

Computational Mathematics and Information Technologies

Вычислительная
математика /
Computational
Mathematics

Математическое
моделирование /
Mathematical Modelling

Информационные
технологии /
Information Technologies





Computational Mathematics and Information Technologies

Рецензируемый научно-теоретический журнал (издаётся с 2017 года)

eISSN 2587-8999

DOI: 10.23947/2587-8999

Том 8, № 2, 2024

Журнал «Computational Mathematics and Information Technologies» ориентирован на фундаментальные и прикладные исследования по следующим научным разделам:

1. Вычислительная математика
2. Математическое моделирование
3. Информационные технологии

<i>Индексация</i>	РИНЦ, CrossRef, CyberLeninka
<i>Наименование органа, зарегистрировавшего издание</i>	Свидетельство о регистрации средства массовой информации ЭЛ № ФС 77 – 66529 от 21 июля 2016 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций
<i>Учредитель и издатель</i>	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ)
<i>Периодичность</i>	4 выпуска в год
<i>Адрес учредителя и издателя</i>	344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1
<i>E-mail</i>	CMIT-EJ@yandex.ru
<i>Телефон</i>	+7(863) 273–85–14
<i>Сайт</i>	https://cmit-journal.ru
<i>Дата выхода в свет</i>	28.06.2024





Computational Mathematics and Information Technologies

Peer-reviewed scientific and theoretical journal (published since 2017)

eISSN 2587-8999

DOI: 10.23947/2587-8999

Vol. 8, no. 2, 2024

The scope of “Computational Mathematics and Information Technologies” is focused on fundamental and applied research according to the following scientific sections:

1. Computational Mathematics
2. Mathematical Modelling
3. Information Technologies

Indexing

RSCI, Crossref, Cyberleninka

Name of the body that registered the publication

Mass media registration certificate ЭЛ № ФС 77-66529 dated July 21, 2016
issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information
Technology and Mass Media

Founder and publisher

Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education Don State
Technical University (DSTU)

Periodicity

4 issues per year

Address of the founder and publisher

1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation

E-mail

CMIT-EJ@yandex.ru

Telephone

+7(863) 273–85–14

Website

<https://cmit-journal.ru>

Date of publication

28.06.2024



Редакционная коллегия

Главный редактор, Сухинов Александр Иванович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Россия), [MathSciNet](#), [eLibrary.ru](#), [ORCID](#), [ResearcherID](#), [Scopus](#), sukhinov@gmail.com, spu-40.4@donstu.ru

Заместитель главного редактора, Якобовский Михаил Владимирович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия), [eLibrary.ru](#), [ORCID](#)

Ответственный секретарь, Петров Александр Пхоун Чжо, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия), [eLibrary.ru](#), [ИСТИНА](#), [ORCID](#), [ResearcherID](#), [Scopus](#)

Воеводин Владимир Валентинович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Гасилов Владимир Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Гущин Валентин Анатольевич, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт автоматизации проектирования РАН (Москва, Россия)

Лазарева Галина Геннадьевна, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор РАН, Российский университет дружбы народов (Москва, Россия)

Марчук Владимир Иванович, доктор технических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Россия)

Петров Игорь Борисович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Московский физико-технический институт (государственный университет) (Москва, Россия)

Поляков Сергей Владимирович, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Тишкин Владимир Федорович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Четверушкин Борис Николаевич, академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор, научный руководитель Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Чистяков Александр Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Россия)

Editorial Board

Editor-in-Chief, Alexander I. Sukhinov, Corresponding member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russia), [MathSciNet](#), [eLibrary.ru](#), [ORCID](#), [ResearcherID](#), [Scopus](#), sukhinov@gmail.com, spu-40.4@donstu.ru

Deputy Chief Editor, Mikhail V. Yakobovskii, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia), [eLibrary.ru](#), [ORCID](#)

Executive Secretary, Alexander P. Petrov Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head Scientist Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia), [eLibrary.ru](#), [Istina](#), [ORCID](#), [ResearcherID](#), [Scopus](#)

Vladimir V. Voevodin, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russia)

Vladimir A. Gasilov, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia)

Valentin A. Gushchin, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Institute of Computer Aided Design, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia)

Galina G. Lazareva, Corresponding member of RAS, Dr. Sci. (Phys.-Math), Professor of RAS, RUDN University, (Moscow, Russia)

Vladimir I. Marchuk, Dr.Sci. (Eng.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russia)

Igor B. Petrov, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Moscow Institute of Physics and Technology (State University) (Moscow, Russia)

Sergey V. Polyakov, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia)

Vladimir F. Tishkin, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia)

Boris N. Chetverushkin, Academician of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia)

Alexander E. Chistyakov, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russia)

Содержание

Поздравление с юбилеем члена-корреспондента РАН М.В. Якобовского	7
--	---

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Решатель с адаптивным измельчением сеток для регуляризованных уравнений мелкой воды	9
<i>И.И. Бут, М.А. Кирюшина, С.А. Елистратов, Т.Г. Елизарова, А.Д. Тиняков</i>	

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Вероятностный анализ распределения потоков тепла в Северной Атлантике за 1979–2022 годы	24
<i>К.П. Беляев, А.А. Кулешов, А.В. Новикова, Н.П. Тучкова</i>	
Математическое моделирование катастрофических сгонно-нагонных явлений Азовского моря с использованием данных дистанционного зондирования	33
<i>Е.А. Проценко, Н.Д. Панасенко, С.В. Проценко</i>	
Моделирование капиллярного разряда в режиме повторения для коротких капиллярных систем при различных способах заполнения	45
<i>В.А. Гасилов, Н.О. Савенко, Н.О. Шарова</i>	

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Определение границы раздела сред по трёхмерным данным матричного ультразвукового датчика с использованием свёрточных нейронных сетей	60
<i>А.В. Васюков</i>	
Применение нейронных сетей для решения задачи Дирихле для областей сложной формы	68
<i>А.В. Галабурдин</i>	

Contents

Congratulations to Corresponding Member of RAS Mikhail Vladimirovich Yakobovskiy	7
---	----------

INFORMATION TECHNOLOGIES

An Adaptive Mesh Refinement Solver for Regularized Shallow Water Equations	9
<i>I.I. But, M.A. Kiryushina, S.A. Elistratov, T.G. Elizarova, A.D. Tiniakov</i>	

MATHEMATICAL MODELLING

Probabilistic Analysis of Heat Flux Distribution in the North Atlantic for 1979–2022	24
<i>K.P. Belyaev, A.A. Kuleshov, A.V. Novikova, N.P. Tuchkova</i>	
Mathematical Modelling of Catastrophic Surge and Seiche Events in the Azov Sea Using Remote Sensing Data	33
<i>E.A. Protsenko, N.D. Panasenko, S.V. Protsenko</i>	
Modelling of Capillary Discharge in Repetition Mode for Short Capillary Systems with Various Filling Methods	45
<i>V.A. Gasilov, N.O. Savenko, Yu.S. Sharova</i>	

COMPUTATIONAL MATHEMATICS

Locating the Interface between Different Media Based on Matrix Ultrasonic Sensor Data Using Convolutional Neural Networks	60
<i>A.V. Vasyukov</i>	
Application of Neural Networks to Solve the Dirichlet Problem for Areas of Complex Shape	68
<i>A.V. Galaburdin</i>	

ЮБИЛЕЙ УЧЕНОГО ANNIVERSARY OF THE SCIENTIST



8 апреля 2024 года Михаилу Владимировичу Якововскому — заместителю главного редактора нашего журнала, члену-корреспонденту РАН — исполнилось 60 лет.

К юбилею члена-корреспондента РАН, доктора физико-математических наук, профессора Якововского Михаила Владимировича

Михаил Владимирович Якововский — заместитель директора по научной работе Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, является крупным специалистом в области разработки параллельных алгоритмов и средств моделирования фундаментальных и прикладных задач механики сплошной среды на высокопроизводительных вычислительных системах. М.В. Якововский — автор более 90 научных работ, в том числе 8 официально зарегистрированных программ для ЭВМ. Его научные интересы лежат в области разработки параллельных алгоритмов и программ решения задач механики сплошной среды на высокопроизводительных многопроцессорных и гибридных вычислительных системах, в том числе отказоустойчивых алгоритмов численного моделирования на экстремально мощных суперкомпьютерах эксафлопсного уровня производительности.

М.В. Якововским предложена модель единой вычислительной среды для решения широкого круга актуальных фундаментальных и прикладных задач с использованием сеток, содержащих миллиарды и более узлов. Разработанный на её основе комплекс программ объединяет приложения, поддерживающие основные этапы вычислительного эксперимента и обеспечивает согласованное использование множества распределенных вычислительных ресурсов и кластеров.

На основе единого подхода к обработке больших объемов сеточных данных и тесной интеграции методов вычислительной математики и прикладного программирования М.В. Якововским созданы алгоритмы и средства, позволяющие выполнять крупномасштабные вычислительные эксперименты в области механики сплошной среды на современных и перспективных суперкомпьютерах с использованием тысяч и более процессоров.

М.В. Якововским разработаны отказоустойчивые алгоритмы для выполнения непрерывных длительных расчетов на суперкомпьютерах, узлы которых подвержены регулярным отказам, разработаны алгоритмы гарантированной тетраэдризации областей, заданных триангулированными замкнутыми поверхностями.

М.В. Якововский участвовал в освоении и разработке первого Российского терафлопного суперкомпьютера (МСЦ РАН), суперкомпьютеров МВС-15000ВМ, МВС-100К (МСЦ РАН), суперкомпьютеров «Чебышев» и «Ломоносов» (МГУ им. М.В. Ломоносова), гетерогенного суперкомпьютера К-100 (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН).

М.В. Якововский ведет большую научно-организационную работу. Он является членом Ученого совета ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, председателем диссертационного совета 24.1.237.02 и заместителем председателя диссертационного совета 24.1.237.01 в том же институте, членом диссертационного совета МГУ.01.09 МГУ им. М.В. Ломоносова. М.В. Якововский руководит отделом «Программное обеспечение высокопроизводительных вычислительных систем и сетей».

В 2016–2019 годах он являлся членом президиума ВАК при Минобрнауки России, является заместителем главного редактора журнала «Computational Mathematics and Information Technologies», членом редколлегии журналов «Supercomputing frontiers and innovations», «Вычислительные методы и программирование», «Успехи кибернетики», «Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша». Он является членом программного комитета ряда международных конференций, сопредседателем программного комитета международного конгресса «Суперкомпьютерные дни в России» и всероссийской конференции «Научный сервис в сети интернет».

М.В. Якововский является членом бюро Научного совета РАН по координации научных исследований по направлению «Стратегические информационные технологии, включая вопросы создания суперкомпьютеров и разработки программного обеспечения», членом Научного совета РАН по материалам и наноматериалам, членом Экспертного совета РФФИ по математике и механике, ученым секретарём Научного совета Программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Фундаментальные основы создания алгоритмов и программного обеспечения для перспективных сверхвысокопроизводительных вычислений», экспертом РАН, РНФ, РФФИ, ФЦП, являлся председателем экспертного совета по направлению ориентированных фундаментальных исследований РФФИ. Под руководством Якововского М.В. выполнен ряд инициативных проектов РФФИ и проектов ориентированных фундаментальных исследований РФФИ, он участник ряда проектов РНФ,

руководитель проекта РНФ, ответственный исполнитель ряда Государственных контрактов Федеральных целевых научно-технических программ, контрактов суперкомпьютерной программы «Скиф-грид» Союзного государства и других.

М.В. Якобовский ведет большую педагогическую работу. Он является профессором МФТИ и МГУ им. М.В. Ломоносова, автором 4-х учебных пособий по параллельным алгоритмам, в том числе монографии «Введение в параллельные методы решения задач». Его ученику в 2009 году присуждена Медаль РАН с премией для молодых ученых за работу «Моделирование задач газовой динамики и аэроакустики с использованием высокопроизводительных вычислительных систем». Он подготовил в качестве научного руководителя 6 кандидатов физико-математических наук и более 30 специалистов, бакалавров и магистров. В 2016 году М.В. Якобовский был избран в члены-корреспонденты РАН по Отделению математических наук РАН по специальности «Прикладная математика и информатика».

Коллектив редколлегии журнала «Вычислительная математика и информационные технологии», коллеги Михаила Владимировича сердечно поздравляют глубокоуважаемого юбиляра, желают ему крепкого здоровья, новых идей и творческих достижений!

Редакционная коллегия журнала

Computational Mathematics and Information Technologies

Главный редактор — Сухинов Александр Иванович,

Ответственный секретарь — Петров Александр Пхоун Чжо,

Василевский Юрий Викторович,

Воеводин Владимир Валентинович,

Гасилов Владимир Анатольевич,

Гущин Валентин Анатольевич,

Лазарева Галина Геннадьевна,

Марчук Владимир Иванович,

Петров Игорь Борисович,

Поляков Сергей Владимирович,

Тишкин Владимир Федорович,

Четверушкин Борис Николаевич,

Чистяков Александр Евгеньевич.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 519.6

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-9-23>


Решатель с адаптивным измельчением сеток для регуляризованных уравнений мелкой воды

И.И. Бут^{1,2} , М.А. Кирюшина^{1,2} ,
С.А. Елистратов^{1,3} , Т.Г. Елизарова² , А.Д. Тиняков¹

¹Институт системного программирования Российской академии наук, Москва, Российская Федерация²Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Российская Федерация³Институт океанологии им. П.П. Ширшова Российской академии наук, Москва, Российская Федерация m_ist@mail.ru

Аннотация

Введение. Представлен новый решатель с адаптивным измельчением сеток SWqgdAMR на базе открытой программной платформы AMReX. Новый решатель основан на регуляризованных уравнениях мелкой воды. В работе описаны уравнения, их дискретизация и особенности реализации в AMReX. Работоспособность SWqgdAMR была показана на двух тестовых задачах: двумерная задача прорыва круговой дамбы (распад столба жидкости) и задача о распаде двух столбов жидкости, разных по высоте.

Материалы и методы. Решатель SWqgdAMR написан в рамках расширения применимости регуляризованных уравнений в задачах, требующих больших вычислительных мощностей и адаптивных сеток. SWqgdAMR является первым решателем на базе КГД алгоритма в программном комплексе AMReX. Реализация и валидация SWqgdAMR является основным шагом на пути дальнейшего расширения комплекса КГД программ.

Результаты исследования. Детально описан и протестирован решатель AMReX уравнений мелкой воды SWqgdAMR с адаптивным измельчением сеток. Для валидации SWqgdAMR использовались две двумерные задачи: о прорыве цилиндрической плотины и о прорыве двух цилиндрических плотин разной высоты. Представленный решатель показал высокую эффективность, а использование технологии адаптивного измельчения сетки позволило ускорить расчёт в 56 раз по сравнению с расчётом на стационарной сетке.

Обсуждение и заключения. В алгоритм может быть включена батиметрия дна, внешние силы (сила ветра, трение о дно, силы Кориолиса), а также учет подвижности береговой линии при осушении-наводнении, как это уже было сделано в рамках индивидуальных кодов для РУМВ. В данной реализации КГД алгоритма не тестировались перспективные возможности применения распараллеливания вычислений на графические ядра.

Ключевые слова: уравнения мелкой воды, адаптивное измельчение сеток, квазигазодинамические (КГД) уравнения, регуляризованные уравнения мелкой воды (РУМВ), AMReX

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики. Соглашение с Министерством науки и высшего образования РФ № 075-15-2022-283.

Для цитирования. Бут И.И., Кирюшина М.А., Елистратов С.А., Елизарова Т.Г., Тиняков А.Д. Решатель с адаптивным измельчением сеток для регуляризованных уравнений мелкой воды. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):9–23. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-9-23>

An Adaptive Mesh Refinement Solver for Regularized Shallow Water Equations

Ivan I. But^{1,2} , Maria A. Kiryushina^{1,2}  , Stepan A. Elistratov^{1,3} ,
Tatiana G. Elizarova² , Artem D. Tiniakov¹ 

¹Institute of System Programming of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

²Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

³Shirshov Institute of Oceanology of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

 m_ist@mail.ru

Abstract

Introduction. We present a novel adaptive mesh refinement (AMR) solver, SWqgdAMR, based on the open software platform AMReX. The new solver is grounded in regularized shallow water equations. This paper details the equations, their discretization, and implementation features within AMReX. The efficacy of SWqgdAMR is demonstrated through two test cases: a two-dimensional circular dam break (collapse of a liquid column) and the collapse of two liquid columns of different heights.

Materials and Methods. The SWqgdAMR solver is developed to extend the applicability of regularized equations in problems requiring high computational power and adaptive grids. SWqgdAMR is the first solver based on the quasigas dynamic (QGD) algorithm within the AMReX framework. The implementation and validation of SWqgdAMR represent a crucial step towards the further expansion of the QGD software suite.

Results. The AMReX-based shallow water equations solver SWqgdAMR with adaptive mesh refinement is described and tested in detail. Validation of SWqgdAMR involved two-dimensional problems: the breach of a cylindrical dam and the breach of two cylindrical dams of different heights. The presented solver demonstrated high efficiency, with the use of adaptive mesh refinement technology accelerating the computation by 56 times compared to a stationary grid calculation.

Discussion and Conclusions. The algorithm can be expanded to include bathymetry, external forces (wind force, bottom friction, Coriolis forces), and the mobility of the shoreline during wetting and drying phases, as has been done in individual codes for regularized shallow water equations (RSWE). The current implementation of the QGD algorithm did not test the potential for parallel computing on graphical cores.

Keywords: shallow water equations, adaptive mesh refinement, quasigas dynamic equations, regularized shallow water equations, AMReX

Funding information. His work was supported by the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under Agreement no. 075-15-2022-283 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

For citation: But I.I., Kiryushina M.A., Elistratov S.A., Elizarova T.G., Tiniakov A.D. An Adaptive Mesh Refinement Solver for Regularized Shallow Water Equations. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):9–23. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-9-23>

Введение. Для моделирования задач гидрогазодинамики требуется использовать всё более точные алгоритмы и подробные расчётные сетки, и, как следствие, большие вычислительные ресурсы, в том числе и методы распараллеливания расчётов на GPU ядра. Таким образом, необходима разработка нового решателя с адаптивным измельчением сеток на базе открытых платформ. Такой подход имеет ряд преимуществ по сравнению с написанием индивидуальных кодов. Во-первых, открытые платформы, как правило, предоставляют устоявшиеся и тщательно протестированные фреймворки, одобренные широким научным сообществом, что снижает риск ошибок и повышает общую надёжность. Во-вторых, использование открытых платформ способствует функциональной совместимости и возможности повторного использования, обеспечивая беспрепятственную интеграцию с другими инструментами и облегчая сотрудничество между исследователями. В-третьих, использование существующих открытых платформ позволяет значительно сократить время и стоимость разработки, поскольку эти платформы часто предлагают широкий спектр функциональных возможностей, начиная от обработки данных и заканчивая визуализацией и параллельными вычислениями. В-четвёртых, открытые платформы получают постоянное развитие и поддержку со стороны сообщества пользователей, что приводит к регулярным обновлениям, исправлению ошибок и повышению производительности. Это контрастирует с индивидуальными кодами, которые часто зависят исключительно от ресурсов и опыта человека или команды, создавшей их.

Среди свободного программного обеспечения был выбран AMReX, на сегодняшний день являющийся наиболее оптимальным открытым фреймворком, который позволяет:

- 1) использовать технологию адаптивного измельчения сеток (AMR);
- 2) использовать возможность распараллеливания вычислений на графические ядра GPU;
- 3) использовать метод погруженных границ при моделировании твёрдых тел в потоке;
- 4) строить структурированные сетки;
- 5) является с 2023 г. частью The High Performance Software Foundation, основанного Linux Foundation [1],

что обеспечивает огромную поддержку и дальнейшее развитие данного пакета программ.

На базе AMReX уже проводились численные расчёты задач газодинамики, в том числе и сравнение AMReX и OpenFOAM [2]. Поэтому было решено реализовать на базе AMReX решатель для задач гидро- и газодинами-

ки, использующий КГД уравнения. Аналогичный решатель уже реализован в OpenFOAM [3, 4] под общим названием QGdsolver [5], который показывает свою высокую эффективность. К сожалению, как уже отмечалось ранее, OpenFOAM не обладает возможностью распараллеливания вычислений на графические ядра и алгоритмом адаптивного измельчения сеток.

В представленной работе описана реализация квазигазодинамического (КГД) алгоритма в AMReX в упрощенной форме. В качестве упрощения выбран баротропный вариант системы уравнений газовой динамики, который позволяет избавиться от уравнения энергии и уравнения состояния. Этот баротропный вариант при известных предположениях имеет вид уравнений мелкой воды. Стоит отметить, что реализация решателя SWqgdAMR в программном комплексе AMReX является ключевым шагом в дальнейшем расширении набора решателей на базе КГД уравнений.

Сам КГД подход развивается на протяжении более 30 лет для задач газовой динамики и несжимаемых течений [6–10]. В последние годы КГД подход был реализован для задач в приближении мелкой воды [11–16].

