding member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russia), [MathSciNet](#), [eLibrary.ru](#), [ORCID](#), [ResearcherID](#), [Scopus](#), [sukhinov@gmail.com](mailto:sukhinov@gmail.com), [spu-40.4@donstu.ru](mailto:spu-40.4@donstu.ru)

**Deputy Chief Editor**, Mikhail V. Yakobovski, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia), [eLibrary.ru](#), [ORCID](#)

**Executive Secretary**, Alexander P. Petrov Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head Scientist Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia), [eLibrary.ru](#), [Istina](#), [ORCID](#), [ResearcherID](#), [Scopus](#)

**Vladimir V. Voevodin**, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russia)

**Vladimir A. Gasilov**, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia)

**Valentin A. Gushchin**, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Institute of Computer Aided Design, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia)

**Galina G. Lazareva**, Corresponding member of RAS, Dr. Sci. (Phys.-Math), Professor of RAS, RUDN University, (Moscow, Russia)

**Vladimir I. Marchuk**, Dr.Sci. (Eng.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russia)

**Igor B. Petrov**, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Moscow Institute of Physics and Technology (State University) (Moscow, Russia)

**Sergey V. Polyakov**, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia)

**Vladimir F. Tishkin**, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia)

**Boris N. Chetverushkin**, Academician of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia)

**Alexander E. Chistyakov**, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russia)

## Содержание

Поздравление с юбилеем академика РАН Б.Н. Четверушкина .....	7
Поздравление с юбилеем члена-корреспондента РАН В.Ф. Тишкина .....	10

### ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Развитие суперкомпьютерных технологий в ИММ РАН и ИПМ им. М.В. Келдыша РАН .....	12
<i>М.В. Якобовский, М.А. Корнилина</i>	
Параллельные алгоритмы численного решения пространственно-трехмерных задач диффузии-конвекции взвесей в прибрежных системах на основе схем расщепления .....	29
<i>В.В. Сидорякина, Д.А. Соломаха</i>	

### ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Расчет нагрева композитного материала при воздействии на поверхность электронным пучком .....	36
<i>В.А. Окишев, Г.Г. Лазарева, В.А. Попов</i>	
Разностный метод решения интегро-дифференциального уравнения параболического типа в многомерной области с неоднородными краевыми условиями первого рода .....	43
<i>З.В. Бештокова</i>	

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Моделирование турбулентных потоков вблизи берегозащитных сооружений с использованием различных моделей турбулентности .....	55
<i>С.В. Проценко</i>	

## Contents

<b>Congratulations to Academician of RAS Boris Nikolaevich Chetverushkin .....</b>	<b>7</b>
<b>Congratulations to Corresponding Member of RAS Vladimir Fyodorovich Tishkin .....</b>	<b>10</b>

### **INFORMATION TECHNOLOGIES**

<b>Development of Supercomputer Technologies at the Institute of Mathematical Modelling and Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences .....</b>	<b>12</b>
<i>M.V. Yakobovskiy, M.A. Kornilina</i>	
<b>Parallel Algorithms for Numerical Solution of Spatially Three-Dimensional Diffusion-Convection Equations in Coastal Systems Based on Splitting Schemes ...</b>	<b>29</b>
<i>V.V. Sidoryakina, D.A. Solomakha</i>	

### **COMPUTATIONAL MATHEMATICS**

<b>Surface Heating Calculation of Composite Material Under the Influence of an Electron Beam on the Surface .....</b>	<b>36</b>
<i>V.A. Okishev, G.G. Lazareva, V.A. Popov</i>	
<b>Finite Difference Method for Solving Parabolic-Type Integro-Differential Equations in Multidimensional Domain with Nonhomogeneous First-Order Boundary Conditions .....</b>	<b>43</b>
<i>Z.V. Beshtokova</i>	

### **MATHEMATICAL MODELLING**

<b>Modelling Turbulent Flows near Coastal Structures Using Various Turbulence Models .....</b>	<b>55</b>
<i>S.V. Protsenko</i>	

## ЮБИЛЕЙ УЧЕНОГО ANNIVERSARY OF THE SCIENTIST



### *Академику Российской академии наук Четверушкину Борису Николаевичу — 80 лет!*

Борис Николаевич Четверушкин родился 26 января 1944 года в Москве. В 1966 году окончил факультет управления и прикладной математики Московского физико-технического института (МФТИ), в 1968 году — аспирантуру МФТИ. Далее работал в Институте прикладной математики АН СССР (с 1978 г. — ИПМ им. М.В. Келдыша): младшим научным сотрудником, научным сотрудником, старшим научным сотрудником, заведующим сектором. В период с 1990 по 1998 год — зам. директора Института математического моделирования РАН (ИММ РАН); с 1998 по 2008 год — директор ИММ РАН. В 2008 году в связи с объединением ИПМ им. М.В. Келдыша РАН и Института математического моделирования РАН назначен на должность директора ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. С 2016 года — научный руководитель Института.

С 1972 года преподаёт на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова: сначала на кафедре вычислительной математики, затем, с 1982 года, на кафедре вычислительных методов: ассистентом (1972–1978), доцентом (1978–1989), профессором (с 1989). В настоящее время — зав. кафедрой вычислительных методов факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова, зав. базовой кафедрой математического моделирования и прикладной математики МФТИ.

Член-корреспондент РАН с 2000 года, академик РАН с 2011 года — отделение математических наук.

Академик Б.Н. Четверушкин — выдающийся российский математик, крупный специалист в области прикладной математики, параллельных вычислений и математического моделирования, механики сплошной среды, автор фундаментальных результатов, которые получили международную известность и признание. Им разработаны алгоритмы для решения задач динамики излучающего газа, в том числе оригинальный метод лебеговского осреднения по частоте фотонов и « $\alpha$ - $\beta$ » итерационный метод решения систем сеточных уравнений, предложен новый подход к решению задач гидро- и газовой динамики — кинетические разностные схемы. Достижения последнего времени Б.Н. Четверушкина связаны с построением и обоснованием регуляризованных явных разностных схем для уравнений параболического типа — включением в структуру уравнений разностных производных по времени второго порядка с временным множителем, определяемым исходя из детализации пространственно-временных масштабов процессов в сплошных средах. Это позволило во многие десятки и сотни раз сократить время численного решения широкого класса задач механики сплошных сред на многопроцессорных системах. Данные методы применялись для решения важных фундаментальных и прикладных проблем, связанных с совершенствованием ракетно-ядерного щита нашей страны.

Коллектив редколлегии журнала «Вычислительная математика и информационные технологии», коллеги Бориса Николаевича сердечно поздравляют дорогого и глубокоуважаемого юбиляра с 80-ым днем рождения, желают ему крепкого здоровья, новых идей и творческих достижений, большого человеческого счастья!

#### **Редакционная коллегия журнала**

#### ***Computational Mathematics and Information Technologies***

*Главный редактор* — Сухинов Александр Иванович,

*Заместитель главного редактора* — Якововский Михаил Владимирович,

*Ответственный секретарь* — Петров Александр Пхоун Чжо,

Василевский Юрий Викторович,

Воеводин Владимир Валентинович,

Гасилов Владимир Анатольевич,

Гущин Валентин Анатольевич,

Лазарева Галина Геннадьевна,

Марчук Владимир Иванович,

Петров Игорь Борисович,

Поляков Сергей Владимирович,

Тишкин Владимир Федорович,

Чистяков Александр Евгеньевич.

*Краткая справка об основных научных достижениях  
академика РАН Б.Н. Четверушкина*

Борис Николаевич Четверушкин — ведущий специалист в области прикладной математики, параллельных вычислений и математического моделирования, механики сплошной среды, автор фундаментальных результатов, которые получили международную известность и признание. Им разработаны алгоритмы для решения задач динамики излучающего газа, в том числе оригинальный метод лебеговского осреднения по частоте фотонов, предложен новый подход к решению задач гидро- и газовой динамики — кинетические разностные схемы. Эти методы применялись для решения актуальных научных и прикладных проблем государственной важности.

Б.Н. Четверушкиным был разработан ряд оригинальных методов решения задач магнитной радиационной газовой динамики. Наиболее интересен предложенный им новый метод осреднения по группам при использовании многогруппового приближения для решения задач переноса.

Б.Н. Четверушкиным, а впоследствии его учениками и сотрудниками, предложено обобщение классического алгоритма прогонки, заключающееся в одновременном итерировании как значений искомой функции, так и прогоночных коэффициентов (названное автором « $\alpha$ - $\beta$  итерационный алгоритм»).

Б.Н. Четверушкин с группой коллег получил выдающиеся результаты, связанные с новым важным классом задач: математическим моделированием субмикронных полупроводниковых приборов. Академик внес важный вклад в создание квазигидродинамической модели, позволившей правильно описывать электронно-дырочную плазму в новой области. Успешно развил разработанные ранее алгоритмы для решения задач моделирования полупроводниковых приборов.

Основываясь на накопленном опыте решения кинетических уравнений, Б.Н. Четверушкин предложил новый подход к построению разностных схем для уравнений газовой динамики — кинетически-согласованные разностные схемы. Основной идеей здесь явилось использование разностных схем для уравнений Больцмана и последующее их осреднение. Исследование полученных таким образом уравнений показало ряд существенных их преимуществ по сравнению с традиционными схемами. В настоящее время это направление успешно развивается как в его работах, так и в работах его учеников, а также другими группами исследователей, в том числе и за рубежом.

Б.Н. Четверушкиным разработана теория моделирования на основе оригинальных кинетически-согласованных разностных схем течений вязкого газа и жидкости, представляющих наибольший интерес в современной вычислительной гидродинамике и связанных с нею задачах неустановившихся и переходных течений, аэроакустики, моделирования процессов горения. Как показали проведенные в последние годы исследования, этот подход показал свою эффективность при решении задач магнитной гидродинамики, высокотемпературной газодинамики и физики плазмы. Данный подход показал свою плодотворность при решении наиболее трудных для численного моделирования задач современной аэродинамики.

Выполненные Б.Н. Четверушкиным пионерские расчеты ряда сложных задач на компьютерах новой архитектуры (транспьютерах), открыли, по существу, новое крупное и бурно развивающееся направление — математическое моделирование сверхсложных процессов на современных суперкомпьютерах с использованием новейших технологий параллельных вычислений. Под его руководством созданы многопроцессорные программы для решения различных задач науки и техники. Расчеты, проведенные с их помощью, демонстрируют практическую эффективность многопроцессорных транспьютерных систем и суперкомпьютеров следующих поколений.

Б.Н. Четверушкин является одним из пионеров использования первых появившихся в нашей стране многопроцессорных систем с распределенной памятью. Им успешно разрабатывается концепция вычислительных алгоритмов, адаптируемых к архитектуре многопроцессорных ЭВМ с распределенной памятью, создаются модели, алгоритмы и математическое обеспечение, позволяющие успешно моделировать на высокопроизводительных многопроцессорных системах научные и технические задачи. В 2010 году, опираясь на эти научные подходы, была обоснована необходимость и перспективность создания первого в России гибридного вычислительного комплекса К-100, успешно разработанного и введенного в эксплуатацию высококвалифицированными специалистами ИПМ им. М.В. Келдыша РАН и дружественных организаций.

Разработанные Б.Н. Четверушкиным и под его руководством алгоритмы и прикладное программное обеспечение (программы визуализации данных высокопроизводительных вычислений, программы рационального разбиения на подобласти для регулярных и неструктурированных сеток) успешно применяются для расчета задач механики сплошной среды.

Важным научным достижением Б.Н. Четверушкина, имеющим фундаментальный характер и прикладное значение, является построение и обоснование регуляризованных явных разностных схем для уравнений параболического типа — включением в структуру уравнений разностных производных по времени второго порядка с временным множителем, определяемым исходя из детализации пространственно-временных масштабов процессов в сплошных средах. Это позволило во многие десятки и сотни раз сократить время численного решения широкого класса задач механики сплошных сред на многопроцессорных системах. Ученый занимается вопросами практического применения массивных параллельных вычислительных систем для решения сложных задач науки и техники.

В сфере научных интересов Б.Н. Четверушкина находятся алгоритмы для существенно многоядерных процессоров на основе графических плат и их использование для решения задач математической физики. Он и его ученики уделяют много внимания решению проблем экологии, связанных с разработкой на основе математического моделирования экологически чистого процесса сжигания органических топлив. Полученные результаты позволяют надеяться на существенное снижение выбросов в атмосферу оксидов азота при сгорании метана. Другим важным направлением этой деятельности является моделирование задач, связанных с добычей нефти и газа.

Б.Н. Четверушкин — ведущий участник большого количества престижных научных форумов, участвует в работе Европейской ассоциации вычислительной и прикладной математики ECCOMAS. Задействован в проекте «Математическая генеалогия». Б.Н. Четверушкин заведует кафедрой математического моделирования и прикладной математики МФТИ, базовая организация кафедры — ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Создание кафедры стало отражением возросшей роли методологии математического моделирования в современном научно-техническом прогрессе. Сущность математического моделирования состоит в замене исходного объекта его «образом» — математической моделью. В дальнейшем модель изучается с помощью реализуемых на компьютерах вычислительно-логических алгоритмов. Этот метод познания, конструирования и проектирования сочетает в себе многие достоинства как теории, так и эксперимента. Неудивительно, что методология математического моделирования бурно развивается, охватывая все новые и новые сферы — от разработки технических систем и управления ими до анализа сложнейших экономических и социальных процессов. Триада «модель — алгоритм — программа», сформулированная академиком А.А. Самарским, сегодня является интеллектуальным ядром информационных технологий.

Б.Н. Четверушкин возглавляет кафедру вычислительных методов факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова. Главная задача кафедры — готовить специалистов, способных создавать новые вычислительные алгоритмы, а также использовать их для решения научных и технологических задач на высокопроизводительных системах. Б.Н. Четверушкиным создана научная школа, разрабатывающая модели, алгоритмы и математическое обеспечение, позволяющее успешно моделировать на высокопроизводительных вычислительных системах научные и технические задачи. Многие из его учеников стали известными учеными, среди них члены-корреспонденты РАН, более 10 докторов и несколько десятков кандидатов наук.

Б.Н. Четверушкин — главный редактор журнала «Математическое моделирование», член редколлегии журнала «Вычислительная математика и математическая физика», главный редактор сериального научного издания «Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша». Б.Н. Четверушкин — автор более 400 научных работ, в том числе четырех монографий и четырех изобретений. Специалисты в области прикладной математики и численных методов математической физики высоко оценивают его труды: «Математическое моделирование задач динамики излучающего газа», «Experimentation, modelling and computation in flow, turbulence and combustion» (под редакцией Б.Н. Четверушкина), «Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике: новая модель вязкого газа, алгоритмы, параллельная реализация, приложения», «Высокопроизводительные многопроцессорные вычислительные системы: проблемы использования и подготовки кадров», «Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений», «Решение одномерных задач радиационной газовой динамики», «Проект NuFuSE и разработка РМГД-методик для предсказательного моделирования процессов в энергетических термоядерных устройствах», «Модель академика А.А. Самарского: избранные статьи. Очерки. Документы» (составление и редакция: Б.Н. Четверушкин) и многие другие его работы.

## ЮБИЛЕЙ УЧЕНОГО ANNIVERSARY OF THE SCIENTIST



**Члену-корреспонденту РАН,  
доктору физико-математических наук, профессору  
Владимиру Фёдоровичу Тишкину — 75 лет!**

23 февраля 2024 года исполнилось 75 лет со дня рождения крупному российскому ученому в области математического моделирования и вычислительной математики, члену-корреспонденту Российской академии наук, доктору физико-математических наук, профессору, Заслуженному деятелю науки Российской Федерации Владимиру Фёдоровичу Тишкину.

В.Ф. Тишкин родился в городе Саранск. Окончив в 1966 г. школу с золотой медалью, поступил в Московский физико-технический институт на факультет аэрофизики и прикладной математики. После окончания МФТИ в 1972 г. по распределению был направлен во Всесоюзный научно-исследовательский институт экспериментальной физики в г. Арзамас-16. В 1975 г. поступил в аспирантуру Института прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР. Под научным руководством Героя Социалистического труда, академика А.А. Самарского Владимир Фёдорович активно включается в передовые научные исследования. В 1979 г. он становится кандидатом физико-математических наук, а в 1986 г. — доктором физико-математических наук. В 1997 г. ему было присвоено звание профессора. В 2016 г. он был избран в члены-корреспонденты Российской академии наук. Около пятидесяти лет В.Ф. Тишкин плодотворно работает в коллективе Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, его научные работы получили международное признание и высокую оценку в научном сообществе.

Владимир Фёдорович ведет большую научно-организационную работу, он является главным редактором «Журнала Средневолжского математического общества», заместителем главного редактора журнала «Вопросы атомной науки и техники», членом редколлегии журналов «Математическое моделирование», «Вычислительная математика и информационные технологии», а также членом ряда диссертационных, экспертных и ученых советов.

Владимир Фёдорович успешно занимается педагогической деятельностью. Он является профессором кафедры вычислительных методов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, кафедры вычислительных методов и программирования Московского авиационного института (технического университета), заведующим базовой кафедрой математического моделирования сложных социально-технических систем Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета. Среди его учеников три доктора и четырнадцать кандидатов физико-математических наук.

Друзья, коллеги и ученики горячо поздравляют Владимира Фёдоровича с 75-летием и желают ему здоровья, творческого долголетия и дальнейших успехов на благо российской и мировой науки!

### **Редакционная коллегия журнала**

#### ***Computational Mathematics and Information Technologies***

*Главный редактор* — Сухинов Александр Иванович,

*Заместитель главного редактора* — Якобовский Михаил Владимирович,

*Ответственный секретарь* — Петров Александр Пхоун Чжо,

Василевский Юрий Викторович,

Воеводин Владимир Валентинович,

Гасилов Владимир Анатольевич,

Гущин Валентин Анатольевич,

Лазарева Галина Геннадьевна,

Марчук Владимир Иванович,

Петров Игорь Борисович,

Поляков Сергей Владимирович,

Четверушкин Борис Николаевич,

Чистяков Александр Евгеньевич.

### ***К поздравлениям присоединяются***

Брагин Михаил Дмитриевич,

Змитренко Николай Васильевич,

Криксин Юрий Анатольевич,

Ковалев Владимир Федорович,

Клочкова Людмила Викторовна,

Кулешов Андрей Александрович,

Кучугов Павел Александрович,

Ладонкина Марина Евгеньевна,

Степин Евгений Викторович,

Шпатаковская Галина Васильевна.

*Краткая справка об основных научных достижениях  
члена-корреспондента РАН В.Ф. Тишкина*

В.Ф. Тишкин — ведущий специалист в области разработки новых вычислительных методов для решения задач механики сплошной среды. Им разработан метод опорных операторов, позволяющий строить вычислительные алгоритмы для широкого класса задач математической физики на сетках произвольной структуры. В настоящее время этот метод широко используется для решения актуальных задач как в России, так и за рубежом.

За цикл работ по математическому моделированию агрегатов космического корабля «Буран» В.Ф. Тишкин был награжден медалью «За трудовую доблесть». Под руководством В.Ф. Тишкина разработан пакет прикладных программ «АТЛАНТ», с помощью которого при моделировании лазерного сжатия оболочек впервые было обнаружено определяющее влияние нелинейного насыщения скорости роста возмущений. Этот цикл работ позволил теоретически обосновать возможность использования высокоаспектных оболочечных мишеней для получения термоядерных параметров плазмы.

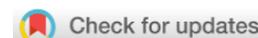
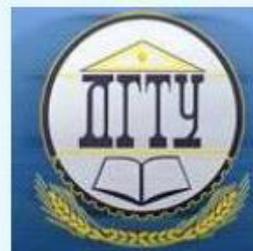
Под руководством В.Ф. Тишкина была выполнена уникальная серия расчетов по прямому численному моделированию развития гидродинамической неустойчивости Рэлея-Тейлора и Рихтмайера-Мешкова, благодаря чему удалось объяснить характер изменения со временем скорости роста зоны перемешивания, что имеет важное значение для определения констант, входящих в приближенные модели турбулентности, используемые для расчетов конкретных конструкций. За цикл работ по этой тематике В.Ф. Тишкин был удостоен премии имени А.Н. Крылова РАН.

В.Ф. Тишкин является автором ряда работ по генерации неструктурированных адаптивных сеток на основе триангуляций Делоне. Предложенная в его работах методика, связанная с использованием метрики кратчайшего пути, позволяет строить эффективные алгоритмы такого типа при наличии произвольных ограничений.

В.Ф. Тишкиным был выполнен цикл работ по применению многосеточных методов для решения уравнений диффузионного типа. Разработанные численные алгоритмы по порядку вычислительных затрат сравнимы с явными схемами, обладают свойствами устойчивости неявных схем и легко ложатся на архитектуру современных многопроцессорных вычислительных комплексов.

Под руководством В.Ф. Тишкина разработаны эффективные алгоритмы для решения задач математической физики методом Галеркина с разрывными базисными функциями. Предложены новые вычислительные алгоритмы для решений уравнений параболического типа, использующие разрывный метод Галеркина на сдвинутых сетках. Создан параллельный программный комплекс РАМЕГ3D, реализующий разрывный метод Галеркина на неструктурированных сетках с ячейками различной конфигурации, предназначенный для численного решения прикладных задач в областях со сложной формой.

# ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ INFORMATION TECHNOLOGY



Обзорная статья

УДК 004.382.2, 004.7

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-1-12-28>

## Развитие суперкомпьютерных технологий в ИММ РАН и ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

М.В. Якововский ✉, М.А. Корнилина

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация

✉ [lira@imamod.ru](mailto:lira@imamod.ru)



### Аннотация

Представлен обзор работ в области суперкомпьютерных технологий, проводившихся в ИММ РАН и ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Описаны этапы развития вычислительной техники и алгоритмы, разработанные для суперкомпьютерных систем, такие как гиперболизация уравнений, балансировка загрузки, отказоустойчивость, построение динамически адаптивных расчетных сеток, рациональная декомпозиция сеток, а также некоторые прикладные и научные задачи, успешно решаемые с использованием суперкомпьютеров.

**Ключевые слова:** суперкомпьютеры, центр коллективного пользования, гиперболические уравнения, гиперболизация, балансировка загрузки, отказоустойчивость, динамически адаптивные расчетные сетки, рациональная декомпозиция сеток

**Благодарности.** Выражаем искреннюю благодарность за ценные обсуждения и предоставленные материалы руководителю ЦКП ИПМ им. М.В. Келдыша РАН С.В. Полякову, а также сотрудникам ЦКП, с использованием оборудования которого выполнены многочисленные расчеты, упомянутые в данной публикации.

**Для цитирования.** Якововский М.В., Корнилина М.А. Развитие суперкомпьютерных технологий в ИММ РАН и ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(1):12–28. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-1-12-28>

Review article

## Development of Supercomputer Technologies at the Institute of Mathematical Modelling and Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences

Mikhail V. Yakobovskiy ✉, Marina A. Kornilina

Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

✉ [lira@imamod.ru](mailto:lira@imamod.ru)

### Abstract

A review scientific work in the field of supercomputer technologies at the Institute of Mathematical Modelling and Keldysh Institute of Applied Mathematics is presented. Progress in supercomputer technologies, programming tools and technique (such as hyperbolization, load balancing, fault tolerance, adaptive mesh refinement, rational mesh decomposition) and several supercomputer applications are presented.

**Keywords:** supercomputers, supercomputing resource center, hyperbolic equations, hyperbolization, load balancing, fault tolerance, dynamically adaptive computational grids, rational mesh decomposition

**Acknowledgements.** We would like to express our sincere gratitude to S.V. Polyakov the head of Supercomputing Resource Center at the Keldysh Institute for the valuable discussions and materials provided, as well as to the team of the Center for the opportunity to use the facilities of the Center for carrying out numerous computations mentioned in this publication.

**For citation.** Yakobovskiy M.V., Kornilina M.A. Development of supercomputer technologies at the Institute of Mathematical Modelling and Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(1):12–28. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-1-12-28>

Статья подготовлена на основе выступления члена-корреспондента РАН М.В. Якововского на научной конференции в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (ИПМ), посвященной 80-летию научного руководителя ИПМ академика Б.Н. Четверушкина.

**Современное состояние вычислительной техники в России и в мире.** В настоящее время научный прогресс немалозначим без использования суперкомпьютерных технологий. Массивные параллельные компьютеры применяются во всех сферах деятельности, а мощность самых передовых из них преодолела заветную отметку 1 Эксафлопс. Производительность 500 наиболее мощных открытых суперкомпьютерных систем в мире, представленная на рис. 1 в логарифмическом масштабе, по своему виду напоминает обратную функцию. В список Top-500 [1] попали всего несколько российских систем и, как мы видим, по своей производительности они уступают наиболее мощным компьютерам на несколько порядков. Но на этом графике интересна его правая ветвь. На уровне около 2 Петафлопс ( $2 \times 10^{15}$  операций в секунду) есть почти горизонтальная полочка, которая состоит из сотни систем с очень близкой производительностью. Это практически одинаковые «рабочие лошадки», которые используются в бизнесе и на производстве (телекоммуникационные системы, облачные провайдеры и др.) для решения рутинных технических и инженерных задач. Российских систем там нет. Так же как их нет и на вертикальной ветви слева (в зоне «Research Academic»), где находятся 20–30 наиболее мощных компьютеров мира, которые ставят качественно новые задачи перед разработчиками и дают принципиально новые возможности для исследователей. В актуальный рейтинговый список входят всего 7 российских суперкомпьютеров, из них три («Ляпунов», «Червоненкис» и «Галушкин») принадлежат «Яндексу», два (Christofari и Christofari Neo) — Сбербанку и по одному МГУ («Ломоносов») и МТС (GROM). В момент своего появления в 2021 году суперкомпьютер «Яндекса» «Червоненкис» занимал 19-ю строчку рейтинга.

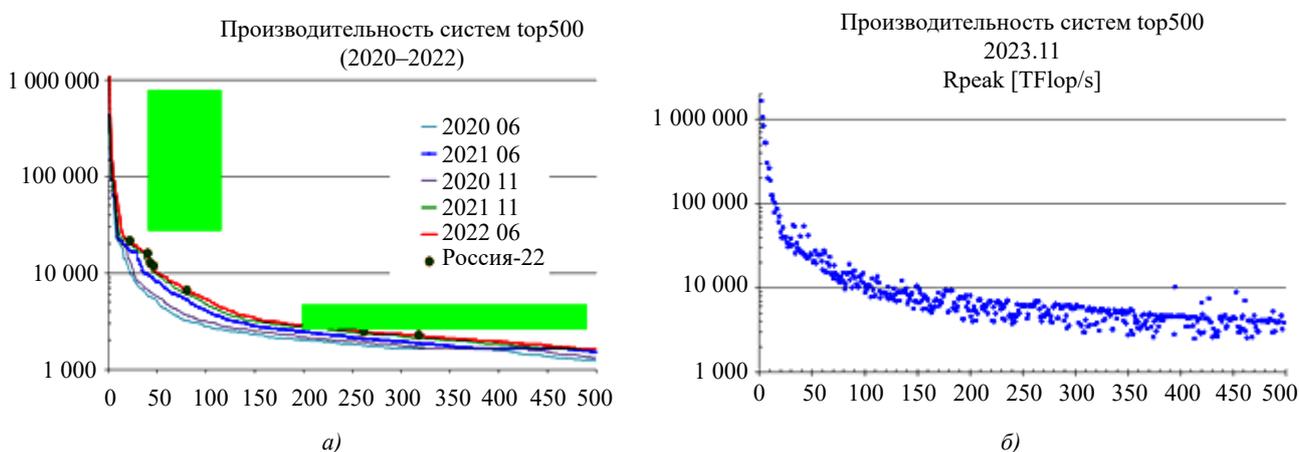


Рис. 1. Производительность суперкомпьютерных систем из списка top-500: а — в 2020–2022 гг.; б — в 2023 г.

Вычислительные машины ИПМ не входят в Top-500, но при этом неустанно и верно служат своим целям: используются для разработки алгоритмов и решения практических задач. Современная эпоха развития вычислительной техники в ИПМ, ознаменовавшаяся переходом к массовому использованию суперкомпьютерных технологий, началась после завершения эпохи БЭСМ-6 и серий ЕС ЭВМ почти полвека тому назад. Этапы этого развития, пройденные в Институте математического моделирования РАН (ИММ РАН) и Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (ИПМ), отражены в таблице 1. Начиналось все в 1988 г. с ключевого решения использовать транспьютерные системы для решения научных задач [2]. Каждый транспьютер Т800 [3, 4] по своей вычислительной мощности (около 106 операций с плавающей точкой в секунду) соответствовал машине БЭСМ-6 и был в 3 раза производительнее доступных в это время персональных компьютеров серии РС-386. Принципиально важно, что в его состав еще входили 4 дуплексных канала передачи данных по 1 Мбайт/с в каждую сторону. Локальных сетей такого уровня в институте на тот момент еще не было. Из нескольких транспьютеров легко можно было собрать настольный суперкомпьютер.

Их можно было собрать довольно много. Транспьютеры проходили военную приемку, предназначались для космического применения и были очень надежны. Сгоревших транспьютеров в нашей практике не было. Если их подключить сейчас к какой-нибудь подходящей системе, то они благополучно будут работать. На основе этой же техники была используемая 32-процессорная станция APS-48 производительностью 64 Мегафлопса.

## Исторические вехи развития вычислительной техники в ИПМ им. М.В. Келдыша

Даты начала использования	Компьютеры	Направления исследований, некоторые решаемые задачи					
До 90-х. Первые транспьютерные платы в ИММ РАН							
Октябрь 1988 г.	T-800	Расчеты двумерных задач динамики вязкого газа на основе кинетически-согласованных схем					
90-е годы. Кластер ИММ РАН на основе Parsytec							
Август 1991 г.	32-х процессорная станция APS-48, 64 MFLOP	<p>Моделирование течений сжимаемого вязкого газа;  Моделирование процессов горения органических топлив;  Оптимизация процессов нефтедобычи;  Моделирование процессов в электронно-дырочной плазме полупроводников;  Решение задач лазерного термоядерного синтеза (неустойчивость Рихтмайера-Мешкова);  Параллельные алгоритмы решения задач линейной алгебры;  Алгоритмы балансировки нагрузки процессоров;  Визуализация результатов многопроцессорных расчетов;  Управление потоком задач в распределенных системах</p>					
1994–95 гг.	12-ти процессорная система Parsytec PowerXplorer, 1 GFlops						
1996 г.	12-ти процессорная система Parsytec CC, 3.1 GFLOP						
Май 1998 г.	32-х процессорная система Parsytec CC, 6.5 GFLOP						
Октябрь 1998 г.	2-х процессорный Sun сервер Enterprise 250 (UltraSPARC 300 MHz)						
Октябрь 1998 г.	Объединение в кластер (12 + 32 узла Parsytec CC)						
2000-е годы. ВЦ ИММ РАН							
24 апреля 2001 г.	24-х процессорный кластер (12 двухпроцессорных узлов) 14.4 Gflops Fast Ethernet (100Mbs)	<p>Моделирование трехмерных нестационарных сверхзвуковых течений вязкого газа вокруг тел сложной формы;  Решение задачи аэроакустики о генерации и распространения шумов в потоках вязкого газа;  Моделирование процессов горения метана в атмосфере;  Решение задачи о нелинейном электронном транспорте в квантовом переключателе;  Разработка комплекса распределенной визуализации трехмерных скалярных и векторных полей, рассчитанных на МВС;  Обучение студентов и аспирантов основам параллельного программирования</p>					
2010 г. и далее. Центр коллективного пользования ИПМ им. М. В. Келдыша РАН							
2010 г. 2012 г. 2017 г. 2017 г.	K100 (создан совместно с НИИ «Квант») K10 K60, секция без GPU и секция с GPU	<p>Моделирование прикладных задач аэродинамики и аэроакустики;  Расчеты задач физики плазмы;  Решение прикладных задач механики сплошных сред;  Прогнозирование распространения загрязнений водной среды на примере Азовского моря;  Исследование проблем механики космического полета и управления движением;  Моделирование двухфазного массообмена в пористых средах;  Разработка компьютерных моделей и методов высокотемпературной гидродинамики;  Разработка информационных систем принятия решений</p>					
В состав ЦКП входят с 2019 г.							
Ресурс	Вычислительные узлы				Ядра CPU на узле/всего	Ядра GPU на узле/всего	Пиковая производительность
K100	64				2×6/768	3×448/86016	107,9 TFLOPS
K10	16				2×8/256	3×512/24576	31,9 TFLOPS
K60, секция без GPU	86	2×14/2408	нет	81,9 TFLOPS			
K60, секция с GPU	10	2×16/320	4×5120/204800	300,0 TFLOPS			

В дальнейшем начали применяться гибридные системы производства Германии Parsytec PowerXplorer (1 Гфлопс), в которых были одновременно и транспьютеры, и более мощные процессоры; а также Parsytec CC, которые работали уже не на основе транспьютеров и их линков, а на основе IBM-процессоров, высокоскоростных каналов интерконнекта (HS-линков).