Математическая модель и численный метод. Регуляризованные уравнения мелкой воды (РУМВ). Приведем РУМВ в векторной форме в отсутствии внешних сил и с условием плоского дна:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_m &= 0, \\ \frac{\partial(h\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{j}_m \otimes \mathbf{u}) + \nabla \frac{gh^2}{2} &= \nabla \Pi, \end{aligned} \quad (1)$$

где h — толщина слоя воды; $\mathbf{j}_m = h(\mathbf{u} - \mathbf{w})$ — вектор плотности потока массы; $\mathbf{u}$ — вектор скорости; g — ускорение силы тяжести; $\Pi = \Pi_{NS} + \Pi_{QGD}$ — тензор вязких напряжений; Π_{NS} — тензор вязких напряжений Навье-Стокса; $\mathbf{w}$, Π_{QGD} — КГД слагаемые; $\otimes$ — векторное произведение. Здесь оператор набла, действующий на скаляр, означает градиент, на вектор — дивергенцию, на тензор — ковариантную производную: $\nabla T \equiv u|_y = \nabla_\alpha T_{\alpha\beta}$. Вид РУМВ с учетом формы дна и внешних сил есть, например, в [11–16].

Дискретизация регуляризованных уравнений мелкой воды.

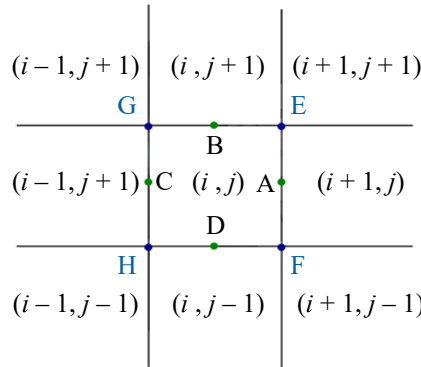


Рис. 1. Численный шаблон. Значения переменных h и $\mathbf{u}$ отнесены к центрам ячеек с координатами (i, j)

КГД уравнения мелкой воды в покомпонентной форме имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx}}{\partial x} + \frac{\partial j_{my}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial hu_x}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx}u_x}{\partial x} + \frac{\partial j_{my}u_x}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh^2}{2} \right) &= \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yx}}{\partial y}, \\ \frac{\partial hu_y}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx}u_y}{\partial x} + \frac{\partial j_{my}u_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{gh^2}{2} \right) &= \frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yy}}{\partial y}, \\ j_{mx} &= h(u_x - w_x), w_x = \frac{\tau}{h} \left(\frac{\partial(hu_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(hu_xu_y)}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial x} \right), \\ j_{my} &= h(u_y - w_y), w_y = \frac{\tau}{h} \left(\frac{\partial(hu_y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(hu_xu_y)}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial y} \right), \\ \Pi_{xx} &= u_x \hat{w}_x + R + \Pi_{xx}^{NS}, \Pi_{xy} = u_x \hat{w}_y + \Pi_{xy}^{NS}, \\ \Pi_{yx} &= u_y \hat{w}_x + \Pi_{yx}^{NS}, \Pi_{yy} = u_y \hat{w}_y + R + \Pi_{yy}^{NS}, \\ \Pi_{xx}^{NS} &= h\nu \left(2 \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \text{div} \bar{\mathbf{u}} \right), \Pi_{yy}^{NS} = h\nu \left(2 \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \text{div} \bar{\mathbf{u}} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pi_{xy}^{NS} &= \Pi_{yx}^{NS} = h \nu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \quad \nu = \tau \frac{gh^2}{2}, \quad \text{div} \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\ \hat{w}_x &= \tau \left(hu_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + hu_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh^2}{2} \right) \right), \\ \hat{w}_y &= \tau \left(hu_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + hu_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{gh^2}{2} \right) \right), \\ R &= g \tau \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^2}{2} \right) + u_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^2}{2} \right) + h^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right).\end{aligned}$$

Запишем пространственную дискретизацию уравнений с учетом значений величин в полуцелых точках сетки (рис. 1):

$$\begin{aligned}h_A &= h_{i+\frac{1}{2},j} = 0,5(h_{i,j} + h_{i+1,j}), \quad h_B = h_{i,j+\frac{1}{2}} = 0,5(h_{i,j} + h_{i,j+1}), \\ h_C &= h_{i-\frac{1}{2},j} = 0,5(h_{i,j} + h_{i-1,j}), \quad h_D = h_{i,j-\frac{1}{2}} = 0,5(h_{i,j} + h_{i,j-1}), \\ h_E &= h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0,25(h_{i,j} + h_{i+1,j} + h_{i,j+1} + h_{i+1,j+1}), \\ h_F &= h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = 0,25(h_{i,j} + h_{i+1,j} + h_{i,j-1} + h_{i+1,j-1}), \\ h_G &= h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0,25(h_{i,j} + h_{i-1,j} + h_{i,j+1} + h_{i-1,j+1}), \\ h_H &= h_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = 0,25(h_{i,j} + h_{i-1,j} + h_{i,j-1} + h_{i-1,j-1}).\end{aligned}$$

Аналогично записывается дискретизация компонент скорости в полуцелых точках. Дискретизация потока массы:

$$\begin{aligned}j_{xA} &= j_{xi+\frac{1}{2},j} = h_{i+\frac{1}{2},j} \left(u_{xi+\frac{1}{2},j} - w_{xi+\frac{1}{2},j} \right), \\ j_{yB} &= j_{yi,j+\frac{1}{2}} = h_{i,j+\frac{1}{2}} \left(u_{yi,j+\frac{1}{2}} - w_{yi,j+\frac{1}{2}} \right), \\ j_{xC} &= j_{xi-\frac{1}{2},j} = h_{i-\frac{1}{2},j} \left(u_{xi-\frac{1}{2},j} - w_{xi-\frac{1}{2},j} \right), \\ j_{yD} &= j_{yi,j-\frac{1}{2}} = h_{i,j-\frac{1}{2}} \left(u_{yi,j-\frac{1}{2}} - w_{yi,j-\frac{1}{2}} \right).\end{aligned}$$

Дискретизация КГД слагаемых:

$$\begin{aligned}w_{xA} &= w_{xi+\frac{1}{2},j} = \frac{\tau_{i+\frac{1}{2},j}}{h_{i+\frac{1}{2},j}} \left(\frac{h_{i+1,j} u_{xi+1,j} u_{xi+1,j} - h_{i,j} u_{xi,j} u_{xi,j}}{\Delta x} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} u_{xi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} u_{yi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} u_{xi+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} u_{yi+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} + 0,5g \frac{h_{i+1,j} h_{i+1,j} - h_{i,j} h_{i,j}}{\Delta x} \right), \\ w_{yB} &= w_{yi,j+\frac{1}{2}} = \frac{\tau_{i,j+\frac{1}{2}}}{h_{i,j+\frac{1}{2}}} \left(\frac{h_{i,j+1} u_{yi,j+1} u_{yi,j+1} - h_{i,j} u_{yi,j} u_{yi,j}}{\Delta y} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} u_{xi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} u_{yi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} u_{xi-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} u_{yi-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + 0,5g \frac{h_{i,j+1} h_{i,j+1} - h_{i,j} h_{i,j}}{\Delta y} \right), \\ w_{xC} &= w_{xi-\frac{1}{2},j} = \frac{\tau_{i-\frac{1}{2},j}}{h_{i-\frac{1}{2},j}} \left(\frac{h_{i,j} u_{xi,j} u_{xi,j} - h_{i-1,j} u_{xi-1,j} u_{xi-1,j}}{\Delta x} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} u_{xi-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} u_{yi-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} u_{xi-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} u_{yi-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} + 0,5g \frac{h_{i,j} h_{i,j} - h_{i-1,j} h_{i-1,j}}{\Delta x} \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_{yD} &= w_{yi,j-\frac{1}{2}} = \frac{\tau}{h_{i,j-\frac{1}{2}}} \left(\frac{h_{i,j} u_{yi,j} u_{yi,j} - h_{i,j-1} u_{yi,j-1} u_{yi,j-1}}{\Delta y} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} u_{xi+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} u_{yi+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} u_{xi-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} u_{yi-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} + 0,5g \frac{h_{i,j} h_{i,j} - h_{i,j-1} h_{i,j-1}}{\Delta y} \right), \\
 w_{xA}^* &= w_{xi+\frac{1}{2},j}^* = \tau_{i+\frac{1}{2},j} \left(h_{i+\frac{1}{2},j} u_{xi+\frac{1}{2},j} \frac{u_{xi+1,j} - u_{xi,j}}{\Delta x} + h_{i+\frac{1}{2},j} u_{yi+\frac{1}{2},j} \frac{u_{xi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{xi+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \right. \\
 &\quad \left. + 0,5g \frac{h_{i+1,j} h_{i+1,j} - h_{i,j} h_{i,j}}{\Delta x} \right), \\
 w_{xB}^* &= w_{xi,j+\frac{1}{2}}^* = \tau_{i,j+\frac{1}{2}} \left(h_{i,j+\frac{1}{2}} u_{xi,j+\frac{1}{2}} \frac{u_{xi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{xi-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + h_{i,j+\frac{1}{2}} u_{yi,j+\frac{1}{2}} \frac{u_{xi,j+1} - u_{xi,j}}{\Delta y} + \right. \\
 &\quad \left. + 0,5g \frac{h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right), \\
 w_{xC}^* &= w_{xi-\frac{1}{2},j}^* = \tau_{i-\frac{1}{2},j} \left(h_{i-\frac{1}{2},j} u_{xi-\frac{1}{2},j} \frac{u_{xi,j} - u_{xi-1,j}}{\Delta x} + h_{i-\frac{1}{2},j} u_{yi-\frac{1}{2},j} \frac{u_{xi-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{xi-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \right. \\
 &\quad \left. + 0,5g \frac{h_{i,j} h_{i,j} - h_{i-1,j} h_{i-1,j}}{\Delta x} \right), \\
 w_{xD}^* &= w_{xi,j-\frac{1}{2}}^* = \tau_{i,j-\frac{1}{2}} \left(h_{i,j-\frac{1}{2}} u_{xi,j-\frac{1}{2}} \frac{u_{xi+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - u_{xi-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} + h_{i,j-\frac{1}{2}} u_{yi,j-\frac{1}{2}} \frac{u_{xi,j} - u_{xi,j-1}}{\Delta y} + \right. \\
 &\quad \left. + 0,5g \frac{h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} h_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right), \\
 w_{yA}^* &= w_{yi+\frac{1}{2},j}^* = \tau_{i+\frac{1}{2},j} \left(h_{i+\frac{1}{2},j} u_{xi+\frac{1}{2},j} \frac{u_{yi+1,j} - u_{yi,j}}{\Delta x} + h_{i+\frac{1}{2},j} u_{yi+\frac{1}{2},j} \frac{u_{yi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{yi+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \right. \\
 &\quad \left. + 0,5g \frac{h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right), \\
 w_{yB}^* &= w_{yi,j+\frac{1}{2}}^* = \tau_{i,j+\frac{1}{2}} \left(h_{i,j+\frac{1}{2}} u_{xi,j+\frac{1}{2}} \frac{u_{yi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{yi-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + h_{i,j+\frac{1}{2}} u_{yi,j+\frac{1}{2}} \frac{u_{yi,j+1} - u_{yi,j}}{\Delta y} + \right. \\
 &\quad \left. + 0,5g \frac{h_{i,j+1} h_{i,j+1} - h_{i,j} h_{i,j}}{\Delta y} \right), \\
 w_{yC}^* &= w_{yi-\frac{1}{2},j}^* = \tau_{i-\frac{1}{2},j} \left(h_{i-\frac{1}{2},j} u_{xi-\frac{1}{2},j} \frac{u_{yi,j} - u_{yi-1,j}}{\Delta x} + h_{i-\frac{1}{2},j} u_{yi-\frac{1}{2},j} \frac{u_{yi-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{yi-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \right. \\
 &\quad \left. + 0,5g \frac{h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} h_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_{yD}^* = w_{yi,j-\frac{1}{2}}^* = \tau_{i,j-\frac{1}{2}} & \left(h_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{u_{xi,j-\frac{1}{2}} - u_{xi,j-\frac{3}{2}}}{\Delta x} + h_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{u_{yi,j} - u_{yi,j-1}}{\Delta y} + \right. \\
 & \left. + 0,5g \frac{h_{i,j}h_{i,j} - h_{i,j-1}h_{i,j-1}}{\Delta y} \right), \\
 \text{div} \vec{u}_A = \frac{u_{xi+1,j} - u_{xi,j}}{\Delta x} + \frac{u_{yi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{yi+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y}, \text{div} \vec{u}_B = \frac{u_{yi,j+1} - u_{yi,j}}{\Delta y} + \frac{u_{xi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{xi-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \\
 \text{div} \vec{u}_C = \frac{u_{xi,j} - u_{xi-1,j}}{\Delta x} + \frac{u_{yi-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{yi-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y}, \text{div} \vec{u}_D = \frac{u_{yi,j} - u_{yi,j-1}}{\Delta y} + \frac{u_{xi+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - u_{xi-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta x}.
 \end{aligned}$$

Параметр регуляризации алгоритма

$$\tau = \frac{\alpha \Delta_h}{\sqrt{gh}} \quad (2)$$

вычисляется как

$$\tau_A = \tau_{i+\frac{1}{2},j} = \alpha \sqrt{\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{gh_{i+\frac{1}{2},j}}}, \quad \tau_B = \tau_{i,j+\frac{1}{2}} = \alpha \sqrt{\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{gh_{i,j+\frac{1}{2}}}}, \quad (3)$$

где α — настроечное число в пределах больше 0 и меньше 1; g — ускорение свободного падения. Аналогично записывается и дискретизация для τ_C , τ_D . Шаг по времени на базовой расчётной сетке выбирается так, чтобы удовлетворить условию устойчивости для явной схемы и имеет вид условия Куранта (число Куранта $0 < \beta < 1$):

$$\Delta t = \beta \left(\frac{\Delta x + \Delta y}{2\sqrt{gh}} \right)_{\min}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 R_A = R_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{g\tau_{i+\frac{1}{2},j}}{2} \left(u_{xi+\frac{1}{2},j} \frac{h_{i+1,j}h_{i+1,j} - h_{i,j}h_{i,j}}{\Delta x} + \right. \\
 & \left. + u_{yi+\frac{1}{2},j} \frac{h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} + 2h_{i+\frac{1}{2},j}h_{i+\frac{1}{2},j} \text{div}(u)_A \right), \\
 R_B = R_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{g\tau_{i,j+\frac{1}{2}}}{2} \left(u_{yi,j+\frac{1}{2}} \frac{h_{i,j+1}h_{i,j+1} - h_{i,j}h_{i,j}}{\Delta y} + \right. \\
 & \left. + u_{xi,j+\frac{1}{2}} \frac{h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + 2h_{i,j+\frac{1}{2}}h_{i,j+\frac{1}{2}} \text{div}(u)_B \right), \\
 R_C = R_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{g\tau_{i-\frac{1}{2},j}}{2} \left(u_{xi-\frac{1}{2},j} \frac{h_{i,j}h_{i,j} - h_{i-1,j}h_{i-1,j}}{\Delta x} + \right. \\
 & \left. + u_{yi-\frac{1}{2},j} \frac{h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}h_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} + 2h_{i-\frac{1}{2},j}h_{i-\frac{1}{2},j} \text{div}(u)_C \right), \\
 R_D = R_{i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{g\tau_{i,j-\frac{1}{2}}}{2} \left(u_{yi,j-\frac{1}{2}} \frac{h_{i,j}h_{i,j} - h_{i,j-1}h_{i,j-1}}{\Delta y} + \right. \\
 & \left. + u_{xi,j-\frac{1}{2}} \frac{h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}h_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} + 2h_{i,j-\frac{1}{2}}h_{i,j-\frac{1}{2}} \text{div}(u)_D \right).
 \end{aligned}$$

Дискретизация тензора вязких напряжений:

$$\begin{aligned}\Pi_{xxA} &= \Pi_{xxi+\frac{1}{2},j} = u_{xi+\frac{1}{2},j} w_{xi+\frac{1}{2},j}^* + R_{xi+\frac{1}{2},j}, \Pi_{xxB} = \Pi_{xxi-\frac{1}{2},j} = u_{xi-\frac{1}{2},j} w_{xi-\frac{1}{2},j}^* + R_{xi-\frac{1}{2},j}, \\ \Pi_{xyA} &= \Pi_{xyi+\frac{1}{2},j} = u_{xi+\frac{1}{2},j} w_{yi+\frac{1}{2},j}^*, \Pi_{xyB} = \Pi_{xyi-\frac{1}{2},j} = u_{xi-\frac{1}{2},j} w_{yi-\frac{1}{2},j}^*, \\ \Pi_{yxC} &= \Pi_{yxi,j+\frac{1}{2}} = u_{yi,j+\frac{1}{2}} w_{xi,j+\frac{1}{2}}^*, \Pi_{yxD} = \Pi_{yxi,j-\frac{1}{2}} = u_{yi,j-\frac{1}{2}} w_{xi,j-\frac{1}{2}}^*, \\ \Pi_{yyC} &= \Pi_{yyi,j+\frac{1}{2}} = u_{xi,j+\frac{1}{2}} w_{xi,j+\frac{1}{2}}^* + R_{xi,j+\frac{1}{2}}, \Pi_{yyD} = \Pi_{xxi,j-\frac{1}{2}} = u_{xi,j-\frac{1}{2}} w_{xi,j-\frac{1}{2}}^* + R_{xi,j-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Дискретизация уравнения сохранения массы:

$$\hat{h}_{i,j} = h_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((j_x)_{i+\frac{1}{2},j} - (j_x)_{i-\frac{1}{2},j} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left((j_y)_{i,j+\frac{1}{2}} - (j_y)_{i,j-\frac{1}{2}} \right).$$

Дискретизация уравнений баланса импульсов:

$$\begin{aligned}\hat{h}_{i,j}(\hat{u}_x)_{i,j} &- \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((u_x)_{i+\frac{1}{2},j} (j_x)_{i+\frac{1}{2},j} - (u_x)_{i-\frac{1}{2},j} (j_x)_{i-\frac{1}{2},j} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left((u_x)_{i,j+\frac{1}{2}} (j_y)_{i,j+\frac{1}{2}} - (u_x)_{i,j-\frac{1}{2}} (j_y)_{i,j-\frac{1}{2}} \right) - \\ &- 0,5g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(h_{i+\frac{1}{2},j} h_{i+\frac{1}{2},j} - h_{i-\frac{1}{2},j} h_{i-\frac{1}{2},j} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\Pi_{xx})_{i+\frac{1}{2},j} - (\Pi_{xx})_{i-\frac{1}{2},j} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left((\Pi_{yx})_{i,j+\frac{1}{2}} - (\Pi_{yx})_{i,j-\frac{1}{2}} \right), \\ \hat{h}_{i,j}(\hat{u}_y)_{i,j} &= h_{i,j}(u_y)_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left((u_y)_{i,j+\frac{1}{2}} (j_y)_{i,j+\frac{1}{2}} - (u_y)_{i,j-\frac{1}{2}} (j_y)_{i,j-\frac{1}{2}} \right) - \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((u_y)_{i+\frac{1}{2},j} (j_x)_{i+\frac{1}{2},j} - (u_y)_{i-\frac{1}{2},j} (j_x)_{i-\frac{1}{2},j} \right) - 0,5g \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(h_{i,j+\frac{1}{2}} h_{i,j+\frac{1}{2}} - h_{i,j-\frac{1}{2}} h_{i,j-\frac{1}{2}} \right) + \\ &+ \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\Pi_{xy})_{i,j+\frac{1}{2}} - (\Pi_{xy})_{i,j-\frac{1}{2}} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\Pi_{xy})_{i+\frac{1}{2},j} - (\Pi_{xy})_{i-\frac{1}{2},j} \right).\end{aligned}$$

Реализация в AMReX. Численное решение уравнений мелкой воды реализовано на языке C++ с использованием открытого программного обеспечения AMReX. Данное программное обеспечение было взято за основу, поскольку позволяет использовать готовую логику дробления сеток по уровням, а также даёт возможность простого переноса (посредством макросов) вычислений на GPU ядра, что делает вычисления значительно менее затратными по времени.

На рис. 2 представлена структура разработанного программного обеспечения.

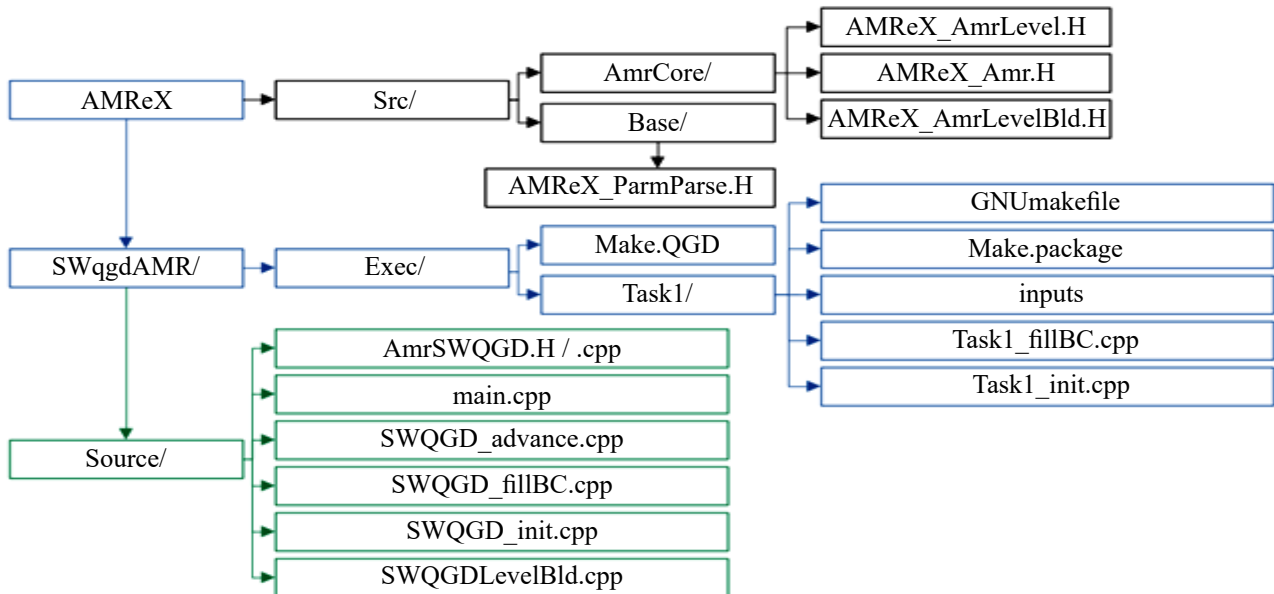


Рис. 2. Структура решателя

Основной класс-решатель AmrSWQGD объявлен в файле AmrSWQGD.H и реализован в файле AmrSWQGD.cpp. Он наследуется от класса AmrLevel, определенного в ядре AMReX. Наследование от этого класса позволяет простым способом измельчать сетку по уровням.

Логика итерации решателя определена в файле `SWQGD_advance.cpp` в методе `advance`. В нем при помощи цикла `ParallelFor` выполняется обновление полей h , u_x и u_y на каждой итерации. Здесь $huOld$ — контейнер старых переменных, $huNew$ — новых. Поскольку решение происходит на многоуровневой сетке (рис. 3), на каждом уровне которой своё разбиение (на уровне 0 самая грубая сетка, на уровнях выше точность увеличивается), то на каждом уровне вводится свой собственный шаг по времени (рис. 4). Например, если сетка имеет 2 уровня 0 и 1, и на уровне 1 сетка в 2 раза точнее по каждому направлению, чем на уровне 0, то одна итерация решения происходит следующим образом: происходит расчёт на уровне 0 с шагом по времени dt , происходят 2 итерации расчёта на уровне 1 с шагом по времени $dt/2$, а затем сетки синхронизируются. Такой алгоритм позволяет повысить точность вычислений.

Стоит отметить, что на каждом уровне необходимо уточнять не всю сетку, а только некоторые её части. Для этого класс-решатель определяет метод `errorEst` в файле `AmrSWQGD.cpp`. Данный метод принимает ссылку на экземпляр `tags` контейнера `TagBoxArray`. В цикле `ParallelFor` проходится каждая ячейка сетки, которая отмечается для разбиения, если подходит под некоторое условие (определяется в `if()` конструкции). Также для разбиения помечаются некоторые окружающие её ячейки. Остальные ячейки, которые не подходят под условие, помечаются меткой `clearval` и не будут подвергаться измельчению.

Сами расчётные задачи находятся в папке `Exes`, в этой папке содержатся файлы `inputs`, файл с начальными и граничными условиями.

В файле `inputs` записываются настройки решения:

- `max_step` — максимальное количество итераций;
- `stop_time` — расчётное время в секундах, на котором останавливается решение (по сути, расчёты идут до момента, пока количество итераций не превысит `max_step` или пока расчётное время не станет равным `stop_time`);
- `geometry.is_periodic` — массив из 3 булевых переменных (например, 0 0 0 или 0 1 1 или 1 0 1), определяющий будут ли границы по определённому направлению периодичны (1) или нет (0);
- `geometry.coord_sys` — система координат, в которой происходит решение (рекомендуемое значение 0, что соответствует декартовой системе координат; гарантии того, что решатель будет корректно работать в других системах, не даются);
- `geometry.prob_lo` — хуэ координаты левого нижнего угла физической прямоугольной области (например, 0.0 0.0 0.0);
- `geometry.prob_hi` — хуэ координаты правого верхнего угла физической области (например, 10. 10. 1.);
- `amr.n_cell` — массив из трёх целых переменных, обозначающих разбиение сетки в каждом из направлений на 0 уровне (например, 512 512 1);
- `amr.max_level` — целое число, обозначающее максимальный допустимый уровень разбиения сетки;
- `amr.ref_ratio` — коэффициент дробления сетки по уровням;
- `amr.regrid_int` — целое число, обозначающее количество шагов, через которое следует пересоздать сетку;
- `amr.max_grid_size` — решатель делит сетку на домены, размер каждого не превосходит `max_grid_size` по каждому из направлений;
- `amr.plot_int` — решатель записывает в файлы каждые `plot_int` итераций.

Уравнения граничных условий описаны в структуре `SWQGDBCFill` в файле `Task1_fillBC.cpp` (`Task1` — название задачи, может быть изменено на любое другое). Здесь `ilo` — левая граница расчётной области, `ihi` — правая граница, `jlo` — нижняя граница, `jhi` — верхняя граница. Уравнения решаются для переменных h , u_x и u_y , т. е. высоты столба воды, скорости по x -направлению и скорости по y -направлению. Переменная `dest` представляет собой многомерный массив, хранящий значения всех переменных во всей расчётной области. Обратиться к переменной h в ячейке (i, j, k) можно с помощью `dest(i, j, k, 0)`, к переменной u_x в той же ячейке с помощью `dest(i, j, k, 1)`, а к переменной u_y , соответственно, как `dest(i, j, k, 2)`. Так как у нас 2D уравнения, то индекс k в данном случае полагается равным 1.

Начальные условия задаются в файле `Task1_init.cpp`. Здесь переменная `snew[bi]` выступает в роли контейнера, аналогичного контейнеру `dest` в структуре для граничных условий. Начальные условия рассчитываются в цикле `amrex::ParallelFor`. Данный цикл вместе с макросом — лямбда-функцией `AMREX_GPU_DEVICE` позволяет выполнить расчёт граничных условий во всей области параллельно на GPU ядрах.

Для компиляции программы необходимо перейти в папку с задачей (`Task1`), затем в терминале запустить команду `make -j n`, где n — количество ядер для распараллеливания. Для запуска утилиты без распараллеливания достаточно запустить просто `make`. После завершения работы `make` в папке появится файл `main2d.gnu.MPI.ex` (название может немного отличаться). Далее для запуска необходимо в терминале прописать следующую команду: `mpirun -np n ./main2d.gnu.MPI.ex inputs`, где n — количество ядер для распараллеливания, после чего запустится расчёт.

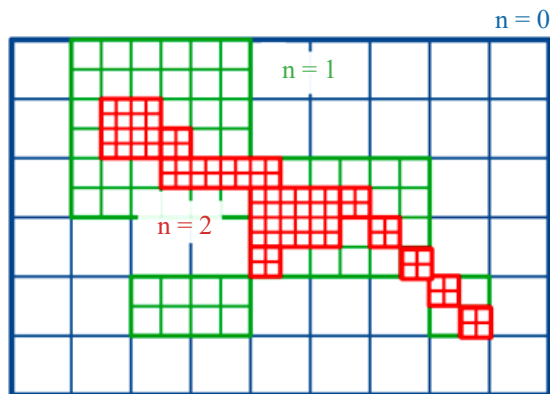


Рис. 3. Схема алгоритма адаптивного измельчения сетки

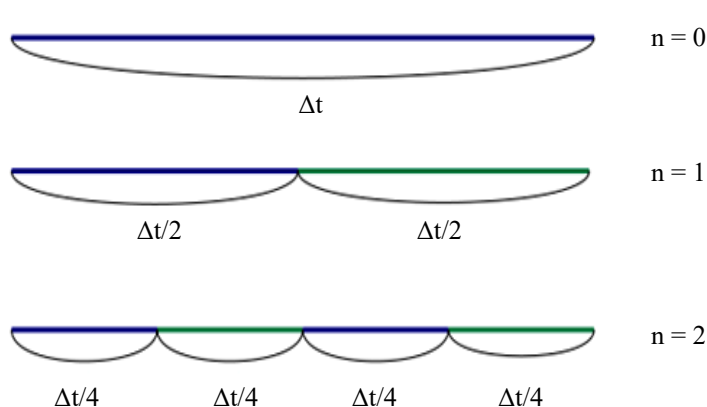


Рис. 4. Схема алгоритма дробления временного шага в подцикле

Результаты исследования. Для валидации и верификации разработанного решателя используются две 2D задачи: 1) задача о разрушении радиальной плотины, для которой хорошо известно аналитическое решение, 2) задача о распаде двух разных по высоте столбов жидкости.

Двумерная задача о разрушении радиальной плотины (Circular Dam-Break). Задача о распаде столба жидкости или о прорыве круглой дамбы (Circular Dam-Break) является широко распространённой при валидации и верификации новых решателей [17–20]. Рассматривается 2D плоскость размером 40×40 м, в центре которой находится столб жидкости высотой $h = 2,5$ м и с радиусом $R = 2,5$ м, высота жидкости в остальной области составляет $h_0 = 0,5$ м (рис. 5). Расчётная область разбивается на 40 000 однородных ячеек, то есть по 200 в каждом направлении. Шаг по времени выбирается равным $\Delta t = 10^{-4}$ с, расчёт проводился до времени $t = 4,7$ с.

Визуализация на рис. 6 показывает распад столба жидкости. В начальный момент времени убирается стенка и наблюдается движение воды во всех направлениях. Затем, в то время как круговая ударная волна распространяется наружу, внутрь исходного цилиндра движется волна разрежения до тех пор, пока она полностью не сходится в центре расчётной области, где она отражается, что вызывает градиент высоты, а как следствие и вторичную ударную волну. На рис. 7 приведены результаты численных экспериментов в сравнении с аналитическим решением из [19] в момент времени $t = 4,7$ с. Показана (рис. 7 а) зависимость решения от параметра настройки алгоритма α . Оптимальным значением является $\alpha = 0,2$. Сходимость решения по сетке показана на рис. 7 б. Характерное число Куранта равно 0,2.

Пример работы алгоритма адаптивного измельчения сетки можно видеть на рис. 8. Здесь в зависимости от выбранного критерия адаптации (в нашем случае это градиент высоты столба жидкости) выполняется дробление сетки по уровням (в нашем случае $n_{\text{amr}} = 4$, где n_{am} — максимальный уровень в текущем расчёте), что значительно ускоряет расчёт. Детальное исследование приведено в разделе об исследовании производительности решателя SWqgdAMR.

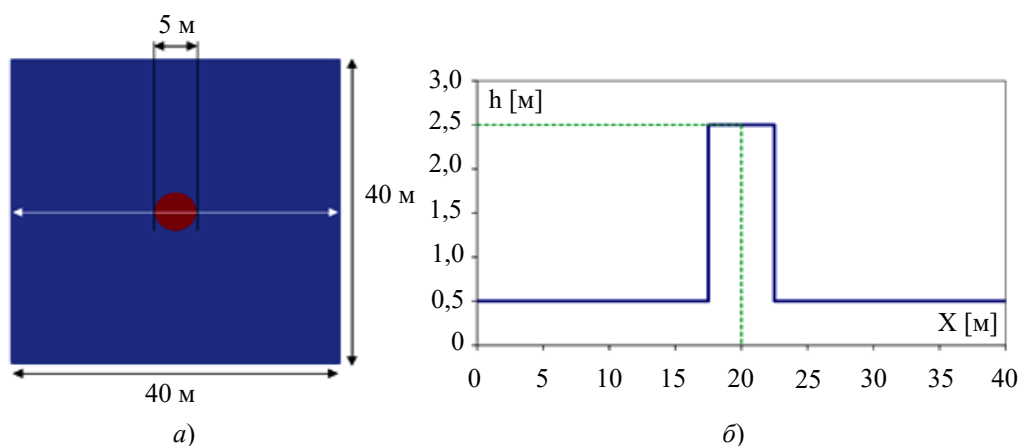


Рис. 5. Начальные условия задачи о разрушении радиальной плотины: а — геометрия расчётной области и начальное распределение; б — высота столба жидкости вдоль белой линии

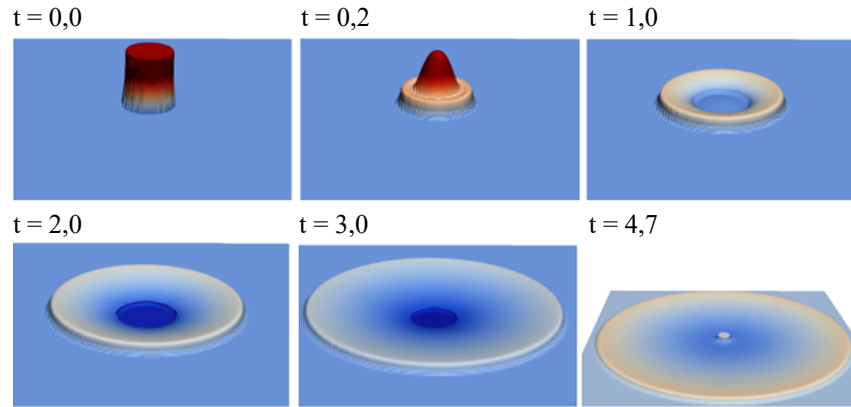


Рис. 6. Визуализация распада столба жидкости со временем $\alpha = 0,2$, $\Delta t = 10^{-4}$ с

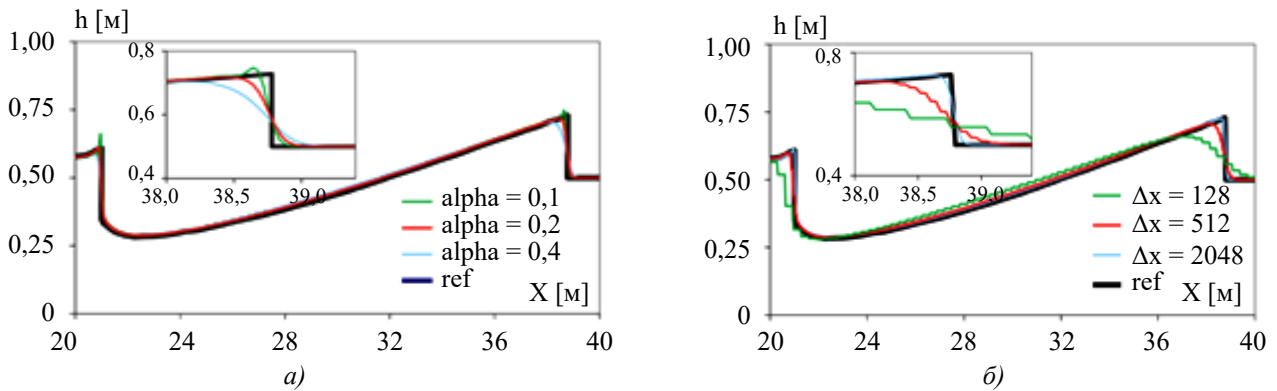


Рис. 7. Распределение высоты столба жидкости с шагом по времени $\Delta t = 10^{-4}$ с в момент времени $t = 4,7$ с:
 а — зависимость от параметра α на постоянной сетке $\Delta x = 1024$;
 б — сходимость по сетке при постоянном $\alpha = 0,2$

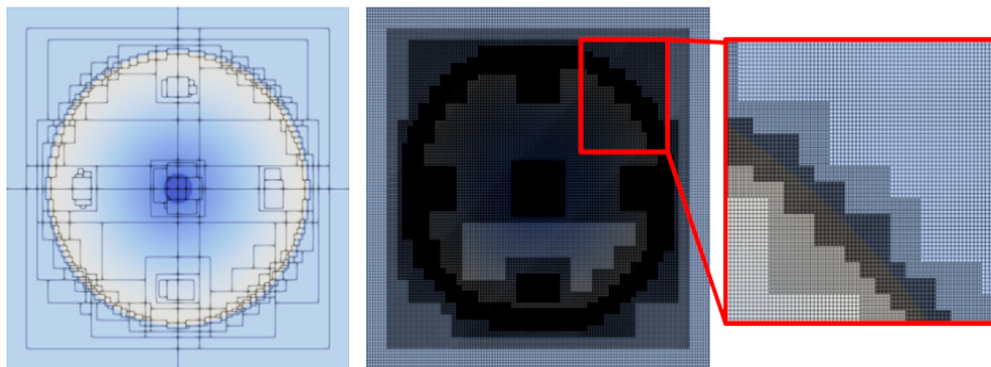


Рис. 8. Визуализация работы алгоритма адаптивного измельчения сетки при $\alpha = 0,2$ в момент времени $t = 3$ с.
 На первом рисунке изображено разбиение на блоки, на втором — адаптивная сетка

Распад двух разных по высоте столбов жидкости. Как и предыдущий тест, задача о распаде двух разных по высоте столбов жидкости позволяет проверить возможность решателя воспроизводить сложные структуры течения. Рассматривается 2D плоскость размером 2000×2000 м, в точке $(875,0)$ располагается первый столб воды радиуса $R_1 = 125$ м и высотой $h_1 = 15$ м, в точке с координатами $(1375,0)$ располагается второй столб воды $R_2 = 125$ м, $h_2 = 20$ м, уровень воды в остальной области равен $h_1 = 10$ м (рис. 9). Расчётная область разбивается на 160 000 однородных ячеек, то есть по 400 в каждом направлении. Шаг по времени выбирается равным $\Delta t = 10^{-4}$ с, расчёт заканчивался в момент времени $t = 30$ с.

Визуализация на рис. 10 и 11 показывает распад и дальнейшее взаимодействие двух столбов жидкости. В начальный момент времени убираются стенки и наблюдается движение воды от каждого столба во всех направлениях. Затем две ударные волны сталкиваются друг с другом и происходит сильная деформация фронта двух волн.