Первая система Parsytec CC-12 была получена в рамках проекта Европейского Союза (ЕС) под общим руководством лауреата Нобелевской премии И.Р. Пригожина для решения задач на основе квазигидродинамических систем уравнений. В 1998 г. планировалась, одобренная ЕС, поставка 96-процессорной системы Parsytec CC производительностью 19,5 Гфлопс. Но США ввело эмбарго на эту поставку, забеспокоившись, что Институт получит слишком большую вычислительную мощность. Соответственно, инфраструктуру поставили под все модули, а вот наполнили их только на 1/3. Институт получил только 32-процессорную систему Parsytec CC-32 производительностью 6,5 Гфлопс. По архитектуре она полностью эквивалентна системе Parsytec CC-12, что позволило, после их объединения внешней сетью, выполнять запуск программ на получившейся расширенной системе.

Таковыми были первые массивные многопроцессорные системы, позволяющие на практике разрабатывать масштабируемые параллельные алгоритмы и программы.

Дополнительное достоинство систем Parsytec CC заключалось в том, что эти суперкомпьютеры функционировали под управлением операционной системы AIX, сконфигурированной для решения задач реального времени. В Германии они использовались на производстве (в металлургической, бумажной промышленности), на транспортных магистралях для отслеживания дорожной ситуации и т. д. Практически полное отсутствие издержек времени выполнения, не связанных непосредственно с выполняемой программой, существенно облегчало отладку и настройку алгоритмов. Современные системы на основе Linux и Windows лишены указанного положительного свойства.

На рис. 2 продемонстрирована историческая фотография, сделанная перед корпусом ИММ РАН (Миусская пл., 4А) в 1998 году, в день получения, разгрузки и начала установки модулей вычислительной системы Parsytec CC-32. Крыльцо корпуса А было частично демонтировано для обеспечения возможности вноса оборудования. Разгрузка с автомобильных платформ выполнялась с помощью подъёмных кранов, но транспортировка в корпус и внутри него бережно осуществлялась вручную силами научных и инженерных сотрудников, большей частью запечатлённых на фотографии.



Рис. 2. Сотрудники ИММ РАН после разгрузки модулей Parsytec CC-32. Май 1998 г.

Поскольку вычислительных модулей было поставлено на две трети меньше, чем планировалось, то осталось достаточно много незадействованной «инфраструктуры»: стойки, пустые блоки (rack's) для установки процессорных модулей, оснащенные блоками питания, и другие компоненты. Были отдельно закуплены материнские платы (двухпроцессорные, на процессорах Intel), процессоры, дисковая подсистема, сетевые карты. Из них в ИММ вручную был собран вычислительный кластер, схематично изображенный на рис. 3. Он достаточно долго работал и позволил выполнять исследования и решать различные научные задачи широкого профиля. Описанный вычислительный комплекс был выведен из эксплуатации после появления более мощных вычислительных систем, оставаясь полностью работоспособным.

Вычислительные ресурсы центра (май 1998 г.)

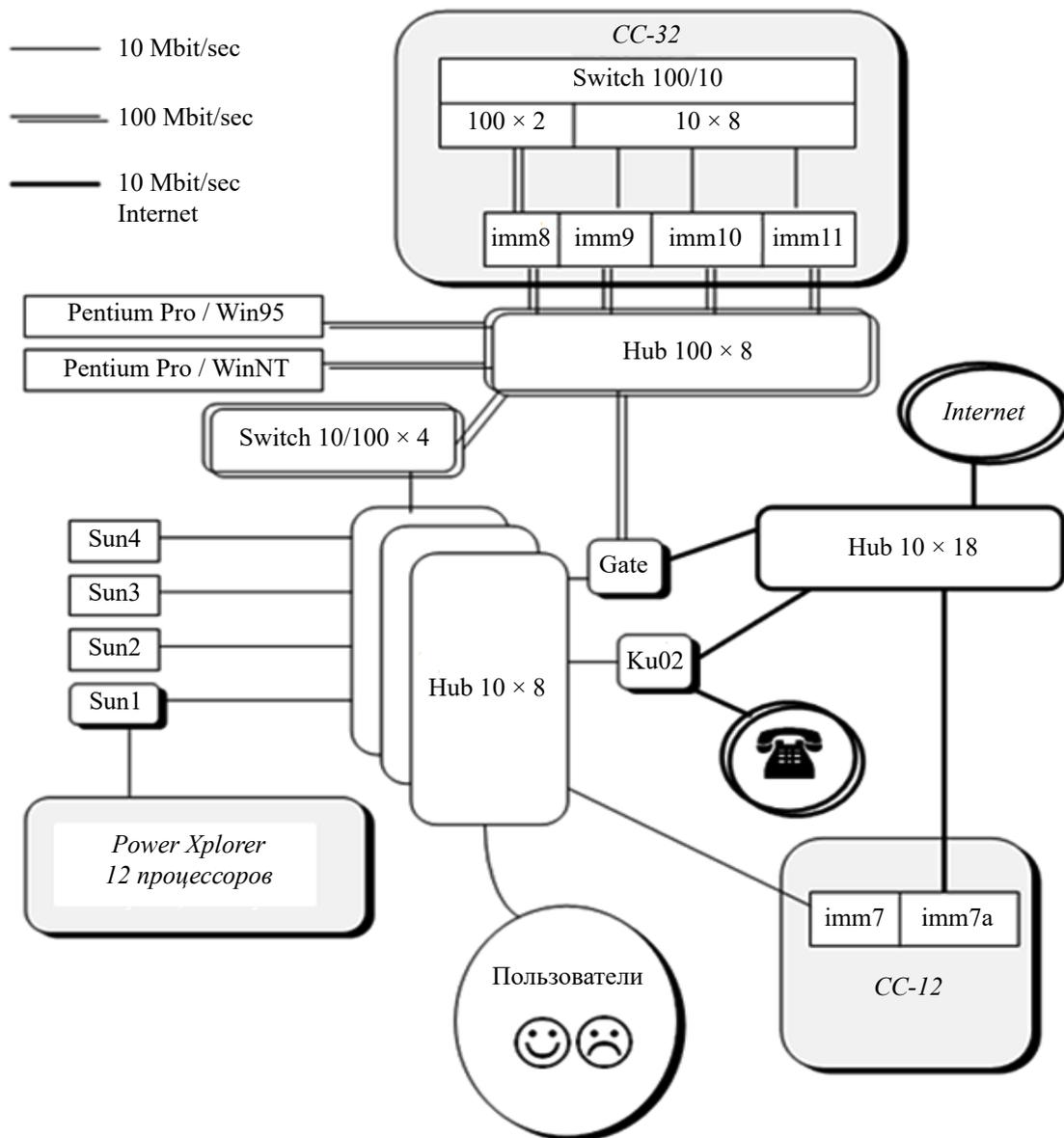


Рис. 3. Вычислительный кластер ИММ РАН  
 Parsytec PowerXplorer — Parsytec CC-12 — Parsytec CC-32, 1998 г.

В настоящий момент в распоряжении института, созданного для решения с помощью передовой вычислительной техники важных народно-хозяйственных задач (в первую очередь — создания ракетно-ядерного щита нашей Родины) имеется ряд высокопроизводительных систем. Со списком Top-500 они тягаться не могут, но для решения задач, разработки алгоритмов и программ используются в полной мере. Это система K-100 с пиковой производительностью 107 Терафлопс, система K60, которая в настоящее время имеет производительность порядка 400 Терафлопс, и др. Система K-100 [5, 6] явилась первой крупной вычислительной системой в России, использующей графические платы в качестве ускорителя. Каждый вычислительный узел системы K-100 состоит из двух шестиядерных процессоров Intel Xeon X5670 и трёх ускорителей nVidia Fermi C2050, каждый из которых содержит 448-ядер CUDA. Вычислительные узлы объединены высокоскоростными сетями передачи данных МВС-экспресс и Infiniband. Система K-100 была установлена в 2010 г. по прямому распоряжению Владимира Владимировича Путина, на тот момент премьер-министра России, который выделил на это целевые средства — и в течение года система была разработана, создана, введена в эксплуатацию и до сих пор работает.

Вычислительный центр Института является распределённым, он расположен на двух территориях в разных концах Москвы. Это Центр коллективного пользования (ЦКП) [7], к которому обеспечена возможность удалённого доступа. С одной стороны, его мощности используют сотрудники института, с другой стороны, внешние пользователи — по соглашениям на возмездной или на безвозмездной основе, по коммерческим контрактам и грантам Российского научного фонда. РНФ поддерживает использование центров коллективного пользования и реализацию проектов, в рамках которых предусмотрено финансирование (до 20 % от суммы грантов) на использование мощностей ЦКП.

**Суперкомпьютерные алгоритмы и решение сложных актуальных задач.** В создании суперкомпьютерного Центра коллективного пользования ИПМ им. М.В. Келдыша РАН Б.Н. Четверушкин сыграл важную роль. При его непосредственном участии была получена техника вычислительного кластера ИММ РАН (Parsytec CC-12, CC-32 PowerXplorer). Но не менее важна его роль в разработке алгоритмов для суперкомпьютерной техники и в поддержке исследований данного направления. При отсутствии адекватных алгоритмов техника стоит мертвым грузом, а разработка алгоритмов для суперкомпьютерной, многопроцессорной вычислительной техники — дело отнюдь не простое. Необходимо эффективно решать широкий спектр проблем. Следует создать алгоритм, допускающий расщепление задачи — декомпозицию на большое количество «независимых» фрагментов, чтобы вычислительные процессы, выполняющие фрагменты, были бы слабо связаны между собой (взаимодействовали редко). Затем из этого алгоритма нужно сделать программу, которая будет эффективно работать. Но вычислительная техника очень разнообразна: многопроцессорная, многоядерная, с ускорителями разных видов, с распределённой оперативной памятью, рабочими станциями и облачными системами. И поэтому возникает требование адекватности и соответствия суперкомпьютерных алгоритмов вычислительной архитектуре.

Хронологически одна из первых работ, посвященных разработке суперкомпьютерных алгоритмов — это работа [8] по адаптации итерационного  $(\alpha-\beta)$ -алгоритма решения многомерных параболических и эллиптических уравнений и метод его распараллеливания для систем с распределённой оперативной памятью.

Еще одним важным достижением стала разработка кинетически согласованных схем [9, 10] и квазигазодинамической (КГД) системы уравнений. В отличие от уравнений Навье-Стокса КГД система является гиперболической [11]. Это позволяет при построении численной модели использовать явные схемы, что даёт огромные преимущества при выполнении на высокопроизводительных системах с экстремальным параллелизмом.

Хорошо известен тезис Б.Н. Четверушкина, что у суперкомпьютерных алгоритмов должно быть два свойства: они должны быть логически простыми, иначе не получится использовать сложные иерархические вычислительные системы (в том числе ускорители), но при этом эффективными. Эта комбинация далеко не всегда достижима. Как правило, эти два требования как раз вступают друг с другом в противоречие. Известно, что явные разностные схемы очень хорошо адаптируются для суперкомпьютерных вычислений, потому что они обладают важным свойством локальности. При вычислении сеточных переменных в любой ячейке расчётной сетки используются значения сеточных величин только из соседних с ней ячеек. Это свойство локальности позволяет декомпозировать задачу на большое множество независимых процессов, которые только иногда обмениваются данными между собой по границам фрагментов сетки, обрабатываемых процессами. Хорошо известный метод domain decomposition (геометрического параллелизма), используемый при решении задач с помощью явных разностных схем, основан на данном свойстве локальности. Но явные схемы плохи тем, что при их использовании для решения эллиптических или параболических уравнений на шаг по времени накладывается очень жёсткое условие. Если вдвое измельчить шаг по пространству, то нужно в четыре раза уменьшить шаг по времени. Об этом говорит критерий Куранта и фундаментальные свойства соответствующих разностных схем и алгоритмов. И это проблема. При измельчении пространственной сетки вдвое, соответственно, в восемь раз увеличивается количество расчётных узлов. А ещё при этом в четыре раза уменьшается шаг по времени. Значит, число рассматриваемых моментов модельного времени увеличивается в четыре раза. Итого получается, что объём вычислений увеличивается в 32 раза. Это, во-первых, сильно ограничивает возможность расчёта реальных задач большого размера с хорошей точностью. А во-вторых, увеличение в четыре раза числа шагов по времени приводит к увеличению вычислительной ошибки, связанной с накоплением ошибок за счёт конечной машинной точности. Идея гиперболизации параболических систем уравнений позволяет перейти от параболических схем к схемам, похожим на явные, то есть к гиперболическим схемам, у которых более мягкое условие устойчивости. Тогда уменьшая шаг по пространству вдвое, допустимо уменьшить шаг по времени не в 4 раза, а в два раза, или, возможно, несколько больше чем в 2 раза.

Можно привести яркий пример использования этой идеи для расчёта задачи космологии — трёхмерного расчёта гравитационного потенциала [12, 13]. Задача (1) сложная: трёхмерные уравнения, гравитационный потенциал, магнитная гидродинамика:

$$\frac{\delta^2 \varphi}{\delta x_i^2} = 4\pi G \rho(r), \quad (1)$$

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho & r \leq R \\ \delta & r > R, \end{cases}$$

$$\frac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_i^j}{\Delta t} = \left(\varphi_x\right)_x^j + F,$$

$$\frac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_i^{j-1}}{2\Delta t} + \tau \frac{\varphi_i^{j+1} - 2\varphi_i^j + \varphi_i^{j-1}}{\Delta t^2} = \left(\varphi_x\right)_x^j + F.$$

где  $\varphi$  — гравитационный потенциал;  $F$  — свободный член;  $G$  — гравитационная постоянная.

В уравнении выделено слагаемое, которое преобразует параболическую систему в гиперболическую, и показано, во сколько раз удаётся выиграть в размере шага по времени. Если мы используем гиперболизированную систему уравнений вместо исходной параболической, то при измельчении шага по пространству мы более чем в 40 раз выигрываем в шаге по времени. Скорость вычислений увеличится в 40 раз и, соответственно, накопленная ошибка тоже будет меньше (рис. 4).

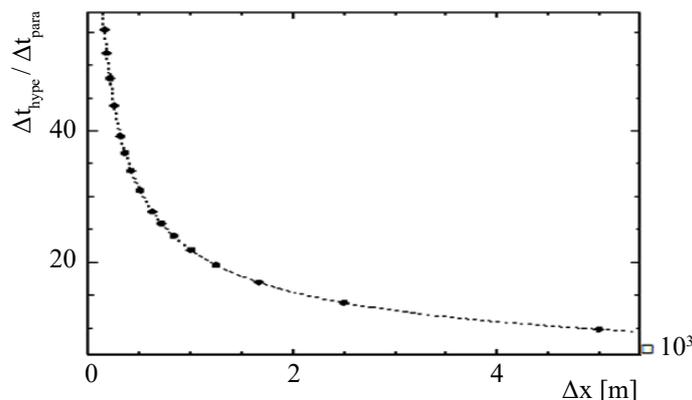


Рис. 4. Отношение шагов временной дискретизации параболического и гиперболического метода как функция дискретизации по пространству при решении уравнения Пуассона

Следует отметить, что предложенная гиперболизация не приводит к изменению качества аппроксимации. Качество аппроксимации остаётся в тех же рамках, что и у уравнений Навье-Стокса. Рис. 5 иллюстрирует картину взаимодействия межзвёздного газа с массивным телом. Представлено два варианта расчёта. На рис. 5 а показаны результаты расчёта с низким разрешением. На рис. 5 б — результат расчёта на сетке высокого разрешения. Высокое разрешение означает, что для трёхмерной задачи используется порядка 6 млрд узлов. На сетке низкого разрешения (менее миллиарда узлов) мы фактически не видим содержательной картины. А на сетке высокого разрешения можно увидеть процесс формирования джета — релятивистской струи, образующейся в результате взаимодействия гравитационного и магнитного полей. Струи, полученные в расчётах, действительно существуют. Релятивистскую струю из центра галактики М 87 астрономы наблюдают в различных диапазонах волн оптическими и радиотелескопами. Широко известен снимок джета (J.A. Viretta и др., 2000 г.), полученный с орбитального телескопа Хаббл [14]. Для решения задач такого рода невозможно использовать лишь фрагмент суперкомпьютера — нужна большая вычислительная мощность, то есть практически весь суперкомпьютер.

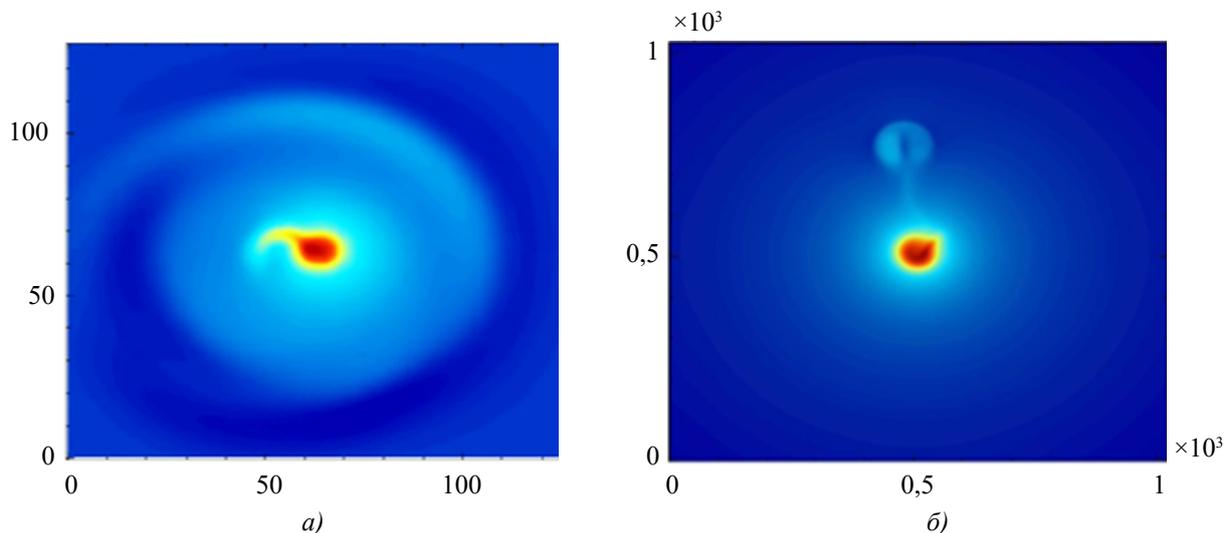


Рис. 5. Гравитационный потенциал:  
 а — результаты расчета с низким разрешением (нечеткая картина);  
 б — результаты расчета с высоким разрешением (релятивистская струя)

Заметим, что мощные суперкомпьютеры на практике преимущественно используются в разделяемом многозадачном режиме для решения потоков относительно небольших задач большим количеством научных групп. Каждая группа применяет для конкретного расчёта только небольшой фрагмент суперкомпьютера — одну десятую, одну сотую его часть. Но задачи указанного класса могут быть решены только на полной вычислительной мощности всего суперкомпьютера.

При наличии достаточной вычислительной мощности можно промоделировать эти процессы и изучить их цифровую модель. Если такой вычислительной мощности нет, то мы видим только размытую картину, как на рис. 5 а.

Что представляет собой система с большой вычислительной мощностью? Такая система может содержать сотни и тысячи ядер. Использование таких масштабных систем требует создания специального программного обеспечения. Это большой вызов, порождающий множество задач, направленных на создание общего программного обеспечения для проведения на экстремально масштабных суперкомпьютерных системах масштабных вычислительных экспериментов. Наряду с традиционными задачами, которые для этого необходимо решать (декомпозиция расчетов и расчетных сеток, визуализация результатов, статическая и динамическая балансировка нагрузки процессоров), есть еще одна проблема, обостряющаяся по мере усложнения компьютерных систем. Это проблема, связанная с отказоустойчивостью.

При проведении длительных (несколько часов, суток и более) расчетов, использующих всю суперкомпьютерную систему, содержащую ~ 10<sup>6</sup> и более вычислительных узлов и исполнительных устройств, вероятность того, что какая-то ее часть выйдет из строя в ходе выполнения расчета, приближается к единице. Для систем производительности ~ 1–10 Пфлопс время безотказной работы велико и проблема неактуальна. Однако для экзафлопсных систем, по имеющимся оценкам, время безотказной работы составляет ~ 0,5–1 часа [15]. Нет оснований полагать, что развитие аппаратных технологий сможет исправить эту ситуацию в ближайшие десятилетия, так как она связана с принципиальными техническими ограничениями. Более того, с ростом числа суперкомпьютерных узлов проблема только усугубляется. Это означает, что если не использовать резервирование промежуточных данных, сбой почти неизбежно не даст завершить длительный расчет. Таким образом, необходимость заботиться о сохранности данных и возможности возобновления расчета при сбое ложится на плечи разработчика программ. Стандартный подход, связанный с использованием «глобальных контрольных точек», хорош для небольших вычислительных систем, но становится недостаточным при значительном росте числа процессорных узлов [16]. На экзафлопсных системах время сохранения глобальной контрольной точки является величиной того же порядка, что и время безотказной работы. Следовательно, достаточно велика вероятность, что за время её записи или чтения может произойти новый сбой.

Вторым существенным недостатком стандартного подхода является необходимость повторного выполнения всех шагов расчёта, выполненных после сохранения глобальной контрольной точки, во всей области моделирования, несмотря на то, что сбой одного вычислительного устройства приводит лишь к локальной потере данных о небольшой области расчета.

В работах [16, 17] был предложен подход, позволяющий проводить длительные расчеты с использованием локальных контрольных точек. При этом не требуется приостанавливать расчет для их записи и не требуется перезапуск всей программы после сбоя. Данные локальных точек сохраняются непосредственно в памяти вычислительных узлов, участвующих в расчете, и «соседних» с каждым из них, что обеспечивает локальный характер выполнения операций. В круг эффективно выполняемых попадают алгоритмы, отвечающие свойству локальности обработки сеточных элементов, — алгоритмы на основе явных разностных схем, в том числе схемы, полученные с помощью ранее упомянутой процедуры гиперболизации. Схема восстановления данных после сбоя также опирается на идею гиперболизации уравнений. Если какой-то вычислительный узел оказался исключён из процесса вычислений вследствие аппаратного или программного сбоя, то вместо него в работу включаются два или более из заранее зарезервированных запасных узлов. Утерянные в результате сбоя данные восстанавливаются из оперативной или дисковой памяти «соседних», сохранивших работоспособность узлов. Важным свойством гиперболических уравнений является конечность времени распространения возмущений и, как следствие, конечность той зоны, которая оказывает влияние на решение на следующем шаге по времени в каждой локальной точке (рис. 6).

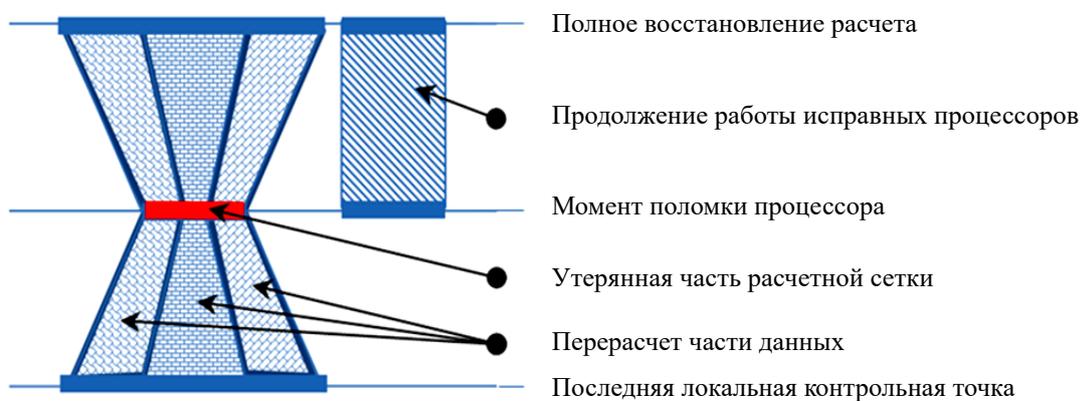


Рис. 6. Схема организации вычислений при восстановлении расчета

Таким образом, для восстановления последствий потери данных понадобится лишь незначительно расширить зону расчета, «отмотать» назад по времени и, взяв данные о предыдущей локальной контрольной точке, с помощью нескольких процессоров ускоренно пересчитать необходимый участок расчетной области заново. Расчет в целом в это время не останавливается — все остальные узлы продолжают расчёт последующих шагов модельного времени.

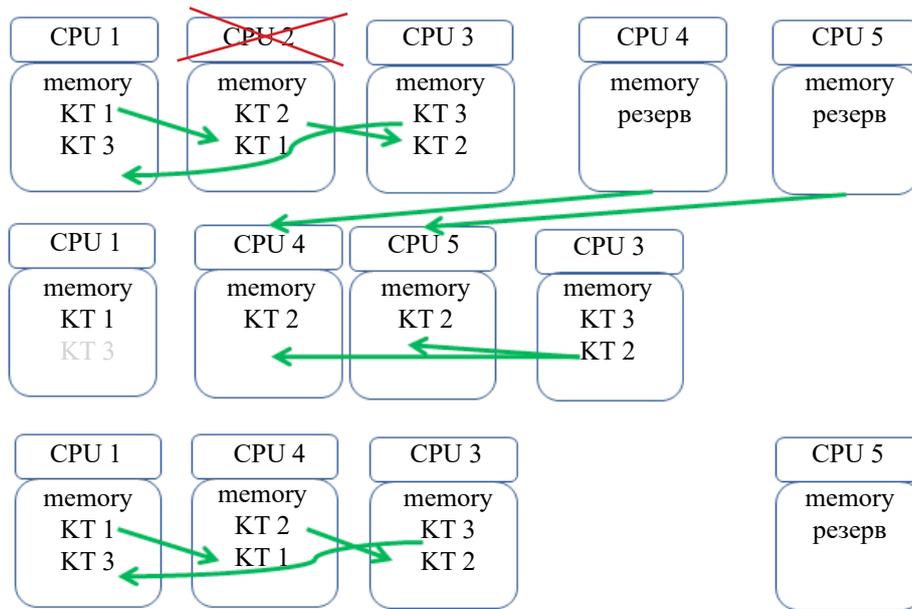


Рис. 7. Общая стратегия обеспечения отказоустойчивости: распределенная запись фрагментов контрольной точки и схема подключения резервных узлов для восстановления расчета

Следовательно, после осуществления восстановления утерянных данных необходимо продолжить ускоренное выполнение расчёта, позволяющее «догнать» расчёт, выполняемый остальными процессорами.

Схема распределенной записи контрольных точек и подключения резервных процессоров представлена на рис. 7. При такой схеме хранения данных и локального пересчета контрольной точки можно восстановить данные и продолжить расчет не только при единичном сбое, но и при нескольких одновременных отказах, независимых в метрике расчетной сетки.

Даже в трехмерном случае для исправления единичного сбоя запасных процессоров требуется всего несколько. Причём все они, кроме одного, возвращаются в число резервных после окончания описанной процедуры. Предложенные алгоритмы успешно опробованы на примере моделирования волнового уравнения (5) с источником  $F(x, t)$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = F(x, t). \quad (2)$$

Приведем полученную в работе [18] оценку числа резервных процессоров  $p_d$  (3), необходимых для полного восстановления после единичного отказа на уровне 0 продолжающегося расчета на уровне 2 (текущего уровня, на котором удается «догнать» продолжающийся расчет) с использованием данных контрольной точки с уровня 1 (рис. 8):

$$p_d > \frac{1}{d+1} \frac{1}{k_2} \sum_{j=1}^2 k_j \sum_{i=0}^d \alpha_j^i. \quad (3)$$

Здесь параметр  $\alpha_j = 1 + 2\gamma \frac{k_j}{n_0}$ ;  $\gamma = \frac{C\Delta t}{h}$  — число Куранта;  $c$  — наклон характеристик (5);  $t_0$  — время сбоя;  $t_1$  — момент модельного времени, в который была записана контрольная точка;  $t_2$  — время полного восстановления расчета;  $k_1$  — число шагов модельного времени, прошедшего с момента записи последней контрольной точки;  $k_2$  — число шагов до полного восстановления расчета, причем  $k_2 \leq k_1$ ;  $n_0^d$  — общее число расчетных точек, обрабатываемых процессором;  $d$  — размерность пространства.

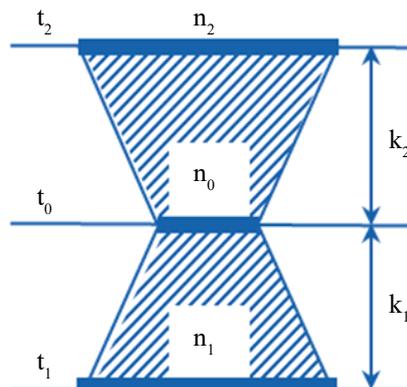


Рис. 8. Схема пространственно-временной области восстановления расчета для оценки числа резервных процессоров

Отметим, что параллельные алгоритмы, в отличие от последовательных, принципиально недетерминированы (аналогично недетерминированным автоматам). Недетерминированность приводит к тому, что для параллельных программ, в отличие от последовательных, невозможно получить полноценный набор тестов. Поэтому особую роль приобретает использование базовых методов, таких как декомпозиция по данным, конвейерный параллелизм, коллективное решение, многократно апробированных многочисленными научными коллективами. Они хорошо работают, но не универсальны. Каждый из них ориентирован на свой класс задач. У метода декомпозиции наиболее слабое ограничение на потенциально возможное при его использовании ускорение. Но этот метод плохо подходит для неявных численных схем. Конвейерный метод имеет довольно широкое поле применения, но более существенные ограничения на ускорения. У коллективного решения свои ограничения на ускорение, диктуемые соотношением характерного времени на выполнение каждого задания и времени на связанные с заданием коммуникации.

Существенно, что все базовые методы ориентированы на однородный вычислительный процесс. На практике при решении сложных задач, например, на динамически адаптивных сетках, он существенно неоднороден. Вычислительная нагрузка может сильно меняться даже на одном шаге по времени, но на разных этапах вычислений (таких как расчет газовой динамики, расчет химической кинетики, принятие оптимизационных решений). При этом на каждом шаге по времени картина распределения вычислительной нагрузки по процессорам будет отличаться для каждого из этих вычислительных этапов. А возможно, потребуется еще и разное распределение данных по процессорам на разных этапах одного шага.

На рис. 9 представлены используемые стратегии балансировки загрузки в зависимости от особенностей вычислительного процесса. В простейшем случае, когда вычислительная нагрузка однородна, при распределении заданий может использоваться статическая балансировка нагрузки.