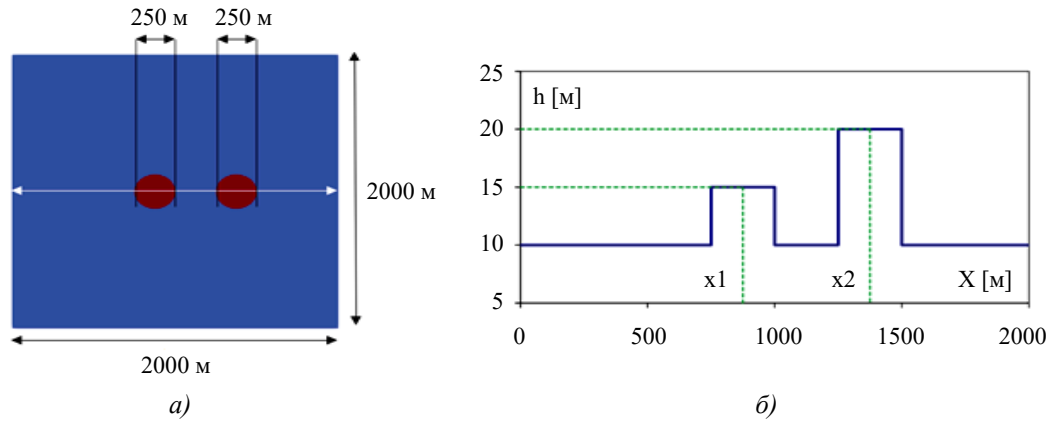


Рис. 9. Начальные условия задачи о распаде двух разных по высоте столбов жидкости:
 а — геометрия расчётной области;
 б — высота столба жидкости вдоль белой линии, $x1 = 875$ м, $x2 = 1375$ м

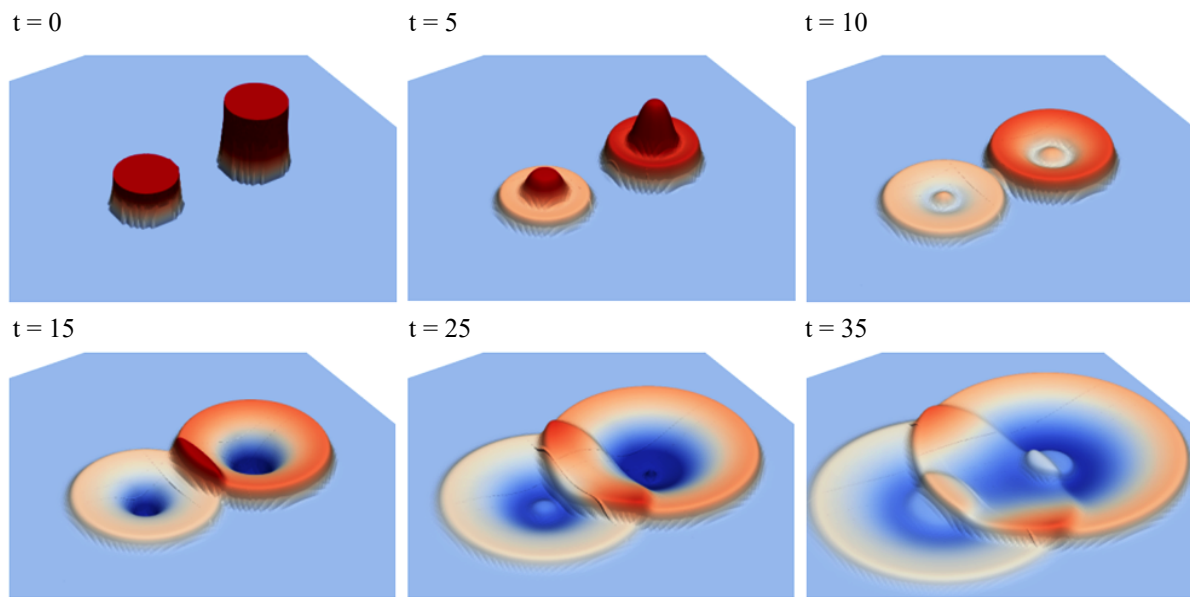


Рис. 10. Визуализация распада двух столбов жидкости со временем $\alpha = 0,2$, $\Delta t = 10^{-4}$ с.
 Время на рисунке в секундах

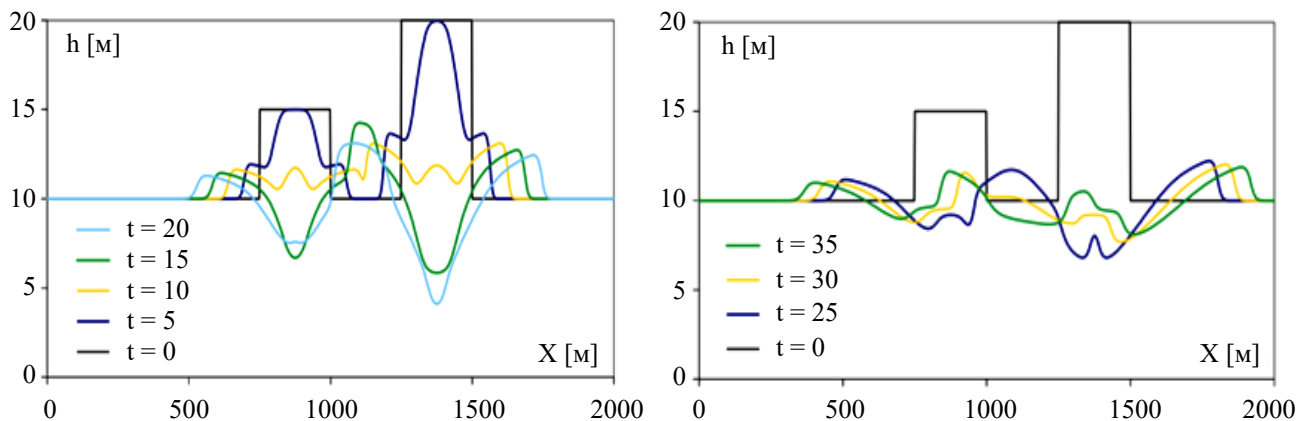


Рис. 11. График распада двух столбов жидкости со временем в центральном сечении.
 Время на рисунке в секундах, $\Delta x = 1024$, $\alpha = 0,2$, $\Delta t = 10^{-4}$ с

Производительность решателя SWqgdAMR. Одним из важных критериев при разработке нового решателя является оценка его производительности и эффективности распараллеливания. Для этого была использована задача о распаде двух разных по высоте столбов жидкости. Было взято 1 048 576 ячеек расчётной сетки, шаг по времени

$\Delta t = 10^{-4}$ с, расчёт завершался при $t = 0,1$ с. Для оценки производительности решателя использовался 1 физический процессор Intel(R) Core(TM) i7-9700 CPU @ 3.00GHz с 8 ядрами, результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1

Оценка производительности решателя SWqgdAMR

Количество ядер	Количество ячеек	Время расчёта t , с	Эффективность, %
1	1 048 576	71	—
2	524 288	40	89
4	262 144	27	66

На том же процессоре с использованием 2 ядер было исследовано ускорение вычислений за счёт использования технологии адаптивного измельчения сетки. Данные представлены в таблице 2. Количество расчётных ячеек при $n_{\text{амр}} = 0$ равно 4 194 304, базовая сетка при $n_{\text{амр}} = 1$ равна 1 048 576, при $n_{\text{амр}} = 2$ равно 262 144, при $n_{\text{амр}} = 4$ базовая расчётная сетка 65 536, при этом во всех случаях разрешение течения остаётся постоянным, качество может отличаться в зависимости от критерия адаптации (пример работы алгоритма измельчения демонстрирует рис. 8). В наших расчётах в качестве критерия адаптации сетки был выбран градиент высоты столба жидкости.

Таблица 2

Время вычисления в секундах в зависимости от уровней адаптации сетки

Количество ядер	Количество ячеек	$n_{\text{амр}} = 0$	$n_{\text{амр}} = 1$	$n_{\text{амр}} = 2$	$n_{\text{амр}} = 4$
2	4 194 304	2288	359	132	41

Таким образом, использование технологии адаптивного измельчения сетки позволяет значительно ускорять вычисления. В нашем случае достигается ускорение до 56 раз. В работе [21] показано, что на одинаковых стационарных сетках AMReX быстрее OpenFOAM в 4 раза, таким образом с использованием измельчения сетки можно добиться выигрыша в скорости до 232 раз.

Обсуждение и заключения. В работе детально описан и протестирован решатель AMReX уравнений мелкой воды SWqgdAMR с адаптивным измельчением сеток. Для валидации SWqgdAMR использовались две двумерные задачи: о прорыве цилиндрической плотины и о прорыве двух цилиндрических плотин разной высоты. Представленный решатель показал высокую эффективность, а использование технологии адаптивного измельчения сетки позволило ускорить расчёт в 56 раз по сравнению с расчётом на стационарной сетке.

Решатель SWqgdAMR написан в рамках работы по расширению применимости регуляризованных уравнений в задачах, требующих больших вычислительных мощностей и адаптивных сеток. SWqgdAMR является первым решателем на базе КГД алгоритма в программном комплексе AMReX. Реализация и валидация SWqgdAMR является основным шагом на пути дальнейшего расширения комплекса КГД программ. Следующий этап работ включает в себя добавление в AMReX квазигазодинамических уравнений для расчёта задач газодинамики.

В данной реализации КГД алгоритма не тестировались перспективные возможности применения распараллеливания вычислений на графические ядра. Также стоит отметить, что в алгоритм может быть включена батиметрия дна, внешние силы (сила ветра, трение о дно, силы Кориолиса) и учет подвижности береговой линии при осушении-наводнении, как это уже было сделано в рамках индивидуальных кодов для РУМБ.

Список литературы

1. TheLinuxFoundation. Linux Foundation Announces Intent to Form the High Performance Software Foundation URL: <https://www.linuxfoundation.org/press/linux-foundation-announces-intent-to-form-high-performance-software-foundation-hpsf> (дата обращения: 16.04.2024).
2. Epikhin A., But I. Numerical Simulation of Supersonic Jet Noise Using Open Source Software. *International Conference on Computational Science*. Springer. 2023. P. 292–302.
3. Kraposhin M.V. et al. Development of a new OpenFOAM solver using regularized gas dynamic equations. *Computers & Fluids*. 2018;166:163–175.
4. Kraposhin M.V., Ryazanov D.A., Elizarova T.G. Numerical algorithm based on regularized equations for incompressible flow modeling and its implementation in OpenFOAM. *Computer Physics Communications*. 2022;271: 108216.
5. QGDsolver. URL: <https://github.com/unicfdlab/QGDsolver> (дата обращения: 16.04.2024).
6. Elizarova T.G. *Quasi-gas-dynamic Equations*. Springer. 2009.
7. Елизарова Т.Г. *Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений*. Москва: Научный мир; 2007. 350 с.

8. Четверушкин Б.Н. *Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений*. Москва: МАКС Пресс; 2004. 328 с.
9. Шеретов Ю.В. *Регуляризованные уравнения гидродинамики*. Тверь: Тверской государственный университет; 2016. 222 с.
10. Шеретов Ю.В. *Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении*. Москва; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика; 2009. 400 с.
11. Bulatov O., Elizarova T.G. Regularized shallow water equations and an efficient method for numerical simulation of shallow water flows. *Computational mathematics and mathematical physics*. 2011;51:160–173.
12. Elizarova T.G., Ivanov A.V. Regularized equations for numerical simulation of flows in the two-layer shallow water approximation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2018;58:714–734.
13. Saburin D.S., Elizarova T.G. Modelling the Azov Sea circulation and extreme surges in 2013–2014 using the regularized shallow water equations. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2018;33(3):173–185.
14. Булатов О.В., Елизарова Т.Г. Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2011;51(1):170–184.
15. Елизарова Т.Г., Иванов А.В. Регуляризованные уравнения для численного моделирования течений в приближении двухслойной мелкой воды. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2018;58(5):741–761.
16. Иванов А.В. О реализации модели мелкой воды на базе квазигазодинамического подхода в открытом программном комплексе OpenFOAM. *Препринты Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН*. 2023;28:27.
17. Delis A., Nikolos I. A novel multidimensional solution reconstruction and edge-based limiting procedure for unstructured cell-centered finite volumes with application to shallow water dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2013;71(5):584–633.
18. Delis A.I., Katsaounis T. Numerical solution of the two-dimensional shallow water equations by the application of relaxation methods. *Applied Mathematical Modelling*. 2005;29(8):754–783.
19. Ginting B.M., Mundani R.-P. Comparison of shallow water solvers: Applications for dam-break and tsunami cases with reordering strategy for efficient vectorization on modern hardware. *Water*. 2019;11(4):639.
20. Soares-Fraão S., Zech Y. Experimental study of dam-break flow against an isolated obstacle. *Journal of Hydraulic Research*. 2007;45(1):27–36.
21. Britov A. et al. *Numerical Simulation of Propeller Hydrodynamics Using the Open Source Software*. *International Conference on Computational Science*. Springer. 2023. P. 279–291.

References

1. TheLinuxFoundation. Linux Foundation Announces Intent to Form the High Performance Software Foundation. URL: <https://www.linuxfoundation.org/press/linux-foundation-announces-intent-to-form-high-performance-software-foundation-hpsf> (accessed: 16.04.2024).
2. Epikhin A., But I. Numerical Simulation of Supersonic Jet Noise Using Open Source Software. *International Conference on Computational Science*. Springer. 2023. P. 292–302.
3. Kraposhin M.V. et al. Development of a new OpenFOAM solver using regularized gas dynamic equations. *Computers & Fluids*. 2018;166:163–175.
4. Kraposhin M.V., Ryazanov D.A., Elizarova T.G. Numerical algorithm based on regularized equations for incompressible flow modeling and its implementation in OpenFOAM. *Computer Physics Communications*. 2022;271:108216.
5. QGDsolver. URL: <https://github.com/unicfdlab/QGDsolver> (accessed: 16.04.2024).
6. Elizarova T.G. *Quasi-gas-dynamic Equations*. Springer. 2009.
7. Elizarova T.G. *Quasi-gas-dynamic Equations and Methods for Calculating Viscous Flows*. Moscow: Nauchnyi Mir; 2007. 350 p. (in Russ.).
8. Chetverushkin B.N. *Kinetic Schemes and Quasi-gas-dynamic System of Equations*. Moscow: MAKSS Press; 2004. 328 p. (in Russ.).
9. Sheretov Yu.V. *Regularized Equations of Hydrodynamics*. Tver: Tver State University; 2016. 222 p. (in Russ.).
10. Sheretov Yu.V. *Dynamics of Continua under Space-Time Averaging*. Moscow; Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics; 2009. 400 p. (in Russ.).
11. Bulatov O., Elizarova T.G. Regularized shallow water equations and an efficient method for numerical simulation of shallow water flows. *Computational mathematics and mathematical physics*. 2011;51:160–173.
12. Elizarova T.G., Ivanov A.V. Regularized equations for numerical simulation of flows in the two-layer shallow water approximation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2018;58:714–734.

13. Saburin D.S., Elizarova T.G. Modelling the Azov Sea circulation and extreme surges in 2013–2014 using the regularized shallow water equations. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2018;33(3):173–185.
14. Bulatov O.V., Elizarova T.G. Regularized Shallow Water Equations and an Efficient Method for Numerical Simulation of Flows in Shallow Water Bodies. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2011;51(1):170–184. (in Russ.).
15. Elizarova T.G., Ivanov A.V. Regularized Equations for Numerical Simulation of Flows in the Two-Layer Shallow Water Approximation. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2018;58(5):741–761. (in Russ.).
16. Ivanov A.V. On the Implementation of the Shallow Water Model Based on the Quasi-gas-dynamic Approach in the OpenFOAM Open Source Software. *Preprints of the Institute of Applied Mathematics named after M.V. Keldysh RAS*. 2023;28:27. (in Russ.).
17. Delis A., Nikolos I. A novel multidimensional solution reconstruction and edge-based limiting procedure for unstructured cell-centered finite volumes with application to shallow water dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2013;71(5):584–633.
18. Delis A.I., Katsaounis T. Numerical solution of the two-dimensional shallow water equations by the application of relaxation methods. *Applied Mathematical Modelling*. 2005;29(8):754–783.
19. Ginting B.M., Mundani R.-P. Comparison of shallow water solvers: Applications for dam-break and tsunami cases with reordering strategy for efficient vectorization on modern hardware. *Water*. 2019;11(4):639.
20. Soares-Fraza S., Zech Y. Experimental study of dam-break flow against an isolated obstacle. *Journal of Hydraulic Research*. 2007;45(1):27–36.
21. Britov A. et al. Numerical Simulation of Propeller Hydrodynamics Using the Open Source Software. *International Conference on Computational Science*. Springer. 2023. P. 279–291.

Поступила в редакцию 20.05.2024

Поступила после рецензирования 03.06.2024

Принята к публикации 04.06.2024

Об авторах:

Бут Иван Игоревич, инженер-исследователь лаборатории цифрового моделирования технических систем, Институт системного программирования им. В.П. Иванникова РАН (РФ, 109004, Москва, ул. Александра Солженицына, 25); младший научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (РФ, 125047, Москва, Миусская пл., 4), [ORCID, ivan.but@ispras.ru](https://orcid.org/ivan.but@ispras.ru)

Кирюшина Мария Александровна, научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (РФ, 125047, Москва, Миусская пл., 4); ИСП им. В.П. Иванникова РАН (РФ, 109004, Москва, ул. Александра Солженицына, 25), кандидат физико-математических наук, [ORCID, ResearcherID, m_ist@mail.ru](https://orcid.org/ResearcherID, m_ist@mail.ru)

Елистратов Степан Алексеевич, младший научный сотрудник, лаборатория геофизической гидродинамики, Институт океанологии имени П.П. Ширшова РАН (РФ, 117218, Москва, Нахимовский пр., 65), стажер-исследователь, лаборатория цифрового моделирования технических систем, Институт системного программирования им. В.П. Иванникова РАН (РФ, 109004, Москва, ул. Александра Солженицына, 25); инженер-исследователь, отделение научно-исследовательской и проектной деятельности, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (РФ, 630090, Новосибирск, проспект Академика Коптюга, 4), [ORCID, sa.elist-ratov@yandex.ru](https://orcid.org/sa.elist-ratov@yandex.ru)

Елизарова Татьяна Геннадьевна, главный научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (125047, Москва, Миусская пл., 4), доктор физико-математических наук, профессор, [ORCID, ResearcherID, ScopusID, telizar@mail.ru](https://orcid.org/ResearcherID, ScopusID, telizar@mail.ru)

Тиняков Артём Дмитриевич, студент 5 курса кафедры проблем передачи информации и анализа данных, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (РФ, 141701, Долгопрудный, Институтский переулок, 9), [ORCID, tiniakov.ad@gmail.com](https://orcid.org/tiniakov.ad@gmail.com)

Заявленный вклад соавторов:

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Received 20.05.2024

Received 03.06.2024

Accepted 04.06.2024

About the Authors:

Ivan I. But, research engineer, Open-source Software Laboratory for Digital Modelling of Technical Systems, Ivannikov Institute for System Programming of the RAS (25, Aleksandr Solzhenitsyn st., Moscow, 109004, RF), Junior Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS (4, Miusskaya sq., Moscow, 125047, RF), [ORCID](#), ivan.but@ispras.ru

Maria A. Kiryushina, research associate of Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (KIAM RAS), Ivannikov Institute for System Programming of the Russian Academy of Sciences (ISP RAS) (25, Aleksandr Solzhenitsyn st., Moscow, 109004, RF), phd, [ORCID](#), [ResearcherID](#), m_ist@mail.ru

Stepan A. Elistratov, junior researcher, Shirshov Institute of oceanology of RAS (36, Nakhimovsky ave., Moscow, 117218, RF), research intern, Ivannikov Institute for system programming of RAS (25, Aleksandra Solzhenitsyna st., Moscow, 109004, RF), research engineer, Sobolev Institute of mathematics of Siberian branch of RAS (4, Akademika Koptiyuga ave., Novosibirsk, 630090, RF), [ORCID](#), sa.elist-ratov@yandex.ru

Tatiana G. Elizarova, chief researcher of Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (KIAM RAS) (4, Miusskaya sq., Moscow, 125047, RF), doctor of physico-mathematical sciences, professor, [ORCID](#), [ResearcherID](#), [ScopusID](#), telizar@mail.ru

Artem D. Tiniakov, 5th year student of the Department of Information Transmission and Data Analysis Problems, Moscow Institute of Physics and Technology (9, Institutskiy pereulok, Dolgoprudny, 141701, RF), [ORCID](#), tiniakov.ad@gmail.com

Contributions of the co-authors:

All authors have made an equivalent contribution to the preparation of the publication.

Conflict of interest statement

The authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ MATHEMATICAL MODELLING



УДК 519.6

Оригинальное эмпирическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-24-32>


Вероятностный анализ распределения потоков тепла в Северной Атлантике за 1979–2022 годы

К.П. Беляев¹ , А.А. Кулешов² , А.В. Новикова³, Н.П. Тучкова⁴ ¹Институт океанологии им. П.П. Ширшова Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация²Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация³Филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в Севастополе, г. Севастополь, Российская Федерация⁴Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация andrew_kuleshov@mail.ru

Аннотация

Введение. Изучение процессов теплообмена и распределения потоков тепла в океанах имеет важное значение для понимания климатических изменений на Земле. Северная Атлантика, являющаяся одним из ключевых компонентов глобальной климатической системы, играет существенную роль в регулировании климата наших широт. Одним из ключевых инструментов для анализа распределения тепла в океанах является вероятностный анализ. В настоящей работе методами математического моделирования проводится статистический анализ данных наблюдений тепловых потоков в Северной Атлантике.

Материалы и методы. Используемые методы включают в себя анализ случайных процессов, заданных стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) или уравнением Ито, аппроксимацию данных наблюдений и решение уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) для описания эволюции вероятностного распределения тепла в океане.

Результаты исследования. С помощью методов математического моделирования проведен вероятностный анализ распределения потоков тепла в Северной Атлантике за период с 1979 по 2022 годы. Результаты исследования позволили установить закономерности распределения потоков тепла в изучаемом регионе за рассматриваемый период времени.

Обсуждение и заключения. Полученные результаты могут быть полезными для дальнейшего изучения климатических процессов в Северной Атлантике, а также для разработки стратегий управления ресурсами и защиты окружающей среды.

Ключевые слова: случайный процесс, стохастическое дифференциальное уравнение, уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова, поток тепла

Финансирование. Исследование выполнено в рамках государственного задания, тема № FMWE-2024-0016.

Для цитирования. Беляев К.П., Кулешов А.А., Новикова А.В., Тучкова Н.П. Вероятностный анализ распределения потоков тепла в Северной Атлантике за 1979–2022 годы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):24–32. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-24-32>

Probabilistic Analysis of Heat Flux Distribution in the North Atlantic for 1979–2022

Konstantin P. Belyaev¹ , Andrey A. Kuleshov²  , Anastasiya V. Novikova³, Natalia P. Tuchkova⁴ 

¹Shirshov Institute of Oceanology of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

²Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

³Lomonosov Moscow State University Branch in Sevastopol, Sevastopol, Russian Federation

⁴Federal Research Center “Computer Sciences and Control” of Russian Academy of Sciences,

Moscow, Russian Federation

 andrew_kuleshov@mail.ru

Abstract

Introduction. The study of heat interaction processes and the distribution of heat fluxes in the oceans is important for understanding climate change on Earth. The North Atlantic, which is one of the key components of the global climate system, plays a significant role in regulating the climate of our latitudes. One of the key tools for analyzing heat distribution in the oceans is probabilistic analysis. In this work, using mathematical modelling methods, a statistical analysis of observational data on heat fluxes in the North Atlantic is carried out.