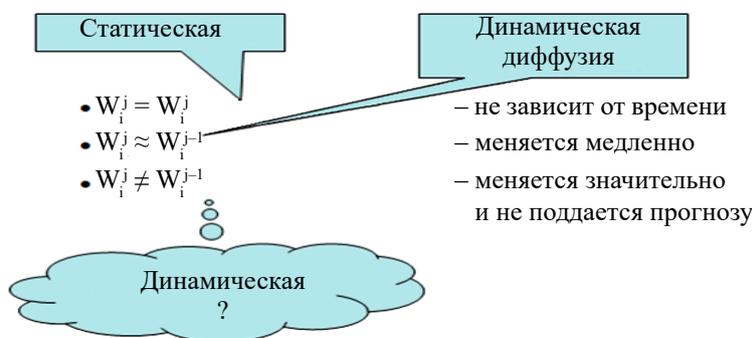


Рис. 9. Стратегии балансировки загрузки в зависимости от соотношения вычислительной нагрузки  $W_i^j$  при расчете  $i$ -го фрагмента сетки на  $j$  и на  $(j - 1)$  шаге

Если нагрузка меняется плавно, то используются методы диффузной балансировки нагрузки. Но есть задачи, в которых нагрузка меняется значительно и не прогнозируемо, например, задача горения [19, 20]. Для таких задач стандартные методы балансировки загрузки оказываются неэффективны.

Задача горения (4) описывается следующими уравнениями:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A\mathbf{U} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{U} = (p, \rho y^{(i)}, \rho u, \rho v, E)^T, \quad \mathbf{f} = (0, \omega_i, 0, 0, 0)^T. \quad (4)$$

Здесь  $\rho$  — плотность;  $y^{(i)}$  — массовые доли  $i$ -х компонент;  $u, v$  — скорости;  $p$  — давление;  $E$  — полная энергия;  $\omega_i$  — скорости образования компонент.

Задача решается разбиением на вычислительные блоки (5–6) согласно методу суммарной аппроксимации Самарского [21]:

I. Блок Газовой динамики:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A\mathbf{U} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\mathbf{U}^{j+1} - \mathbf{U}^j}{\Delta t} + \frac{1}{2}(A\mathbf{U}^{j+1} + A\mathbf{U}^j) = 0, \quad (6)$$

II. Блок химической кинетики:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = (0, \omega_i, 0, 0, 0)^T. \quad (7)$$

Практически все вычисления сосредоточены в зоне интенсивного горения, где метан смешивается с кислородом. Именно там происходят интенсивные химические реакции со свето- и энерговыделением и, соответственно, именно в этой зоне необходимо решать множество независимых жёстких систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) (7), что требует больших вычислительных мощностей.

Если всю расчетную область в соответствии с методом геометрического параллелизма равномерно распределить по процессорам, исходя из потребностей этапа (5–6), то получится, что на этапе (7) только несколько процес-

соров будут выполнять основной объём вычислений, а все остальные будут практически простаивать большую часть времени (рис. 10).

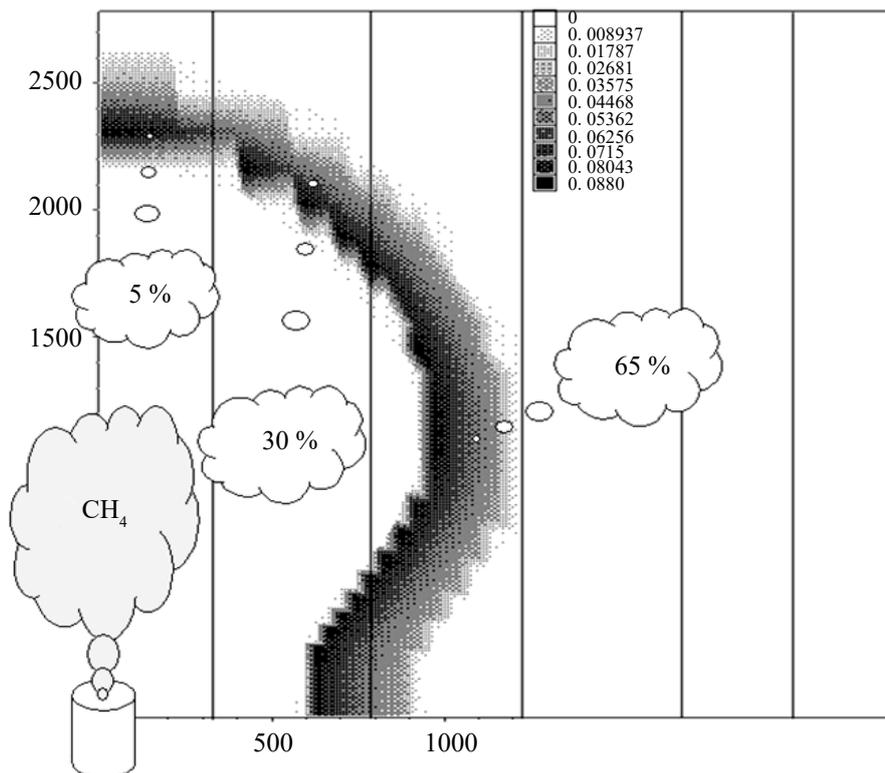


Рис. 10. Метановый факел

Это характерный пример задачи, для решения которой на двух этапах в пределах каждого шага модельного времени требуется разная стратегия распределения вычислений. Более того, если на этапе «газовой динамики» статической балансировки нагрузки достаточно, то при решении множества систем ОДУ — категорически нет. Требуется динамическая балансировка. Стандартные методы динамической балансировки здесь не подходят. Следует использовать специальные варианты метода коллективного решения, в которых много управляющих процессов, что приводит к возникновению сложной задачи обеспечения корректного взаимодействия между ними. На каждом процессоре реализуются вычислительные и управляющие процессы, логика сильно усложняется.

Соответствующий метод динамической балансировки был разработан для задач, подобных задаче горения, и опробован, в том числе, на слабосвязных кластерах [19, 20]. Примером слабосвязного кластера может служить кластер ИММ РАН (рис. 3), состоящий из систем Parcytec CC-12 и CC-32, соединенных между собой тонким каналом связи. Внутри каждой подсистемы были 10 мегабайтные каналы, а между ними был 1 мегабайтный канал.

Разработанные алгоритмы позволили эффективно решать задачу горения. Рост ускорения с увеличением числа процессоров был практически линейным. Причем в составе этого кластера процессоры были разные, но, тем не менее, динамическая балансировка эффективно выравнивала загрузку.

Эта же задача успешно считалась и на 1 Терафлопсном компьютере МСЦ РАН МВС 1000М, находившемся на 74 месте в списке TOP-500 в ноябре 2002 года. Задача хорошо масштабируется с эффективностью более 70 % процентов при использовании до 500 процессоров (рис. 11). Далее эффективность снижалась до 62 %, что связано с использованием сравнительно небольшой сетки, содержащей порядка 10 млн узлов. На такой сетке расчёт газодинамической части обуславливает снижение эффективности. Большие сетки (~1 млрд узлов) для этих задач использовать сложно в силу больших требований к вычислительным мощностям, необходимым для проведения на них расчета химической кинетики.

Существенной фундаментальной проблемой, связанной с использованием суперкомпьютеров, является задача рациональной декомпозиции расчетных сеток. Исследования в области создания методов и программного обеспечения для работы с большими сетками [22, 23] ведутся в институте, начиная с 1990-х годов.

Для проведения вычислений требуется распределить сеточные переменные и элементы расчётной сетки по вычислительным узлам, обеспечив равномерную нагрузку процессоров при сохранении низкого уровня накладных расходов, связанных с взаимодействием процессоров между собой. Сложность задачи нелинейно возрастает с увеличением размеров расчётных сеток, особенно неструктурированных. Рис. 12 показывает, как, используя предварительное огрубление расчетной сетки, переходить от вычислительных сеток, содержащих десятки миллиардов узлов, к небольшим макрографам, которые далее разбиваются на домены по числу процессоров.

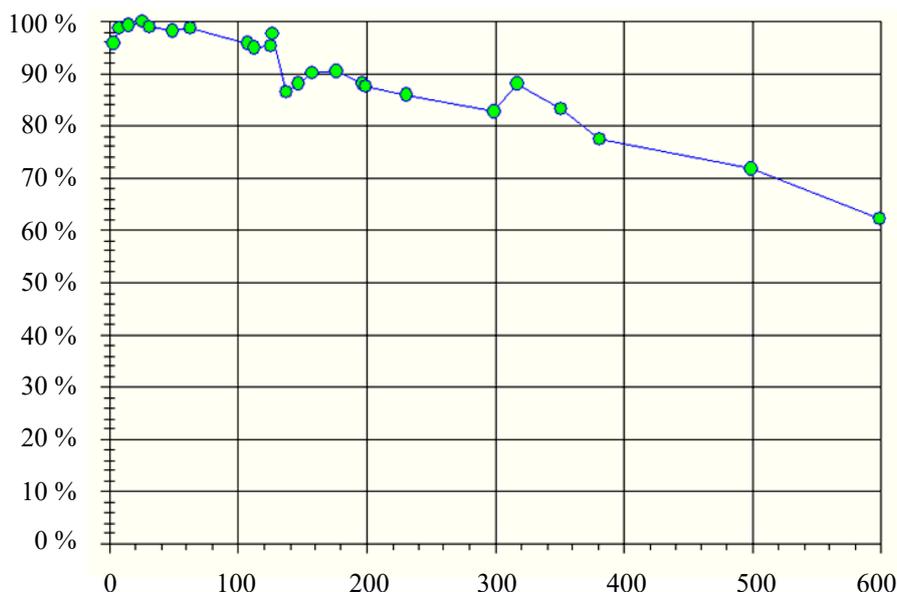


Рис. 11. Эффективность на кластере МСЦ РАН

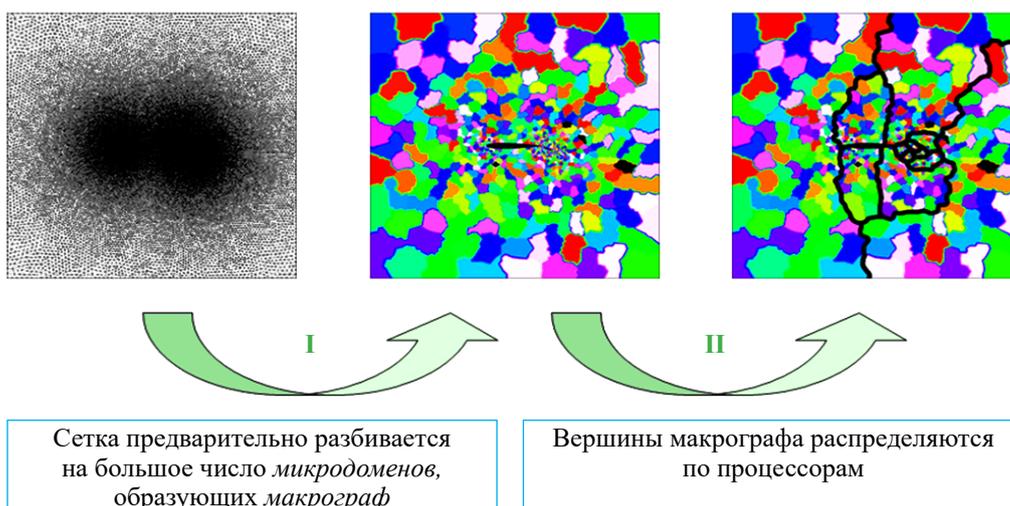


Рис. 12. Двухуровневое разбиение больших сеток

Для обработки макрографов можно использовать стандартные пакеты, такие как parmetis, chaco и другие [24–27]. Сетки размером в несколько миллионов узлов обрабатываются с их помощью быстро и эффективно. Такой иерархический подход хорошо себя зарекомендовал и при распределении сеток между процессорами во время выполнения расчетов, и при визуализации и хранении данных, и при использовании гибридных вычислительных систем.

Проблема рациональной декомпозиции, непростая даже для статических сеток, становится многократно сложнее при использовании динамически-адаптивных сеток.

Приведем пример использования адаптивных сеток для решения задачи конвективного переноса. В двумерном виде задаче описывается следующим уравнением:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v_x \frac{\partial c}{\partial x} + v_y \frac{\partial c}{\partial y} = 0, \quad (8)$$

где  $c = c(x, y, t)$  — концентрация вещества;  $t$  — время;  $(v_x, v_y) = \text{const}$  — вектор скорости переноса вещества. Моделировалась задача переноса течением капли, отличающейся по своим свойствам от свойств среды [28]. Использовалась расчётная сетка, динамически подстраивающаяся под решение. При этом результат, полученный на адаптивной сетке, был гораздо точнее, чем результат, полученный на равномерной сетке. Аналогичные результаты получены при моделировании процессов переноса примесей в водной среде на примере моделирования экологической катастрофы в Азовском море [29].

При использовании динамически адаптивных сеток необходимо во время расчета также динамически выполнять разбиение сетки на домены и перераспределение ее по процессорам. Эти функции не поддерживаются

стандартными пакетами декомпозиции. Декомпозицию можно делать на основе разных принципов: на основе иерархических алгоритмов декомпозиции (стандартные пакеты используют именно их, так как они наиболее универсальны); используя кривые, заполняющие пространства, фрактальные кривые (например, кривую Гильберта).

Динамическая балансировка во время расчета необходима для использования в расчетах вычислительных систем, в которых априори не известны свойства и топология интерконнекта, либо для задач, для которых вычислительная трудоёмкость обработки фрагментов расчётной сетки априори неизвестна.

На рис. 13 представлены домены, сформированные в результате выполнения иерархического алгоритма декомпозиции (рис. 13 а, б) пакетом Metis [26] и при декомпозиции вдоль кривой Гильберта (рис. 13 в, г) для некоторых двух последовательных этапов адаптации сетки. Второй алгоритм далее будем называть фрактальным. Рис. 13 а и 13 в соответствуют одному моменту адаптации сетки, а рис. 13 б и 13 г — другому. В начале расчёта сетка содержала 64 базовые ячейки, каждая из которых была разделена на 16 элементарных ячеек. Общее число элементарных ячеек 1024, согласно методике [28], примерно сохранялось в течение всего расчёта.

Качество декомпозиции приемлемо в обоих случаях, но следует обратить внимание на объёмы данных, перераспределяемых между процессорами в случае иерархического и фрактального алгоритмов. При переходе от декомпозиции (рис. 13 а) к декомпозиции (рис. 13 б) объёмы перераспределяемых данных больше, чем при аналогичном переходе в случае применения декомпозиции вдоль фрактальной кривой от (рис. 13 в) к (рис. 13 г). Во втором случае границы доменов меняются более плавно. Перемещение данных при этом затрагивает только пары процессоров, имеющих соседние номера, а в первом случае — произвольные пары процессоров.

Меньшие затраты времени на вычисление доменов при использовании фрактальных кривых обеспечивают возможность более частого вызова процедуры перебалансировки, дополнительно снижая объёмы передаваемых при каждой балансировке данных. Отметим, что кроме кривой Гильберта есть множество других кривых, заполняющих пространство (рис. 14). Например, популярна кривая Мортон, отличающаяся простотой вычисления топологии, но не сохраняющая, в отличие от кривой Гильберта, близость в физическом пространстве точек, имеющих соседние номера на самой кривой. Тем не менее методы на основе фрактальных кривых не лишены недостатков, поскольку при их использовании затруднено вычисление отношения соседства фрагментов, расположенных в разных частях кривой.

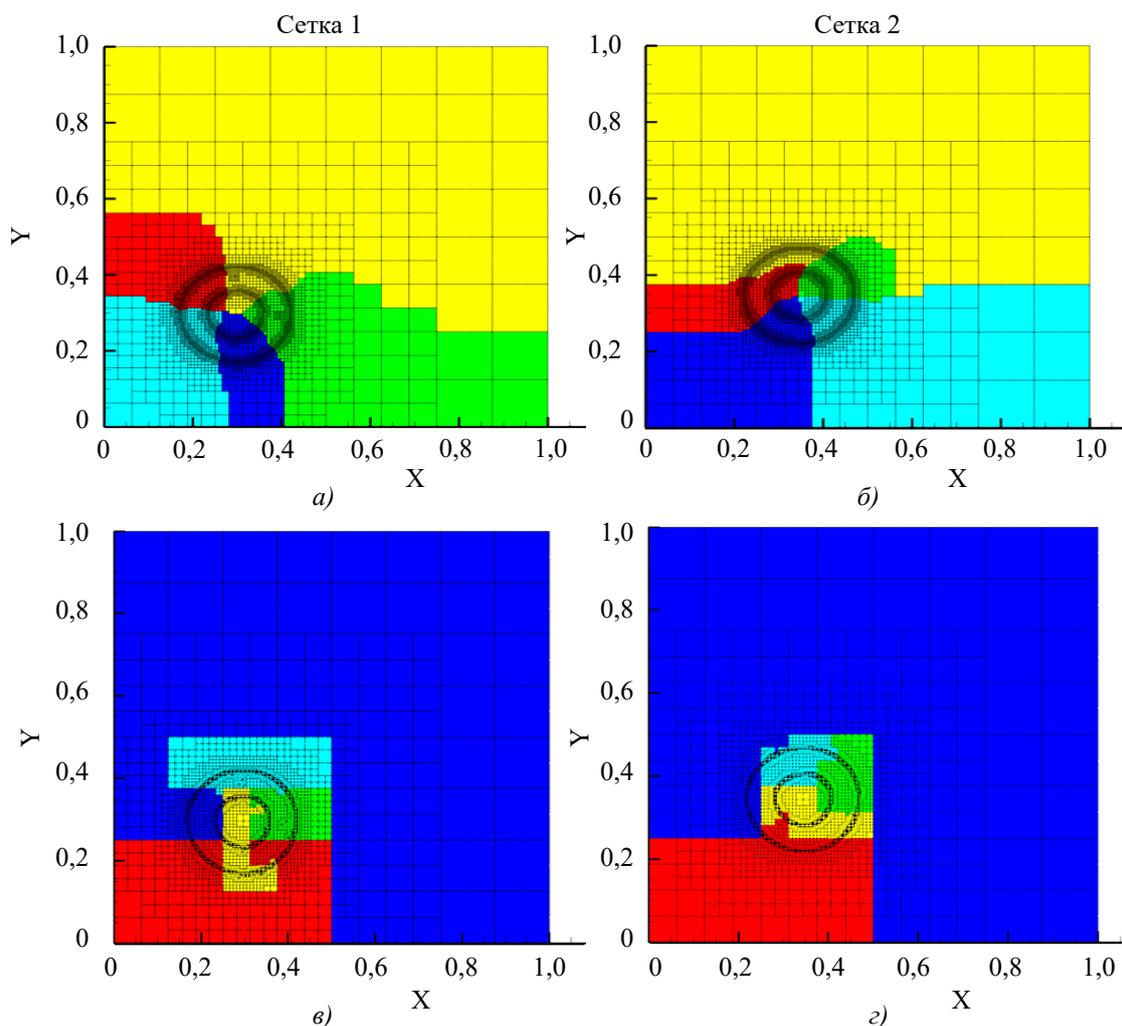


Рис. 13. Домены, сформированные с помощью иерархического метода (а, б) и вдоль кривой Гильберта (в, г)

Более подробное изучение вопроса [30, 31] показало, что соблюдение определённой дисциплины работы с сеткой позволяет использовать не фрактальные, а растровые кривые, заполняющие пространство, которые оказываются более эффективны. Они позволяют формировать домены сетки, разбивая сетку сначала на слои, потом каждый слой на полосы, и, наконец, каждую полосу на домены (рис. 15).

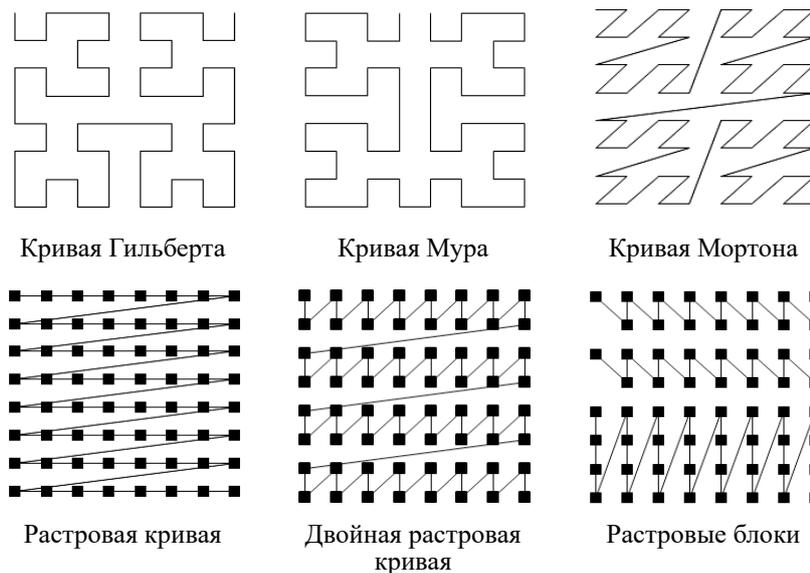


Рис. 14. Кривые, заполняющие пространство

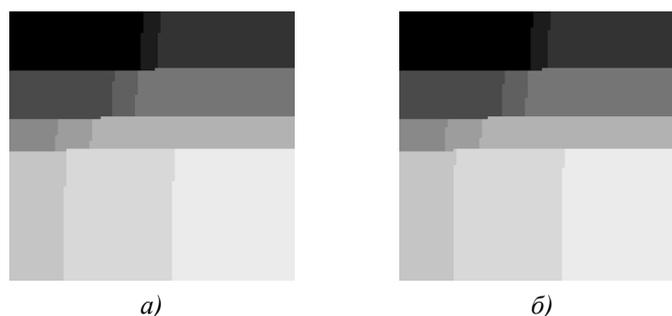


Рис. 15. 2D домены, сформированные с помощью послойного алгоритма

Идея растровых блоков позволяет при использовании локально-измельчаемых расчётных сеток получить плавную динамику изменения границ доменов, а значит — передавать меньший объём данных при перестроении сетки. Дополнительное преимущество данного подхода заключается в возможности создания простых эффективных параллельных алгоритмов самой декомпозиции, требующих низких затрат времени на её выполнение.

В данной публикации описаны многие, но далеко не все научные исследования, которые осуществлялись под руководством и при непосредственном участии академика Б.Н. Четверушкина, в которых (за исключением задачи о релятивистских струях) также участвовали авторы статьи.

#### Список литературы

1. Рейтинг суперкомпьютеров. URL: <http://top500.org> (дата обращения: 21.02.2024).
2. Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. Применение многопроцессорных транспьютерных систем для решения задач математической физики. *Математическое моделирование*. 1992;4(11):75–100.
3. Галушкин А.И., Точенов В.А. Транспьютерные системы — начало становления в России ЭВМ с массовым параллелизмом. *Нейрокомпьютеры: разработка, применение*. 2005;3:17–28.
4. Транспьютерные системы — начало становления в России ЭВМ с массовым параллелизмом. *Сборник тезисов докладов НСКФ'2014*. Переславль-Залесский: ИПС им. А.К. Айламазяна РАНС; 2014. 45 с. URL: [https://2014.nscf.ru/TesisAll/0\\_PostMoore\\_Plenar/01\\_008\\_GalushkinAI.pdf](https://2014.nscf.ru/TesisAll/0_PostMoore_Plenar/01_008_GalushkinAI.pdf) (дата обращения: 21.02.2024).
5. Гибридный вычислительный кластер К-100. URL: <http://www.kiam.ru/MVS/resources/k100.html> (дата обращения: 21.02.2024)
6. Давыдов А.А., Лацис А.О., Луцкий А.Е., Смольянов Ю.П., Четверушкин Б.Н., Шильников Е. В. Многопроцессорная вычислительная система гибридной архитектуры «МВС-Экспресс». *Доклады Академии наук*. 2010;434(4):459–463.

7. Центр коллективного пользования ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. URL: <http://ckp.kiam.ru> (дата обращения: 26.02.2024).
8. Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г. О применении принципа геометрического параллелизма для  $(\alpha-\beta)$ -итерационного алгоритма. *Математическое моделирование*. 1991;3(3):123–129.
9. Абалакин И.В., Четверушкин Б.Н. Кинетически согласованные разностные схемы как модель для описания газодинамических течений. *Математическое моделирование*. 1996;8(8):17–36.
10. Четверушкин Б.Н. *Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике: новая модель вязкого газа, алгоритмы, параллельная реализация, приложения*. Москва: Издательство МГУ; 1999. 232 с.
11. Четверушкин Б.Н. Гиперболическая квазигазодинамическая система. *Математическое моделирование*. 2018;30(2):81–98.
12. Четверушкин Б.Н., Д’Асчензо Н., Савельев А.В., Савельев В.И. Кинетическая модель и уравнения магнитной газовой динамики. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2018;58(5):716–725.
13. Савельев В.И., Четверушкин Б.Н. Моделирование задач магнитной гидродинамики на высокопроизводительных вычислительных системах. *Математическое моделирование*. 2020;32(12):3–13.
14. Снимок космического телескопа Хаббл. URL: <https://apod.nasa.gov/apod/ap000706.html> (дата обращения: 26.02.2024).
15. Cappello F. Fault Tolerance in Petascale/Exascale Systems: Current Knowledge, Challenges and Research Opportunities. *International Journal of High Performance Computing Applications*. 2009;23(3):212–226.
16. Четверушкин Б.Н., Якововский М.В. Вычислительные алгоритмы и отказоустойчивость гиперэкзафлопсных вычислительных систем. *Доклады Академии наук*. 2017;472(1):1–5.
17. Четверушкин Б.Н., Якововский М.В. Вычислительные алгоритмы и архитектура систем высокой производительности. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2018;52:12.
18. Chetverushkin B.N., Yakobovskiy M.V., Kornilina M.A., Semenova A.V. Numerical Algorithms for HPC Systems and Fault Tolerance Communications. *Computer and Information Science*. 2019;1063:34. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-28163-2\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-28163-2_3)
19. Корнилина М.А., Якововский М.В. Моделирование эволюции сложных нелинейных систем на многопроцессорных вычислительных комплексах. *Журнал физической химии*. 1995;69(8):1545–1548.
20. Дородницын Л.В., Корнилина М.А., Четверушкин Б.Н., Якововский М.В. Моделирование газовых течений при наличии химически активных компонентов. *Журнал физической химии*. 1997;71(12):2275–2281.
21. Самарский А.А. *Теория разностных схем*. Москва: Наука; 1989. 616 с.
22. Якововский М.В. Обработка сеточных данных на распределенных вычислительных системах. *Вопросы атомной науки и техники. Серия Математическое моделирование физических процессов*. 2004;2:40–53.
23. Якововский М.В. Инкрементный алгоритм декомпозиции графов. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление*. 2005;1(28):243–250.
24. Fiedler M. A property of eigenvectors of nonnegative symmetric matrices and its application to graph theory. *Czechoslovak Mathematical Journal*. 1975;25(100):619–633. URL: [http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS14/MatricesGraphsPDEs/paper\\_for\\_students/CZMathJ-25-1975-Fiedler%20copy.pdf](http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS14/MatricesGraphsPDEs/paper_for_students/CZMathJ-25-1975-Fiedler%20copy.pdf) (дата обращения: 27.02.2024).
25. Hendrickson B., Leland R. A Multilevel Algorithm for Partitioning Graphs. *Supercomputing '95 Proceedings*. San Diego, CA, 1995. URL: <http://www.leonidzhukov.net/hsc/2016/networks/papers/MultilevelAlgorithmPartitioningGraphs.pdf> (дата обращения: 27.02.2024).
26. Karypis G. Family of Graph and Hypergraph Partitioning Software. URL: <http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/views/metis/> (дата обращения: 27.02.2024).
27. Pothen A., Simon H.D., Kang-Pu P.L. Partitioning Sparse Matrices with Eigenvectors of Graphs. *Report RNR-89-009*. July 1989. URL: <http://snap.stanford.edu/class/cs224w-readings/Pothen89Partition.pdf> (дата обращения: 27.02.2024).
28. Сухинов А.А. *Математическое моделирование процессов переноса примесей в жидкостях и пористых средах*. Дис. канд. физ.-мат. наук. Москва; 2009. 24 с.
29. Сухинов А.А. Реконструкция экологической катастрофы в Азовском море на основе математических моделей. *Математическое моделирование*. 2008;20(6):15–22.
30. Корнилина М.А., Якововский М.В. Оценка накладных расходов при выполнении расчетов на локально измельчаемых сетках. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2022;102:36. <https://doi.org/10.20948/prepr-2022-102>
31. Григорьев С.К., Захаров Д.А., Корнилина М.А., Якововский М.В. Динамическая балансировка нагрузки при использовании адаптивных локально измельчаемых сеток. *Математическое моделирование*. 2023;35(12):69–88. <https://doi.org/10.20948/mm-2023-12-05>

## References

1. Top500 Supercomputer Sites. (In Russ.). URL: <http://top500.org> (accessed: 21.02.2024).
2. Elizarova T.G., Chetverushkin B.N. Application of multiprocessor transputer systems to solve problems of mathematical physics. *Mathematical Modeling*. 1992;4(11):75–100. (In Russ.).
3. Galushkin A.I., Tochenov V.A. Transputer systems — the beginning of the formation of mass parallel computers in Russia. *Neurocomputers: development, application*. 2005;3:17–28. (In Russ.).

4. Transputer Systems – the Beginning of the Formation of Mass Parallel Computers in Russia. *Collection of abstracts of reports NSCF'2014*. Pereslavl-Zalessky: IPS named after A.K. Aylamazyan RAS; 2014. 45 p. (In Russ.). URL: [https://2014.nscf.ru/TesisAll/0\\_PostMoore\\_Plenar/01\\_008\\_GalushkinAI.pdf](https://2014.nscf.ru/TesisAll/0_PostMoore_Plenar/01_008_GalushkinAI.pdf) (accessed: 21.02.2024).
5. Hybrid Computing Cluster K-100. (In Russ.). URL: <http://www.kiam.ru/MVS/resourses/k100.html> (accessed: 21.02.2024).
6. Davydov A.A., Latsis A.O., Lutsky A.E., Smolyanov Yu.P., Chetverushkin B.N., Shilnikov E.V. Multiprocessor computing system of hybrid architecture “MVS-Express”. *Reports of the Academy of Sciences*. 2010;434(4):459–463. (In Russ.).
7. Center for Collective Use of IPM named after M.V. Keldysh RAS. (In Russ.). URL: <http://ckp.kiam.ru> (accessed: 26.02.2024).
8. Chetverushkin B.N., Churbanova N.G. On the application of the principle of geometric parallelism for the  $(\alpha-\beta)$ -iterative algorithm. *Mathematical Modeling*. 1991;3(3):123–129. (In Russ.).
9. Abalakin I.V., Chetverushkin B.N. Kinetic consistent difference schemes as a model for describing gas dynamic flows. *Mathematical Modeling*. 1996;8(8):17–36. (In Russ.).
10. Chetverushkin B.N. *Kinetically-consistent schemes in gas dynamics: a new model of viscous gas, algorithms, parallel implementation, applications*. Moscow: Moscow State University Publishing House; 1999. 232 p. (In Russ.).
11. Chetverushkin B.N. Hyperbolic quasi-gas dynamics system. *Mathematical Modeling*. 2018;30(2):81–98. (In Russ.).
12. Chetverushkin B.N., D’Aschenzo N., Saveliev A.V., Saveliev V.I. Kinetic model and equations of magnetic gas dynamics. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2018;58(5):716–725. (In Russ.).
13. Saveliev V.I., Chetverushkin B.N. Modeling problems of magnetohydrodynamics on high-performance computing systems. *Mathematical Modeling*. 2020;32(12):3–13. (In Russ.).
14. Hubble Space Telescope Snapshot. (In Russ.). URL: <https://apod.nasa.gov/apod/ap000706.html> (accessed: 26.02.2024).
15. Cappello F. Fault Tolerance in Petascale/ Exascale Systems: Current Knowledge, Challenges and Research Opportunities. *International Journal of High Performance Computing Applications*. 2009;23(3):212–226.
16. Chetverushkin B.N., Yakobovsky M.V. Computational algorithms and fault tolerance of hyperexascale computing systems. *Reports of the Academy of Sciences*. 2017;472(1):1–5. (In Russ.).
17. Chetverushkin B.N., Yakobovsky M.V. Computational algorithms and architecture of high-performance systems. *Preprints of the M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics*. 2018;52:12. (In Russ.).
18. Chetverushkin B.N., Yakobovsky M.V., Kornilina M.A., Semenova A.V. Numerical Algorithms for HPC Systems and Fault Tolerance Communications. *Computer and Information Science*. 2019;1063:34. (In Russ.). [https://doi.org/10.1007/978-3-030-28163-2\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-28163-2_3)
19. Kornilina M.A., Yakobovsky M.V. Modeling the evolution of complex nonlinear systems on multiprocessor computing complexes. *Journal of Physical Chemistry*. 1995;69(8):1545–1548. (In Russ.).
20. Dorodnitsyn L.V., Kornilina M.A., Chetverushkin B.N., Yakobovsky M.V. Modeling gas flows in the presence of chemically active components. *Journal of Physical Chemistry*. 1997;71(12):2275–2281. (In Russ.).
21. Samarsky A.A. *Theory of Difference Schemes*. Moscow: Nauka; 1989. 616 p.
22. Yakobovsky M.V. Processing grid data on distributed computing systems. *Issues of atomic science and technology. Series Mathematical modeling of physical processes*. 2004;2:40–53. (In Russ.).
23. Yakobovsky M.V. Incremental graph decomposition algorithm. *Bulletin of Lobachevsky University of Nizhny Novgorod. Series Mathematical Modeling and Optimal Control*. 2005;1(28):243–250. (In Russ.).
24. Fiedler M. A property of eigenvectors of nonnegative symmetric matrices and its application to graph theory. *Czechoslovak Mathematical Journal*. 1975;25(100):619–633. URL: [http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS14/MatricesGraphsPDEs/paper\\_for\\_students/CZMathJ-25-1975-Fiedler%20copy.pdf](http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS14/MatricesGraphsPDEs/paper_for_students/CZMathJ-25-1975-Fiedler%20copy.pdf) (accessed: 27.02.2024).
25. Hendrickson B., Leland R. A Multilevel Algorithm for Partitioning Graphs. *Supercomputing '95 Proceedings*. San Diego, CA, 1995. URL: <http://www.leonidzhukov.net/hsc/2016/networks/papers/MultilevelAlgorithmPartitioningGraphs.pdf> (accessed: 27.02.2024).
26. Karypis G. Family of Graph and Hypergraph Partitioning Software URL: <http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/views/metis/> (accessed: 27.02.2024).
27. Pothen A., Simon H.D., and Kang-Pu P.L. Partitioning Sparse Matrices with Eigenvectors of Graphs. Report RNR-89-009, July 1989. URL: <http://snap.stanford.edu/class/cs224w-readings/Pothen89Partition.pdf> (accessed: 27.02.2024).
28. Sukhinov A.A. *Mathematical Modeling of Impurity Transport Processes in Liquids and Porous Media*. Candidate of Physical and Mathematical Sciences dissertation. Moscow, 2009. 24 p. (In Russ.).
29. Sukhinov A.A. Reconstruction of an Ecological Disaster in the Azov Sea Based on Mathematical Models. *Mathematical Modeling*. 2008;20(6):15–22. (In Russ.).
30. Kornilina M.A., Yakobovsky M.V. Overhead Costs Assessment for Calculations on Locally Refined Grids. *Preprints of the M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics*. 2022;102:36 p. (In Russ.). <https://doi.org/10.20948/prepr-2022-102>
31. Grigoriev S.K., Zakharov D.A., Kornilina M.A., Yakobovsky M.V. Dynamic Load Balancing Using Adaptive Locally Refined Grids. *Mathematical Modeling*. 2023;35(12):69–88. (In Russ.). <https://doi.org/10.20948/mm-2023-12-05>

Поступила в редакцию 19.02.2024  
Поступила после рецензирования 07.03.2024  
Принята к публикации 11.03.2024

*Об авторах:*

**Якововский Михаил Владимирович**, заместитель директора по научной работе, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук (РФ, 125047, Москва, Миусская пл., 4), [ORCID](#), [MathNet](#), [ScopusID](#), [lira@imamod.ru](mailto:lira@imamod.ru)

**Корнилина Марина Андреевна**, научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук (125047, Москва, Миусская пл., 4), [ORCID](#), [MathNet](#), [ScopusID](#), [mary@imamod.ru](mailto:mary@imamod.ru)

*Заявленный вклад соавторов:*

**М.В. Якововский** — личное участие в проведении всех описываемых исследований за исключением моделирования гравитационного потенциала.

**М.А. Корнилина** — участие в работах по отказоустойчивости и моделированию задачи горения, анализ материалов деятельности диссертационного совета, подготовка материалов статьи.

*Конфликт интересов*

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

*Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

**Received** 19.02.2024

**Received** 07.03.2024

**Accepted** 11.03.2024

*About the Authors:*

**Mikhail V. Yakobovskiy**, Deputy Director for Scientific Work, Institute of Applied Mathematics named after M.V. Keldysh of the Russian Academy of Sciences (4, Miuskaya Sq., Moscow, 125047, RF), [ORCID](#), [MathNet](#), [ScopusID](#), [lira@imamod.ru](mailto:lira@imamod.ru)

**Marina A. Kornilina**, Researcher, Institute of Applied Mathematics named after M.V. Keldysh of the Russian Academy of Sciences (4, Miuskaya Sq., Moscow, 125047, RF), [ORCID](#), [MathNet](#), [ScopusID](#), [mary@imamod.ru](mailto:mary@imamod.ru)

*Contributions of the co-authors:*

**M.V. Yakobovskiy** — direct participation in all described research activities except for modeling gravitational potential.

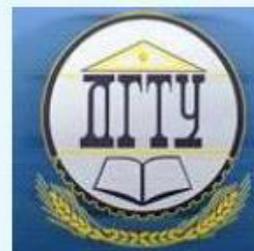
**M.A. Kornilina** — involvement in work on fault tolerance and combustion modeling, analysis of materials of the dissertation council, preparation of manuscript materials.

*Conflict of interest statement*

The authors do not have any conflict of interest.

*All authors have read and approved the final manuscript.*

# ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ INFORMATION TECHNOLOGY



Научная статья



УДК 519.6

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-1-29-35>

## Параллельные алгоритмы численного решения пространственно-трехмерных задач диффузии-конвекции взвесей в прибрежных системах на основе схем расщепления

В.В. Сидорякина<sup>1,2</sup> ✉, Д.А. Соломаха<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Донской государственный технический университет, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону

<sup>2</sup>Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), Российская Федерация, г. Таганрог

✉ [cvv9@mail.ru](mailto:cvv9@mail.ru)

### Аннотация

**Введение.** Для предупреждения возникновения и уменьшения последствий опасных и катастрофических явлений, связанных с переносом взвеси в природных системах, необходимо строить оперативные и научно оправданные прогнозы, выявлять критические состояния, при которых возможно появление чрезвычайных ситуаций. Для этих целей следует создать точный и быстро работающий инструментарий, включающий алгоритмы численного решения модельной задачи, учитывающей специфику природных систем. В настоящей работе представлены параллельные алгоритмы численного решения пространственно-трехмерной задачи диффузии-конвекции взвеси, позволяющие ощутимо снизить время расчёта (более чем в 4 раза), при сравнении с расчетами, проводимыми с использованием последовательного алгоритма.

**Материалы и методы.** Для параллельного решения пространственно-трехмерной задачи диффузии-конвекции построена неявная схема расщепления, в которой исходная непрерывная задача заменяется на цепочку двумерных и одномерных задач. Предлагаемые в работе схемы расщепления являются физически обоснованными и учитывают специфику прибрежных морских систем, для которых влияние микротурбулентной диффузии и адвективного переноса субстанций сопоставимы, причем при аппроксимации реальных задач сеточное число Пекле не превосходит единицы. Для параллельной численной реализации использован метод декомпозиции сеточной области двумя семействами вертикальных плоскостей, параллельными координатным плоскостям  $Oxz$  и  $Oyz$ , в сочетании с методом Зейделя при решении двумерных сеточных задач в горизонтальных плоскостях и методом прогонки при решении одномерных трехточечных задач по вертикальному направлению. В рамках программной реализации параллельного счёта представлен параллельный алгоритм, реализующий задачу диффузии-конвекции на вычислительной системе с использованием технологии MPI.

**Результаты исследования.** Получен сравнительный анализ параллельного и последовательного алгоритмов на примере решения модельной задачи.

**Обсуждение и заключения.** Разработанное программное средство позволяет его практически использовать для решения конкретных гидрофизических задач, в том числе в качестве элемента программного комплекса.

**Ключевые слова:** задача диффузии-конвекции, разностная схема, двумерно-одномерная схема, параллельные вычисления, метод Зейделя, метод прогонки

**Финансирование.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00509, <https://rscf.ru/project/23-21-00509>

**Благодарности.** Авторы выражают глубокую признательность и искреннюю благодарность член-корреспонденту РАН, доктору физико-математических наук, профессору Александру Ивановичу Сухинову за обсуждение алгоритмов и результатов исследования.

**Для цитирования.** Сидорякина В.В., Соломаха Д.А. Параллельные алгоритмы численного решения пространственно-трехмерных задач диффузии-конвекции взвесей в прибрежных системах на основе схем расщепления. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(1):29–35. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-1-29-35>

## Parallel Algorithms for Numerical Solution of Spatially Three-Dimensional Diffusion-Convection Equations in Coastal Systems Based on Splitting Schemes

Valentina V. Sidoryakina<sup>1,2</sup> ✉, Denis A. Solomakha<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

<sup>2</sup>Taganrog Institute named after A.P. Chekhov (branch) of RSUE, Taganrog, Russian Federation

✉ [cvv9@mail.ru](mailto:cvv9@mail.ru)

### Abstract

**Introduction.** To prevent the occurrence and mitigate the consequences of hazardous and catastrophic phenomena associated with sediment transport in natural systems, it is necessary to develop operational and scientifically justified forecasts, identify critical states at which the emergence of emergency situations is possible. For these purposes, it is necessary to create an accurate and efficient toolkit, including algorithms for numerical solution of a model problem that takes into account the specifics of natural systems. In this work, parallel algorithms for numerical solution of a spatially three-dimensional diffusion-convection problem of sediment are presented, which allow a significant reduction in computation time (by more than 4 times) compared to calculations conducted using a sequential algorithm.

**Materials and Methods.** For the parallel solution of the spatially three-dimensional diffusion-convection problem, an implicit splitting scheme is constructed, in which the original continuous problem is replaced by a chain of two-dimensional and one-dimensional problems. The splitting schemes proposed in the work are physically justified and take into account the specifics of coastal marine systems, for which the influence of micro-turbulent diffusion and advective transport of substances are comparable, and the Peclet number does not exceed unity when approximating real problems. For the parallel numerical implementation, a method of decomposing the grid domain into two families of vertical planes parallel to the coordinate planes  $Oxz$  and  $Oyz$ , combined with the Seidel method for solving two-dimensional grid problems in horizontal planes and the tridiagonal matrix algorithm when solving one-dimensional three-point problems in the vertical direction, is used. Within the framework of the parallel computing software implementation, a parallel algorithm is presented that implements the diffusion-convection problem on a computing system using MPI technology.

**Results.** A comparative analysis of parallel and sequential algorithms is obtained using a model problem.

**Discussion and Conclusions.** The developed software allows its practical use for solving specific hydrophysical problems, including as part of a software complex.

**Keywords:** diffusion-convection problem, difference scheme, two-dimensional-one-dimensional scheme, parallel computing, Seidel method, tridiagonal matrix algorithm

**Funding information.** This research was supported by the Russian Science Foundation grant no. 23-21-00509, <https://rscf.ru/project/23-21-00509>

**Acknowledgments.** The authors express their deep gratitude and sincere gratitude to Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor Alexander Ivanovich Sukhinov for discussing algorithms and research results.

**For citation.** Sidoryakina V.V., Solomakha D.A. Parallel algorithms for numerical solution of spatial-three-dimensional problems of diffusion-convection of suspended matter in coastal systems based on splitting schemes. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(1):29–35. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-1-29-35>

**Введение.** При численном моделировании прикладных задач транспорта вещества уравнения конвекции-диффузии [1–4] являются базовыми. Основными особенностями таких задач являются, в частности, несамосопряженность оператора задачи, а также существенные различия в пространственно-временных масштабах разностных операторов конвективного и диффузионного переносов [5–8]. Эти особенности задачи должны быть учтены на дискретном уровне при построении аппроксимации непрерывной задачи.

При численном решении указанного класса задач с перспективой эффективного распараллеливания хорошо зарекомендовал себя метод расщепления по геометрическим направлениям [9–12]. Рассматриваемая неявная схема основана на расщеплении трехмерного оператора диффузии-конвекции на двумерный и одномерный операторы и формировании двумерно-одномерной аддитивной схемы расщепления. Решение разностной трехмерной задачи сводится к решению последовательности связанных по начальным и конечным данным двумерных и одномерных разностных задач, что дает возможность существенно уменьшить временные затраты на выполнение операций обмена в параллельной вычислительной системе. Для численного решения двумерной разностной задачи диффузии-конвекции используется параллельный вариант метода Зейделя, основанный на декомпозиции трехмерной сеточной задачи вертикальными плоскостями, параллельными соответствующим координатным плоскостям по числу параллельных вычислителей. Совокупность одномерных разностных задач диффузии-конвекции по вертикальному направлению решается в каждом процессоре независимо от других с использованием последовательного алгоритма прогонки. При использовании такого алгоритма существенно уменьшаются затраты на межпроцессорные обмены по сравнению с одномерными схемами расщепления, которые выполняются в соответствии с пятиточечным шаблоном для приграничных узлов, входящих в отдельные блоки сеточной информации,

назначенные для обработки в отдельно взятых процессорах. Аппроксимация использует кососимметричную форму представления конвективных членов, а также особенности течений в прибрежных морских системах, для которых, в подавляющем большинстве случаев, сеточное число Пекле не превышает единицы. Это, в свою очередь, позволяет для реальных задач при выборе шага по времени (секунды или немногие десятки секунд) обеспечить строгое диагональное преобладание в матрице, соответствующей оператору задачи, и сходимость метода Зейделя со скоростью геометрической прогрессии. На примере решения модельной задачи проводится сравнительный анализ параллельного и последовательного алгоритмов.

### Материалы и методы

**Разностная схема для трехмерного уравнения диффузии-конвекции.** В прямоугольной декартовой системе координат рассмотрим трехмерное уравнение диффузии-конвекции с использованием кососимметрической формы представления оператора конвективного переноса:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial(uc)}{\partial x} + \frac{\partial(vc)}{\partial y} + \frac{\partial(wc)}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_h \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_h \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_v \frac{\partial c}{\partial z} \right) + f, \quad (1)$$

где  $c = c(x, y, z, t)$  — концентрация частиц в момент времени  $t, t \in [0; T]$ ;  $u, v, w$  — компоненты вектора  $\vec{U}$  скорости водной среды;  $\mu_h, \mu_v$  — коэффициенты горизонтальной и вертикальной диффузии частиц,  $f$  — функция источника,  $f = f(x, y, z, t)$ .

Уравнение (1) дополняется начальными условиями и граничными условиями Дирихле:

$$c(x, y, z, 0) = c_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \bar{G}, \quad (2)$$

$$\bar{G} = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq l_x, 0 \leq y \leq l_y, 0 \leq z \leq l_z\}, \quad \partial G = \bar{G} \setminus G;$$

$$c(x, y, z, t) = v(x, y, z, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (x, y, z) \in \partial G. \quad (3)$$

Введем равномерную прямоугольную пространственно-временную сетку  $\omega = \omega_h \omega_\tau$ , где

$$\omega_h = \{x_i = ih_x, y_j = jh_y, z_k = kh_z, \quad i = \overline{1, N_x}, j = \overline{1, N_y}, k = \overline{1, N_z}, \quad N_x h_x = l_x, N_y h_y = l_y, N_z h_z = l_z\},$$

$$\omega_\tau = \{t_n = (n + \alpha/2)\tau, \quad \alpha \in \{0, 1\}; \quad n = 0, 1, \dots, N_t; \quad N_t \tau \equiv T\}.$$

На временной сетке  $\omega_\tau$  заменим задачу (1)–(3) цепочкой «двумерная — одномерная задача» вида:

$$\frac{\partial c^{(1)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ u \frac{\partial c^{(1)}}{\partial x} + v \frac{\partial c^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial(uc^{(1)})}{\partial x} + \frac{\partial(vc^{(1)})}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_h \frac{\partial c^{(1)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_h \frac{\partial c^{(1)}}{\partial y} \right) + f^{(1)}, \quad (x, y, z) \in G, \quad (4)$$

$$t_n < t \leq t_n + 0,5\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N_t - 1,$$

$$c^{(1)}(x, y, z, 0) = c_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in G, \quad (5)$$

$$c^{(1)}(x, y, z, t_n) = c^{(2)}(x, y, z, t_n), \quad (x, y, z) \in \bar{G}, \quad n = 1, 2, \dots, N_t - 1, \quad (6)$$

$$\frac{\partial c^{(2)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ w \frac{\partial c^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial(wc^{(2)})}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_v \frac{\partial c^{(2)}}{\partial z} \right) + f^{(2)}, \quad (x, y, z) \in G, \quad (7)$$

$$t_n + 0,5\tau < t \leq t_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, N_t - 1,$$

$$c^{(2)}(x, y, z, t^n + 0,5\tau) = c^{(1)}(x, y, z, t^n + 0,5\tau), \quad (x, y, z) \in \bar{G}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N_t - 1, \quad (8)$$

дополненную граничными условиями первого рода вида (3),  $f = f^{(1)} + f^{(2)}$ . В отношении двумерной задачи для функции концентрации вещества  $c$  здесь использовался верхний индекс (1), а в отношении одномерной — (2). Функция источника  $f$  представима в виде  $f = f^{(1)} + f^{(2)}$ . В дальнейших рассуждениях используем черту вверху над функциями  $c, f^{(1)}, f^{(2)}$  для обозначения их сеточных аналогов.

Разностные аналоги уравнений (4)–(6) примут вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{c}^{n+1/2} - \bar{c}^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left( u(x, y, z) \frac{\bar{c}^{n+1/2}(x+h_x, y, z) - \bar{c}^{n+1/2}(x-h_x, y, z)}{2h_x} + \right. \\ & \left. + \frac{u(x+h_x, y, z) \bar{c}^{n+1/2}(x+h_x, y, z) - u(x-h_x, y, z) \bar{c}^{n+1/2}(x-h_x, y, z)}{2h_x} \right) + \\ & \left. + \frac{1}{2} \left( v(x, y, z) \frac{\bar{c}^{n+1/2}(x, y+h_y, z) - \bar{c}^{n+1/2}(x, y-h_y, z)}{2h_y} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{v(x, y+h_y, z) \bar{c}^{n+1/2}(x, y+h_y, z) - v(x, y-h_y, z) \bar{c}^{n+1/2}(x, y-h_y, z)}{2h_y} \right) = \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{h_x} \left( \mu_h(x+h_x, y, z) \frac{\bar{c}^{n+1/2}(x+h_x, y, z) - \bar{c}^{n+1/2}(x, y, z)}{h_x} - \mu_h(x, y, z) \frac{\bar{c}^{n+1/2}(x, y, z) - \bar{c}^{n+1/2}(x-h_x, y, z)}{h_x} \right) + \\
 &+ \frac{1}{h_y} \left( \mu_h(x, y+h_y, z) \frac{\bar{c}^{n+1/2}(x, y+h_y, z) - \bar{c}^{n+1/2}(x, y, z)}{h_y} - \mu_h(x, y, z) \frac{\bar{c}^{n+1/2}(x, y, z) - \bar{c}^{n+1/2}(x, y-h_y, z)}{h_y} \right) + \\
 &\quad + \bar{f}_1^n, \quad (x, y, z) \in \omega_h, \quad n = 0, 1, \dots, N_t - 1, \\
 &\quad t^n < t \leq t^{n+1/2}, \quad n = 0, 1, \dots, N_t - 1,
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\bar{c}^1(x, y, z, 0) = c_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \omega_h, \tag{11}$$

$$\bar{c}^n(x, y, z, t_n) = \bar{c}^{n+1/2}(x, y, z, t_n), \quad (x, y, z) \in \bar{\omega}_h, \quad n = 1, 2, \dots, N_t - 1. \tag{12}$$

Разностные аналоги уравнений (7), (8) примут вид:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\bar{c}^{n+1} - \bar{c}^{n+1/2}}{\tau} + \frac{1}{2} \left( w(x, y, z) \frac{\bar{c}^{n+1}(x, y, z+h_z) - \bar{c}^{n+1}(x, y, z-h_z)}{2h_z} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{w(x, y, z+h_z)\bar{c}^{n+1}(x, y, z+h_z) - w(x, y, z-h_z)\bar{c}^{n+1}(x, y, z-h_z)}{2h_z} \right) = \\
 &= \frac{1}{h_z} \left( \mu_v(x, y, z+h_z) \frac{\bar{c}^{n+1}(x, y, z+h_z) - \bar{c}^{n+1}(x, y, z)}{h_z} - \mu_v(x, y, z) \frac{\bar{c}^{n+1}(x, y, z) - \bar{c}^{n+1}(x, y, z-h_z)}{h_z} \right) + \\
 &\quad + \bar{f}_2^{n+1/2}, \quad (x, y, z) \in \omega_h, \\
 &\quad t_n + 0,5\tau < t \leq t_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, N_t - 1, \\
 &\quad c^{n+1}(x, y, z, t_{n+1/2}) = \bar{c}^{n+1/2}(x, y, z, t_{n+1/2}), \quad (x, y, z) \in \bar{\omega}_h, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N_t - 1.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Численное решение двумерной задачи (4)–(6) проводится методом Зейделя, а одномерной задачи (13)–(14) — методом прогонки. Можно показать, что для задач с сеточным числом Пекле, не превосходящим единицу, метод Зейделя сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем 0,7–0,9 для реальных задач гидрофизики прибрежных систем. Также в этих условиях метод прогонки будет устойчив. На обосновании этих свойств в данной статье для краткости изложения мы не останавливаемся.

**Результаты исследования.** Программная реализация параллельного счета. В рамках данной работы построен параллельный алгоритм, реализующий трехмерную задачу диффузии-конвекции для уравнений (10)–(14) с использованием технологии MPI. При параллельной реализации применялись методы декомпозиции сеточных областей для вычислительно трудоемких задач диффузии-конвекции, учитывающие архитектуру и параметры вычислительной системы [13, 14]. Декомпозиция расчетной двумерной области выполнена по двум пространственным переменным  $x$  и  $y$ , также использовалась декомпозиция по одному пространственному направлению (одной вертикальной координате). Параллельный алгоритм решения двумерной задачи (10) представлен на рис. 1.

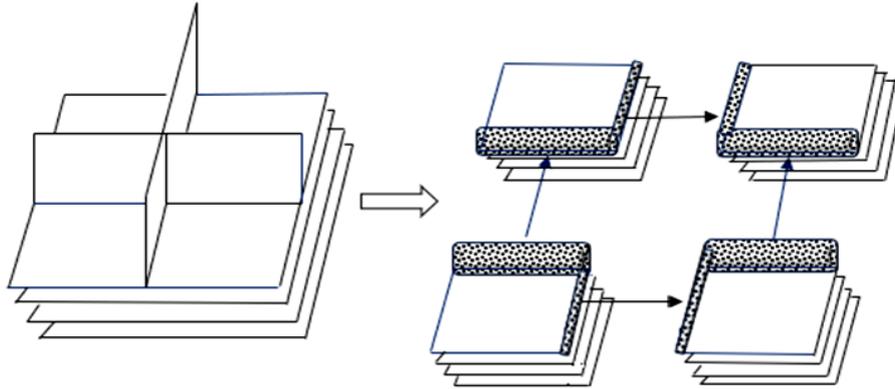


Рис. 1. Декомпозиция двумерной сеточной области и схема для расчета вектора решений

Решение модельной задачи. Продemonстрируем результаты работы параллельного алгоритма на примере модельной задачи для уравнения (1) с граничными условиями Дирихле. Входные данные задачи:

$$\begin{aligned}
 \vec{U} &= (u, v, w) = (x, 2y, 3-3z), \\
 c &= k_1 x(l_x - x) + k_2 y(l_y - y) + k_3 \left( 1 - \exp\left(-\frac{z}{l_z}\right) \right) + k_4 (t + 0,1),
 \end{aligned}$$

$$\mu_h \equiv \text{const}, \quad \mu_v \equiv k_5 \left( 1, 1 + \sin \frac{2\pi z}{l_z} \right),$$

$$k_1 = k_2 = 2x + l_x + 2y + l_y, \quad k_3 = \text{const}, \quad k_4 = \text{const}, \quad k_5 = \text{const},$$

$$0 \leq t \leq 10, \quad l_x = l_y = l_z = 10 \text{ м.}$$

Учитывая специфику прибрежных территорий, подбирались коэффициенты  $k_3$ ,  $k_4$  и  $k_5$  порядка  $1 \div 5$ . На рис. 2 представлена зависимость времени исполнения расчета от количества узлов расчётной сетки для случаев, когда использовались параллельный и последовательный алгоритм.

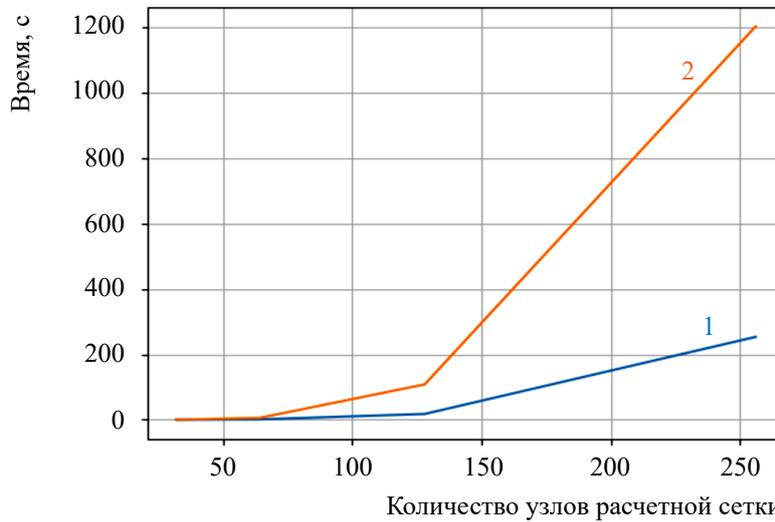


Рис. 2. Графики зависимости времени исполнения расчета от количества узлов расчётной сетки: 1 — для параллельного алгоритма, 2 — для последовательного алгоритма

Приведем сравнительный анализ времени исполнения расчета (таблица 1).

Таблица 1

Сравнение времени исполнения расчета в случае параллельного и последовательного алгоритмов

Количество узлов сетки	32×32	64×64	128×128	256×256
Время работы параллельного алгоритма, с	0,111	1,125	17,656	253,561
Время работы последовательного алгоритма, с	0,388	5,405	108,180	1203,670

Результаты демонстрируют сокращение времени расчётов для параллельного алгоритма более чем в 4 раза по сравнению с последовательным алгоритмом.

**Обсуждение и заключения.** Предложены алгоритмы параллельного и последовательного счёта для решения трехмерной задачи диффузии-конвекции. Применение параллельного алгоритма может ощутимо снизить время расчета (более чем в 4 раза), что является важным для случаев оперативного проведения риск-анализа и определения судьбы взвешенного вещества в море. Разработанное программное средство позволяет его практически использовать для решения конкретных гидрофизических задач, в том числе в качестве элемента программного комплекса [11].

### Список литературы

1. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А., Сидорякина В.В., Проценко С.В. Комплекс объединенных моделей транспорта наночастиц и взвесей с учетом трехмерных гидродинамических процессов в прибрежной зоне. *Математическое моделирование*. 2020;32(2):3–23. <https://doi.org/10.20948/mm-2020-02-01>
2. Alekseenko E., Roux B., Sukhinov A., et. al. Nonlinear hydrodynamics in a mediterranean lagoon. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2017;57(6):978–994. <https://doi.org/10.5194/npg-20-189-2013>
3. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Бондаренко Ю.С. Оценка погрешности решения уравнения на основе схем с весами. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2011;8(121):6–13.
4. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Построение дискретной двумерной математической модели транспорта наночастиц. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2011;8(121):32–44.

5. Sidoryakina V.V. Efficient algorithms for the numerical solution of the coupled sediment and suspended matter transport problems in coastal systems. *Proceedings of the 21st International Workshop on Computer Science and Information Technologies (CSIT 2019). Series: Atlantis Highlights in Computer Sciences*. 2019;3:243–248. <https://doi.org/10.2991/csit-19.2019.42>
6. Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V. About correctness of the suspension transport and sedimentation model, taking into account bottom relief changes. *Computational Mathematics and Information Technologies Electronic Journal*. 2018;2(2):76–90. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2018-2-76-90>
7. Сидорякина В.В., Сухинов А.И. Исследование корректности и численная реализация линеаризованной двумерной задачи транспорта наносов. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2017;57(6):985–1002. <https://doi.org/10.7868/S0044466917060138>
8. Сидорякина В.В., Сухинов А.И. Построение и исследование близости решений в L2 двух краевых задач для модели переноса многокомпонентных взвесей в прибрежных системах. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2023;63(10):1721–1732. <https://doi.org/10.1134/S0965542523100111>
9. Сухинов А.И. *Двумерные схемы расщепления и некоторые их приложения*. Москва: Макс ПИРЕСС. Изд-во МГУ, 2005. 408 с.
10. Sukhinov A.I., Sukhinov A.A., Sidoryakina V.V. Uniqueness of solving the problem of transport and sedimentation of multicomponent suspensions in coastal systems structures. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conference Series* 2020;1479(1):012081. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012081>
11. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Сидорякина В.В., Проценко С.В., Атаян А.М. Локально-двумерные схемы расщепления для параллельного решения трехмерной задачи транспорта взвешенного вещества. *Математическая физика и компьютерное моделирование*. 2021;24(2):38–53. <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2021.2.4>
12. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Сидорякина В.В., Проценко Е.А. Экономичные явно-неявные схемы решения многомерных задач диффузии-конвекции. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2019;12(4):435–445. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.4.37>
13. Belotserkovskii O.M., Gushchin V.A., Shchennikov V.V. Decomposition method applied to the solution of problems of viscous incompressible fluid dynamics. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1975;15:197–207.
14. Самарский А.А., Николаев Е.С. *Методы решения сеточных уравнений*. Москва: Наука, 1978. 592 с.

## References

1. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A., Sidorjakina V.V., Protsenko S.V. Complex of combined models of sediment and suspended matter transport considering three-dimensional hydrodynamic processes in the coastal zone. *Mathematical Modelling*. 2020;32(2):3–23. (in Russ.). <https://doi.org/10.20948/mm-2020-02-01>
2. Alekseenko E., Roux B., Sukhinov A., et al. Nonlinear hydrodynamics in a Mediterranean lagoon. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2017;57(6):978–994. (in Russ.). <https://doi.org/10.5194/mpg-20-189-2013>
3. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Bondarenko Y.S. Error estimation of the solution based on weighted schemes. *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*. 2011;8(121):6–13. (in Russ.).
4. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A. Construction of a discrete two-dimensional mathematical model of sediment transport. *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*. 2011;8(121):32–44. (in Russ.).
5. Sidoryakina V.V. Efficient algorithms for the numerical solution of the coupled sediment and suspended matter transport problems in coastal systems. *Proceedings of the 21st International Workshop on Computer Science and Information Technologies (CSIT 2019). Series: Atlantis Highlights in Computer Sciences*. 2019;3:243–248. <https://doi.org/10.2991/csit-19.2019.42>
6. Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V. About correctness of the suspension transport and sedimentation model, taking into account bottom relief changes. *Computational Mathematics and Information Technologies Electronic Journal*. 2018;2(2):76–90. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2018-2-76-90>
7. Sidorjakina V.V., Sukhinov A.I. Investigation of correctness and numerical implementation of the linearized two-dimensional problem of sediment transport. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2017;57(6):985–1002. (in Russ.). <https://doi.org/10.7868/S0044466917060138>
8. Sidorjakina V.V., Sukhinov A.I. Construction and investigation of the proximity of solutions in L2 of two boundary problems for the model of transport of multicomponent suspensions in coastal systems. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2023;63(10):1721–1732. (in Russ.). <https://doi.org/10.1134/S0965542523100111>
9. Sukhinov A.I. Two-dimensional splitting schemes and some of their applications. Moscow: Max PRESS. Publishing house of MSU, 2005. 408 p. (in Russ.).
10. Sukhinov A.I., Sukhinov A.A., Sidoryakina V.V. Uniqueness of solving the problem of transport and sedimentation of multicomponent suspensions in coastal systems structures. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conference Series*. 2020;1479(1):012081. (in Russ.). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012081>
11. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Sidorjakina V.V., Protsenko S.V., Atayan A.M. Locally two-dimensional splitting schemes for parallel solution of a three-dimensional transport problem of suspended matter. *Mathematical Physics and Computer Simulation*. 2021;24(2):38–53. (in Russ.). <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2021.2.4>

12. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Sidorjakina V.V., Protsenko E.A. Economical implicit-explicit schemes for solving multidimensional diffusion-convection problems. *Computational Continuum Mechanics*. 2019;12(4):435–445. (in Russ.). <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.4.37>

13. Belotserkovskii O.M., Gushchin V.A., Shchennikov V.V. Decomposition method applied to the solution of problems of viscous incompressible fluid dynamics. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1975;15:197–207.