Materials and Methods. The used methods include the analysis of random processes specified by the stochastic differential equation (SDE) or the Ito equation, approximation of observational data, and solution of the Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) equation to describe the evolution of the probabilistic distribution of heat in the ocean.

Results. Using mathematical modelling methods, a probabilistic analysis of the distribution of heat fluxes in the North Atlantic for the period from 1979 to 2022 has been carried out. The results of the study made it possible to establish patterns of distribution of heat flux in the studied region over the period of time under consideration.

Discussion and Conclusions. The results may be useful for further study of climate processes in the North Atlantic, as well as for the development of resource management and environmental protection strategies.

Keywords: Random process, stochastic differential equation, Fokker-Planck-Kolmogorov equation, heat flow

Funding information. The research was carried out within the framework of a state assignment, topic No. FMWE-2024-0016.

For citation. Belyaev K.P., Kuleshov A.A., Novikova A.V., Tuchkova N.P. Probabilistic analysis of heat flux distribution in the North Atlantic for 1979–2022. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):24–32. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-24-32>

Введение. Изучение процессов теплообмена и распределения потоков тепла в океанах имеет важное значение для понимания климатических изменений на Земле. Северная Атлантика, являющаяся одним из ключевых компонентов глобальной климатической системы, играет существенную роль в регулировании климата наших широт. В последние десятилетия наблюдается усиление интереса к изучению изменений температурного режима этого региона и взаимодействия океана и атмосферы в связи с феноменом глобального потепления и его влиянием на климатические процессы в различных частях планеты.

Одним из ключевых инструментов для исследования распределения тепла в океанах является вероятностный анализ. Он позволяет количественно оценить вероятность различных сценариев теплового обмена и выявить тенденции в изменениях климата. В Северной Атлантике тепловой поток играет критическую роль в формировании климатических условий региона, поэтому проведение вероятностного анализа распределения потоков тепла за период с 1979 по 2022 годы позволит более глубоко понять динамику климатических процессов в этом ключевом регионе.

Работ в этом направлении достаточно много, однако каждое новое корректное и содержательное исследование представляет собой большой интерес с точки зрения используемых методов и результатов их применения к анализу конкретных геофизических феноменов. Отметим важные исследования последнего времени в этой области [1]. Анализ потоков тепла, их динамика и пространственное распределение в Северной Атлантике хорошо описаны, например, в работах [2, 3]. Статистический и достаточно подробный математический анализ потоков тепла выполнен ранее в [4].

В данной работе проведен статистический анализ данных наблюдений из архива ERA5 [5] и построены численные решения уравнений ФПК на основе статистически определенных коэффициентов СДУ (уравнения Ито) для межгодовой изменчивости в Северной Атлантике за 1979–2022 гг. Эти результаты являются новыми и оригинальными.

Была осуществлена выборка данных из архива ERA5 о распределении потоков тепла в Северной Атлантике за период с 1979 по 2022 годы. Далее были рассчитаны коэффициенты сноса и диффузии для межгодовой изменчивости потоков тепла, затем была проведена их аппроксимация тригонометрическими полиномами, и, наконец, было численно решено уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова с аппроксимированными коэффициентами сноса и диффузии при заданных начальных условиях на функцию распределения потоков. В заключении статьи приводится анализ результатов и дается их геофизическая интерпретация.

Материалы и методы

Математическая модель. Изменение потоков моделировалось с помощью стохастического дифференциального уравнения (уравнения Ито) [1, 6]:

$$dX = a(t, X)dt + b(t, X)dW, \quad (1)$$

где $X(t)$ — поток тепла в момент времени t ; $dX = X(t + dt) - X(t)$ — изменчивость (инкремент) потока тепла за время dt в фиксированной точке; $a(t, X)$, $b(t, X)$ — коэффициенты сноса и диффузии, зависящие от времени t и от значений процесса $X(t)$; dW — стандартное обозначение гауссова «белого шума» с нулевым средним и единичной дисперсией, не зависящего от процесса $X(t)$. В работе использовались данные по потокам тепла, заданные в узлах одноградусной сетки с временным разрешением 6 часов с 1 января 1998 года до 31 декабря 2022 года. Потоки явного и скрытого тепла, соответственно, рассчитывались по формулам:

$$Q_h = c_p \rho C_T (T_w - T_a) \mathbf{V}, \quad (2)$$

$$Q_e = L \rho C_e (Q_s - Q) \mathbf{V}. \quad (3)$$

В формулах (2) и (3) потоки тепла явно рассчитываются через следующие параметры на границе раздела океана и атмосферы: температура воды и воздуха T_w , T_a , модуль скорости ветра $\mathbf{V}$, удельная влажность приводного воздуха Q и максимальная для данной величины температуры поверхности океана насыщенная удельная влажность над поверхностью воды Q_s . В качестве коэффициентов пропорциональности в соотношениях (2) и (3) служат коэффициенты обмена теплом C_T (число Шмидта) и влагой C_e (число Дальтона). Также в формулах присутствуют удельная теплота испарения L , удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении c_p и его плотность ρ . В данном исследовании значения потоков Q_h , Q_e считались уже известными, дополнительного расчета по формулам (2) и (3) не требовалось.

В работе проводится моделирование процессов изменчивости потоков тепла в Северной Атлантике и расчеты коэффициентов сноса и диффузии на каждый момент времени по формулам (3). В настоящей работе приводятся только карты потока на середину каждого месяца.

Пусть условная вероятность

$$P(y|x) = P(X(t+dt) = y | X(t) = x),$$

если y, x дискретны, условная плотность вероятности (производная Радона-Никодима) $p(y|x) = p(X(t+dt) = y | x < X(t) = x + dx)$ и если процесс $X(t)$ рассматривается как непрерывный. Для определенности будем рассматривать процесс как непрерывный с условной плотностью вероятности $p(y|x)$. Чтобы отличать сам процесс $X(t)$ от его значений, последние будем обозначать маленькими буквами. Для определения коэффициентов $a(t, x)$, $b(t, x)$ используются следующие формулы [6]:

$$a(t, x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - x) p(y|x) dy, \quad (4)$$

$$b^2(t, x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - x)^2 p(y|x) dy. \quad (5)$$

Таким образом, для определения коэффициентов $a(t, x)$, $b(t, x)$ по формулам (4) и (5) необходимо выполнить алгоритм, описанный в [1]. Интервал значений $X(t)$ от $X_{\min}(t) = X_{\min}$ до $X_{\max}(t) = X_{\max}$ разбивается точками $X_i = X_{\min} + i * \frac{X_{\max} - X_{\min}}{L}$, $i = 0, \dots, L$ на L подинтервалов $[X_i, X_{i+1}]$ и фиксируются все точки области, где $X_i < X(t) = x < X_{i+1}$. Далее считается количество точек сетки, попавших в этот интервал. Пусть таких точек будет m (необходимо так выбрать интервалы, чтобы для любого $X_i < X(t) = x < X_{i+1}$ m было больше 0). Переходя на шаг $t + dt$ делаем аналогичное разбиение интервала значений $X(t)$ на подинтервалы $[Y_i, Y_{i+1}]$ и выбираем среди фиксированных на предыдущем шаге точек те и только те точки, для которых $Y_i < X(t + dt) = y < Y_{i+1}$ для любого y . Пусть таких точек будет l . Тогда $P(y|x) = l/m$. Далее по формулам (4) и (5) рассчитываются коэффициенты $a(t, x)$ и $b^2(t, x)$.

Параболическое уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова. Как было указано в предыдущем параграфе, изменчивость случайного процесса представляется в виде (1). Выражение (1) понимается в интегральном смысле, то есть

$$X(t + \Delta t) - X(t) = \int_t^{t+\Delta t} a(u, X) du + \int_t^{t+\Delta t} b(u, X) [W(u + du) - W(u)].$$

Коэффициенты $a(t, x)$ и $b^2(t, x)$ рассчитаны по формулам (4) и (5). Как следствие, можно записать уравнение для расчета вероятностей значений потока в заданный (климатический) момент времени в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial(a(t, x)p)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(b^2(t, x)p)}{\partial x^2}, \quad (6)$$

где $p(t, x)$ — искомая плотность вероятности в момент t значения потока x , а остальные обозначения приведены выше. Уравнение (6) (уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова) решается при граничных условиях Зоммерфельда и при заданном начальном распределении вероятности. Аналитически эта задача, вообще говоря, не решается, но численно ее решение не представляет особых трудностей. Однако для сильно осциллирующих коэффициентов численное решение этого уравнения приводит к значительным вычислительным ошибкам. Поэтому с целью уменьшения вычислительных ошибок имеет смысл сгладить сильно осциллирующие коэффициенты $a(t, x)$ и $b^2(t, x)$.

Метод наименьших квадратов для аппроксимации среднемесячных коэффициентов. Аппроксимация коэффициента $a(t, x)$ находится в виде тригонометрической функции

$$\hat{a}(t, x) = A(x) \sin(wt) + B(x) \cos(wt) + C(x). \quad (7)$$

Такая форма аппроксимирующей функции была выбрана потому, что исходные коэффициенты сноса и коэффициенты диффузии имеют ярко выраженный внутригодовой цикл, где частота колебаний $w = 2\pi/12$ (мес.⁻¹). Таким образом эта форма аппроксимации физически обоснована.

Параметры $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ были определяются последовательно методом наименьших квадратов. Сначала определяются параметры $C(x)$ как среднее значение выборки

$$\frac{1}{518} \sum_{t=1}^{518} a(t, x) - C(x) = 0, \quad (8)$$

а затем определяются $A(x)$ и $B(x)$. Этот алгоритм хорошо известен в практических приложениях и не нуждается в дополнительных обоснованиях. После того как все амплитуды определены по формуле (7), аппроксимация коэффициента $a(t, x)$ приводится к виду

$$\hat{a}(t, x) = A(x) \sin(wt + \varphi(x)) + C(x). \quad (9)$$

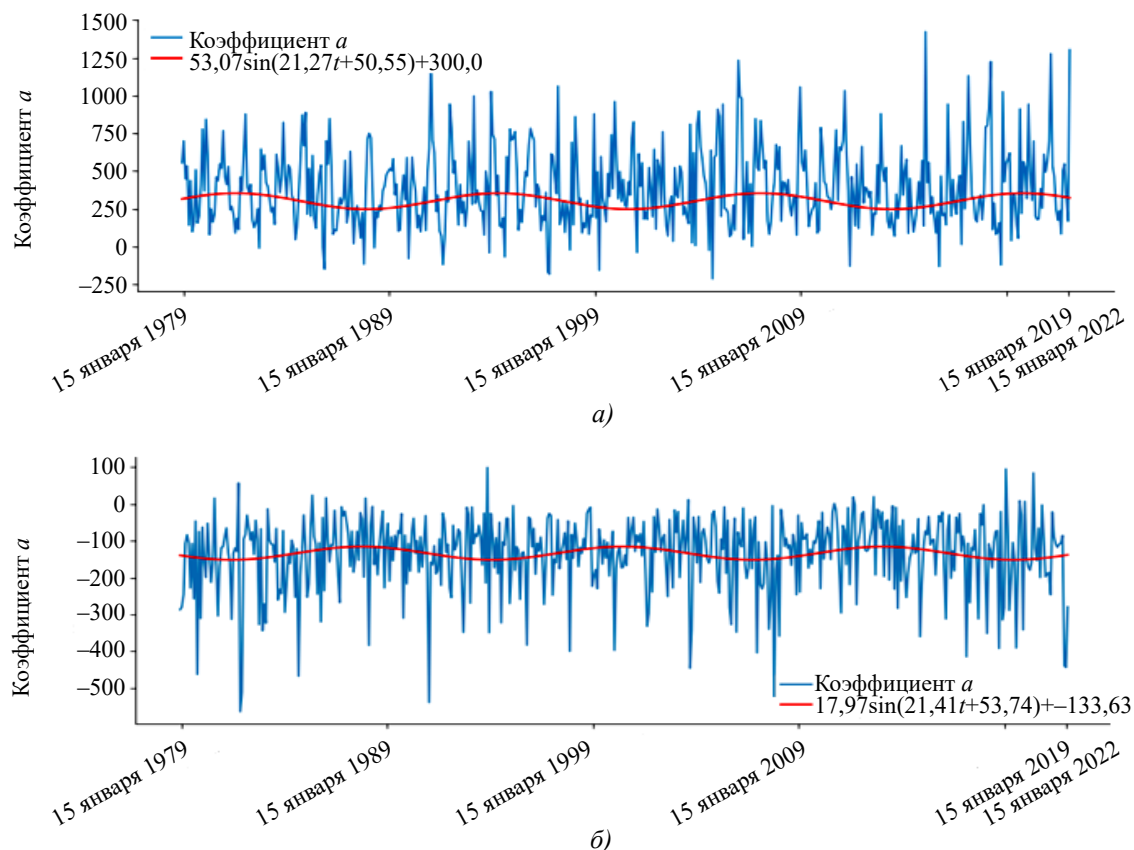
Та же процедура применена для аппроксимации коэффициента диффузии $b(t, X)$:

$$\hat{b}(t, x) = D(x) \sin(wt + \psi(x)) + F(x). \quad (10)$$

Результаты исследования

Анализ коэффициентов уравнения ФПК. Для уравнения (6) была реализована неявная разностная схема второго порядка аппроксимации [7] со сглаженными по формулам (9), (10) коэффициентами.

На рис. 1 показаны графики коэффициентов $a(t, X)$ и $\hat{a}(t, x)$ средние за месяц за период 40 лет. Красным показаны сглаженные кривые $\hat{a}(t, x)$, построенные по формулам (7), где соответствующие амплитуды и фазы найдены методом наименьших квадратов. На рис. 1 показаны изменения коэффициентов $a(t, X)$ и $\hat{a}(t, x)$ во времени при значениях потоков X , равных $X_{\max}$ (рис. 1 а), $X_{\min}$ (рис. 1 б) и среднему значению по области (рис. 1 в).



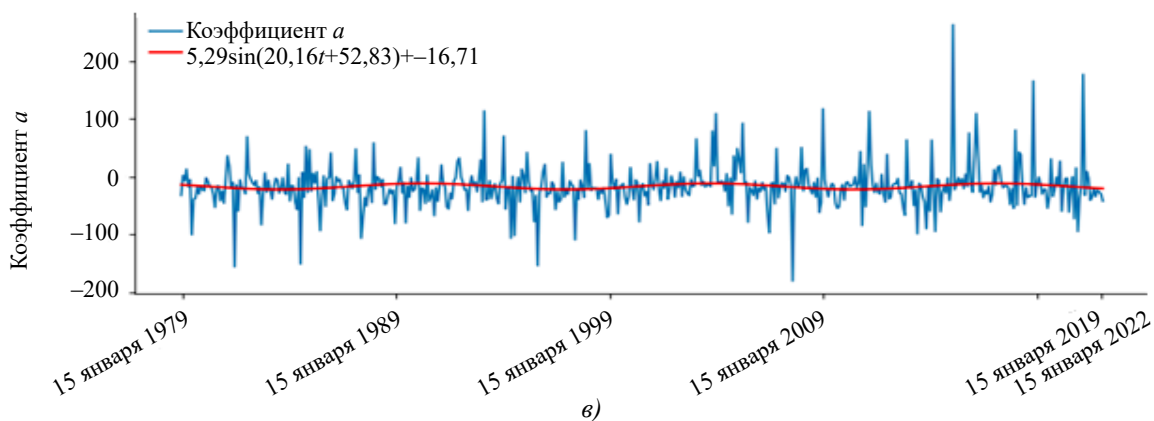
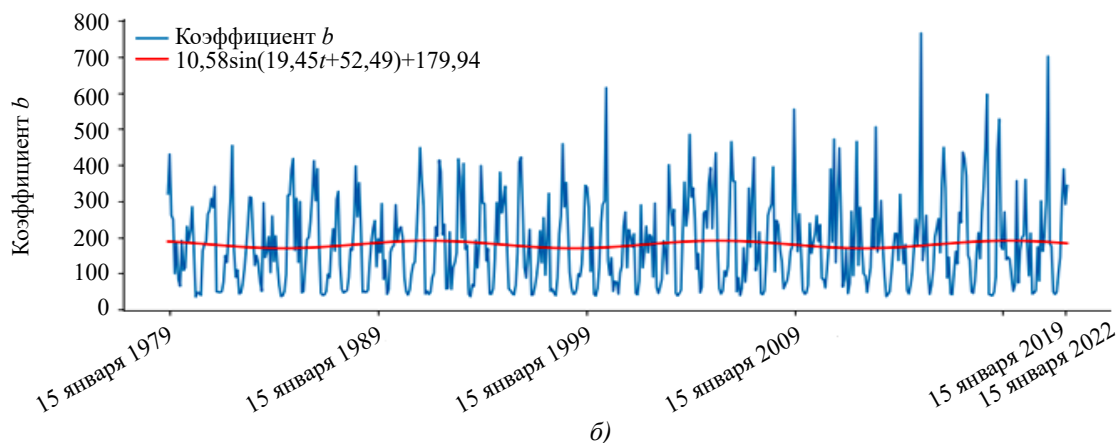
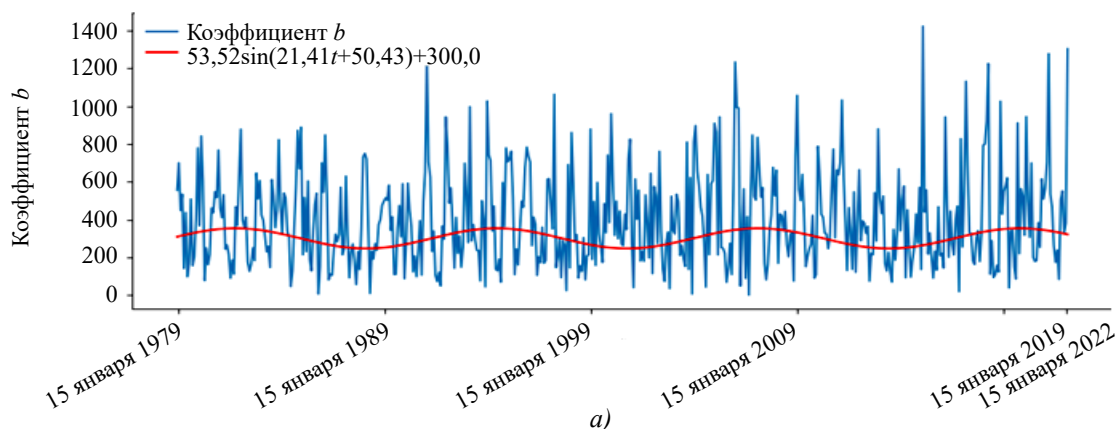


Рис. 1. Изменение во времени коэффициента сноса $a(t, X)$ (вт/м²/сут.) и сглаженного коэффициента $\hat{a}(t, x)$ (красные кривые) за 40 лет: a — при значениях потоков $X_{\max}$; $\bar{a}$ — при значениях потоков $X_{\min}$; $\hat{a}$ — при средних значениях потоков X

Графики имеют разумную физическую интерпретацию. На первом заметно преобладание «пиков» кривых вверх и достижение значения коэффициента сноса максимума. На втором графике «пики» смотрят вниз, коэффициент сноса достигает минимума. На третьем заметен разброс значений от 200 до –200, где сами коэффициенты в среднем около нуля.

Аналогично выглядят графики коэффициента диффузии $b(t, X)$ и $\hat{b}(t, x)$ (рис. 2).