14. Samarskiy A.A., Nikolayev E.S. *Methods for solving grid equations*. Moscow: Nauka, 1978. 592 p. (in Russ.).

**Поступила в редакцию** 11.03.2024

**Поступила после рецензирования** 18.03.2024

**Принята к публикации** 20.03.2024

*Об авторах:*

**Сидорякина Валентина Владимировна**, доцент кафедры математики и информатики, Донской государственной технической университет (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), кандидат физико-математических наук, [MathSciNet](#), [eLibrary.ru](#), [ORCID](#), [ResearcherID](#), [ScopusID](#), [cvv9@mail.ru](mailto:cvv9@mail.ru)

**Соломаха Денис Анатольевич**, студент 4 курса кафедры математики и информатики, Донской государственной технической университет (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [eLibrary.ru](#), [solomakha.05@yandex.ru](mailto:solomakha.05@yandex.ru)

*Заявленный вклад соавторов:*

все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

*Конфликт интересов*

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

*Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

**Received** 11.03.2024

**Revised** 18.03.2024

**Accepted** 20.03.2024

*About the Authors:*

**Valentina V. Sidoryakina**, Associate Professor of the Department of Mathematics and Computer Science, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), Candidate of Physical and Mathematical Sciences, [MathSciNet](#), [eLibrary.ru](#), [ORCID](#), [ResearcherID](#), [ScopusID](#), [cvv9@mail.ru](mailto:cvv9@mail.ru)

**Denis A. Solomakha**, 4th year student of the Department of Mathematics and Computer Science, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), [eLibrary.ru](#), [solomakha.05@yandex.ru](mailto:solomakha.05@yandex.ru)

*Claimed contributorship:*

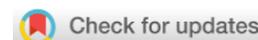
all authors have made an equivalent contribution to the preparation of the publication.

*Conflict of interest statement*

the authors do not have any conflict of interest.

*All authors have read and approved the final manuscript.*

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 513.63

Научная статья

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-1-36-42>


## Расчет нагрева композитного материала при воздействии на поверхность электронным пучком

В.А. Окишев ✉, Г.Г. Лазарева, В.А. Попов

Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация

✉ [okishev-va@rudn.ru](mailto:okishev-va@rudn.ru)

### Аннотация

**Введение.** Современные системы магнитного удержания плазмы используют вольфрам как контактирующий с плазмой материал. Под действием плазменного облучения высокой плотности мощности вольфрам растрескивается, происходит его интенсивная эрозия и эмиссия макрочастиц. Высокотемпературная керамика считается перспективным материалом для защитного покрытия плазменных компонентов, так как устойчива к термическим нагрузкам. Одним из возможных решений может быть покрытие из карбида бора, который имеет высокую температуру плавления.

**Материалы и методы.** В экспериментах на установке ВЕТА исследовалось воздействие электронного пучка на образцы прокатанного вольфрама и композита карбида бора и вольфрама. Тепло от пучка распространяется вглубь образцов, максимальная температура достигается в центре и снижается к краям. Область моделирования представляет собой поперечное сечение образцов, оптимальное для задачи с цилиндрической системой координат. Численная реализация основана на схеме стабилизирующей поправки и метода прогонки.

**Результаты исследования.** Представлена новая модель прогрева образца композита карбида бора и вольфрама при нагреве поверхности электронным пучком. Модель основана на решении уравнения теплопроводности в аксиально-симметричной постановке при постоянных значениях удельной теплоемкости, плотности, теплопроводности металлов.

**Обсуждение и заключения.** Проведен анализ модели нагрева композитного материала при нагреве поверхности электронным пучком при постоянных значениях плотности, теплопроводности и теплоемкости. Результаты моделирования востребованы для анализа результатов и при планировании экспериментов на стенде Beam of Electrons for materials Test Applications (ВЕТА), созданного в ИЯФ СО РАН.

**Ключевые слова:** Математическое моделирование, уравнение теплопроводности, карбид бора, вольфрам, импульсный нагрев, стенд ВЕТА

**Финансирование.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00134. <https://rscf.ru/project/23-21-00134/>

**Для цитирования.** Окишев В.А., Лазарева Г.Г., Попов В.А. Расчет нагрева композитного материала при нагреве поверхности электронным пучком. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(1):36–42. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-1-36-42>

Original article

## Surface Heating Calculation of Composite Material Under the Influence of an Electron Beam on the Surface

Vasily A. Okishev ✉, Galina G. Lazareva, Vladimir A. Popov

RUDN University, Moscow, Russian Federation

✉ [okishev-va@rudn.ru](mailto:okishev-va@rudn.ru)

### Abstract

**Introduction.** Modern plasma magnetic confinement systems use tungsten as a material in contact with plasma. Under the influence of high-density plasma irradiation, tungsten undergoes cracking, intense erosion, and macro-particle emission. High-temperature ceramics are considered a promising material for protective coating of plasma components,

as they are resistant to thermal loads. One possible solution could be a boron carbide coating, which has a high melting temperature.

**Materials and Methods.** The impact of an electron beam on samples of rolled tungsten and boron carbide and tungsten composite was studied in experiments on the BETA setup. The heat from the beam propagates into the samples, with the maximum temperature reached at the center and decreasing towards the edges. The modeling area represents a cross-section of the samples, optimal for a task with a cylindrical coordinate system. The numerical implementation is based on the correction scheme and the marching method.

**Results.** A new model of heating the boron carbide and tungsten composite sample under the influence of surface heating by an electron beam is presented. The model is based on solving the heat conduction equation in an axially symmetric setup with constant values of specific heat capacity, density, and thermal conductivity of metals.

**Discussion and Conclusions.** An analysis of the model of heating the composite material under the influence of surface heating by an electron beam at constant values of density, thermal conductivity, and specific heat capacity has been conducted. The modeling results are in demand for analyzing experimental results and planning experiments at the Beam of Electrons for Materials Test Applications (BETA) facility, created at the Budker Institute of Nuclear Physics SB RAS.

**Keywords:** Mathematical modelling, heat equation, boron carbide, tungsten, pulse heating, BETA facility

**Funding information.** The study was supported by the Russian Science Foundation grant no. 23-21-00134, <https://rscf.ru/project/23-21-00134/>

**For citation.** Okishev V.A. Lazareva G.G., Popov V.A. Surface Heating Calculation of Composite Material Under the Influence of an Electron Beam on the Surface. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(1):36–42. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-1-36-42>

**Введение.** Современные системы магнитного удержания плазмы предполагают наличие контакта периферийной плазмы со стенкой. В настоящее время в качестве контактирующего с плазмой материала дивертора ИТЭР (международный экспериментальный термоядерный реактор) и некоторых плазменных компонентов токамаков предполагается вольфрам. Исследования последних лет показали, что под действием плазменного облучения большой плотности мощности наблюдаются растрескивание вольфрама, интенсивная эрозия, эмиссия макроскопических частиц, оплавление при сравнительно низких температурах и другие процессы, способные, в конечном итоге, привести к ускоренному разрушению вольфрамовых тайлов дивертора ИТЭР [1–3]. Высокотемпературная керамика является перспективным альтернативным материалом на роль защитного покрытия плазменных компонентов. Одним из главных преимуществ керамики перед другими материалами в этом случае можно отметить высокую устойчивость к интенсивным термическим нагрузкам [4]. Чтобы защитить вольфрамовые пластины ИТЭР от воздействия плазмы и, таким образом, предотвратить развитие перечисленных процессов, можно использовать возобновляемое покрытие из карбида бора (В4С). Он имеет высокую температуру плавления (~3000 К), не подвергается химическому распылению, а физическое распыление значительно ниже, чем у графита и лишь незначительно увеличивается при температуре 1700К [5]. Также, по сравнению с графитом, карбид бора плохо удерживает водород [6].

Исследования, проводимые в ИЯФ СО РАН сосредоточены на изучении эрозии поверхности вольфрамового образца при воздействии лазерного импульса или электронного пучка. Эксперименты проводятся на стенде Beam of Electrons for materials Test Applications (BETA), созданном в ИЯФ СО РАН [1]. Проводилось [2] моделирование нагрева и плавления вольфрама на основе решения в области образца двухфазной задачи Стефана. Новизна и сложность решения задачи обусловлена необходимостью сформулировать нелинейные граничные условия, описывающие нагрев и испарение материала на его поверхности [7]. На основе расчета температуры проводятся работы [8] по определению тока в образце вольфрама и испаряемом веществе. Термотоки определяются из уравнений электродинамики с учетом электрического сопротивления и термоЭДС, рассчитанных через интеграл по энергии электронов. Ток рассматривается как возможный источник вращения вещества, который наблюдается в эксперименте.

Новое направление исследований в ИЯФ СО РАН состоит в изучении процесса нагрева образца композита карбида бора и вольфрама [4]. Натурные исследования сопровождаются вычислительным экспериментом. Практическая направленность работы требует, чтобы постановка модельной задачи как можно более точно соответствовала условиям эксперимента. Результаты расчетов итоговой модели будут использоваться для анализа данных, полученных на экспериментальном стенде BETA в ИЯФ СО РАН.

**Материалы и методы.** В экспериментах на установке BETA образцы прокатанного вольфрама [8] и композита карбида бора и вольфрама [4] подвергались воздействию осесимметричного электронного пучка. Электроны с энергией 80–90 кэВ нагревают материал в слое, который является тонким по сравнению с характерной глубиной нагрева материала. Тепло, поглощенное поверхностью, распространяется в материал. Образец имеет размеры 25 мм × 25 мм и типичную толщину 4 мм. Поскольку за такое короткое время образец нагревается на глубину нескольких сотен микрон, область моделирования представляла собой поперечное сечение образца: область 12 мм × 2 мм (рис. 1).

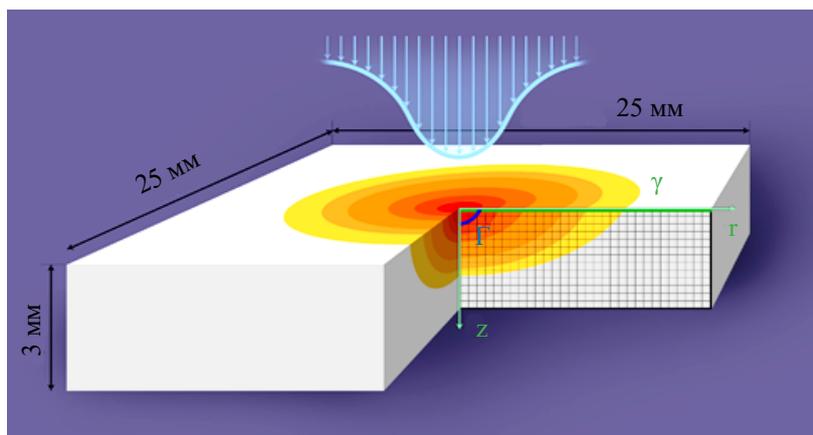


Рис. 1. Схема эксперимента

Процесс распространения тепла по поверхности и вглубь образца описывается уравнением теплопроводности в аксиально-симметричной постановке:

$$\begin{cases} c(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\lambda(T)\partial T}{\partial z}, \\ (n, \nabla T)|_{\gamma} = \frac{W(t, r)}{\lambda(T)}, (n, \nabla T)|_{\Omega-\gamma} = 0, T|_{t=0} = T_0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\Omega$  — все границы образца;  $\gamma$  — нагреваемая поверхность;  $T(t, r, z)$  — температура;  $c(T)$  — удельная теплоемкость;  $\rho(T)$  — плотность;  $\lambda(T)$  — теплопроводность;  $W(t, r)$  — плотность мощности на поверхности  $\gamma$ ;  $n$  — нормаль к поверхности;  $T_0$  — температура в начальный момент времени.

Распределение мощности по поверхности теплового потока определяется как  $W(t, r) = W_{\max}(t)\exp(-Ar^2)$ . Здесь  $A = \frac{1}{a^2} = 0,03088523 \text{ мм}^{-2}$  — константа, характеризующая радиус пучка  $a$ . Аксиально симметричная конфигурация теплового потока определяет оптимальную формулировку задачи в цилиндрической системе координат, поскольку распределение мощности теплового потока по поверхности имеет максимальные значения в центре образца и уменьшается пропорционально радиусу. Нагрев образца происходит в центре пластины и не достигает ее краев. Образец нагревается на глубину не более 1 мм. Решение задачи в поперечном сечении определяется важностью процесса прогрева материала вглубь образца. Основной вклад в решение вносит граничное условие на нагреваемой поверхности и параметры материала.

Введем равномерную прямоугольную сетку с узлами  $(i, k)$ :  $i = 1 \dots N_r$ ,  $k = 1 \dots N_z$  в двумерной области  $(r, z)$ :  $r \in [r_0, r_{\max}]$ ,  $z \in [z_0, z_{\max}]$ ,  $r_0 = z_0 = 0$ ,  $r_{\max} = 12 \text{ мм}$ ,  $z_{\max} = 2 \text{ мм}$ , причем, при  $0 \leq z \leq 0,1 \text{ мм}$  находится слой карбида бора, а при  $0,1 < z \leq 2 \text{ мм}$  — вольфрам. Определим узлы сетки с помощью сеточных функций:

$$\begin{aligned} t^n &= n\tau, \quad n = 1, \dots, T, \\ r_i &= ih, \quad i = 1, \dots, N_r, \\ z_k &= kh, \quad k = 1, \dots, N_z, \\ T_{ik}^n &= T(t^n, r_i, z_k), \\ W_i^n &= W_{\max}(t^n)\exp(-Ar_i^2). \end{aligned}$$

Введем разностные операторы

$$(\Lambda_{rr})_{ik}^n = \frac{1}{r_i h^2 c \rho} \left[ r_{i+\frac{1}{2}} (T_{i+1k}^n - T_{ik}^n) - r_{i-\frac{1}{2}} (T_{ik}^n - T_{i-1k}^n) \right], \quad (2)$$

$$(\Lambda_{zz})_{ik}^n = \frac{\lambda}{c \rho h^2} (T_{ik}^n - T_{i-1k}^n),$$

$$f_{i+\frac{1}{2}j} = \frac{f_{ij} + f_{i+1j}}{2}, \quad f_{ij+\frac{1}{2}} = \frac{f_{ij} + f_{ij+1}}{2}.$$

Численная реализация задачи (1) основана на схеме стабилизирующей поправки [9] и метода прогонки:

$$\begin{cases} \frac{T_{ik}^{n+\frac{1}{2}} - T_{ik}^n}{\tau} = (\Lambda_{rr})_{ik}^{n+\frac{1}{2}} + (\Lambda_{zz})_{ik}^n, \\ \frac{T_{ik}^{n+1} - T_{ik}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = (\Lambda_{zz})_{ik}^{n+1} - (\Lambda_{zz})_{ik}^n. \end{cases} \quad (3)$$

Красевые условия:

$$\frac{T_{i,3}^{n+1} - 4T_{i,2}^{n+1} + 3T_{i,1}^{n+1}}{2h} = \frac{W_i^{n+1}}{\lambda},$$

$$\frac{T_{N_r-2,k}^{n+\frac{1}{2}} - 4T_{N_r,k}^{n+\frac{1}{2}} + 3T_{N_r-1,k}^{n+\frac{1}{2}}}{2h} = 0,$$

$$\frac{T_{i,N_z-2}^{n+1} - 4T_{i,N_z}^{n+1} + 3T_{i,N_z-1}^{n+1}}{2h} = 0.$$

Для проверки правильности алгоритма решена тестовая задача [10]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( k_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial z} \right), & z > 0, t > 0, \\ u(z,0) = 0, u(0,t) = u_0 t^{\frac{1}{\sigma}}, \end{cases} \quad (4)$$

где  $u_0 = \left( \frac{\sigma c^2}{k_0} \right)^{\frac{1}{\sigma}}$ ,  $k_0 = 0,5$ ,  $\sigma = 2$ ,  $c = 1$  и точное решение:

$$u_{\text{exact}}(z,t) = \begin{cases} \left( \frac{\sigma c}{k_0} (ct - z) \right)^{\frac{1}{\sigma}}, & \text{при } z \leq ct, \\ 0, & \text{при } z > ct. \end{cases}$$

Решим задачу при  $x \in [0,1]$  и на интервале времени  $t \in [0, 0,5]$ . На рис. 2 представлено решение задачи (4) в разные моменты времени, на рис. 3 показан график зависимости относительной погрешности  $\epsilon$  от шага сетки  $h$ .

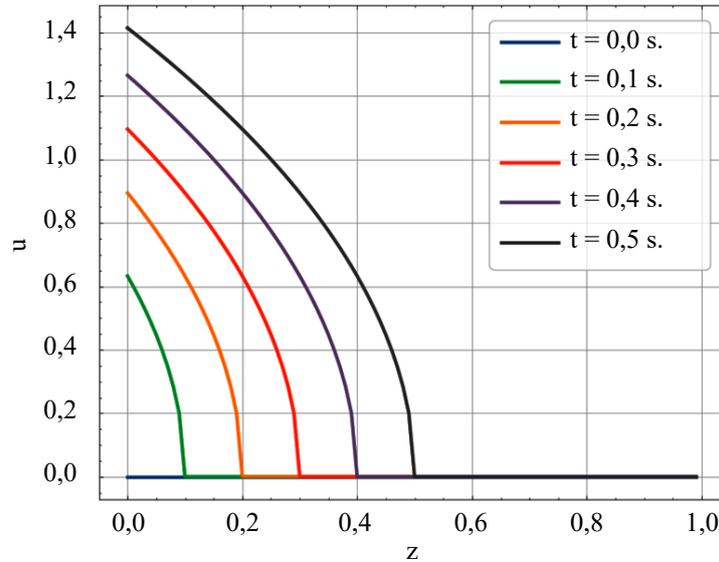


Рис. 2. Решение задачи (4) в разные моменты времени

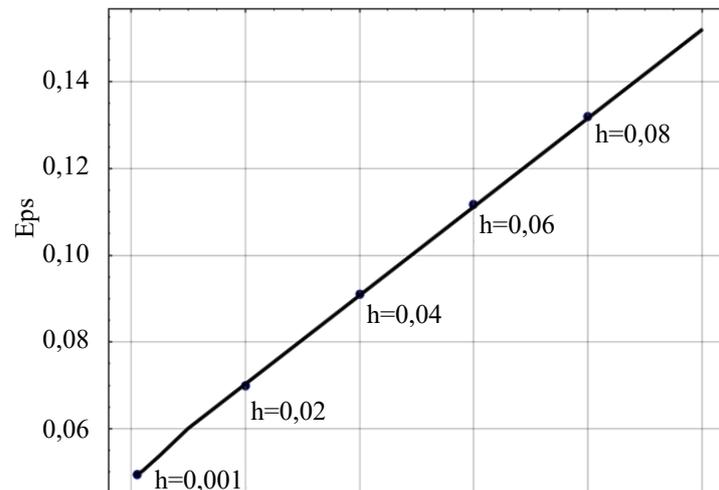


Рис. 3. График зависимости относительной погрешности от шага сетки

**Результаты исследования.** Рассмотрим численное решение задачи (1) для случая постоянных коэффициентов (таблица 1).

Таблица 1

Характеристики карбида бора и вольфрама, использованные при расчетах

Единицы измерения	Вольфрам	Карбид бора
$c, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	148,34	2153,66
$\rho, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	19051,24	2509,06
$\lambda, \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	119,55	20,79

Расчет проведен при  $\tau = 0,01, h = 0,01$ . Время расчета определялось температурой нагрева поверхности пластинки до 2000 К. Численные эксперименты показывают, что карбид бора, имея большую по сравнению с вольфрамом теплоемкость, сильнее нагревается, но из-за низкой теплопроводности замедляет распространение тепла вглубь.

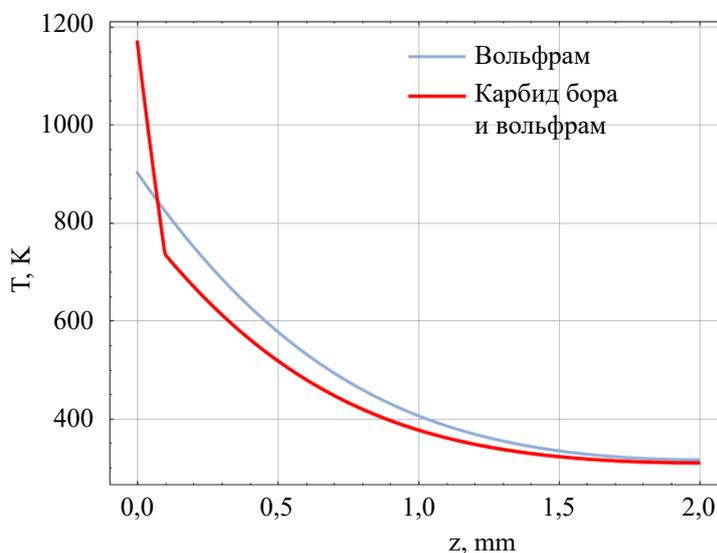


Рис. 4. Распределение температуры вглубь образца

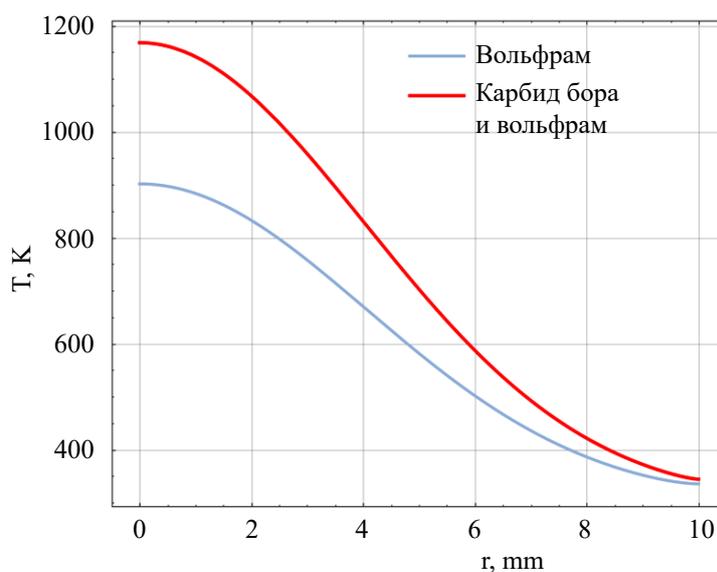


Рис. 5. Распределение температуры на поверхности образца

Таким образом, применение защитного покрытия из карбида бора позволяет уменьшить температуру, воздействующую на вольфрам, тем самым предотвращая нагрев материала до критических значений ( $T > 800 \text{ К}$  [11, 12]), которые могут привести к растрескиванию.

**Обсуждения и заключение.** Проведен анализ модели нагрева композитного материала при нагреве электронным пучком при постоянных значениях плотности, теплопроводности и теплоемкости. Результаты проведенного моделирования показывают, что карбид бора, имея большую по сравнению с вольфрамом теплоемкость, сильнее нагревается, но из-за небольшой теплопроводности замедляет распространение тепла вглубь.

### Список литературы

1. Vyacheslavov L., Arakcheev A., Burdakov A., Kandaurov I., Kasatov A., Kurkuchekov V., et al. Novel electron beam based test facility for observation of dynamics of tungsten erosion under intense ELM-like heat loads. *AIP Conference Proceedings*. 2016;1771:060004.
2. Arakcheev A.S., Apushkinskaya D.E., Kandaurov I.V., Kasatov A.A., Kurkuchekov V.V., Lazareva G.G., et al. Two-dimensional numerical simulation of tungsten melting under pulsed electron beam. *Fusion Engineering and Design*. 2018;132:13–17.
3. Lazareva G.G., Arakcheev A.S., Vasilyev A.A., Maksimova A.G. Numerical simulation of tungsten melting under fusion reactor-relevant high-power pulsed heating. *Smart Innovation, Systems and Technologies*. 2019;133:41–51.
4. Cherepanov D., Vyacheslavov L., Popov V., Ryzhkov G.A., Kasatov A.A., Vasilyev A., et al. In situ study of thermal shock damage to high-temperature ceramics. *Nuclear Materials and Energy*. 2023;36:101495. <https://doi.org/10.1016/j.nme.2023.101495>
5. Молодец А.М., Голышев А.А., Шилов Г.В. Плавление ударно-сжатого карбида бора. *Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2020;111(12):838–845.
6. Azizov E.A., Airapetov A., Begrambekov L., Buzhinsky O.I., Vergazov S., Grunin Andrey, et al. Combined device used for boron carbide coating deposition and material testing under high intensity plasma heat loads. *Problems of Atomic Science and Technology, Ser. Thermonuclear Fusion*. 2014;37:30–38. <https://doi.org/10.21517/0202-3822-2014-37-4-30-38>
7. Lazareva G.G., Arakcheev A.S., Popov V.A. Mathematical modeling of melting tungsten exposed to pulsed laser beam. *Dokl. Math*. 2023;107(1):83–87.
8. Lazareva G.G., Popov V.A. Effect of Temperature Distribution on the Calculation of the Thermal Current in the Mathematical Model of Pulsed Heating of a Tungsten. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023;44(10):4449–4460. <https://doi.org/10.1134/S199508022310027X>
9. Яненко Н.Н. *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики*. Новосибирск; 1967. 96 с.
10. Tikhonov A.N., Samarsky A.A. *The Equations of Mathematical Physics*. Science. Moscow; 1972. 800 p.
11. Arakcheev A.S., Skovorodin D.I., Burdakov A.V., Shoshin A.A., Polosatkin S.V., Vasilyev A.A., et al. Calculation of cracking under pulsed heat loads in tungsten manufactured according to ITER specifications. *Journal of Nuclear Materials*. 2015;467:165–171. <https://doi.org/10.1016/j.jnucmat.2015.09.034>
12. Changjun Li, Dahuan Zhu, Xiangbin Li, Baoguo Wang, Junling Chen, Thermal-stress analysis on the crack formation of tungsten during fusion relevant transient heat loads. *Nuclear Materials and Energy*. 2017;13:68–73. <https://doi.org/10.1016/j.nme.2017.06.008>

### References

1. Vyacheslavov L., Arakcheev A., Burdakov A., Kandaurov I., Kasatov A., Kurkuchekov V., et al. Novel electron beam based test facility for observation of dynamics of tungsten erosion under intense ELM-like heat loads. *AIP Conference Proceedings*. 2016;1771:060004.
2. Arakcheev A.S., Apushkinskaya D.E., Kandaurov I.V., Kasatov A.A., Kurkuchekov V.V., Lazareva G.G., et al. Two-dimensional numerical simulation of tungsten melting under pulsed electron beam. *Fusion Engineering and Design*. 2018;132:13–17.
3. Lazareva G.G., Arakcheev A.S., Vasilyev A.A., Maksimova A.G. Numerical simulation of tungsten melting under fusion reactor-relevant high-power pulsed heating. *Smart Innovation, Systems and Technologies*. 2019;133:41–51.
4. Cherepanov D., Vyacheslavov L., Popov V., Ryzhkov G.A., Kasatov A.A., Vasilyev A., et al. In situ study of thermal shock damage to high-temperature ceramics. *Nuclear Materials and Energy*. 2023;36:101495. <https://doi.org/10.1016/j.nme.2023.101495>
5. Molodets A.M., Golyshev, A.A., Shilov G.V. Melting of impact-compressed boron carbide. *Letters to the Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2020;111(12):838–845. (in Russ.).
6. Azizov E.A., Airapetov A., Begrambekov L., Buzhinsky O.I., Vergazov S., Grunin Andrey, et al. Combined device used for boron carbide coating deposition and material testing under high intensity plasma heat loads. *Problems of Atomic Science and Technology, Ser. Thermonuclear Fusion*. 2014;37:30–38. <https://doi.org/10.21517/0202-3822-2014-37-4-30-38>
7. Lazareva G.G., Arakcheev A.S., Popov V.A. Mathematical modeling of melting tungsten exposed to pulsed laser beam. *Dokl. Math*. 2023;107(1):83–87.
8. Lazareva G.G., Popov V.A. Effect of Temperature Distribution on the Calculation of the Thermal Current in the Mathematical Model of Pulsed Heating of a Tungsten. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023;44(10):4449–4460. <https://doi.org/10.1134/S199508022310027X>

9. Yanenko N.N. *The method of fractional steps for solving multidimensional problems of mathematical physics*. Novosibirsk; 1967. 96 p. (in Russ.).
10. Tikhonov A.N., Samarsky A.A. *The Equations of Mathematical Physics*. Science. Moscow; 1972. 800 p.
11. Arakcheev A.S., Skovorodin D.I., Burdakov A.V., Shoshin A.A., Polosatkin S.V., Vasilyev A.A., et al. Calculation of cracking under pulsed heat loads in tungsten manufactured according to ITER specifications. *Journal of Nuclear Materials*. 2015;467:165–171. <https://doi.org/10.1016/j.jnucmat.2015.09.034>
12. Changjun Li, Dahuan Zhu, Xiangbin Li, Baoguo Wang, Junling Chen, Thermal-stress analysis on the crack formation of tungsten during fusion relevant transient heat loads. *Nuclear Materials and Energy*. 2017;13:68–73. <https://doi.org/10.1016/j.nme.2017.06.008>

**Поступила в редакцию** 26.02.2024

**Поступила после рецензирования** 12.03.2024

**Принята к публикации** 14.03.2024

*Об авторах:*

**Окишев Василий Александрович**, стажер-исследователь, Математический институт им. С.М. Никольского, Российский университет дружбы народов (РФ, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6), [ORCID, okishev-va@rudn.ru](https://orcid.org/okishev-va@rudn.ru)

**Лазарева Галина Геннадьевна**, член-корреспондент РАН, профессор, Математический институт им. С.М. Никольского, Российский университет дружбы народов (РФ, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6), [lazareva-gg@rudn.ru](mailto:lazareva-gg@rudn.ru)

**Попов Владимир Андреевич**, младший научный сотрудник, Математический институт им. С.М. Никольского, Российский университет дружбы народов (РФ, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6), [popov-vlan@rudn.ru](mailto:popov-vlan@rudn.ru)

*Заявленный вклад соавторов:*

**В.А. Окишев** — разработка математической модели, разработка алгоритма, расчеты, анализ результатов, визуализация данных.

**Г.Г. Лазарева** — обсуждение результатов.

**В.А. Попов** — постановка задачи.

*Конфликт интересов*

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

*Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

**Received** 26.02.2024

**Received** 12.03.2024

**Accepted** 14.03.2024

*About the Authors:*

**Vasily A. Okishev**, Research Intern, S.M. Nikol'skii Mathematical Institute, RUDN University (6, Miklukho-Maklaya St. Moscow, 117198, RF), [ORCID, okishev-va@rudn.ru](https://orcid.org/okishev-va@rudn.ru)

**Galina G. Lazareva**, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Professor, S.M. Nikol'skii Mathematical Institute, RUDN University (6, Miklukho-Maklaya St. Moscow, 117198, RF), [lazareva-gg@rudn.ru](mailto:lazareva-gg@rudn.ru)

**Vladimir A. Popov**, Junior Research Fellow, S.M. Nikol'skii Mathematical Institute, RUDN University (6, Miklukho-Maklaya St. Moscow, 117198, RF), [popov-vlan@rudn.ru](mailto:popov-vlan@rudn.ru)

*Contributions of the co-authors:*

**V.A. Okishev** — mathematical model development, algorithm development, calculations, results analysis, data visualization.