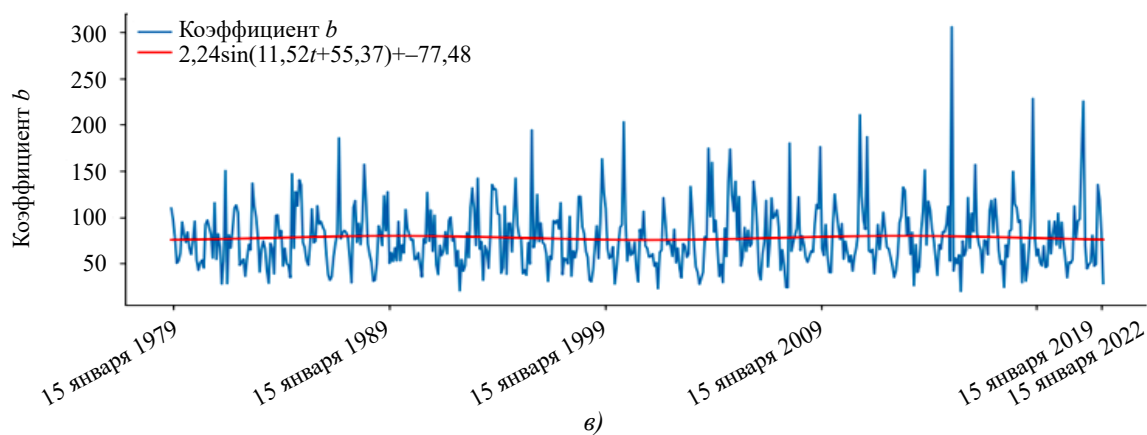
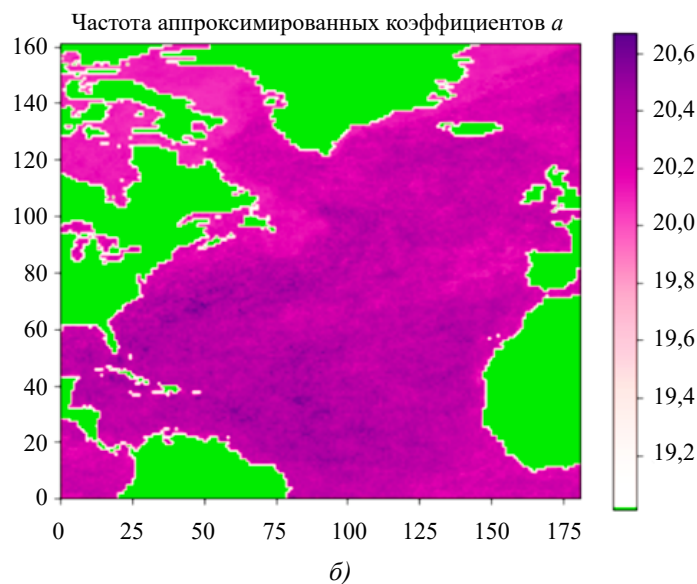
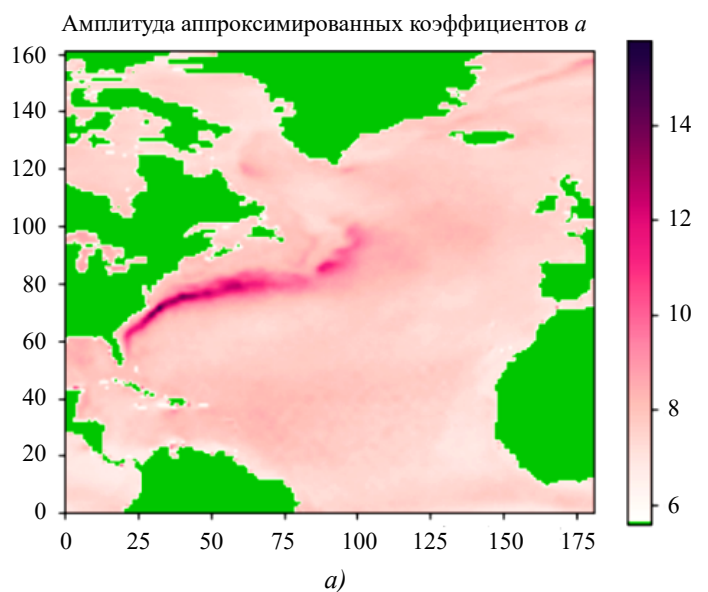


Рис. 2. Изменение во времени коэффициента сноса $b(t, x)$ ($\text{Вт}/\text{м}^2/\text{сут.}$) и сглаженного коэффициента $\hat{b}(t, x)$ (красные кривые) за 40 лет: a — при значениях потоков $X_{\max}$; $\bar{b}$ — при значениях потоков $X_{\min}$; ϵ — при средних значениях потоков X

По рассчитанным значениям амплитуды, фазы и сдвига в формуле (9) (как функций только пространственных переменных) были построены их карты. Для этого была использована готовая маска карты Северной Атлантики.

На картах хорошо виден Гольфстрим и Северо-Атлантическое течение (к северо-востоку от Исландии), где заметны локальные максимумы амплитуды (рис. 3 a), фазы (рис. 3 b) и сдвига (рис. 3 ϵ).

Аналогичный вид имеют карты для амплитуды и фазы и сдвига коэффициента диффузии $\hat{b}(t, x)$ (см. формулу (10)), которые приводить не будем.



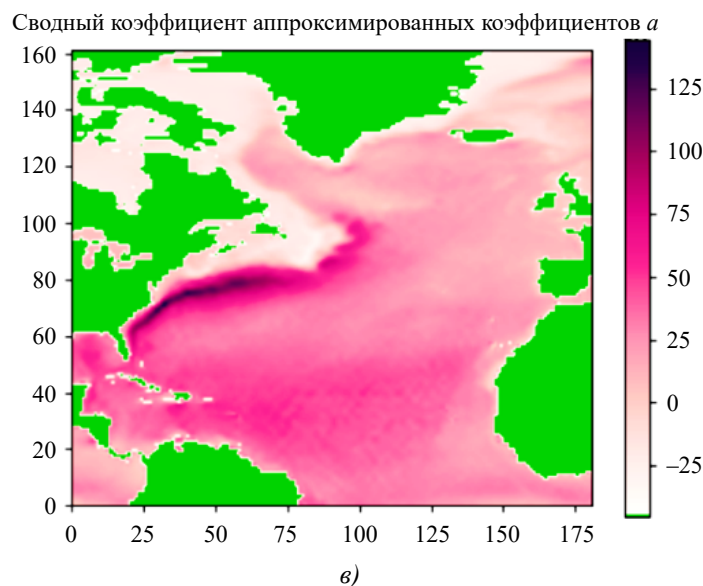


Рис. 3. Пространственное распределение для $\hat{a}(t, x)$: a — амплитуды; b — фазы; c — сдвига

Результаты численных расчетов уравнения ФПК и их анализ. На рис. 4 показаны результаты численного решения уравнения ФПК на 15 января 1979, 1989, 1999, 2009, 2019 и 2022 годов для среднего значения потоков на соответствующую дату. Начальное условие задавалось по формуле $p(0, x) = 1 / ((2\pi)^{1/2} \sigma) \exp(-x^2 / 2\sigma^2)$ (гауссова начальная плотность), где σ задавалось как разность между максимальным и минимальным значениями потока. Из этих рисунков видно, что графики плотности в целом разумны, хорошо отражают динамику коэффициентов уравнения, их максимальное значение осциллирует от 0,18 до 0,01 и их среднее значение тоже осциллирует от 0 (в начале и в конце расчета) до 50 (месяцев) на середину расчетов.

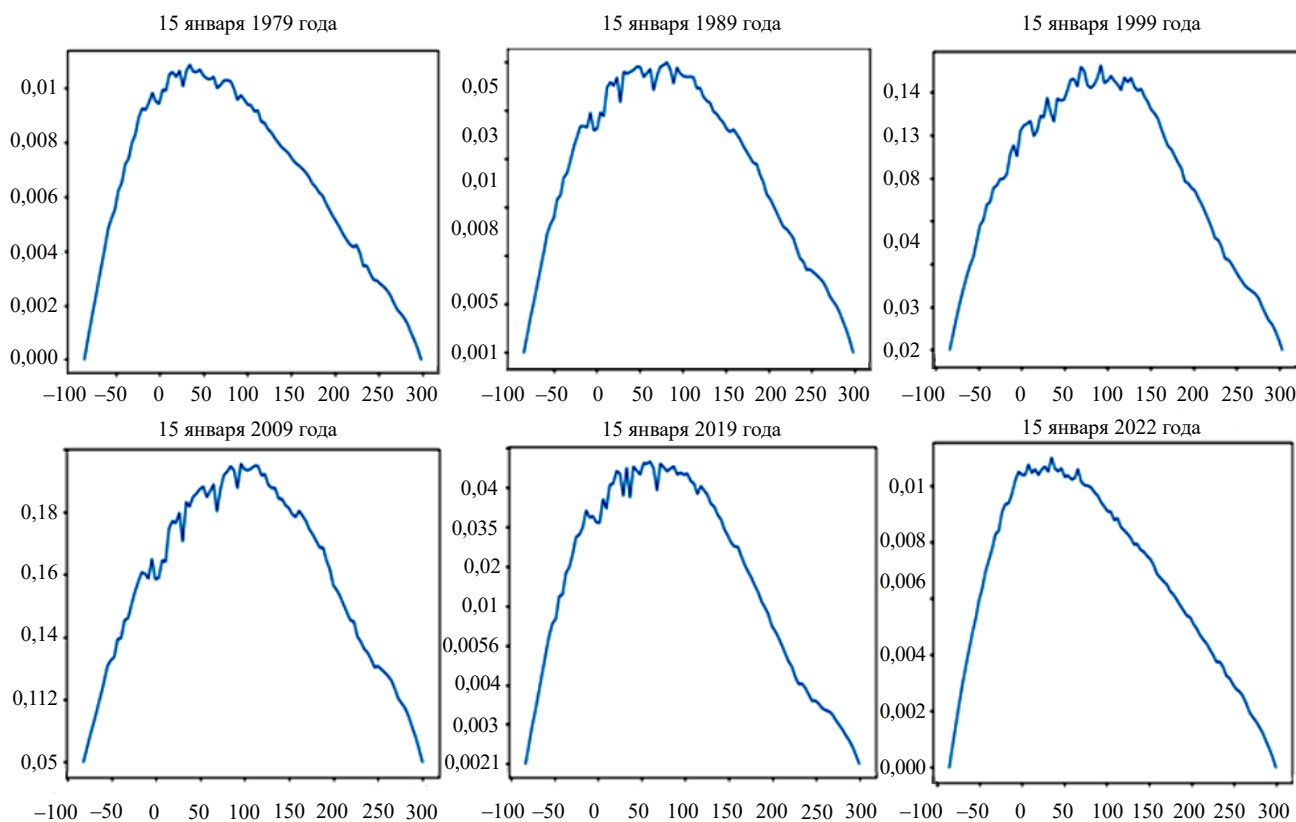


Рис. 4. Решение уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова с аппроксимированными коэффициентами

Графики не симметричны и распределение решения уравнения ФПК сильно отличается от нормального. Пульсации кривых на графиках в их верхней части объясняются грубым пространственным разрешением сетки (один градус — около 100 км), на которой находятся коэффициенты уравнения. Тем не менее эти распределения физически разумны и могут использоваться для приложений при анализе климатических данных и для климатических прогнозов.

Обсуждение и заключение. В работе с помощью методов математического моделирования проведен вероятностный анализ распределения потоков тепла в Северной Атлантике за период с 1979 по 2022 годы. Результаты исследования позволили установить количественные и качественные закономерности распределения потоков тепла в изучаемом регионе за рассматриваемый период времени. Полученные результаты могут быть полезными для дальнейшего изучения климатических процессов в Северной Атлантике, а также для разработки стратегий управления ресурсами и защиты окружающей среды.

Следует отметить, что проведенное исследование имеет свои ограничения, включая ограниченность доступных данных и предположения, лежащие в основе примененных моделей. Дальнейшие исследования в этой области могут включать расширение временного диапазона и улучшение методов анализа для получения более точных прогнозов и интерпретаций, например, исследование многомерных (взаимозависимых) величин и нахождение их совместных вероятностных распределений.

Список литературы

1. Gorshenin A., Osipova A., Belyaev K. Stochastic analysis of air-sea heat fluxes variability in the North Atlantic in 1979–2022 based on reanalysis data. *Computers & Geosciences*. 2023;181(10):105461. <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2023.105461>
2. Cayan D.R. Variability of latent and sensible heat fluxes estimated using bulk formulate. *Atmosphere-Ocean*. 1992;30(1):1–42. <https://doi.org/10.1080/07055900.1992.9649429>
3. Parfitt R., Czaja A., Kwon Y.-O. The impact of SST resolution change in the ERA Interim reanalysis on wintertime Gulf Stream frontal air-sea interaction. *Geophysical Research Letters*. 2017;44(7):3246–3254. <https://doi.org/10.1007/s00376-020-0072-0>
4. Belyaev K., Gorshenin A., Korolev V., Osipova A. Comparison of Statistical Approaches for Reconstructing Random Coefficients in the Problem of Stochastic Modelling of Air-Sea Heat Flux Increments. *Mathematics*. 2024;12(2):228. <https://doi.org/10.3390/math12022288>
5. Simmons A., Hersbach H., Munoz-Sabater J., Nicolas J., Vamborg F., Berrisford P., de Rosnay P., Willett K., Woollen J. Low frequency variability and trends in surface air temperature and humidity from ERA5 and other datasets. *ECMWF Technical Memoranda*. 2021;881. <https://doi.org/10.21957/ly5vbtbfd>
6. Гихман И.И., Скороход А.В. *Введение в теорию случайных процессов*. Москва: Наука, 1977. 465 с.
7. Самарский А.А. *Теория разностных схем*. Москва: Наука, 1977. 656 с.

References

1. Gorshenin A., Osipova A., Belyaev K. Stochastic analysis of air-sea heat fluxes variability in the North Atlantic in 1979–2022 based on reanalysis data. *Computers & Geosciences*. 2023;181(10):105461. <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2023.105461>
2. Cayan D.R. Variability of latent and sensible heat fluxes estimated using bulk formulate. *Atmosphere-Ocean*. 1992;30(1):1–42. <https://doi.org/10.1080/07055900.1992.9649429>
3. Parfitt R., Czaja A., Kwon Y.-O. The impact of SST resolution change in the ERA Interim reanalysis on wintertime Gulf Stream frontal air-sea interaction. *Geophysical Research Letters*. 2017;44(7):3246–3254. <https://doi.org/10.1007/s00376-020-0072-0>
4. Belyaev K., Gorshenin A., Korolev V., Osipova A. Comparison of Statistical Approaches for Reconstructing Random Coefficients in the Problem of Stochastic Modelling of Air-Sea Heat Flux Increments. *Mathematics*. 2024;12(2):228. <https://doi.org/10.3390/math12022288>
5. Simmons A., Hersbach H., Munoz-Sabater J., Nicolas J., Vamborg F., Berrisford P., de Rosnay P., Willett K., Woollen J. Low frequency variability and trends in surface air temperature and humidity from ERA5 and other datasets. *ECMWF Technical Memoranda*. 2021;881. <https://doi.org/10.21957/ly5vbtbfd>
8. Gikhman I.I., Skorokhod A.V. *Introduction to the Theory of Random Processes*. Dover Publications, 1996. 516 p. (In Russ.).
9. Samarsky A.A. *The Theory of Difference Schemes*. CRC Press, 2001. 786 p. (In Russ.). <https://doi.org/10.1201/9780203908518>

Поступила в редакцию 04.04.2024

Поступила после рецензирования 17.04.2024

Принята к публикации 22.04.2024

Об авторах:

Беляев Константин Павлович, ведущий научный сотрудник Института океанологии им. П.П. Ширшова Российской академии наук (РФ, 117997, Москва, Нахимовский просп., 36), [MathNet](https://orcid.org/0000-0001-9155-1234), [ScopusID](https://scopusid.org/ID), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9155-1234), kosbel55@gmail.com

Кулешов Андрей Александрович, главный научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук (РФ, 125047, Москва, Миусская пл., 4), [MathNet](#), [ScopusID](#), [ORCID](#), andrew_kuleshov@mail.ru

Новикова Анастасия Вячеславовна, студент Филиала Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в Севастополе (РФ, 299001, Севастополь, ул. Героев Севастополя, 7), novikovaav1@my.msu.ru

Тучкова Наталия Павловна, старший научный сотрудник Федерального исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук (РФ, 119333, Москва, ул. Вавилова, 40), [MathNet](#), [ScopusID](#), [ORCID](#), natalia_tuchkova@mail.ru

Заявленный вклад соавторов:

К.П. Беляев — постановка задачи, разработка методов исследования, анализ результатов.

А.А. Кулешов — постановка задачи, анализ результатов.

А.В. Новикова — проведение численных расчетов, визуализация результатов.

Н.П. Тучкова — подготовка геофизических данных.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Received 04.04.2024

Received 17.04.2024

Accepted 22.04.2024

About the Authors:

Konstantin P. Belyaev, Leading Researcher at the P.P. Shirshov Institute of Oceanology of the Russian Academy of Sciences (36, Nakhimovsky Prospekt, Moscow, 117997, RF), [MathNet](#), [ScopusID](#), [ORCID](#), kosbel55@gmail.com

Andrey A. Kuleshov, Chief Researcher at the M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences (4, Miusskaya Sq., Moscow, 125047, RF), [MathNet](#), [ScopusID](#), [ORCID](#), andrew_kuleshov@mail.ru

Anastasia V. Novikova, Student at the Sevastopol Branch of Moscow State University named after M.V. Lomonosov (7, Heroes of Sevastopol St., Sevastopol, 299001, RF), novikovaav1@my.msu.ru

Natalia P. Tuchkova, Senior Researcher at the Federal Research Center “Informatics and Management” of the Russian Academy of Sciences (40, Vavilova St., Moscow, 119333, RF), [MathNet](#), [ScopusID](#), [ORCID](#), natalia_tuchkova@mail.ru

Contributions of the co-authors:

P.B. Konstantin — problem statement, development of research methods, analysis of results.

A.A. Kuleshov — problem statement, analysis of results.

A.V. Novikova — numerical calculations, visualization of results.

N.P. Tuchkova — preparation of geophysical data.

Conflict of interest statement

The authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ MATHEMATICAL MODELLING



УДК 519.6

Оригинальное эмпирическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-33-44>


Математическое моделирование катастрофических сгонно-нагонных явлений Азовского моря с использованием данных дистанционного зондирования

Е.А. Проценко¹ , Н.Д. Панасенко^{1,2} , С.В. Проценко¹ ¹Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), г. Таганрог, Российская Федерация²Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация✉ eapros@rambler.ru

Аннотация

Введение. Работа посвящена математическому моделированию экстремальных колебаний уровня Азовского моря с использованием данных дистанционного зондирования. Цель исследования заключается в разработке и применении математической модели, которая позволяет более точно прогнозировать сгонно-нагонные явления, вызванные экстремальными ветровыми условиями. Актуальность работы обусловлена необходимостью улучшения прогнозов гидродинамических процессов в мелководных водоемах (таких, как Азовское море), где подобные явления могут иметь значительные экономические и экологические последствия. Цель данной работы — разработка и применение математической модели для прогнозирования экстремальных колебаний уровня Азовского моря, вызванных ветровыми условиями.

Материалы и методы. Исследование основывается на анализе данных дистанционного зондирования и наблюдений за скоростью и направлением ветра над Азовским морем. В качестве основного метода используется математическое моделирование, включающее решение системы уравнений волновой гидродинамики для мелководного водоема. Данные о ветровых условиях были собраны в период с 20 по 25 ноября 2019 года, когда наблюдались катастрофические колебания уровня моря. Модель учитывает компоненты скорости водного потока, плотность водной среды, гидродинамическое давление, ускорение свободного падения и коэффициенты турбулентного обмена.

Результаты исследования. Моделирование показало, что продолжительное действие восточного ветра со скоростью до 22 м/с привело к значительным сгонно-нагонным колебаниям уровня моря. Максимальные амплитуды колебаний были зафиксированы в центральной части Таганрогского залива, где направление и скорость ветра оставались практически неизменными в течение всего периода наблюдений. Данные с различных платформ, расположенных в разных частях Азовского моря, подтвердили наличие значительного снижения уровня воды на северо-востоке и повышения на юго-западе.

Обсуждение и заключения. Результаты исследования подтверждают, что использование математических моделей в сочетании с данными дистанционного зондирования позволяет более точно прогнозировать экстремальные колебания уровня моря. Это имеет важное значение для разработки мер по предупреждению и минимизации последствий сгонно-нагонных явлений в прибрежных районах. В дальнейшем необходимо совершенствовать модели, включая дополнительные факторы, такие как изменение климатических условий и антропогенное воздействие на экосистему Азовского моря.

Ключевые слова: математическое моделирование, колебания уровня моря, данные дистанционного зондирования, сгонно-нагонные явления, гидродинамика

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00210, <https://rscf.ru/project/23-21-00210/>

Для цитирования. Проценко Е.А., Панасенко Н.Д., Проценко С.В. Математическое моделирование катастрофических сгонно-нагонных явлений Азовского моря с использованием данных дистанционного зондирования. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):33–44. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-33-44>

Mathematical Modelling of Catastrophic Surge and Seiche Events in the Azov Sea Using Remote Sensing Data

Elena A. Protsenko¹  , Natalya D. Panasenko^{1,2} , Sofia V. Protsenko¹ 

¹Taganrog Institute named after A.P. Chekhov (branch) of RSUE, Taganrog, Russian Federation

²Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

 capros@rambler.ru

Abstract

Introduction. This work is devoted to the mathematical modelling of extreme sea level fluctuations in the Azov Sea using remote sensing data. The aim of the study is to develop and apply a mathematical model that allows more accurate prediction of surge and seiche events caused by extreme wind conditions. The relevance of the work is due to the need to improve the forecasts of hydrodynamic processes in shallow water bodies (such as the Azov Sea), where such phenomena can have significant economic and ecological consequences. The goal of this work is to develop and apply a mathematical model for predicting extreme sea level fluctuations in the Azov Sea caused by wind conditions.

Materials and Methods. The study is based on the analysis of remote sensing data and observations of wind speed and direction over the Azov Sea. The primary method used is mathematical modelling, which includes solving the system of shallow water hydrodynamics equations. Wind condition data were collected from November 20 to 25, 2019, during which catastrophic sea level fluctuations were observed. The model considers the components of water flow velocity, water density, hydrodynamic pressure, gravitational acceleration, and turbulence exchange coefficients.