**G.G. Lazareva** — results discussion.

**V.A. Popov** — problem formulation.

*Conflict of interest statement*

The authors do not have any conflict of interest.

*All authors have read and approved the final manuscript.*

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА COMPUTATIONAL MATHEMATICS



Научная статья



УДК 519.642.2

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-1-43-54>

## Разностный метод решения интегро-дифференциального уравнения параболического типа в многомерной области с неоднородными краевыми условиями первого рода

З.В. Бештокова

Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН,  
г. Нальчик, Российская Федерация

✉ [zarabaeva@yandex.ru](mailto:zarabaeva@yandex.ru)

### Аннотация

**Введение.** Изучается многомерное (по пространственным переменным) интегро-дифференциальное уравнение параболического типа с неоднородными граничными условиями первого рода. Построенная локально-одномерная разностная схема может быть использована при решении прикладных задач, приводящих к многомерным интегро-дифференциальным уравнениям параболического типа, например, при математическом моделировании облачных процессов, при рассмотрении проблемы активного воздействия на конвективные облака с целью предотвращения града и искусственного увеличения осадков, а также при описании функции распределения по массам капель за счет микрофизических процессов конденсации, коагуляции, дробления и замерзания капель в конвективных облаках.

**Материалы и методы.** В данной работе для приближенного решения начально-краевой задачи построена локально-одномерная схема А.А. Самарского с порядком аппроксимации  $O(h^2 + \tau)$ . Основным методом исследования — метод энергетических неравенств.

**Результаты исследования.** Получены априорные оценки в разностной трактовке, откуда следуют единственность, устойчивость, а также сходимости решения локально-одномерной разностной схемы к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы.

**Обсуждение и заключения.** Результаты исследования могут быть использованы для дальнейшей разработки теории краевых задач для параболических уравнений с переменными коэффициентами, а также могут найти применение в области теории разностных схем, в области вычислительной математики и численного моделирования.

**Ключевые слова:** многомерная задача, уравнение диффузии, параболическое уравнение, условие первого рода, разностные схемы, локально-одномерная схема, априорная оценка, устойчивость, сходимость

**Для цитирования.** Бештокова З.В. Разностный метод решения интегро-дифференциального уравнения параболического типа в многомерной области с неоднородными краевыми условиями первого рода. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(1):43–54. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-1-43-54>

Original article

## Finite Difference Method for Solving Parabolic-Type Integro-Differential Equations in Multidimensional Domain with Nonhomogeneous First-Order Boundary Conditions

Zaryana V. Beshtokova

Institute of Applied Mathematics and Automation, KBNC RAS, Nalchik, Russian Federation

✉ [zarabaeva@yandex.ru](mailto:zarabaeva@yandex.ru)

### Abstract

**Introduction.** We investigate a multidimensional (in terms of spatial variables) parabolic-type integro-differential equation with nonhomogeneous first-order boundary conditions. The locally one-dimensional finite difference scheme developed herein can be applied to solve various applied problems leading to multidimensional parabolic-type integro-differential

equations. Examples include mathematical modelling of cloud processes, addressing the issue of active intervention in convective clouds to prevent hail and artificially enhance precipitation, as well as describing the droplet mass distribution function due to microphysical processes such as condensation, coagulation, fragmentation, and freezing of droplets in convective clouds.

**Materials and Methods.** In this study, an approximate solution to the initial-boundary value problem is constructed using the locally one-dimensional scheme of A.A. Samarsky with a specified order of approximation  $O(h^2 + \tau)$ . The primary research method employed is the method of energy inequalities.

**Results.** A priori estimates have been obtained in the discrete interpretation, from which uniqueness, stability, and convergence of the solution of the locally one-dimensional difference scheme to the solution of the original differential problem follow, with a convergence rate equal to the order of approximation of the difference scheme.

**Discussion and Conclusions.** The research findings can be utilized for further development of boundary value problem theory for parabolic equations with variable coefficients. Additionally, they may find applications in the fields of difference scheme theory, computational mathematics, and numerical modelling.

**Keywords:** multidimensional problem, diffusion equation, parabolic equation, first-order condition, difference schemes, locally one-dimensional scheme, a priori estimate, stability, convergence

**For citation.** Beshtokova Z.V. Finite Difference Method for Solving Parabolic-Type In-tegro-Differential Equations in Multidimensional Domain with Nonhomogeneous First-Order Boundary Conditions. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(1):43–54. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-1-43-54>

**Введение.** Большой интерес с точки зрения физических приложений представляют интегро-дифференциальные уравнения, в которых неизвестная функция входит в дифференциальное выражение и, вместе с тем, фигурирует под знаком интеграла. Тематике интегро-дифференциальных уравнений посвящена обширная библиография. Подробный обзор достижений в этой области до 1962 года представлен М.М. Вайнбергом в работе [1]. На необходимость рассмотрения операторных уравнений Вольтерра впервые указал академик М.М. Лаврентьев в своем докладе [2] на Международном конгрессе математиков в Ницце в 1970 году.

Изучению различных краевых задач для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений посвящены работы [3–4], интегро-дифференциальных уравнений соболевского типа — работы [5–7]. В работах [8–10] изучены математические модели, учитывающие память в диффузии, возникающие в моделях вязкоупругих сил в неньютоновских жидкостях и являющиеся результатом модифицированного закона Фурье, применяемого к анизотропным неоднородным средам. В [11] исследуются диффузионные модели, в которых интегральные члены присутствуют в граничном потоке.

Целью настоящей работы является построение и исследование локально-одномерной разностной схемы А.А. Самарского (ЛОС) порядка аппроксимации  $O(h^2 + \tau)$  для приближенного решения краевой задачи с неоднородными граничными условиями первого рода для интегро-дифференциального многомерного параболического уравнения.

Научной новизной работы является разработка ЛОС и получение на основании метода энергетических неравенств априорной оценки в разностной форме для решения ЛОС с неоднородными граничными условиями первого рода, откуда следуют единственность решения, непрерывная и равномерная зависимость решения ЛОС от входных данных, а также сходимости решения ЛОС к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы.

Методам расщепления многомерных задач на одномерные посвящены работы J. Douglas, D.W. Peaceman, H.N. Rachford [12–13], Н.Н. Яненко [14], А.А. Самарского [15], Г.И. Марчука [16], Е.Г. Дьяконова [17] и др.

Численным методам решения локальных и нелокальных краевых задач для многомерных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа на основе различных методов расщепления посвящены работы автора [18–20].

**Материалы и методы**

**Постановка задачи.** В замкнутой области  $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0, T]$ , основанием которой является  $p$ -мерный куб  $\bar{G} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 \leq x_\alpha \leq l, \alpha = 1, 2, \dots, p\}$  с границей  $\Gamma$ ,  $\bar{G} = G \cup \Gamma$ , рассматривается задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \int_0^t \rho_1(x, t, \tau) u(x, \tau) d\tau = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u|_\Gamma = \mu(x, t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G}, \tag{3}$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) - q_\alpha(x, t) u - \int_0^l \rho_{2,\alpha}(\xi, t) u(\xi, t) d\xi_\alpha,$$

$$0 < c_0 \leq k_\alpha(x, t) \leq c_1, \quad |k_{\alpha, x_\alpha}(x, t)|, |\rho_1(x, t, \tau)|, |\rho_{2,\alpha}(x, t)|, |q_\alpha(x, t)| \leq c_2,$$

$$u(x, t) \in C^{4,2}(\bar{Q}_T), \quad k_\alpha(x, t) \in C^{3,1}(\bar{Q}_T), \quad \rho_1(x, t, \tau), \quad \rho_{2,\alpha}(x, t), \quad q_\alpha(x, t), \quad f(x, t) \in C^{2,1}(\bar{Q}_T), \quad 0 \leq \tau \leq t, \tag{4}$$

$\mu(x, t), u_0(x)$  — непрерывные функции;  $\alpha = 1, 2, \dots, p, c_0, c_1, c_2 = \text{const} > 0, C^{m,n}$  — класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными порядка  $m$  по  $x$  и  $n$  по  $t, Q_T = G \times (0, T]$ .

Присутствие в исследуемом дифференциальном уравнении интеграла по времени связано с необходимостью учитывать зависимость мгновенных значений характеристик описываемого объекта от их соответствующих предыдущих значений, то есть влияние на текущее состояние системы ее предыстории. В современной литературе подобные технические и природные системы называют системами с последствием, наследственностью или динамической памятью. Присутствие в уравнении нелокального источника в интегральной форме из физических соображений совершенно естественно и возникает при математическом моделировании в тех случаях, когда имеются источники (или стоки в зависимости от знака  $\rho_{2,\alpha}(\xi, t)$ ) и невозможно получить информацию о происходящем процессе с помощью непосредственных измерений или же когда возможно измерение лишь некоторых усредненных (интегральных) характеристик искомой величины.

Для приближенного решения начально-краевой задачи построена локально-одномерная схема А.А. Самарского с порядком аппроксимации  $O(h^2 + \tau)$ . Основной метод исследования — метод энергетических неравенств. Сформулированы и доказаны две теоремы: теорема об устойчивости и теорема о сходимости.

### Результаты исследования

**1. Построение локально-одномерной схемы (ЛОС).** По каждому направлению  $O_{x_\alpha}$  введем равномерную сетку с шагом  $h = \frac{l}{N}$  (кубическая сетка с шагом  $h$ ):

$$\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_{h,\alpha}^p, \quad \bar{\omega}_{h,\alpha} = \left\{ x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h : i_\alpha = 1, \dots, N-1, \quad x_\alpha^{(0)} = 0, \quad x_\alpha^{(N)} = N \frac{h}{2} \right\},$$

$$\omega_h = \omega_{h,\alpha}^p, \quad \omega_{h,\alpha} = \left\{ x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h : i_\alpha = 1, \dots, N-1 \right\}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p.$$

На отрезке  $[0, T]$  также введём равномерную сетку  $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0\}$  с шагом  $\tau = T/j_0$ . Каждый из отрезков  $[t_j, t_{j+1}]$  разобьем на  $p$  частей, введя точки  $t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \tau \frac{\alpha}{p}, \alpha = 1, 2, \dots, p-1$ , и обозначим через  $\Delta_\alpha = \left[ t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}, t_{j+\frac{\alpha}{p}} \right]$  полуинтервал, где  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ .

Уравнение (1) перепишем в виде

$$\sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u = 0, \quad L_\alpha u = \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} - \bar{L}_\alpha u - f_\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f,$$

где  $f_\alpha(x, t), (\alpha = 1, 2, \dots, p)$  произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и  $f(x, t)$  удовлетворяющие условию нормировки  $\sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f$ .

На каждом полуинтервале  $\Delta_\alpha, (\alpha = 1, 2, \dots, p)$ , будем последовательно решать задачи

$$L_\alpha \mathcal{G}_{(\alpha)} = \frac{1}{p} \frac{\partial \mathcal{G}_{(\alpha)}}{\partial t} - \bar{L}_\alpha \mathcal{G}_{(\alpha)} - f_\alpha, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \tag{5}$$

$$\begin{cases} \mathcal{G}_\alpha = \mu_{-\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ \mathcal{G}_\alpha = \mu_{+\alpha}, & x_\alpha = l, \end{cases}$$

полагая при этом [21], что

$$\mathcal{G}_{(1)}(x, 0) = u_0(x), \quad \mathcal{G}_{(1)}^j(x, t_j) = \mathcal{G}_{(p)}^{j-1}(x, t_j), \quad j = 1, 2, \dots, j_0,$$

$$\mathcal{G}_{(\alpha)}^j(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}) = \mathcal{G}_{(\alpha-1)}^j(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}), \quad \alpha = 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, j_0 - 1,$$

где  $\bar{L}_\alpha \mathcal{G}_{(\alpha)} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha(x, t) \frac{\partial \mathcal{G}_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha} \right) - d_\alpha \mathcal{G}_{(\alpha)} - \int_0^l \rho_{2,\alpha}(\xi, t) \mathcal{G}_{(\alpha)}(\xi, t) d\xi_\alpha - \frac{1}{p} \int_0^t \rho_1(x, t, \tau) \mathcal{G}_{(\alpha)}(x, \tau, t) d\tau,$

$\mu_{-\alpha} = \mu(x', 0, t), \mu_{+\alpha} = \mu(x', l, t)$  — непрерывные функции.

Аппроксимируем каждое уравнение (5) номера  $\alpha$  неявной схемой на полуинтервале  $\Delta_\alpha$ , тогда получим цепочку из  $p$  одномерных разностных схем:

$$\frac{y_{j+\frac{\alpha}{p}} - y_{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha y_{j+\frac{\alpha}{p}} + \Phi_\alpha y_{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad x_\alpha \in \omega_h, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \tag{6}$$

$$\begin{cases} y_{j+\frac{\alpha}{p}} = \mu_{-\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ y_{j+\frac{\alpha}{p}} = \mu_{+\alpha}, & x_\alpha = l, \end{cases} \tag{7}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad (8)$$

$$\text{где } \Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} = \left( a_\alpha y_{x_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} \right)_{x_\alpha} - d_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} - \sum_{i_\alpha=0}^N p_{2,\alpha} y_{i_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} \bar{h} - \frac{1}{p} \sum_{i_\alpha=0}^N p_{1,\alpha} (x_1, x_2, \dots, x_p; t_j, t_{j'}) y(x, t_{j+\frac{\alpha}{p}}) \tau,$$

$$a_\alpha = k_\alpha(x^{(-0,5\alpha)}, \bar{t}), \quad x^{(-0,5\alpha)} = (x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_\alpha - 0, 5h_\alpha, x_{\alpha+1}, \dots, x_p), \quad \bar{h} = \begin{cases} h, i_\alpha = 1, N-1 \\ \frac{h}{2}, i_\alpha = 0, N, \end{cases}$$

$$d_\alpha = q_\alpha(x, \bar{t}), \quad \varphi_\alpha = f_\alpha(x, \bar{t}), \quad p_1(x, t, \bar{t}) = \rho_1(x, t, \bar{t}), \quad p_{2,\alpha} = \rho_{2,\alpha}(x, \bar{t}), \quad \bar{t} = t_{j+\frac{1}{2}}.$$

**2. Погрешность аппроксимации ЛОС.** Подставляя  $y^{j+\frac{\alpha}{p}} = z^{j+\frac{\alpha}{p}} + u^{j+\frac{\alpha}{p}}$  в схему (6)–(8), получим задачу для погрешности  $z^{j+\frac{\alpha}{p}}$ :

$$\frac{z^{j+\frac{\alpha}{p}} - z^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha z^{j+\frac{\alpha}{p}} + \Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad (9)$$

$$z^{j+\frac{\alpha}{p}} = 0 \quad \text{при } x \in \gamma_{h,\alpha}, \quad z(x,0) = 0,$$

где  $u^{j+\frac{\alpha}{p}}$  — решение исходной задачи (1)–(3),  $y^{j+\frac{\alpha}{p}}$  — решение разностной задачи (6)–(8),

$$\Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}.$$

Обозначив через  $\Psi_\alpha^0 = \left( \bar{L}_\alpha u + f_\alpha - \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{j+1/2}$  и замечая, что  $\sum_{\alpha=1}^p \Psi_\alpha^0 = 0$ , если  $\sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f$ , представим погрешность в виде суммы  $\Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \Psi_\alpha^0 + \Psi_\alpha^*$ :

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} &= \Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} + \Psi_\alpha^0 - \Psi_\alpha^0 = \left( \Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} - \bar{L}_\alpha u^{j+\frac{1}{2}} \right) + \\ &+ \left( \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} - f_\alpha^{j+\frac{1}{2}} \right) - \left( \frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} - \frac{1}{p} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{j+\frac{1}{2}} \right) + \Psi_\alpha^0 = \Psi_\alpha^0 + \Psi_\alpha^*. \end{aligned}$$

Очевидно, что  $\Psi_\alpha^* = O(h^2 + \tau)$ ,  $\Psi_\alpha^0 = O(1)$ ,  $\sum_{\alpha=1}^p \Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \sum_{\alpha=1}^p \Psi_\alpha^0 + \sum_{\alpha=1}^p \Psi_\alpha^* = O(h^2 + \tau)$ .

**3. Устойчивость ЛОС.** Для устойчивости ЛОС справедлива следующая

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия гладкости и ограниченности (4), тогда локально-одномерная схема (6)–(8) устойчива по правой части и начальным данным, так что для решения схемы (6)–(8) при  $\tau \leq \tau_0$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} &|\rho_p y^{j+1}|_{L_2(\omega_h)}^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \left( \|\rho_\alpha y_{x_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2 + \|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \right) \leq \\ &\leq M \left( \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \|\varphi_\alpha^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \frac{\sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_\alpha \neq i_\alpha} (\mu_{-\alpha}^2(0, x', t_{j'}) + \mu_{+\alpha}^2(l, x', t_{j'})) \bar{H}}{h} + \|y^0\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \right). \end{aligned} \quad (10)$$

где  $M = \text{const} > 0$  не зависит от  $h$  и  $\tau$ .

Далее через  $M_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  обозначаются положительные постоянные, зависящие только от входных данных задачи (1)–(3).

**Доказательство.** Исследование проведем с помощью метода энергетических неравенств, для чего введём скалярные произведения и нормы в следующем виде:

$$\frac{1}{p} y_i^{(\alpha)} = \frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}, \quad (u, v)_\alpha = \sum_{i_\alpha=1}^{N-1} u_{i_\alpha} v_{i_\alpha} h, \quad \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 = \sum_{i_\alpha=1}^{N-1} y_{i_\alpha}^2 h,$$

$$(u, v) = \sum_{x \in \omega_h} uvH, \quad H = h^p, \quad |y^{(\alpha)}|_{L_2(\omega_h)}^2 = \sum_{i \neq i_\alpha} |y^{(\alpha)}|_{L_2(\alpha)}^2 H/h, \quad [u, v]_\alpha = \sum_{i_\alpha=0}^N u_{i_\alpha} v_{i_\alpha} \bar{h}, \quad |[y^{(\alpha)}]|_{L_2(\alpha)}^2 = \sum_{i_\alpha=0}^N y_{i_\alpha}^2 \bar{h},$$

$$[u, v] = \sum_{x \in \bar{\omega}_h} uv\bar{H}, \quad \bar{H} = \bar{h}^p, \quad |[y^{(\alpha)}]|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 = \sum_{i \neq i_\alpha} |[y^{(\alpha)}]|_{L_2(\alpha)}^2 \bar{H}/\bar{h}.$$

Умножив уравнение (6) на  $y^{(\alpha)}h$ , где  $y^{(\alpha)} = y^{j+\frac{\alpha}{p}}$  и просуммировав по  $s_\alpha$  от  $\eta_\alpha$  до  $\xi_\alpha$ , получим [22]:

$$\frac{1}{p} \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} y_{i, s_\alpha}^{(\alpha)} y_{s_\alpha}^{(\alpha)} h = \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \Lambda_\alpha y_{s_\alpha}^{(\alpha)} y_{s_\alpha}^{(\alpha)} h + \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \Phi_{(\alpha), s_\alpha} y_{s_\alpha}^{(\alpha)} h, \quad 0 \leq \eta_\alpha \leq \xi_\alpha \leq N. \quad (11)$$

Преобразуем каждое слагаемое тождества (11):

$$\frac{1}{p} \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} y_{i, s_\alpha}^{(\alpha)} y_{s_\alpha}^{(\alpha)} h = \frac{1}{2p} \left( \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h \right)_{\bar{i}} + \frac{\tau}{2p} \left( \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} (y_{i, s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h \right), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \Lambda_\alpha y_{s_\alpha}^{(\alpha)} y_{s_\alpha}^{(\alpha)} h &= \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha})_{x_\alpha} y_{s_\alpha}^{(\alpha)} h - \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} d_\alpha (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h - \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \left( y_{s_\alpha}^{(\alpha)} \sum_{i_\alpha=0}^N p_{2, \alpha, i_\alpha} y_{i_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} \bar{h} \right) h - \\ &- \frac{1}{p} \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \left( y_{s_\alpha}^{(\alpha)} \sum_{j=0}^j p_1(x, t_j, t_{j'}) y \left( x, t^{j+\frac{\alpha}{p}} \right) \tau \right) h = - \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha+1} a_{\alpha, s_\alpha} (y_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h + a_{\alpha, \xi_\alpha+1} y_{\bar{x}_\alpha, \xi_\alpha+1}^{(\alpha)} y_{\xi_\alpha+1}^{(\alpha)} - a_{\alpha, \eta_\alpha} y_{\bar{x}_\alpha, \eta_\alpha}^{(\alpha)} y_{\eta_\alpha-1}^{(\alpha)} - \\ &- \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} d_{\alpha, s_\alpha} (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h - \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \left( y_{s_\alpha}^{(\alpha)} \sum_{i_\alpha=0}^N p_{2, \alpha, i_\alpha} y_{i_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} \bar{h} \right) h - \frac{1}{p} \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \left( y_{s_\alpha}^{(\alpha)} \sum_{j=0}^j p_1(x, t_j, t_{j'}) y \left( x, t^{j+\frac{\alpha}{p}} \right) \tau \right) h, \\ &\sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \Phi_{(\alpha), s_\alpha} y_{s_\alpha}^{(\alpha)} h \leq \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \Phi_{(\alpha), s_\alpha}^2 h + \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h. \end{aligned} \quad (13)$$

Преобразуем отдельно выражение  $a_{\alpha, \xi_\alpha+1} y_{\bar{x}_\alpha, \xi_\alpha+1}^{(\alpha)} y_{\xi_\alpha+1}^{(\alpha)} - a_{\alpha, \eta_\alpha} y_{\bar{x}_\alpha, \eta_\alpha}^{(\alpha)} y_{\eta_\alpha-1}^{(\alpha)}$ , тогда с учетом  $(y^2)_{(\bar{x}_\alpha)} = 2y_{(\bar{x}_\alpha)} y^{(\alpha)} - hy_{(\bar{x}_\alpha)}^2$  получим

$$\begin{aligned} a_{\alpha, \xi_\alpha+1} y_{\bar{x}_\alpha, \xi_\alpha+1}^{(\alpha)} y_{\xi_\alpha+1}^{(\alpha)} - a_{\alpha, \eta_\alpha} y_{\bar{x}_\alpha, \eta_\alpha}^{(\alpha)} y_{\eta_\alpha-1}^{(\alpha)} &= \frac{1}{2} (a_\alpha y^2)_{\bar{x}_\alpha, \xi_\alpha+1} - \frac{1}{2} (a_\alpha)_{\bar{x}_\alpha, \xi_\alpha+1} y_{\xi_\alpha}^2 + \\ &+ \frac{1}{2} a_{\alpha, \xi_\alpha+1} y_{\bar{x}_\alpha, \xi_\alpha+1}^2 h - \frac{1}{2} (a_\alpha y^2)_{\bar{x}_\alpha, \eta_\alpha} + \frac{1}{2} (a_\alpha)_{\bar{x}_\alpha, \eta_\alpha} y_{\eta_\alpha-1}^2 + \frac{1}{2} a_{\eta_\alpha} y_{\bar{x}_\alpha, \eta_\alpha}^2 h. \end{aligned} \quad (14)$$

Учитывая преобразования (12)–(15), из (11) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2p} \left( \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h \right)_{\bar{i}} + \frac{\tau}{2p} \left( \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} (y_{i, s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h \right) + \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha-1}^{\xi_\alpha} a_{\alpha, s_\alpha} (y_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} (a_\alpha y^2)_{\bar{x}_\alpha, \xi_\alpha+1} - \frac{1}{2} (a_\alpha)_{\bar{x}_\alpha, \xi_\alpha+1} y_{\xi_\alpha}^2 + \frac{1}{2} (a_\alpha)_{\bar{x}_\alpha, \eta_\alpha} y_{\eta_\alpha-1}^2 - \frac{1}{2} (a_\alpha y^2)_{\bar{x}_\alpha, \eta_\alpha} - \\ &- \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \left( y_{s_\alpha}^{(\alpha)} \sum_{i_\alpha=0}^N p_{2, \alpha, i_\alpha} y_{i_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} \bar{h} \right) h - \frac{1}{p} \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \left( y_{s_\alpha}^{(\alpha)} \sum_{j=0}^j p_1(x, t_j, t_{j'}) y \left( x, t^{j+\frac{\alpha}{p}} \right) \tau \right) h - \\ &- \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} d_{\alpha, s_\alpha} (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h + \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \Phi_{(\alpha), s_\alpha}^2 h + \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h. \end{aligned} \quad (15)$$

Умножим теперь (16) на  $h$  и просуммируем по  $\xi_\alpha$  от  $\eta_\alpha$  до  $N$ , затем полученное неравенство умножим на  $h$  и просуммируем по  $\eta_\alpha$  от 0 до  $N$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2p} \left( \sum_{\eta_\alpha=0}^N h \sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^N h \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h \right)_{\bar{i}} + \frac{1}{2} \sum_{\eta_\alpha=0}^N h \sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^N h \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha-1}^{\xi_\alpha} a_{\alpha, s_\alpha} (y_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{\eta_\alpha=0}^N h \sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^N (a_\alpha y^2)_{\bar{x}_\alpha, \xi_\alpha+1} h - \frac{1}{2} \sum_{\eta_\alpha=0}^N h \sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^N (a_\alpha)_{\bar{x}_\alpha, \xi_\alpha+1} y_{\xi_\alpha}^2 h + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\eta_\alpha=0}^N h \sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^N (a_\alpha)_{\bar{x}_\alpha, \eta_\alpha} y_{\eta_\alpha-1}^2 h - \frac{1}{2} \sum_{\eta_\alpha=0}^N h \sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^N h \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \left( y_{s_\alpha}^{(\alpha)} \sum_{i_\alpha=0}^N p_{2, \alpha, i_\alpha} y_{i_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} \bar{h} \right) h - \end{aligned} \quad (16)$$

$$-\frac{1}{p} \sum_{\eta_\alpha=0}^N h \sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^N h \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \left( y_{s_\alpha}^{(\alpha)} \sum_{j=0}^j p_1(x, t_j, t_{j'}) y(x, t^{j+\frac{\alpha}{p}}) \tau \right) h + \frac{1}{2} \sum_{\eta_\alpha=0}^N h \sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^N h \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \varphi_{(\alpha), s_\alpha}^2 h + M_1 \sum_{\eta_\alpha=0}^N h \sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^N h \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h.$$

Преобразуем сумму  $\sum_{\eta_\alpha=0}^N h \sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^N h \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \varphi_{(\alpha), s_\alpha}^2 h$  следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{\eta_\alpha=0}^N h \sum_{\xi_\alpha=\eta_\alpha}^N h \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^{\xi_\alpha} \varphi_{(\alpha), s_\alpha}^2 h = \sum_{\eta_\alpha=0}^N h \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^N \varphi_{(\alpha), s_\alpha}^2 h \sum_{\xi_\alpha=s_\alpha}^N h = \\ & = \sum_{\eta_\alpha=0}^N h \sum_{s_\alpha=\eta_\alpha}^N (l-x_\alpha) \varphi_{(\alpha), s_\alpha}^2 h = \sum_{s_\alpha=0}^N (l-x_\alpha) \varphi_{(\alpha), s_\alpha}^2 h \sum_{\eta_\alpha=0}^{s_\alpha} h = \sum_{s_\alpha=0}^N x_\alpha (l-x_\alpha) \varphi_{(\alpha), s_\alpha}^2 h = \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l-x_\alpha) \varphi_{(\alpha), s_\alpha}^2 h. \end{aligned}$$

Учитывая последнее, из (17) находим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2p} \left( \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l-x_\alpha) (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h \right) + \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l-x_\alpha) a_{\alpha, s_\alpha} (y_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha})^2 h \leq \quad (18) \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=0}^{N-1} x_\alpha (a_\alpha y^2)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha+1} h - \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=0}^{N-1} x_\alpha (a_\alpha)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha+1} y_{s_\alpha}^2 h - \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=1}^N (l-x_\alpha) (a_\alpha y^2)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha} h + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=1}^N (l-x_\alpha) (a_\alpha)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha} y_{s_\alpha-1}^2 h - \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l-x_\alpha) \left( y_{s_\alpha}^{(\alpha)} \sum_{i_\alpha=0}^N p_{2, \alpha, i_\alpha} y_{i_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} h \right) h - \\ & - \frac{1}{p} \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l-x_\alpha) \left( y_{s_\alpha}^{(\alpha)} \sum_{j=0}^j p_1(x, t_j, t_{j'}) y \left( x, t^{j+\frac{\alpha}{p}} \right) \tau \right) h + \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l-x_\alpha) \varphi_{(\alpha), s_\alpha}^2 h + M_1 \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l-x_\alpha) (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h. \end{aligned}$$

Преобразуем первое, второе, третье и четвертое слагаемые правой части (18):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=0}^{N-1} x_\alpha (a_\alpha y^2)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha+1} h - \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=0}^{N-1} x_\alpha (a_\alpha)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha+1} y_{s_\alpha}^2 h - \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=1}^N (l-x_\alpha) (a_\alpha y^2)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha} h + \quad (19) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=1}^N (l-x_\alpha) (a_\alpha)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha} y_{s_\alpha-1}^2 h = \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=1}^N (2x_\alpha - h - l) (a_\alpha y^2)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha} h - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=0}^{N-1} (2x_\alpha + h - l) (a_\alpha)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha+1} y_{s_\alpha}^2 h = \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=1}^N ((2x_\alpha - h - l) a_\alpha y^2)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha} h - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=0}^{N-1} (2x_\alpha + h - l)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha} a_\alpha y_{s_\alpha}^2 h - \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=0}^{N-1} (2x_\alpha + h - l) (a_\alpha)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha+1} y_{s_\alpha}^2 h = \\ & = - \sum_{s_\alpha=0}^N a_\alpha y_{s_\alpha}^2 h - \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=0}^{N-1} (2x_\alpha + h - l) (a_\alpha)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha+1} y_{s_\alpha}^2 h + \frac{l}{2} (a_{\alpha, N_\alpha} y_{N_\alpha}^2 + a_{\alpha, 0} y_0^2). \end{aligned}$$

С учетом граничных условий (2) и (19) из (18) получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2p} \left( \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l-x_\alpha) (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h \right) + \frac{c_0}{2} \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l-x_\alpha) (y_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha})^2 h + \quad (20) \\ & + c_0 \sum_{s_\alpha=0}^N (y_{s_\alpha}^2) h \leq - \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=0}^{N-1} (2x_\alpha + h - l) (a_\alpha)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha+1} y_{s_\alpha}^2 h - \frac{1}{2} \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l-x_\alpha) \left( y_{s_\alpha}^{(\alpha)} \sum_{i_\alpha=0}^N p_{2, \alpha, i_\alpha} y_{i_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} h \right) h - \\ & - \frac{1}{p} \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l-x_\alpha) \left( y_{s_\alpha}^{(\alpha)} \sum_{j=0}^j p_1(x, t_j, t_{j'}) y \left( x, t^{j+\frac{\alpha}{p}} \right) \tau \right) h + M_1 \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha (l-x_\alpha) (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h + M_2 \left( \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} \varphi_{(\alpha), s_\alpha}^2 h + \mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2 \right). \end{aligned}$$

Оценим первое, второе и третье слагаемые правой части (20) с помощью неравенства Коши с  $\varepsilon$ , леммы 2 [22] и получим:

$$- \sum_{s_\alpha=0}^{N-1} (2x_\alpha + h - l) (a_\alpha)_{\bar{x}_\alpha, s_\alpha+1} y_{s_\alpha}^2 h \leq M_1 \| [y^{(\alpha)}] \|_{L_2(\alpha)}^2 \leq \varepsilon M_1 \| [\rho_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}] \|_{L_2(\alpha)}^2 + M_2^\varepsilon \| \rho_\alpha y^{(\alpha)} \|_{L_2(\alpha)}^2, \quad (21)$$

$$-\sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha(l-x_\alpha) \left( y_{s_\alpha}^{(\alpha)} \sum_{i_\alpha=0}^N p_{2,\alpha,i_\alpha} y_{i_\alpha}^{(\alpha)} \bar{h} \right) h \leq \frac{1}{4\varepsilon_1} \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha(l-x_\alpha) (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h + \varepsilon_1 \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha(l-x_\alpha) \left( \sum_{i_\alpha=0}^N p_{2,\alpha,i_\alpha} y_{i_\alpha}^{(\alpha)} \bar{h} \right)^2 h \leq \quad (22)$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{4\varepsilon_1} \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha(l-x_\alpha) (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h + \varepsilon_1 M_3 \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} \left( x_\alpha(l-x_\alpha) \sum_{i_\alpha=0}^N (y_{i_\alpha}^{(\alpha)})^2 \bar{h} \right) h \leq \\ &\leq \frac{1}{4\varepsilon_1} \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha(l-x_\alpha) (y_{s_\alpha}^{(\alpha)})^2 h + \varepsilon_1 M_4 \sum_{s_\alpha=0}^N y_{s_\alpha}^2 h \leq \frac{1}{4\varepsilon_1} |\rho y^{(\alpha)}|_{L_2(\alpha)}^2 + \varepsilon_1 M_4 |[y^{(\alpha)}]|_{L_2(\alpha)}^2, \\ &\quad - \frac{1}{p} \sum_{s_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha(l-x_\alpha) \left( y_{s_\alpha}^{(\alpha)} \sum_{j=0}^j p_1(x, t_j, t_{j'}) y(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}) \tau \right) h \leq \quad (23) \\ &\frac{1}{2} \frac{1}{p^2} \sum_{i_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha(l-x_\alpha) \left( \sum_{j=0}^j p_1(x_{i_\alpha}, t_j, t_{j'}) y(x_{i_\alpha}, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}) \tau \right)^2 h + \frac{1}{2} |\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\alpha)}^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{1}{p^2} \sum_{i_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha(l-x_\alpha) \left( \sum_{j=0}^j p_1^2(x_{i_\alpha}, t_j, t_{j'}) \tau \sum_{j'=0}^j y^2(x_{i_\alpha}, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}) \tau \right) h + \\ &+ \frac{1}{2} |\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\alpha)}^2 \leq M_6 \sum_{j=0}^j \tau \sum_{i_\alpha=1}^{N-1} x_\alpha(l-x_\alpha) y^2(x_{i_\alpha}, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}) h + \frac{1}{2} |\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\alpha)}^2 = \\ &= M_6 \sum_{j=0}^j \tau |\rho_\alpha y(x_{i_\alpha}, t^{j'+\frac{\alpha}{p}})|_{L_2(\alpha)}^2 + \frac{1}{2} |\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\alpha)}^2, \end{aligned}$$

где  $\rho_\alpha = \sqrt{x_\alpha(l-x_\alpha)}$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_p$ .