Results. The modelling showed that prolonged easterly winds with speeds up to 22 m/s led to significant surge and seiche fluctuations in sea level. The maximum amplitudes of fluctuations were recorded in the central part of the Taganrog Bay, where the wind direction and speed remained almost constant throughout the observation period. Data from various platforms located in different parts of the Azov Sea confirmed a significant decrease in water level in the northeast and an increase in the southwest.

Discussion and Conclusions. The study results confirm that using mathematical models in combination with remote sensing data allows more accurate predictions of extreme sea level fluctuations. This is important for developing measures to prevent and mitigate the consequences of surge and seiche events in coastal areas. In the future, it is necessary to improve models by including additional factors such as climate change and anthropogenic impact on the Azov Sea ecosystem.

Keywords: mathematical modelling, sea level fluctuations, remote sensing data, surge and seiche events, hydrodynamics

Funding information. The study was supported by the Russian Science Foundation grant no. 23-21-00210, <https://rscf.ru/project/23-21-00210/>

For citation. Protsenko E.A., Panasenko N.D., Protsenko S.V. Mathematical modelling of catastrophic surge and seiche events in the Azov Sea using remote sensing data. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):33–44. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-33-44>

Введение. Азовское море, являясь мелководным водоемом, подвержено значительным колебаниям уровня воды под влиянием ветровых условий. Эти колебания могут иметь серьезные экономические и экологические последствия для прибрежных районов, включая затопления и разрушения инфраструктуры. Несмотря на важность понимания и прогнозирования таких явлений, существующие модели не всегда учитывают все необходимые факторы, что приводит к недостаточной точности прогнозов [1–5].

Цель данного исследования заключается в разработке и применении математической модели для прогнозирования экстремальных колебаний уровня Азовского моря, вызванных ветровыми условиями. Актуальность исследования обусловлена необходимостью создания точных и надежных инструментов для прогнозирования сгонно-нагонных явлений, что позволит разработать эффективные меры по предупреждению и минимизации их негативных последствий. С учетом увеличивающейся частоты экстремальных погодных явлений в связи с изменением климата задача разработки таких моделей становится особенно важной.

Катастрофические сгонно-нагонные явления Азовского моря представляют серьезную угрозу для прибрежных населённых пунктов и экологии региона. Для их прогнозирования и предупреждения необходимо использовать математическое моделирование. Для полноценной работы этих моделей нужны не только натурные данные, но и данные дистанционного зондирования (ДДЗ) Земли. В настоящей работе авторы рассматривают различные подходы к математическому моделированию сгонно-нагонных явлений Азовского моря на основе данных дистанционного зондирования.

Научная новизна работы заключается в использовании данных дистанционного зондирования в сочетании с усовершенствованными методами математического моделирования. Это позволяет более точно учитывать динамические изменения в водной среде и ветровых условиях, что способствует улучшению прогностической способности моделей. В работе представлены новые подходы к аппроксимации коэффициентов турбулентного обмена и организации вычислительного эксперимента, что значительно повышает точность и надежность получаемых результатов.

Материалы и методы

1. Объект исследования. В течение года над Азовским морем преобладают слабые ветры. Их повторяемость составляет 60–70 %, доля умеренных ветров — 20 %, сильных — около 10 %. Ветер со скоростью 20–24 м/с может отмечаться в любое время года, а со скоростью больше 24 м/с только в период с октября по апрель. Ветры со скоростью больше 14 м/с имеют преимущественно северо-восточное и восточное направление.

В период с 20 ноября 2019 г. по 25 ноября 2019 г. в акватории Азовского моря наблюдались катастрофические сгонно-нагонные колебания, которые были вызваны продолжительным действием восточного ветра. Анализ розы ветров, рассчитанной для центральной части Таганрогского залива с 19 по 25 ноября, показывает, что направление скорости ветра оставалось практически неизменным (рис. 1). Максимальная скорость ветра достигала 19–22 м/с, при том, что преобладающими для побережья и открытой части Азовского моря являются ветра со скоростью 4,5–5,5 м/с на побережье и 7,5 м/с в центральной части. По данным с 27 ноября 2019 г. наблюдалось постепенное уменьшение скорости ветра и, соответственно, постепенное уменьшение амплитуды сгонно-нагонных колебаний.

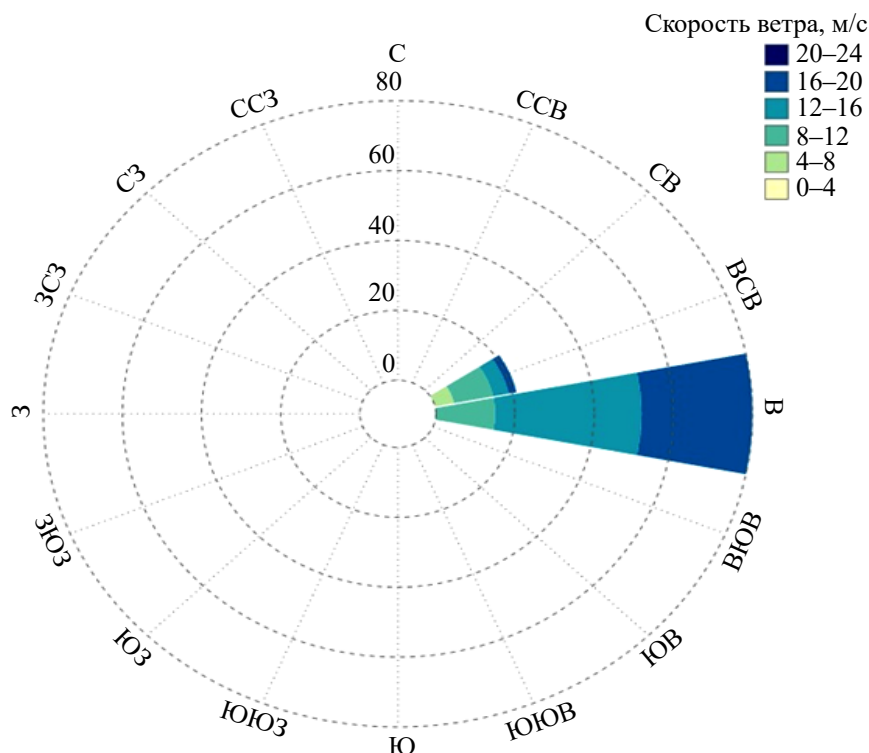


Рис. 1. Роза ветров в центральной части Азовского моря с 19 по 24 ноября 2019 г.



Рис. 2. Карта глубин Азовского моря с отмеченными ГМС Таганрог (1), Очаковская коса (2), Ейск-порт (3), Должанская (4), Мысовое (5)

Скорость ветра зависит прежде всего от барического градиента и характера подстилающей поверхности. Последний фактор обуславливает значительное увеличение средней скорости ветра над открытым морем по сравнению со средней скоростью ветра на побережье. Такое увеличение вызвано малым трением воздушного потока о водную поверхность, причем скорость ветра, зафиксированная на береговых станциях несколько ниже, чем на удаленных от берега.

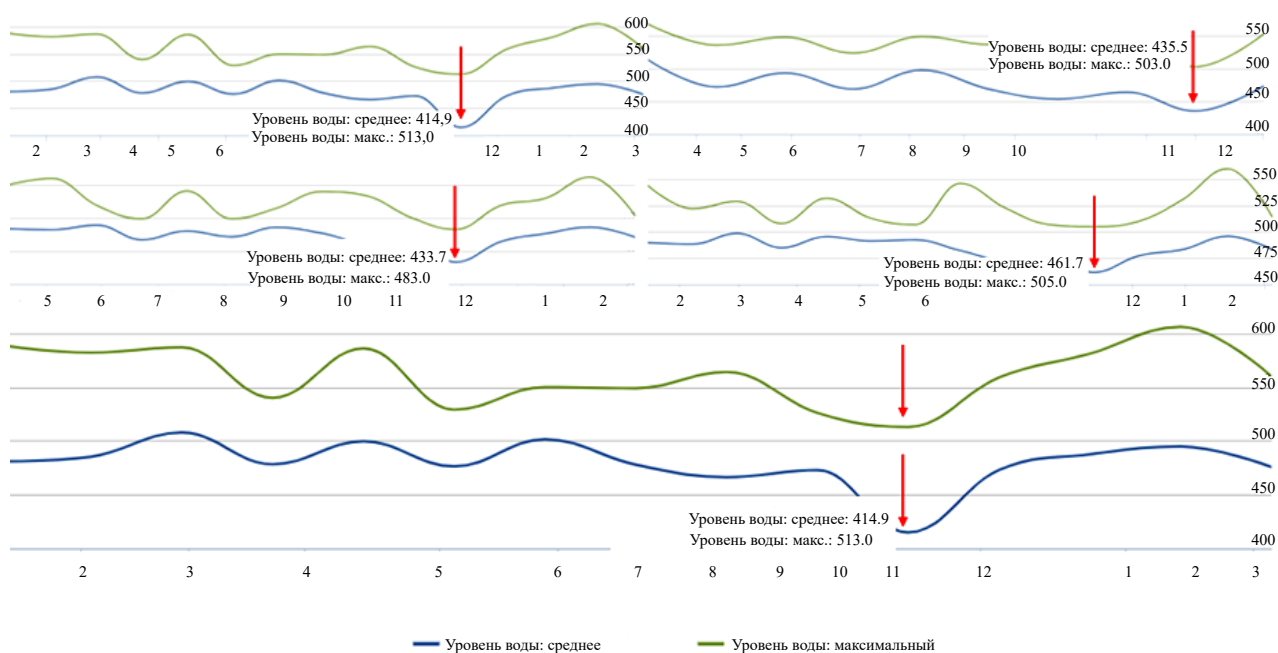


Рис. 3. Уровень моря на береговых ГМС Таганрог, Очаковская коса, Ейск-порт, Должанская в 2019 году

Прибрежный массив среднемесячных значений уровня моря содержит среднемесячные данные по уровню моря, измеренному по рейке, на береговых ГМС Азовского моря. Данные с четырёх платформ, расположенных в северо-восточной части моря (Таганрог, Очаковская коса, Ейск-порт, Должанская), демонстрируют значительное снижение уровня воды в ноябре 2019 года [6].

Данные с платформы Мысовая, расположенной на мысе Казантип в юго-западной части моря, демонстрируют диаметрально противоположную ситуацию — в ноябре наблюдался существенный подъем уровня воды.

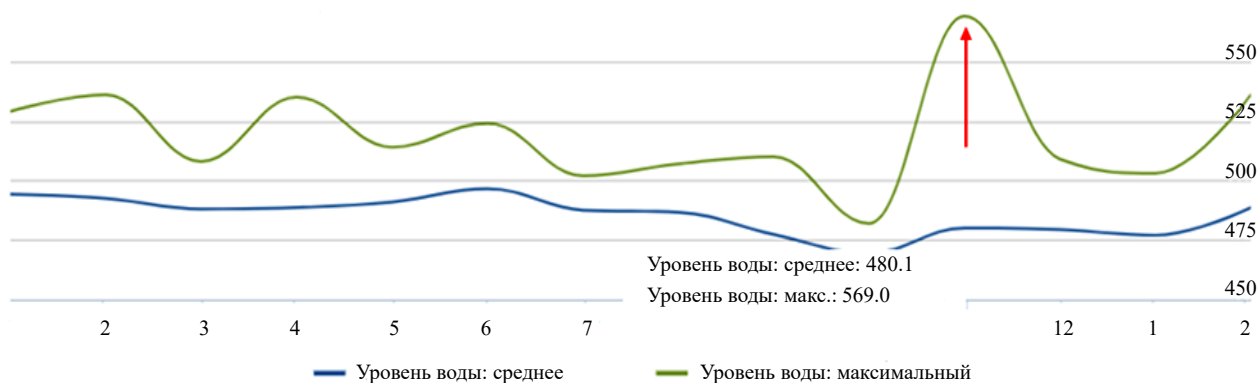


Рис. 4. Климатические данные по гидрометеоусловиям прибрежной зоны Азовского моря: уровень моря на береговых ГМС Мысовая в 2019 году

При этом данные естественно коррелируют со средней и максимальной скоростью ветра, полученной из прибрежного массива среднемесячных значений скорости ветра, которые достигают в ноябре 2019 года максимальных значений.

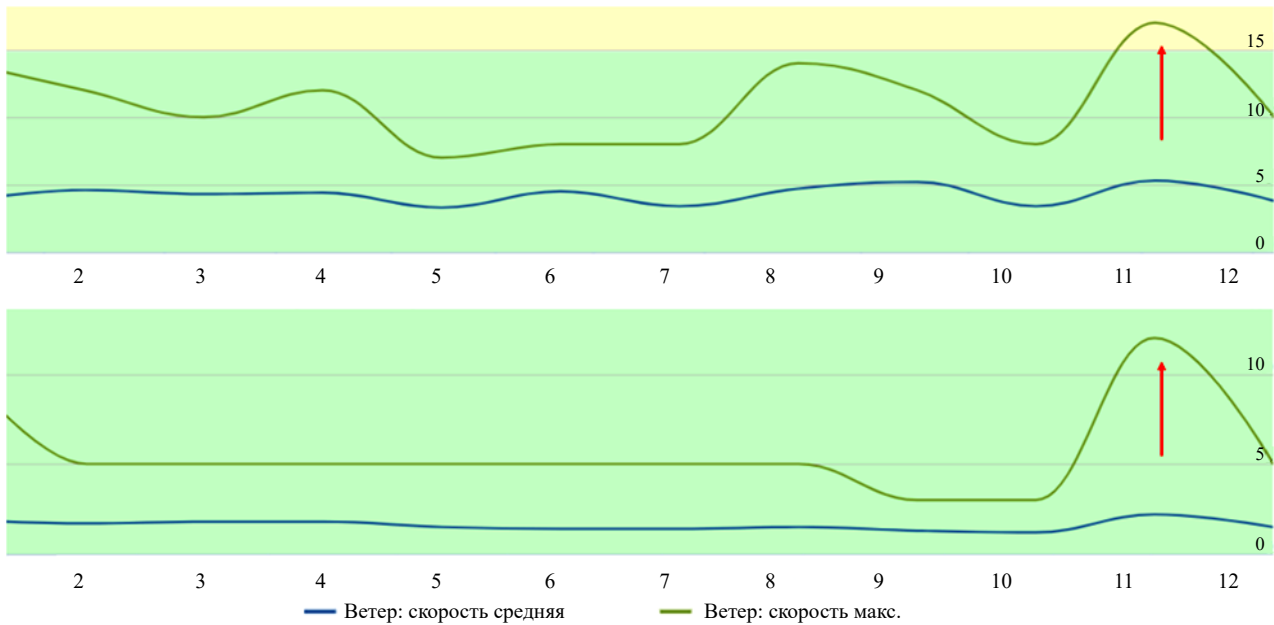


Рис. 5. Средняя и максимальная скорости ветра в 2019 году в северо-восточной части моря (верхний график) и юго-западной частью (нижний график) Азовского моря

2. Постановка задачи. Моделирование сгонно-нагонных процессов основывается на решении системы уравнений волновой гидродинамики мелководного водоема (запись в декартовых координатах x, y, z) [7–8]:

$$\begin{aligned} u'_t + uu'_x + vv'_y + ww'_z &= -\frac{1}{\rho} P'_x + (\mu u'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (\mu w'_z)'_z, \\ v'_t + uv'_x + vv'_y + ww'_z &= -\frac{1}{\rho} P'_y + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (\mu w'_z)'_z, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} w'_t + uw'_x + vv'_y + ww'_z &= -\frac{1}{\rho} P'_z + (\mu w'_x)'_x + (\mu w'_y)'_y + (\mu w'_z)'_z + g, \\ \rho'_t + (\rho u)'_x + (\rho v)'_y + (\rho w)'_z &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В уравнениях (1), (2) приняты обозначения: $\xi'_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ u, v, w — компоненты скорости водного потока мелководного водоема; ρ — плотность водной среды; P — гидродинамическое давление; g — ускорение свободного падения; μ, ν — коэффициенты турбулентного обмена в горизонтальном и вертикальном направлениях.

Пусть $\tau = \rho_a C_d_s |\mathbf{w}| \mathbf{w}$ — вектор тангенциального напряжения для свободной поверхности, где C_d_s — безразмерный коэффициент поверхностного сопротивления, который зависит от скорости ветра ($C_d_s = 0,0026$), $\mathbf{w}$ — вектор скорости ветра относительно воды, ρ_a — плотность атмосферы. Для дна задан вектор тангенциального напряжения с учетом движения воды $\tau = \rho_a C_d_b |\mathbf{V}| \mathbf{V}$, $C_d_b = g k^2 / h^{1/3}$, k — групповой коэффициент шероховатости ($k = 0,04$), $h = H + \eta$ — глубина акватории, H — глубина до невозмущенной поверхности, η — высота свободной поверхности относительно уровня моря.

Будем использовать аппроксимацию, позволяющую строить неоднородный по глубине коэффициент вертикального турбулентного обмена на основании измеренных пульсаций скоростей водного потока:

$$\nu = C_s^2 \Delta^2 \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2}, \quad (3)$$

где C_s — безразмерная эмпирическая константа, определяемая на основе расчета процесса затухания однородной изотропной турбулентности, Δ — характерный масштаб сетки, $\bar{u}, \bar{v}$ — усредненные по времени пульсации компонент скорости водного потока в горизонтальном направлении.

Для построения дискретной математической модели поставленной задачи гидродинамики и ее численной реализации введем равномерную сетку:

$$\begin{aligned} \bar{w}_h = \{t^n = n\tau, \quad x_i = ih_x, \quad y_j = jh_y, \quad z_k = kh_z; \quad n = 0, N_t, \quad i = 0, N_x, \quad j = 0, N_y, \quad k = 0, N_z, \\ N_t \tau = T, \quad N_x h_x = l_x, \quad N_y h_y = l_y, \quad N_z h_z = l_z\}, \end{aligned}$$

где τ — шаг по времени; h_x, h_y, h_z — шаги по пространству; N_t — количество временных слоев; T — верхняя граница по временной координате; N_x, N_y, N_z — количество узлов по пространственным координатам; l_x, l_y, l_z — длины ребер элементарного параллелепипеда в направлении осей O_x, O_y и O_z соответственно.

Для решения задачи гидродинамики воспользуемся методом поправки к давлению. Вариант метода в случае переменной плотности принимает вид [9–10]:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}-u}{\tau} + u\overline{u}'_x + v\overline{u}'_y + w\overline{u}'_z &= (\mu\overline{u}'_x)'_x + (\mu\overline{u}'_y)'_y + (\nu\overline{u}'_z)'_z, \\ \frac{\tilde{v}-v}{\tau} + u\overline{v}'_x + v\overline{v}'_y + w\overline{v}'_z &= (\mu\overline{v}'_x)'_x + (\mu\overline{v}'_y)'_y + (\nu\overline{v}'_z)'_z, \\ \frac{\tilde{w}-w}{\tau} + u\overline{w}'_x + v\overline{w}'_y + w\overline{w}'_z &= (\mu\overline{w}'_x)'_x + (\mu\overline{w}'_y)'_y + (\nu\overline{w}'_z)'_z + g, \\ p''_{xx} + p''_{yy} + p''_{zz} &= \frac{\hat{\rho}-\rho}{\tau^2} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{u})'_x}{\tau} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{v})'_y}{\tau} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{w})'_z}{\tau}, \\ \frac{\hat{u}-\tilde{u}}{\tau} &= -\frac{1}{\rho}\hat{p}'_x, \quad \frac{\hat{v}-\tilde{v}}{\tau} = -\frac{1}{\rho}\hat{p}'_y, \quad \frac{\hat{w}-\tilde{w}}{\tau} = -\frac{1}{\rho}\hat{p}'_z. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь: u, v, w — компоненты вектора скорости $V = \{u, v, w\}$; $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}$, $\{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\}$ — компоненты полей скорости на «новом» и промежуточном временных слоях соответственно; $\bar{u} = (\tilde{u} + u)/2$; $\hat{\rho}$ и ρ — распределение плотности водной среды на новом и предыдущем временных слоях.

3. Комбинация методов локальных бинарных шаблонов (LBP) и нейронных систем для создания начальных и граничных условий, а также проверки моделирования. При корректной постановке начально-краевых задач для систем нелинейных уравнений с частными производными и определения различных функциональных зависимостей при построении математических моделей необходимо иметь реальные входные данные (граничные, начальные условия, информацию о функциях-источниках). Во время принятия решений, касающихся рисков, связанных с опасными природными явлениями и катастрофами, до 50 % от общего времени, затрачиваемого на компьютерное моделирование и прогнозирование, может занимать процесс распознавания конкретной ситуации. В частности, это относится к определению местоположения и размеров таких явлений, как сгонно-нагонные, заморные явления и др. Доступным источником натурной информации для математического моделирования могут быть данные дистанционного зондирования Земли. Их распознавание и ввод в качестве начальных и граничных условий представляет собой довольно сложную и трудоемкую процедуру, которая требует создания специальных алгоритмов [9–10]. Также распознавание незаменимо и для дальнейшего сравнительного анализа точности работы математического моделирования.