Учитывая (21)–(23), из (20) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \left( |\rho_\alpha y^{(\alpha)}|_{L_2(\alpha)}^2 \right)_\tau + |[\rho_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}]|_{L_2(\alpha)}^2 + |[y^{(\alpha)}]|_{L_2(\alpha)}^2 \leq \varepsilon M_7 |[\rho_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}]|_{L_2(\alpha)}^2 + \varepsilon_1 M_8 |[y^{(\alpha)}]|_{L_2(\alpha)}^2 + M_9 |\rho_\alpha y^{(\alpha)}|_{L_2(\alpha)}^2 + \quad (24) \\ + M_{10} \sum_{j=0}^j |\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\alpha)}^2 \tau + M_{11} \left( |[\Phi(\alpha)]|_{L_2(\alpha)}^2 + \mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2 \right). \end{aligned}$$

где  $\|\cdot\|_{L_2(\alpha)}$  означает, что норма берется по переменной  $x_\alpha$  при фиксированных значениях остальных переменных.

Выбирая  $\varepsilon = \frac{1}{2M_7}$ ,  $\varepsilon_1 = \frac{1}{2M_8}$  из (24) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \left( |\rho_\alpha y^{(\alpha)}|_{L_2(\alpha)}^2 \right)_\tau + |[\rho_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}]|_{L_2(\alpha)}^2 + |[y^{(\alpha)}]|_{L_2(\alpha)}^2 \leq \quad (25) \\ \leq M_{12} |\rho_\alpha y^{(\alpha)}|_{L_2(\alpha)}^2 + M_{13} \sum_{j=0}^j |\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\alpha)}^2 \tau + M_{14} \left( |[\Phi(\alpha)]|_{L_2(\alpha)}^2 + \mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2 \right). \end{aligned}$$

Подставляя после суммирования по  $i_\alpha \neq i_\beta$ ,  $\beta = 1, 2, \dots, p$  полученные оценки в тождество (25), получим неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \left( |\rho_\alpha y^{(\alpha)}|_{L_2(\omega_h)}^2 \right)_\tau + |[\rho_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}]|_{L_2(\omega_h)}^2 + |[y^{(\alpha)}]|_{L_2(\omega_h)}^2 \leq M_{15} |\rho_\alpha y^{(\alpha)}|_{L_2(\omega_h)}^2 + \quad (26) \\ + M_{16} \sum_{j=0}^j |\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2 \tau + M_{17} \left( |[\Phi^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|_{L_2(\omega_h)}^2 + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\mu_{-\alpha}^2(t_j) + \mu_{+\alpha}^2(t_j)) \bar{H} / \bar{h} \right). \end{aligned}$$

Просуммируем (26) сначала по  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ , а затем, умножая обе части на  $\tau$  и суммируя по  $j'$  от 0 до  $j$ , получаем:

$$\begin{aligned} |\rho_p y^{j+1}|_{L_2(\omega_h)}^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \left( |[\rho_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|_{L_2(\omega_h)}^2 + |[y^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|_{L_2(\omega_h)}^2 \right) \leq \quad (27) \\ \leq M_{18} \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p |\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2 + M_{19} \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{s=0}^j |\rho_\alpha y^{s+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2 \tau + \\ + M_{20} \left( \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \left( |[\Phi^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|_{L_2(\omega_h)}^2 + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\mu_{-\alpha}^2(t_{j'}) + \mu_{+\alpha}^2(t_{j'})) \bar{H} / \bar{h} \right) + |[y^0]|_{L_2(\omega_h)}^2 \right). \end{aligned}$$

Из (27) имеем

$$|\rho_p y^{j+1}|_{L_2(\omega_h)}^2 \leq M_{21} \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p |\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2 + M_{20} F^j, \quad (28)$$

где  $M_{21} = M_{18} + TM_{19}$ ,

$$F^j = \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \left( |[\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i\bar{\beta} \neq i\alpha} (\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2) \bar{H}/h \right) + |[y^0]|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2.$$

Покажем, что имеет место неравенство:

$$\max_{1 \leq \alpha \leq p} |\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2 \leq \nu_1 \sum_{j'=0}^{j-1} \max_{1 \leq \alpha \leq p} |\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2 + \nu_2 F^j,$$

где  $\nu_1, \nu_2$  — известные положительные постоянные.

Для этого перепишем неравенство (26) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} |\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2 &\leq \frac{1}{p} |\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2 + \tau M_{15} |\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2 + \tau M_{16} \sum_{j'=0}^j |\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2 \tau + \\ &+ \tau M_{17} \left( |[\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}]|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i\bar{\beta} \neq i\alpha} (\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2) \bar{H}/h \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Просуммируем (29) по  $\alpha'$  от 1 до  $\alpha$  и получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \sum_{\alpha'=1}^{\alpha} |\rho_{\alpha'} y^{j+\frac{\alpha'}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2 &\leq \frac{1}{p} \sum_{\alpha'=1}^{\alpha} |\rho_{\alpha'} y^{j+\frac{\alpha'-1}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2 + \\ &+ \tau M_{15} \sum_{\alpha'=1}^{\alpha} |\rho_{\alpha'} y^{j+\frac{\alpha'}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2 + \tau M_{16} \sum_{\alpha'=1}^{\alpha} \sum_{j'=0}^j |\rho_{\alpha'} y^{j'+\frac{\alpha'}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2 \tau + \\ &+ \tau M_{17} \sum_{\alpha'=1}^{\alpha} \left( |[\varphi^{j+\frac{\alpha'}{p}}]|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i\bar{\beta} \neq i\alpha'} (\mu_{-\alpha'}^2 + \mu_{+\alpha'}^2) \bar{H}/h \right). \end{aligned}$$

Из последнего получаем

$$\begin{aligned} |\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2 &\leq |\rho_1 y^j|_{L_2(\omega_h)}^2 + \tau M_{15} \sum_{\alpha=1}^p |\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2 + \tau M_{16} \sum_{\alpha=1}^p \sum_{j'=0}^j |\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2 \tau + \\ &+ \tau M_{17} \sum_{\alpha=1}^p \left( |[\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}]|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i\bar{\beta} \neq i\alpha} (\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2) \bar{H}/h \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Не нарушая общности, можно считать, что

$$\max_{1 \leq \alpha \leq p} |\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2 = |\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2,$$

в противном случае (29) будем суммировать до такого  $\alpha$  при котором  $|\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2$  достигает максимального значения при фиксированном  $j$ . Тогда (30) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq \alpha \leq p} |\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2 &\leq |\rho_1 y^j|_{L_2(\omega_h)}^2 + p\tau M_{15} \max_{1 \leq \alpha \leq p} |\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2 + pM_{16} T \sum_{j'=0}^j \max_{1 \leq \alpha \leq p} |\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2 \tau + \\ &+ \tau M_{17} \sum_{\alpha=1}^p \left( |[\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}]|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i\bar{\beta} \neq i\alpha} (\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2) \bar{H}/h \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Так как из (28) следует, что

$$|\rho_1 y^j|_{L_2(\omega_h)}^2 = |\rho_p y^j|_{L_2(\omega_h)}^2 \leq M_{21} \sum_{j'=0}^{j-1} \max_{1 \leq \alpha \leq p} |\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2 + M_{20} F^j,$$

то из (31) имеем

$$(1 - \tau M_{22}) \max_{1 \leq \alpha \leq p} |\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2 \leq M_{23} \sum_{j'=0}^{j-1} \max_{1 \leq \alpha \leq p} |\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2 + M_{24} F^j, \quad (32)$$

где  $M_{22} = pM_{15} + pM_{16}T$ ,  $M_{23} = M_{21} + pM_{16}T$ .

Выбирая  $\tau \leq \tau_0 = \frac{1}{2M_{22}}$ , из (32) находим

$$\max_{1 \leq \alpha \leq p} |\rho_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2 \leq \nu_1 \sum_{j'=0}^{j-1} \max_{1 \leq \alpha \leq p} |\rho_\alpha y^{j'+\frac{\alpha}{p}}|_{L_2(\omega_h)}^2 + \nu_2 F^j. \tag{33}$$

Применяя к (33) Лемму 4 [23], получаем априорную оценку (10).

**4. Сходимость ЛОС.** Для сходимости ЛОС справедлива следующая

**Теорема 2.** Пусть задача (1)–(3) имеет единственное непрерывное в  $\overline{Q}_T$  решение  $u(x,t)$ , существуют непрерывные в  $\overline{Q}_T$  производные  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2}, 1 \leq \alpha, \beta \leq p, \alpha \neq \beta$  и выполнены условия гладкости и ограниченности (4), тогда ЛОС (6)–(8) сходится к решению исходной задачи (1)–(3) со скоростью  $O(h^2 + \tau)$ , так что при  $\tau \leq \tau_0$  имеет место оценка

$$|[y^{j+1} - u^{j+1}]|_1 \leq M(h^2 + \tau), \tag{34}$$

где

$$|[z^{j+1}]|_1 = \left( |\rho_p z^{j+1}|_{L_2(\omega_h)}^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \left( |[\rho_\alpha z_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|_{L_2(\omega_h)}^2 + |[z^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|_{L_2(\omega_h)}^2 \right) \right)^{1/2}.$$

**Доказательство.** Представим решение задачи (9) для погрешности  $z$  в виде суммы  $z_{(\alpha)} = v_{(\alpha)} + \eta_{(\alpha)}, z_{(\alpha)} = z^{j+\frac{\alpha}{p}}$ , где  $\eta_{(\alpha)}$  определяется условиями

$$\frac{\eta_{(\alpha)} - \eta_{(\alpha-1)}}{\tau} = \psi_\alpha, \quad x \in \omega_h + \gamma_h, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \tag{35}$$

$$\eta(x, 0) = 0, \quad \psi_\alpha = \begin{cases} \Psi_\alpha, & x_\alpha \in \omega_h, \\ \Psi_{-\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ \Psi_{+\alpha}, & x_\alpha = l. \end{cases}$$

Из (35) следует  $\eta^{j+1} = \eta_{(p)} = \eta^j + \tau(\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_p) = \eta^j = \dots = \eta^0 = 0, j = 0, 1, \dots, j_0$ , так как  $\eta^0 = 0$ .

Тогда имеем  $\eta^\alpha = \tau(\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_\alpha) = -\tau(\psi_{\alpha+1} + \dots + \psi_p) = O(\tau)$ . Функция  $v_{(\alpha)}$  определяется условиями

$$\frac{v_{(\alpha)} - v_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_\alpha v_{(\alpha)} + \psi_\alpha, \quad x \in \omega_h, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \tag{36}$$

$$v_{(\alpha)} = -\eta_\alpha, \quad x_\alpha \in \gamma_{h,\alpha}, \quad v(x, 0) = 0,$$

где  $\tilde{\psi}_\alpha = \psi_\alpha^* + \Lambda_\alpha \eta_{(\alpha)}$ .

Если существуют непрерывные в замкнутой области  $\overline{Q}_T$  производные  $\frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \alpha \neq \beta$ , то  $\Lambda_\alpha \eta_{(\alpha)} = -\tau \Lambda_\alpha (\psi_{\alpha+1} + \dots + \psi_p) = O(\tau)$ .

Решение задачи (36) оценим с помощью Теоремы 1.

$$\begin{aligned} |\rho_p v^{j+1}|_{L_2(\omega_h)}^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \left( |[\rho_\alpha v_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|_{L_2(\omega_h)}^2 + |[v^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 \right) &\leq \\ &\leq M \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \left( |[\tilde{\psi}^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 + \sum_{\beta \neq \alpha} (\eta_{-\alpha}^2(0, x', t_{j'}) + \eta_{+\alpha}^2(l, x', t_{j'})) \overline{H} / h \right). \end{aligned} \tag{37}$$

Так как  $\eta^{j+1} = 0, \eta_{(\alpha)}, \eta_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} = O(\tau)$  и

$$\begin{aligned} |[z^{j+1}]|_1^2 &= |\rho_p z^{j+1}|_{L_2(\omega_h)}^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \left( |[\rho_\alpha z_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|_{L_2(\omega_h)}^2 + |[z^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|_{L_2(\omega_h)}^2 \right) \leq \\ &\leq |\rho_p v^{j+1}|_{L_2(\omega_h)}^2 + 2 \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \left( |[\rho_\alpha v_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|_{L_2(\omega_h)}^2 + |[\rho_\alpha \eta_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|_{L_2(\omega_h)}^2 + |[v^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 + \right. \\ &\left. + |[\eta^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 \right) \leq 2 \left( |[v^{j+1}]|_1^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \left( |[\rho_\alpha \eta_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|_{L_2(\omega_h)}^2 + |[\eta^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 \right) \right), \end{aligned}$$

тогда из оценки (37) следует сходимость со скоростью (34).

**Обсуждение и заключения.** Разработан и обоснован численный метод решения первой начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения параболического типа в многомерной области. Для приближенного решения поставленной задачи построена локально-одномерная разностная схема А.А. Самарского с порядком аппроксимации  $O(h^2 + \tau)$ . Основная суть построения схемы состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению ряда одномерных задач по каждому из координатных направлений. При этом каждая из вспомогательных задач может не аппроксимировать исходную задачу, но в совокупности и в специальных нормах такая аппроксимация имеет место. Предложен вариант нахождения априорной оценки решения ЛОС с неоднородными краевыми условиями первого рода на основе метода энергетических неравенств, что является существенным для реализации исследуемой многомерной задачи. Из этой оценки следуют единственность, непрерывная и равномерная зависимость решения локально-одномерной разностной схемы от входных данных, а также сходимость решения схемы к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы.

### Список литературы

1. Вайнберг М.М. Интегро-дифференциальные уравнения. *Итоги науки. Серия Математический анализ. Теория вероятности Регулирование*. 1964;5–37. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/intv82> (дата обращения: 16.11.2023).
2. Лаврентьев М.М. *Обратные задачи и специальные операторные уравнения первого рода. Международный конгресс математиков в Ницце*. Доклады советских математиков. Москва: Наука; 1972:130–136.
3. Васильев В.В. К вопросу о решении задачи Коши для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений. *Известия вузов. Математика*. 1961;4:8–24. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/ivm1896> (дата обращения: 17.11.2023).
4. Трубин В.Г. Решение одного вырождающегося интегро-дифференциального уравнения. *Дифференциальные и интегральные уравнения*. Иркутск: издательство Иркутского университета. 1978;5:94–101.
5. Guezane-Lakoud A., Belakroum D. Time-discretization schema for an integrodifferential Sobolev type equation with integral conditions. *Applied Mathematics and Computation*. 2012;218(9):4695–4702. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.11.077>
6. Luo Z.D., Teng F. A reduced-order extrapolated finite difference iterative scheme based on POD method for 2D Sobolev equation. *Applied Mathematics and Computation*. 2018;329:374–383. <https://doi.org/10.1186/s13661-019-1176-2>
7. Бештоков М.Х. Численное исследование начально-краевых задач для уравнения соболевского типа с дробной по времени производной. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2019;59(2):185–202. <https://doi.org/10.1134/S0044466919020054>
8. Grasselli M., Pata V. A reaction-diffusion equation with memory. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Ser. A*. 2006;15:1079–1088. <https://doi.org/10.3934/dcds.2006.15.1079>
9. Olmstead W.E., Davis S.H., Rosenblat S., Kath W.L. Bifurcation with memory. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1986;46:171–188. <https://doi.org/10.1137/0146013>
10. Yong J, Zhang X. Heat equation with memory in anisotropic and non-homogeneous media. *Acta Mathematica Sinica. English Ser.* 2011;27:219–254. <https://doi.org/10.1007/s10114-010-0077-1>
11. Бештоков М.Х., Водахова В.А. Нелокальные краевые задачи для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка. *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2019;29(4):459–482. <https://doi.org/10.20537/vm190401>
12. Douglas J., Rachford H.H. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1956;82(2):421–43. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1956-0084194-4>
13. Peaceman D.W., Rachford H.H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*. 1955;3(1):28–41. <https://doi.org/10.1137/0103003>
14. Яненко Н.Н. *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики*. Новосибирск: Наука. Сибирское отделение; 1967. 194 с.
15. Самарский А.А. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1962;2(5):787–811. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(63\)90504-4](https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90504-4)
16. Марчук Г.И. *Методы расщепления*. Москва: Наука; 1988. 263 с.
17. Дьяконов Е.Г. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1962;2(4):549–568. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(63\)90531-7](https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90531-7)
18. Бештокова З.В., Шхануков-Лафишев М.Х. Локально-одномерная разностная схема третьей краевой задачи для параболического уравнения общего вида с нелокальным источником. *Дифференциальные уравнения*. 2018;54(7):891–901. <https://doi.org/10.1134/S0374064118070051>
19. Бештокова З.В. Локально-одномерная разностная схема для решения одной нелокальной краевой задачи для параболического уравнения в многомерной области. *Дифференциальные уравнения*. 2020;56(3):366–379. <https://doi.org/10.1134/S0374064120030085>

20. Бештокова З.В. Численный метод решения начально-краевой задачи для многомерного нагруженного параболического уравнения общего вида с условиями третьего рода. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки*. 2022;26(1):7–35. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1908>
21. Самарский А.А. *Теория разностных схем*. Москва: Наука; 1983. 614 с.
22. Алиханов А.А. Об устойчивости и сходимости нелокальных разностных схем. *Дифференциальные уравнения*. 2010;46(7):942–954. <https://doi.org/10.1134/S0012266110070037>
23. Самарский А.А., Гулин, А.В. *Устойчивость разностных схем*. Москва: Наука; 1973. 415 с.

## References

1. Vaynberg M.M. Integro-differential equations. *Itogi nauki. ser. mat. anal. teor. ver. regulir.* 1962, Moscow: VINITI. 1964;5–37. (in Russ.). URL: <https://www.mathnet.ru/eng/intv82> (accessed: 16.11.2023).
2. Lavrent'yev M.M. Inverse problems and special operator equations of the first kind. *Mezhdunarodnyy kongress matematikov. Doklady sovetskikh matematikov*. Moscow: Nauka.1972:130–136. (in Russ.).
3. Vasil'yev V.V. On the solution of the Cauchy problem for a class of linear integro-differential equations. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.* 1961;4:8–24. (in Russ.). <https://www.mathnet.ru/eng/ivm/y1961/i4/p8> (accessed: 17.11.2023).
4. Trubin V.G. Solution of a degenerate integro-differential equation. *Differential and integral equations*. Irkutsk: Irkut. un.-t.1978;5:94–101. (in Russ.).
5. Guezane-Lakoud A., Belakroum D. Time-discretization schema for an integrodifferential Sobolev type equation with integral conditions. *Applied Mathematics and Computation*. 2012;218(9):4695–4702. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.11.077>
6. Luo Z.D., Teng F. A reduced-order extrapolated finite difference iterative scheme based on POD method for 2D Sobolev equation. *Applied Mathematics and Computation*. 2018;329:374–383. <https://doi.org/10.1186/s13661-019-1176-2>
7. Beshtokov M.Kh. Numerical analysis of initial-boundary value problem for a Sobolev-type equation with a fractional-order time derivative. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2019;59(2):175–192. <https://doi.org/10.1134/S0965542519020052>
8. Grasselli M., Pata V. A reaction-diffusion equation with memory. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Ser. A*. 2006;15:1079–1088. <https://doi.org/10.3934/dcds.2006.15.1079>
9. Olmstead W.E., Davis S.H., Rosenblat S., Kath W.L. Bifurcation with memory. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1986;46:171–188. <https://doi.org/10.1137/0146013>
10. Yong J, Zhang X. Heat equation with memory in anisotropic and non-homogeneous media. *Acta Mathematica Sinica. English Ser.* 2011;27:219–254. <https://doi.org/10.1007/s10114-010-0077-1>
11. Beshtokov M.KH., Vodakhova V.A. Nonlocal boundary value problems for a fractional-order convection-diffusion equation. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*. 2019;29(4):459–482. (in Russ.). <https://doi.org/10.20537/vm190401>
12. Douglas J., Rachford H.H. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1956;82(2):421–43. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1956-0084194-4>
13. Peaceman D.W., Rachford H.H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*. 1955;3(1):28–41. <https://doi.org/10.1137/0103003>
14. Yanenko N.N. *Method of fractional steps*. Paris: Libraire Armand Colin. 1968. 165 p.
15. Samarskiy A.A. On an economical difference method for the solution of a multidimensional parabolic equation in an arbitrary region. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1963;2(5):894–926. (in Russ.). [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(63\)90504-4](https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90504-4)
16. Marchuk G.I. *Splitting methods*. Moscow: Nauka; 1988. 263 p. (in Russ.).
17. D'yakonov E.G. Difference schemes with a 'disintegrating' operator for multidimensional problems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1963;2(4):581–607. (in Russ.). [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(63\)90531-7](https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90531-7)
18. Beshtokova Z.V., Shkhanukov-Lafishev M.Kh. Locally one-dimensional difference scheme for the third boundary value problem for a parabolic equation of the general form with a nonlocal source. *Differential Equations*. 2018; 54(7):891–880. (in Russ.). <https://doi.org/10.1134/S0012266118070042>
19. Beshtokova Z.V. Locally one-dimensional difference scheme for a nonlocal boundary value problem for a parabolic equation in a multidimensional domain. *Differential Equations*. 2020; 56(3):354–368. <https://doi.org/10.1134/S0012266120030088>
20. Beshtokova Z.V. Numerical method for solving an initial-boundary value problem for a multidimensional loaded parabolic equation of a general form with conditions of the third kind. *Journal of Samara state technical university. Physical and mathematical science*. 2022; 26(1):7–35. (In Russ.). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1908>
21. Samarskii A.A. *Theory of difference schemes*. Moscow: Nauka; 1983. 616 p. (In Russ.).
22. Alikhanov A.A. On the stability and convergence of nonlocal difference schemes. *Differential equations*. 2010; 46(7):949–961. <https://doi.org/10.1134/S0012266110070037>
23. Samarskii A.A., Gulin A.V. *Stability of difference schemes*. Moscow: Nauka; 1973. 416 p. (In Russ.).

Поступила в редакцию 08.12.2023

Поступила после рецензирования 28.02.2024

Принята к публикации 05.03.2024

*Об авторе:*

**Бештокова Заряна Владимировна**, младший научный сотрудник, отдел вычислительных методов, Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН (РФ, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а), [ORCID](#), [ScopusID](#), [zarabaeva@yandex.ru](mailto:zarabaeva@yandex.ru)

*Конфликт интересов*

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов

*Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.*

**Received** 08.12.2023

**Revised** 28.02.2024

**Accepted** 05.03.2024

*About the Author:*

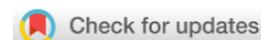
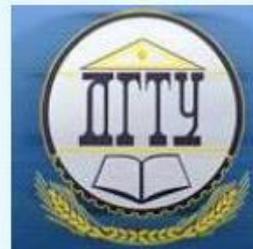
**Zaryana V. Beshtokova**, Junior Researcher, Department of Computational Methods, Institute of Applied Mathematics and Automation, KBNC RAS (89a, Shortanova St., Nalchik, 360000, RF), [ORCID](#), [ScopusID](#), [zarabaeva@yandex.ru](mailto:zarabaeva@yandex.ru)

*Conflict of interest statement*

The author does not have any conflict of interest.

*The author has read and approved the final manuscript.*

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ MATHEMATICAL MODELLING



Научная статья



УДК 519.6

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-1-55-62>

## Моделирование турбулентных потоков вблизи берегозащитных сооружений с использованием различных моделей турбулентности

С.В. Проценко

Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), г. Таганрог, Российская Федерация

✉ [rab55555@rambler.ru](mailto:rab55555@rambler.ru)

### Аннотация

**Введение.** Уменьшение ширины пляжей вследствие эрозии является важной проблемой, которая может решаться или, напротив, усугубляться берегозащитными сооружениями. Моделирование разбивающихся волн вблизи побережья и вокруг прибрежных сооружений может быть использовано для определения их воздействия на динамику развития береговой зоны. Целью работы является моделирование и анализ динамики турбулентных структур вокруг одиночной буны, полученных с использованием двух схем моделирования турбулентности RANS и LES.

**Материалы и методы.** Исследована турбулентность, вызванная разбивающимися волнами. Моделирование было основано на батиметрических измерениях, проведенных на участке побережья Азовского моря и трехмерной модели волновой гидродинамики, дополненной различными конфигурациями расчета турбулентности.

**Результаты исследования.** Получены результаты моделирования волновых процессов, генерирующих турбулентные потоки, при наличии берегозащитных сооружений с использованием различных моделей турбулентности. Результаты, полученные на основе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (RANS), сравниваются с результатами подхода моделирования крупных вихрей (LES) с динамической подсеточной моделью Смагоринского (DSM).

**Обсуждение и заключения.** Результаты показали, что высоты волн, смоделированные LES, были выше, чем те, которые были смоделированы RANS в передней и подветренной областях берегозащитного сооружения и были ниже в верхней его части. Значит, согласно LES, после прохождения над буной было сохранено большее количество энергии волны. Векторы скорости водной среды показывают, что при использовании LES образовался вихрь, однако в случае RANS не было обнаружено никаких свидетельств образования таких турбулентных вихрей, что подтверждает лучшую производительность LES для моделирования турбулентности в прибрежной зоне. Согласно представленным результатам, LES является лучшим инструментом для генерации турбулентности в условиях набегающей волны в инженерных практиках.

**Ключевые слова:** метод моделирования крупных вихрей (LES), осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса (RANS), волновое движение, турбулентность, подсеточная модель, динамическая модель Смагоринского, численное моделирование

**Финансирование.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-00015, <https://rscf.ru/project/22-71-00015/>

**Для цитирования.** Проценко С.В. Моделирование турбулентных потоков вблизи берегозащитных сооружений с использованием различных моделей турбулентности. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(1):55–62. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-1-55-62>

## Modelling Turbulent Flows near Coastal Structures Using Various Turbulence Models

Sofia V. Protsenko

Taganrog Institute named after A.P. Chekhov (branch) of RSUE, Taganrog, Russian Federation

✉ [rab55555@rambler.ru](mailto:rab55555@rambler.ru)

### Abstract

**Introduction.** The reduction in beach width due to erosion is a significant issue that can either be mitigated or exacerbated by coastal protection structures. Modelling breaking waves near the coast and around coastal structures can be used to determine their impact on the dynamics of the coastal zone. The objective of this study is to model and analyze the dynamics of turbulent structures around a single breakwater, obtained using two turbulence modelling schemes: RANS and LES.

**Materials and Methods.** Turbulence induced by breaking waves was investigated. The modelling was based on bathymetric measurements conducted along the Azov Sea coast and a three-dimensional wave hydrodynamics model supplemented with various turbulence calculation configurations.

**Results.** Modelling results of wave processes generating turbulent flows in the presence of coastal protection structures using different turbulence models were obtained. Results obtained based on Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS) equations are compared with the results of Large Eddy Simulation (LES) approach with Smagorinsky dynamic subgrid-scale model (DSM).

**Discussion and Conclusions.** The results showed that wave heights simulated by LES were higher than those simulated by RANS in the front and leeward regions of the coastal protection structure and were lower in its upper part. Thus, according to LES, a greater amount of wave energy was preserved after passing over the breakwater. Velocity vectors of the water medium showed the formation of a vortex when LES was used, whereas no evidence of such turbulent vortices was detected in the case of RANS, confirming the better performance of LES for turbulence modelling in the coastal zone. According to the presented results, LES is the preferred tool for generating turbulence under incoming wave conditions in engineering practices.

**Keywords:** Large Eddy Simulation approach (LES), Reynolds Averaged Navier-Stokes equations (RANS), wave motion, turbulence, subgrid model, Smagorinsky dynamic subgrid-scale model, numerical modelling

**Funding information.** The study was supported by the Russian Science Foundation grant no. 22-71-00015, <https://rscf.ru/project/22-71-00015/>

**For citation.** Protsenko S.V. Modelling Turbulent Flows near Coastal Structures Using Various Turbulence Models. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(1):55–62. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-1-55-62>

**Введение.** Уменьшение ширины пляжей вследствие эрозии является серьезной проблемой для многих прибрежных систем, поскольку наносит как экологический, так и экономический ущерб. Причины эрозии пляжей могут быть как техногенными, так и антропогенными. Энергия волн естественным образом преобразуется в энергию турбулентности за счет разбивания в зоне прибоя волн, которые поднимают отложения с морского дна. Эти взвешенные отложения затем переносятся прибрежными течениями, что может вызвать эрозию береговой линии, когда нарушается местное равновесие переноса отложений. Также перенос отложений может иметь кумулятивный эффект для береговой зоны. Естественная эрозия, возможно, усиливается в условиях экстремальных волн.

Другой и, вероятно, более опасной причиной эрозии пляжей является антропогенное воздействие. Строительство берегозащитных сооружений и объектов прибрежной инфраструктуры может нарушить равновесие на прилегающих береговых территориях. Непродуманное строительство береговых сооружений, таких как дамбы и ограждения, вместо выполнения их первоначальной цели защиты пляжа, иногда даже усугубляет эрозию. С целью прогностического моделирования динамики развития береговой зоны, для предотвращения неожиданных проблем с эрозией, вызванной воздействием берегозащитных сооружений, требуются тщательные исследования для оценки их возможного воздействия на этапе проектирования. Несмотря на сложность прогностического моделирования влияния волновых процессов на динамику эрозии до того, как они действительно произойдут, одним из эффективных способов прогнозирования и оценки влияния берегозащитных сооружений на эволюцию пляжей является использование численных моделей [1–2].

Численным подходом, который обычно применяется для изучения реакции береговой линии на береговые структуры, являются зональные модели. Зональные модели состоят из различных модулей, которые рассчитывают волну, течение, перенос наносов и морфологию поля соответственно. Однако при применении таких моделей для изучения местности вокруг прибрежных сооружений требуется особая осторожность, поскольку они могут оказаться недостаточно точными для моделирования эффектов дифракции волн за сооружениями.

Недавно были разработаны более сложные модели вычислительной гидродинамики (CFD) для детального исследования вокруг прибрежных сооружений путем моделирования волн с фазовым разрешением [3]. В данной работе результаты численных экспериментов по моделированию распространения волновых гидродинамических

процессов получены на основе 3D модели движения водной среды, учитывающей неоднородность турбулентного примешивания по вертикальному направлению в различные моменты времени.

Моделирование разрушения волн необходимо для изучения взаимодействий между волнами, берегозащитными сооружениями и участками дна, для защиты которых предполагается построить данные сооружения. Для моделирования процесса разрушения волн автором будут использованы различные подходы, поскольку различные типы моделей дают разную детализацию движений турбулентного потока. Когда волны разрушаются, энергия волн преобразуется в энергию турбулентности, которая может вызвать возмущения в системе вокруг берегозащитных структур. Поэтому важно точно рассчитать энергию турбулентности разбивающихся волн, которая воздействует на береговые конструкции.

При расчете турбулентности могут использоваться различные модели. Как правило, усредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса (RANS) используются для расчета временных и пространственных распределений в волновых условиях [4–6]. В моделях RANS решаются усредненные по ансамблю уравнения Навье-Стокса и все масштабы турбулентности моделируются путем решения дополнительного набора энергетических уравнений. Поскольку усредненные по времени решения менее чувствительны к размеру сетки, модели RANS эффективны с точки зрения вычислительных затрат и, таким образом, широко используются в инженерной практике. Однако точность решений RANS не всегда является достаточной для решения практических задач [2].

Другим подходом к моделированию турбулентности потока является моделирование больших вихрей (LES) [4]. В LES пространственно усредненные уравнения Навье-Стокса решаются для моделирования крупномасштабных турбулентных движений, а движения меньшего размера, чем сетки, нуждаются в дополнительном моделировании. Таким образом, модели LES, как правило, более точны, чем модели RANS, поскольку они непосредственно моделируют турбулентные движения. Независимо от преимуществ LES, его практическое применение по-прежнему ограничено из-за связанных с этим высоких вычислительных затрат. Для того, чтобы использовать LES в инженерной практике для изучения областей вокруг прибрежных сооружений, необходимо сделать вычислительную область достаточно большой, чтобы моделировать распространение волн над прибрежными сооружениями, то есть в вычислительных областях со шкалой длин от 1 до 100 м [4–11].

Цель настоящего исследования состоит в сравнении характеристик RANS и LES для моделирования турбулентных течений в условиях разбивающейся волны вокруг берегового сооружения. Несмотря на наличие широкого круга исследований [2–5, 8, 11], моделирование турбулентных потоков вблизи берегозащитных сооружений с использованием различных моделей турбулентности остается важной научной и прикладной проблемой. Такие модели позволяют получить более точное и реалистичное описание волнового движения в прибрежных системах, причем моделирование таких течений позволяет уточнить параметры вихрей, определить их влияние на другие физические процессы и разработать методы контроля или управления течением. Использование различных моделей турбулентности позволяет учесть разные особенности течения, такие как геометрия потока, присутствие препятствий, изменение плотности или вязкости.

## Материалы и методы

**1. Моделирование турбулентности: метод моделирования крупных вихрей (LES), осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса (RANS).** Вычислительные модели, применяемые в настоящем исследовании, основаны на пространственно-неоднородной трехмерной математической модели волновой гидродинамики мелководного водоема [7, 9–10].

Двумя наиболее важными характеристиками турбулентных потоков являются нерегулярность и хаотические движения. Наблюдения показывают, что в некоторой точке (или местоположении) в области течения более или менее регулярно повторяется определенная картина. Благодаря этому факту можно извлекать средние значения переменных потока, таких как скорость и давление, во времени и пространстве. Поскольку изменения малых масштабов (флуктуации) не являются предметом интереса в некоторых инженерных приложениях, эти небольшие движения могут игнорироваться в течение определенного периода времени:  $\varphi = \bar{\varphi} + \varphi'$ , где  $\varphi$  может быть любой величиной, относящейся к полю потока,  $\bar{\varphi}$  определяет среднюю (усредненную) составляющую, а  $\varphi'$  обозначает флуктуационную часть. Рассмотрение усреднения по времени для заданного времени  $T$ , воздействующего на величину  $\varphi$ , дает:

$$\bar{\varphi}(x, t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \varphi(x, t) dt. \quad (1)$$

Объединяя это разложение с уравнениями Навье-Стокса получаем:

$$\frac{\partial(\rho \bar{u}_i)}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \nu \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \overline{u'_i u'_j} \right). \quad (2)$$

Последним членом в правой части уравнения (4) является тензор напряжений Рейнольдса. Этот член представляет влияние флуктуирующих составляющих на средний расход. Чтобы получить замкнутую систему уравнений, необходимо смоделировать тензор напряжений Рейнольдса. Величина вихревой вязкости ( $\nu$ ) связывает напряжения Рейнольдса со средней скоростью деформации следующим образом:

$$\overline{u'_i u'_j} = -2\nu \bar{S}_{ij} + \frac{1}{3} \overline{u'_k u'_k} \delta_{ij}.$$

В потоке жидкости крупные вихри являются основным переносчиком импульса и энергии. В LES разрешаются крупные структуры турбулентности и влияние малых масштабов на основной поток может быть смоделировано с помощью подсеточной модели (SGS):

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i.$$

Отфильтрованная часть  $\bar{u}_i$  относится к разрешенному полю, а флуктуирующая часть  $u'_i$  связана с небольшими вихрями, которые не разрешены. Операция пространственной фильтрации, обозначаемая  $\bar{u}_i$ , может быть выражена как:

$$\bar{u}(x, t) = \int G(y; x) u(x, y) dy,$$

где  $G$  — сглаживающее ядро, воздействующее в трехмерном пространстве на поле скорости (или давления). Ширину фильтра  $\Delta$  можно рассматривать как шкалу длины, которая не является фиксированным параметром. Применяя описанную выше операцию фильтрации к уравнениям мгновенной непрерывности и импульса и учитывая коммутативные свойства, уравнение для LES может быть получено в виде:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j},$$

где  $\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$  — тензор напряжений SGS. Тензор напряжений SGS отвечает за влияние неразрешенных масштабов на основное поле течения. Тензор  $\tau_{ij}$  обычно заменяется моделью SGS, учитывающей влияние небольших неразрешенных масштабов в управляющих уравнениях.

Механизм LES при работе с различными масштабами в турбулентных потоках позволяет ему обеспечить хороший компромисс между DNS и RANS, поскольку он не требует больших вычислительных затрат DNS; с другой стороны, он дает более точные результаты по сравнению с RANS.

**2. Динамическая модель Смагоринского (DSM).** Первая модель SGS была основана на идее, что энергия, вырабатываемая в разрешенных масштабах, равна рассеянию энергии в неразрешенных/малых масштабах. Крупные вихри, несущие основную долю турбулентной энергии, переносят эту энергию в меньшие масштабы. Поскольку в формулировке LES разрешены большие масштабы, представляется, что турбулентные напряжения SGS меньше, чем их аналоги в RANS. Вопрос в том, насколько большая нагрузка может быть возложена на моделирование SGS, что определяет ключевой успех LES.

Тензор напряжений SGS можно определить, как:

$$\tau_{ij} = -2\nu_t \bar{S}_{ij} + \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij},$$

где  $\nu_t$  представляет вихревую вязкость в масштабе SGS, а  $\bar{S}_{ij}$  — разрешенный тензор скорости деформации:

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right).$$

В модели Смагоринского турбулентная вихревая вязкость связана с шириной сетки фильтра и скоростью деформации:

$$\nu_t = (C_s \bar{\Delta})^2 |\bar{S}|,$$

где масштаб скорости  $\nu_t$  пропорционален модулю тензора скорости отфильтрованной деформации:

$$|\bar{S}| = \sqrt{2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}},$$

а  $C_s$  — постоянная Смагоринского. Постоянная Смагоринского зависит от числа Рейнольдса ( $0,05 < C_s < 0,5$ ).

Ширина фильтра  $\Delta$  может быть вычислена как размер расстояния между ячейками в направлениях  $x$ ,  $y$  и  $z$ :

$$\bar{\Delta} = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{1/3}.$$

Чтобы добиться правильного поведения вблизи стен, вблизи сплошных границ вводится функция демпфирования, которая учитывает уменьшение небольших колебаний в этих местах:

$$\left( 1 - \exp\left(\frac{-z^+}{25}\right) \right),$$

где  $z^+$  — безразмерное расстояние от стенки. Таким образом, полный член вихревой вязкости в модели Смагоринского принимает вид:

$$\nu_t = \left[ C_s \bar{\Delta} \left( 1 - \exp\left(\frac{-z^+}{25}\right) \right) \right]^2 |\bar{S}|.$$

В работе использована модифицированная версия модели Смагоринского, в которой константа  $C_s$  вычисляется динамически, изменяясь во времени и пространстве. Для динамического вычисления члена вихревой вязкости DSM применяет (наряду с сеточным фильтром) дополнительный явный вторичный фильтр, называемый «тестовым фильтром». Масштаб сетки этого тестового фильтра обозначается  $\underline{\Delta} = \alpha \Delta$ , ширина тестового фильтра  $\underline{\Delta}$  должна быть больше ширины сетки фильтра  $\Delta$ , то есть  $\alpha > 1$ . Применение тестового фильтра приводит к выражению:

$$L_{ij} = T_{ij} - \tilde{\tau}_{ij} = \overline{\overline{u_i u_j}} - \overline{\overline{u_i}} \overline{\overline{u_j}} - \left( \overline{\overline{u_i u_j}} - \overline{\overline{u_i}} \overline{\overline{u_j}} \right) = \overline{\overline{u_i}} \overline{\overline{u_j}} - \overline{\overline{u_i}} \overline{\overline{u_j}},$$

где  $T_{ij}$  — напряжение SGS на уровне тестового фильтра. Компоненты напряжения  $L_{ij}$  можно интерпретировать как напряжение, связанное с наименьшими разрешенными масштабами между шкалой тестового фильтра ( $\Delta$ ) и шкалой сеточного фильтра ( $\bar{\Delta}$ ). Тензор напряжений  $L_{ij}$  может быть непосредственно вычислен по разрешенным шкалам.

Если предполагается, что  $C_s$  существенно не изменяется при переходе от сеточного фильтра к шкалам тестового фильтра, то ошибка, генерируемая при использовании модели Смагоринского составит:

$$E_{ij} = L_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} L_{kk} - \bar{C}_s M_{ij}, \quad M_{ij} = 2\bar{\Delta}^2 \left( \left| \overline{\overline{S}} \right| \overline{\overline{S}}_{ij} - \alpha^2 \eta \left| \overline{\overline{S}} \right| \overline{\overline{S}}_{ij} \right), \quad \eta = \frac{\bar{C}_s}{C_s}.$$

При  $\alpha = 2$  предполагается масштабная дисперсия ( $\eta = 1$ ). Модельный коэффициент  $C_s$  получается путем поиска значения для  $\bar{C}_s$ , которое минимизирует квадрат ошибки  $E_{ij}$ . Следовательно, при  $\partial E^2 / \partial \bar{C}_s = 0$ , получаем:

$$\bar{C}_s = \frac{L_{ij} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}}.$$

Полученный таким образом модельный коэффициент  $C_s$  является локальной величиной, изменяющейся во времени и пространстве в довольно широком диапазоне и имеющей положительные и отрицательные значения. Отрицательное значение  $C_s$  и, следовательно, отрицательное значение  $\nu$  интерпретируется как поток энергии от вихрей подсеточного масштаба к разрешенным вихрям и рассматривается как желательный атрибут динамической модели.

**Результаты численных экспериментов.** Исходными данными для построения растровой модели являются измерения значений переменной в точках с известными координатами. Бюро кадастра города Таганрог была проведена геодезическая съемка уровня дна Таганрогского залива в районе Пушкинской набережной во время отлива (рис. 1).

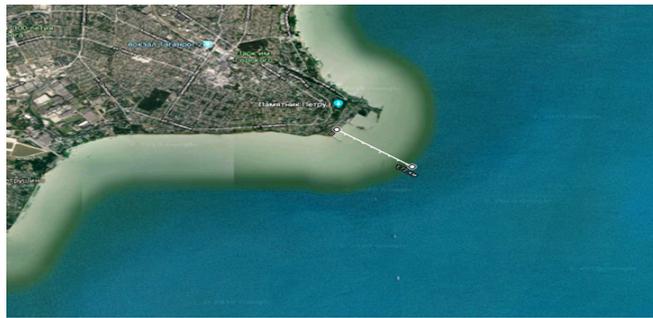


Рис. 1. Изображение участка дна Таганрогского залива в районе Пушкинской набережной Азовского моря во время отлива со спутника дистанционного зондирования Земли

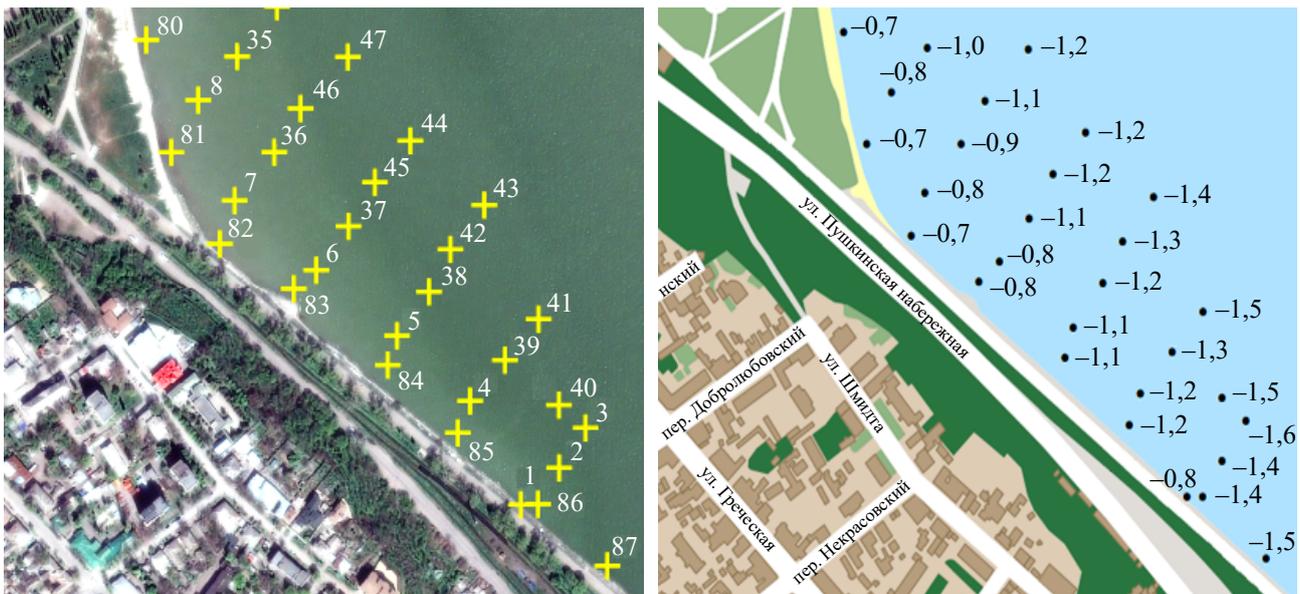


Рис. 2. Геодезическая съемка уровня дна Таганрогского залива в районе Пушкинской набережной с системой координат съемочных точек

Сгонно-нагонные колебания уровня Азовского моря приводят к проблемам с судоходством, разрушению берегов, перераспределению донных осадков, затоплению прибрежных территорий. Данные геодезической съемки представлены на рис. 2. На основе данных геодезической съемки была построена растровая модель участка дна Азов-

ского моря, которая использована как геометрия расчетной области при моделировании. Геометрия расчётной области и изолинии функции глубин донной поверхности представлены на рис. 3.

На рис. 4 продемонстрированы геометрия расчётной области при наличии берегозащитного сооружения, в виде одиночной погруженной буны.

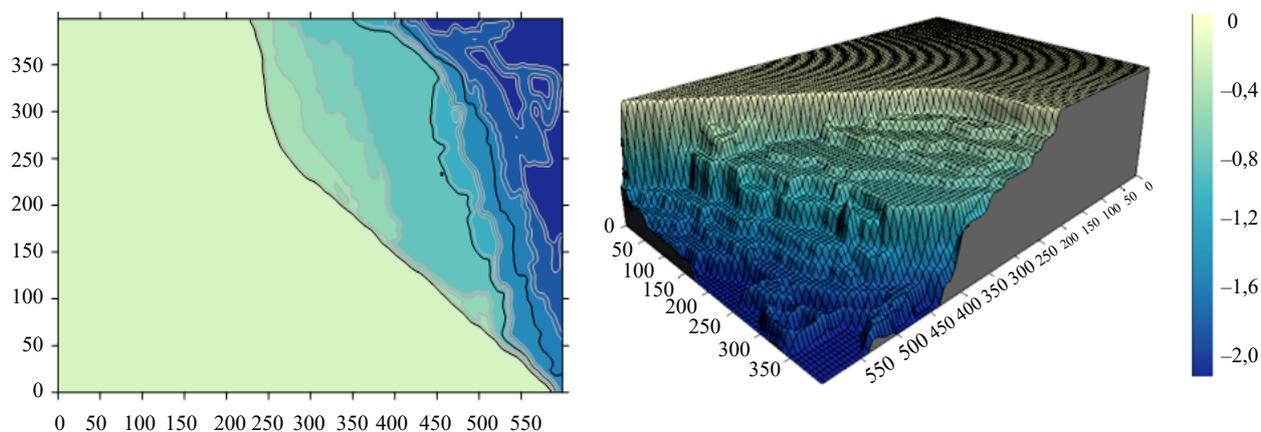


Рис. 3. Геометрия расчётной области и изолинии функции глубин донной поверхности и береговой линии, восстановленные на основе данных геодезической съемки уровня дна

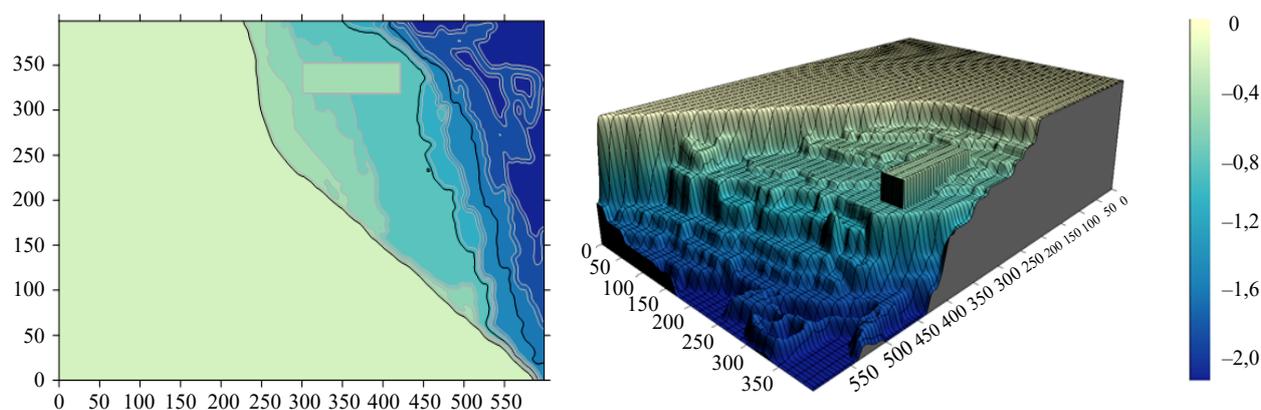


Рис. 4. Геометрия расчётной области и изолинии функции глубин донной поверхности и береговой линии при наличии берегозащитного сооружения

Область моделирования представляет собой участок дна, прилегающий к Пушкинской набережной, размером  $400 \times 600$  м, максимальная глубина 2 м. Берегозащитное сооружение имеет длину 120 м и ширину 30 м, при этом бунa полностью погружена в воду и расположена на расстоянии 80 м от берега. При моделировании область исследуется до и после строительства берегозащитного сооружения.

Эффективность двух схем турбулентности (RANS и LES) была исследована путем сравнения высот волн, профилей скорости водной среды и поля давления вокруг берегозащитного сооружения. Генерируемые волны представляют собой регулярные волны с максимальной высотой волны 1,6 м, при расчетах использовалась сетка  $200 \times 300 \times 40$  расчетных узлов, шаг по времени составил 0,01 секунды. Верхняя часть берегозащитного сооружения настроена на погружение на 0,5 м ниже среднего уровня поверхности моря, что соответствует плану строительства реального сооружения на участке.

Предполагалось, что в начальный момент времени жидкость находилась в состоянии покоя. Источником возникновения волнового движения был ветровой поток, имеющий направление с северо-востока на юго-запад (в рамках модели — от моря к берегу) и скорость 15 м/с.

Результаты численных экспериментов по моделированию распространения волновых гидродинамических процессов на основе 3D модели движения водной среды представлены на рис. 5, 6. На рис. 5 показаны распространяющиеся волны, которые были сгенерированы с помощью RANS и LES до строительства буны. Обмеление волн было соответствующим образом смоделировано в обоих случаях. По данным вычислений построен прогноз изменения гидродинамических волновых процессов прибрежной зоны, предсказано формирование вихревых структур. При использовании подхода LES можно наблюдать турбулентные вихревые структуры, распространяющиеся вниз к морскому дну после гребня волны. Этот процесс вызывает образование наклонно нисходящих вихрей, которые тянутся за гребнем волны. При этом турбулентность создается на фронте волны и медленно распространяется вниз ко дну через нисходящие вихри.

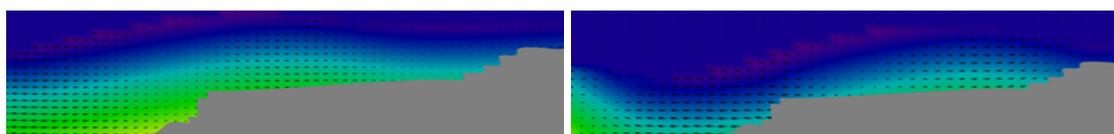


Рис. 5. Сравнение волновых паттернов и векторов скорости водной среды до построения берегозащитного сооружения сгенерированных на основе RANS (слева) и LES (справа)

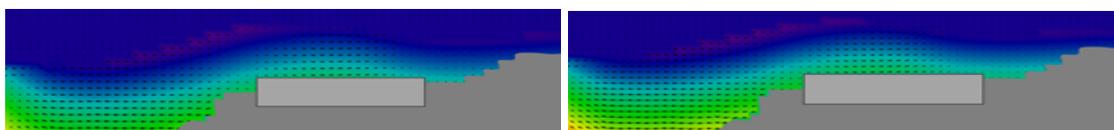


Рис. 6. Векторы скорости распространяющихся волн над берегозащитным сооружением, полученные на основе RANS (слева) и LES (справа)

На рис. 6 показаны снимки распространяющихся волн вокруг берегозащитного сооружения, полученные с использованием RANS и LES в один момент времени. До того, как волны достигают берегозащитного сооружения, схема их распространения аналогична между RANS и LES. Это сходство между двумя моделями сохраняется до тех пор, пока волны не начинают разбиваться о буну. Различия между RANS и LES можно наблюдать в подветренной части буны после прохождения по ней волн. Активно генерируются и образуются турбулентные вихри в случае LES. В случае RANS вихри четко не наблюдаются. Это различие в генерации вихрей демонстрирует способность LES разрешать турбулентные вихревые движения, размер которых превышает размер сетки. Однако в RANS турбулентные структуры недостаточно разрешены, независимо от используемых сеток. Обнаружено существенное расхождение между моделями RANS и LES в генерировании турбулентности потока в подветренной зоне берегозащитного сооружения.

**Обсуждение и заключения.** Результаты, полученные на основе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (RANS), сравниваются с результатами подхода моделирования крупных вихрей (LES) с динамической подсеточной моделью Смагоринского (DSM). Исследована эффективность двух схем моделирования турбулентности — RANS и LES, изучены турбулентные движения потока, генерируемые разбивающимися волнами вокруг берегозащитного сооружения. Различия в генерации турбулентности между двумя схемами также были четко прослежены при изучении профилей скорости водной среды вокруг буны. В то время как турбулентные вихревые движения четко наблюдались в случае LES, векторы скорости, смоделированные в RANS, не демонстрировали никаких признаков образования вихрей. Результаты показали, что LES был более эффективен для расчета гидродинамических процессов с учетом турбулентности на мелководье.

Выбор подходящей схемы турбулентности важен для моделирования распространения волн, особенно вокруг прибрежных сооружений, где ожидается высокая турбулентность потоков. Согласно представленным результатам, LES является лучшим инструментом для генерации турбулентности в условиях набегающей волны в инженерных практиках.

### Список литературы

1. Alekseenko E., Roux B., Sukhinov A., Kotarba R., Fougere D. Coastal hydrodynamics in a windy lagoon. *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2013;20(2):189–198. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2013.02.003>
2. Chang Y.S., Hanes D.M. Suspended sediment and hydrodynamics above mildly sloped long wave ripples. *Journal of Geophysical Research — Oceans*. 2004;109:07022. <https://doi.org/10.1029/2003JC001900>
3. Higuera P., Lara J.L., Losada I.J. Three-dimensional interaction of waves and porous coastal structures using OpenFOAM. Part I: Formulation and validation. *Coast Engineering* 2014;83:243–258. <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2013.08.010>
4. Kim Y., Zhou Z., Hsu T.-J., Puleo J.A. Large eddy simulation of dam-break-driven swash on a rough-planar beach. *Journal of Geophysical Research – Oceans*. 2017;122(2):1274–1296. <https://doi.org/10.1002/2016JC012366>
5. Lubin P., Vincent S., Abadie S., Caltagirone, J.-P. Three-dimensional large eddy simulation of air entrainment under plunging breaking waves. *Coast Engineering*. 2006;53(8):631–655. <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2006.01.001>
6. Miquel A.M., Kamath A., Chella M.A., Archetti R., Bihs H. Analysis of different methods for wave generation and absorption in a CFD-based numerical wave tank. *Journal of Marine Science and Engineering*. 2018;6:1–21. <https://doi.org/10.3390/jmse6020073>
7. Protsenko S., Sukhinova T. Mathematical modeling of wave processes and transport of bottom materials in coastal water areas taking into account coastal structures. *MATEC Web of Conferences*. 2017;132:04002.
8. Ranasinghe R., Larson M., Savioli J. Shoreline responses to a single shore-parallel submerged breakwater. *Coastal Engineering*. 2010;57(1):1006–1017. <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2010.06.002>
9. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A. Mathematical Modeling of Sediment Transport in the Coastal Zone of Shallow Reservoirs. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2014;6(4):351–363. <https://doi.org/10.1134/S2070048214040097>
10. Sukhinov A.I., Sukhinov A.A. Reconstruction of 2001 Ecological Disaster in the Azov Sea on the Basis of Precise Hydrophysics Models. *Parallel Computational Fluid Dynamics, Multidisciplinary Applications*. 2005:231–238. <https://doi.org/10.1016/B978-044452024-1/50030-0>

11. Zhou Z., Hsu T.-J., Cox D., Liu X. Large eddy simulation of wave-breaking induced turbulent coherent structures and suspended sediment transport on a barred beach. *Journal of Geophysical Research – Oceans*. 2017;122:207–235.
12. The official website of Earth observing system. URL: <https://eos.com/landviewer/account/pricing> (accessed: 16.01.2024)
13. The official website of NASA Worldview. URL: <https://worldview.earthdata.nasa.gov> (accessed: 18.01.2024)
14. The official website of Roscosmos Geoportal. URL: [www.gptl.ru](http://www.gptl.ru) (accessed: 20.02.2024)

## References

1. Alekseenko E., Roux B., Sukhinov A., Kotarba R., Fougere D. Coastal hydrodynamics in a windy lagoon. *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2013;20(2):189–198. (In Russ.). <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2013.02.003>
2. Chang Y.S., Hanes D.M. (2004) Suspended sediment and hydrodynamics above mildly sloped long wave ripples. *Journal of Geophysical Research – Oceans*. 2004;109:07022. <http://doi.org/10.1029/2003JC001900>
3. Higuera P., Lara J.L., Losada I.J. Three-dimensional interaction of waves and porous coastal structures using OpenFOAM. Part I: Formulation and validation. *Coast Engineering*. 2014;83:243–258. <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2013.08.010>
4. Kim Y., Zhou Z., Hsu T.-J., Puleo J.A. Large eddy simulation of dam-break-driven swash on a rough-planar beach. *Journal Geophys Res-Oceans*. 2017;122(2):1274–1296. <https://doi.org/10.1002/2016JC012366>
5. Lubin P., Vincent S., Abadie S., Caltagirone J.-P. Three-dimensional large eddy simulation of air entrainment under plunging breaking waves. *Coast Engineering*. 2006;53(8):631–655. <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2006.01.001>
6. Miquel A.M., Kamath A., Chella M.A., Archetti R., Bihs H. Analysis of different methods for wave generation and absorption in a CFD-based numerical wave tank. *Journal of Marine Science and Engineering*. 2018;6:1–21. <https://doi.org/10.3390/jmse6020073>
7. Protsenko S., Sukhinova T. Mathematical modelling of wave processes and transport of bottom materials in coastal water areas taking into account coastal structures. *MATEC Web of Conferences*. 2017;132:04002.
8. Ranasinghe R., Larson M., Savioli J. Shoreline responses to a single shore-parallel submerged breakwater. *Coastal Engineering*. 2010;57(1):1006–1017. <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2010.06.002>
9. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A. Mathematical Modelling of Sediment Transport in the Coastal Zone of Shallow Reservoirs. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2014;6(4):351–363. <https://doi.org/10.1134/S2070048214040097>
10. Sukhinov A.I., Sukhinov A.A. Reconstruction of 2001 Ecological Disaster in the Azov Sea on the Basis of Precise Hydrophysics Models. *Parallel Computational Fluid Dynamics, Multidisciplinary Applications*. 2005:231–238. <https://doi.org/10.1016/B978-044452024-1/50030-0>
11. Zhou Z., Hsu T.-J., Cox D., Liu X. Large eddy simulation of wave-breaking induced turbulent coherent structures and suspended sediment transport on a barred beach. *Journal of Geophysical Research – Oceans*. 2017;122:207–235.
12. The official website of Earth observing system. URL: <https://eos.com/landviewer/account/pricing> (accessed: 16.01.2024)
13. The official website of NASA Worldview. URL: <https://worldview.earthdata.nasa.gov> (accessed: 18.01.2024)
14. The official website of Roscosmos Geoportal. URL: [www.gptl.ru](http://www.gptl.ru) (accessed: 20.02.2024)

**Поступила в редакцию** 21.02.2024

**Поступила после рецензирования** 11.03.2024

**Принята к публикации** 14.03.2024

*Об авторе:*

**Проценко Софья Владимировна**, доцент кафедры математики, научный сотрудник, Таганрогский институт им. А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (347936, РФ, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), кандидат физико-математических наук, [ORCID, rab5555@rambler.ru](https://orcid.org/0009-0001-9142-4000)

*Конфликт интересов*

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

*Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.*

**Received** 21.02.2024

**Received** 11.03.2024

**Accepted** 14.03.2024

*About the Author:*

**Sofya V. Protsenko**, Associate Professor at the Department of Mathematics, Researcher, Taganrog Institute named after A.P. Chekhov (branch) of Rostov State Economic University (48, Initiative St., Taganrog, 347936, RF), PhD in Physics and Mathematics, [ORCID, rab5555@rambler.ru](https://orcid.org/0009-0001-9142-4000)

*Conflict of Interest*

The author declares no conflict of interest.

*The author has read and approved the final version of the manuscript.*