Алгоритм «нейросеть-LBP», подробно описанный в работах [11–13], является отечественным решением в этой проблемной области. Для дальнейшей работы воспользуемся снимками со спутников, сделанными 17 и 22 ноября 2019 года (рис. 6 и 7).

Композиции различных пикселей изображения совместно работают для определения ориентации и масштаба объекта на изображении. Это позволяет распознавать и локализовывать необходимые признаки, не зависимо от того, как повернуто изображение или изменена его яркость/контрастность. Сегментация изображения осуществляется с учетом заранее определенного набора семантических классов, которые кодируются числами от 0 до некоего предела. Эти семантические метки состоят из подмножеств, каждое из которых соответствует конкретной семантической метке. Таким образом, когда пиксель помечается определенным номером семантического класса, его соответствующий идентификатор экземпляра не имеет значения. Это означает, что для классов все пиксели принадлежат к одному экземпляру (например, один и тот же цвет).

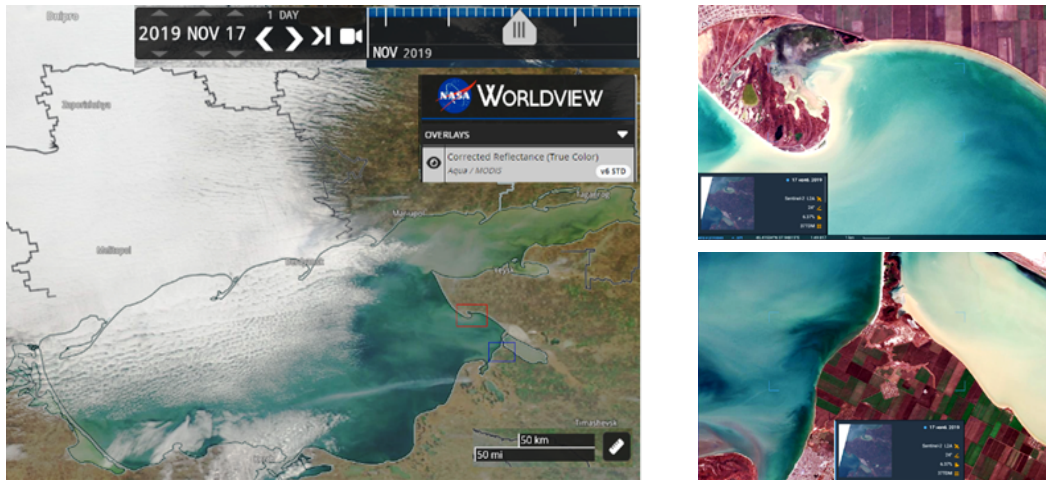


Рис. 6. Снимки области исследования со спутников WorldView [14] и Сентинел-2 L2A [13], дата — 17.11.2019 г.

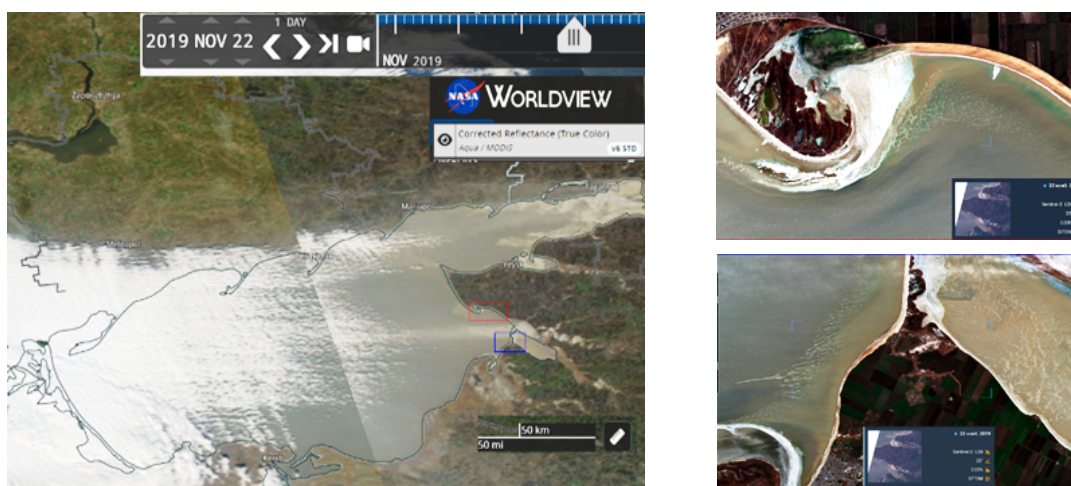


Рис. 7. Снимки области исследования со спутников WorldView [14] и Сентинел-2 L2A [15], дата — 22.11.2019 г.

В процессе работы алгоритма идет сопоставление сегментов и вычисляется PQ с учётом совпадений в два этапа. На первом происходит сопоставление эмпирических данных и прогнозируемых сегментов с порогом SP , равным 0,5. При таком подходе получается уникальное сопоставление, при котором сегменты не пересекаются. Таким образом, максимальное количество совпадений на сегмент будет равно одному. На втором этапе производится вычисление PQ , учитывая предсказанную и наземную истину сегментации изображения. Каждый сегмент наземной истины может иметь не более одного соответствующего прогнозируемого сегмента с SP строго больше, чем 0,5, и наоборот. Это означает, что, если для определённого сегмента наземной истины найден соответствующий прогнозируемый сегмент, он автоматически отнесётся к категории «согласованные пары». Если же ни один из прогнозируемых сегментов не соответствует сегменту наземной истины, то он будет отнесён к категории «несогласованные сегменты истинности». Если для определённого сегмента наземной истины не найдено соответствующего прогнозируемого сегмента, то прогнозируемые сегменты, которые пересекают его, будут отнесены к категории «несогласованные прогнозируемые сегменты». Таким образом, после сопоставления каждый сегмент попадает в один из трёх наборов: согласованные пары (MP), несогласованные прогнозируемые сегменты (UP) и несогласованные сегменты истинности (UT).

$$PQ = \frac{\sum_{(\phi, gg) \in MP} SP(\phi, gg)}{|MP| + \frac{1}{2}|UP| + \frac{1}{2}|UT|}, \quad (5)$$

где ϕ — прогнозируемые сегменты; gg — сегменты наземной истины (окружение объекта); SP — пороговое значение, равное 0,5; MP — согласованные пары; UP — несогласованные прогнозируемые сегменты; UT — несогласованные наземные сегменты истинности.

4. Описание программного комплекса. В данной работе был использован усовершенствованный программный комплекс, учитывающий динамические изменения расчетной области за счет волновых процессов, струйные эффекты и многокомпонентную природу примесей, предназначенный для построения трехмерных полей скоростей движения водной среды с учетом неоднородного по глубине коэффициента вертикального турбулентного обмена и динамического перестроения геометрии расчетной области. Программный комплекс реализован на C++. Алгоритм организации вычислительного эксперимента на основе разработанного программного комплекса представлен на рис. 8.

Комплекс программ позволяет задавать сложную геометрию дна в виде растровой модели, построенной на основе известных данных кадастровых съемок и данных дистанционного зондирования, вида и характеристики источника колебаний, направления и скорости ветра.

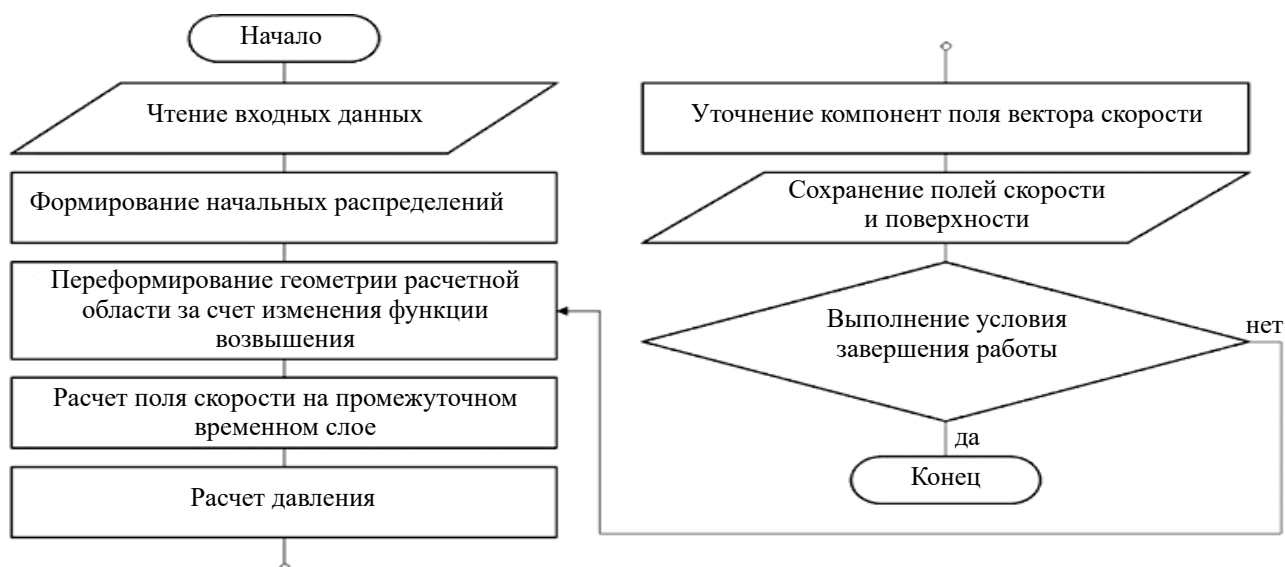


Рис. 8. Схема алгоритма организации вычислительного эксперимента

Результаты исследования

1. Результаты численных экспериментов на основе трехмерной модели волновой гидродинамики. Продолжительное действие ветра со значительными скоростями привело к развитию сгонно-нагонного колебания, при котором в восточной части Азовского моря наблюдался экстремальный сгон, а в западной — нагон.

Уровень моря за период штормовой ситуации в Таганрогском заливе ночью с 21 на 22 ноября 2019 г. опускался ниже 220–240 см относительного среднего уровня. Максимальные нагонные повышения уровня моря наблюдались в прибрежной западной части Азовского моря и достигали до 130–140 см (рис. 9).

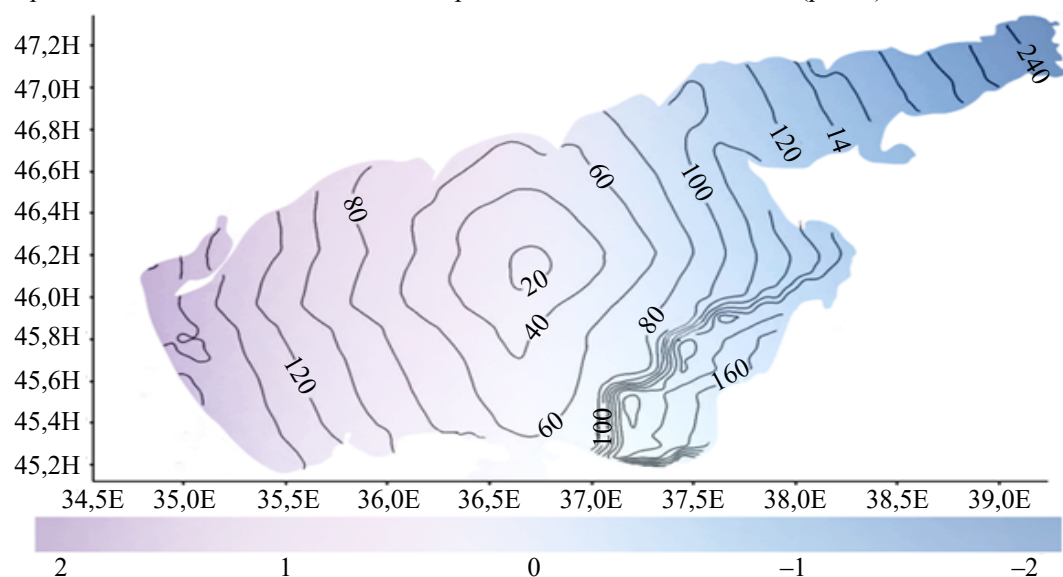


Рис. 9. Уровень моря, отсчитываемый относительно среднего уровня Азовского моря 22 ноября 2019 года

Для моделирования был выбран участок Таганрогского залива размерами 100 на 50 метров, максимальная глубина на данном участке составила 1,8 метра. При расчетах использовалась сетка $100 \times 200 \times 40$ расчетных узлов, шаг по времени составил 0,01 секунды. При моделировании скорость ветра задавалась равной 15 м/с, направление восточное (рис. 10 и 11).

Согласно данным Федеральной службы по гидрометеорологии и мониторингу окружающей среды 22 ноября 2019 г. на Азовском море наблюдался северо-восточный ветер скоростью 12–17 м/с, порывы до 27 м/с, высота волн 1,3–1,8 м. Днем 22, ночью и утром 23 ноября на Азовском море наблюдался северо-восточный ветер скоростью 11–16 м/с, порывы 22 м/с, высота волн 1–2 м. Результаты моделирования согласуются с данными Федеральной службы по гидрометеорологии и мониторингу окружающей среды. При установившемся волнении расчетные высоты волн составили 1,6–2 метра.

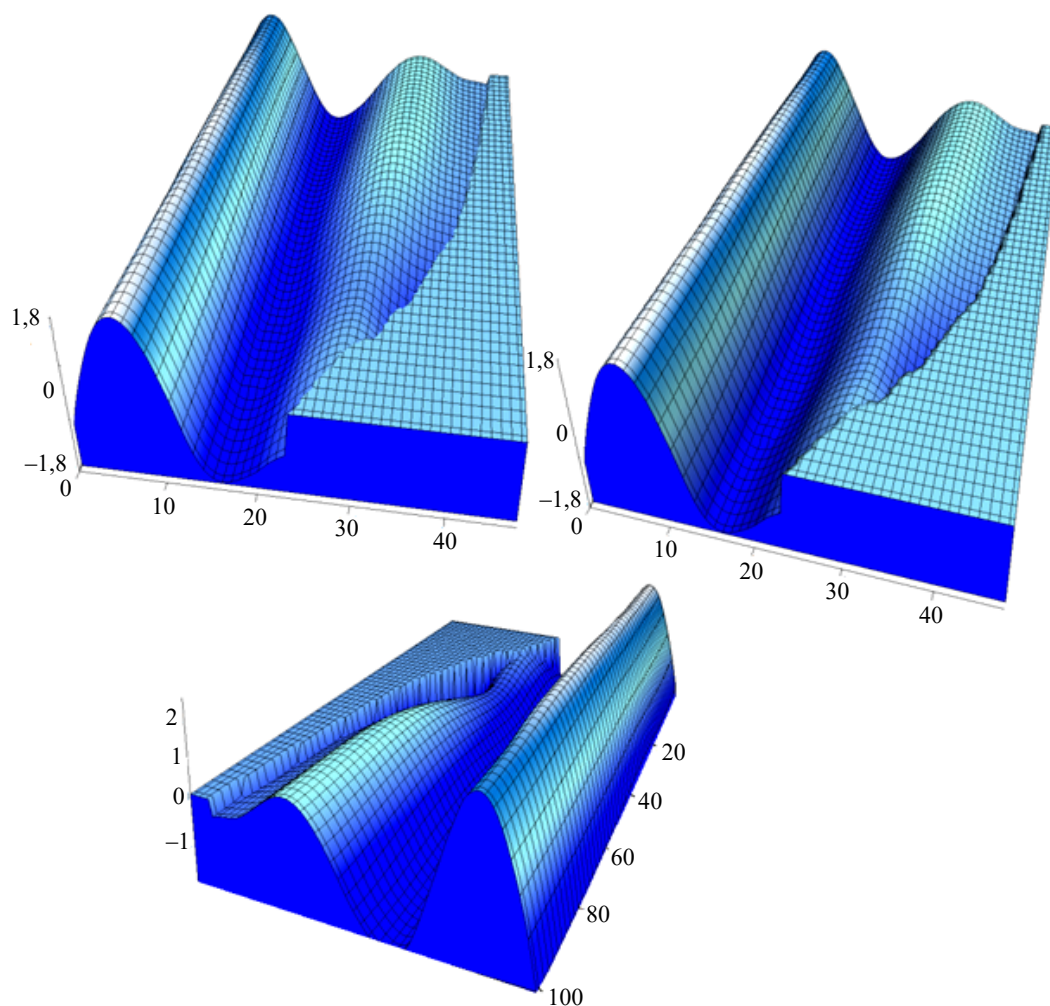


Рис. 10. Результаты моделирования высот волн при восточном ветре со скоростью 15 м/с

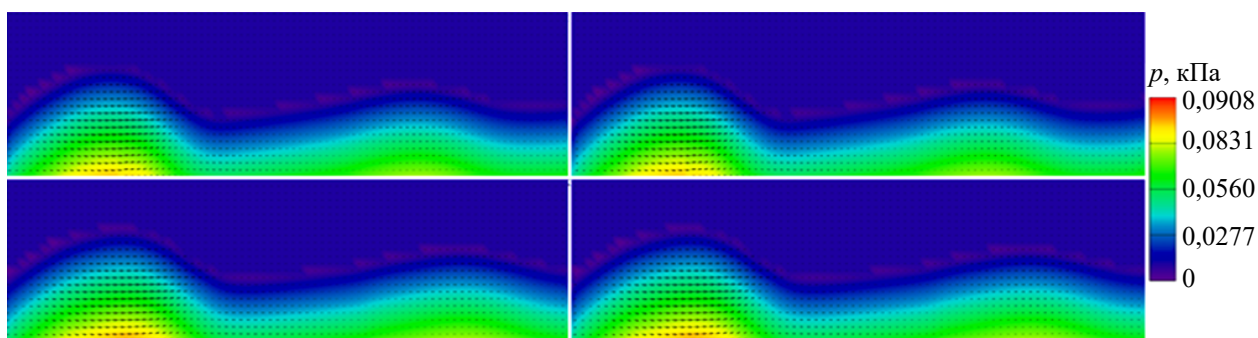


Рис. 11. Результаты моделирования поля вектора скорости и давления при восточном ветре со скоростью 15 м/с

2. Результаты численных экспериментов на основе алгоритма «нейросеть-LBP» для обработки граничных контуров водной среды на основе ДДЗ. Результаты работы программного модуля позволяют отслеживать динамику контуров (в нашем случае береговой линии) на протяжении длительного периода времени (рис. 12 и 13).

В рамках численных экспериментов был проведен анализ снимков области исследования (станция Ясенская и хутор Морозовский) за 17 и 22 ноября 2019 года. Результаты показали, что алгоритм «нейросеть-LBP» успешно идентифицирует и отслеживает изменения в береговой линии на протяжении рассматриваемого периода. На рис. 12 и 13 представлены соответствующие снимки, демонстрирующие динамику изменения береговой линии за указанный период времени.

Результаты численных экспериментов показывают высокую эффективность алгоритма «нейросеть-LBP» для обработки граничных контуров водной среды. Алгоритм позволяет автоматически распознавать и вводить данные дистанционного зондирования в модель, что значительно ускоряет процесс моделирования и повышает его точность. В частности, использование данных спутниковых снимков за 17 и 22 ноября 2019 года продемонстриро-

вало способность модели точно прогнозировать уровни преобладающих волн, среднюю длину и период ветровых волн в Азовском море на различные временные горизонты (начальный момент времени, через 3, 6 и 9 часов).

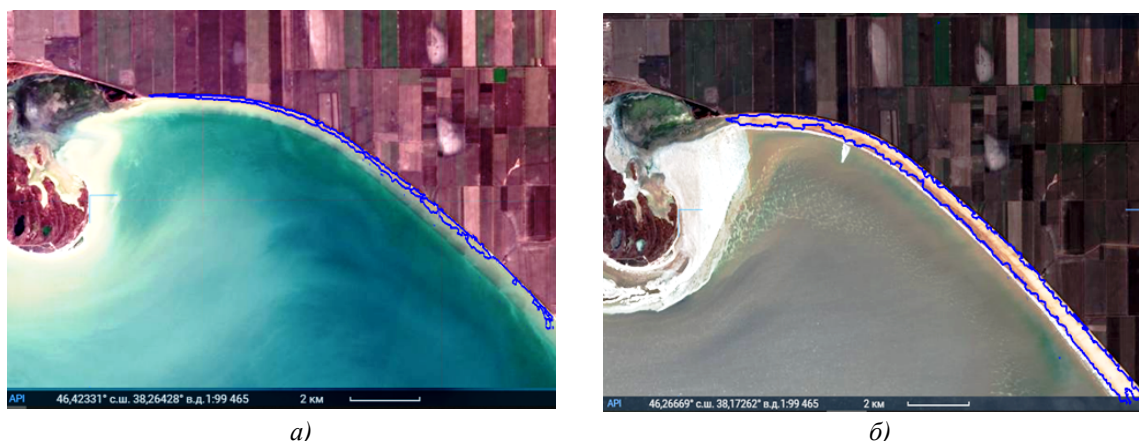


Рис. 12. Снимки области исследования — Станица Ясенская:
а — 17.11.2019 г.; б — 22.11.2019 г.

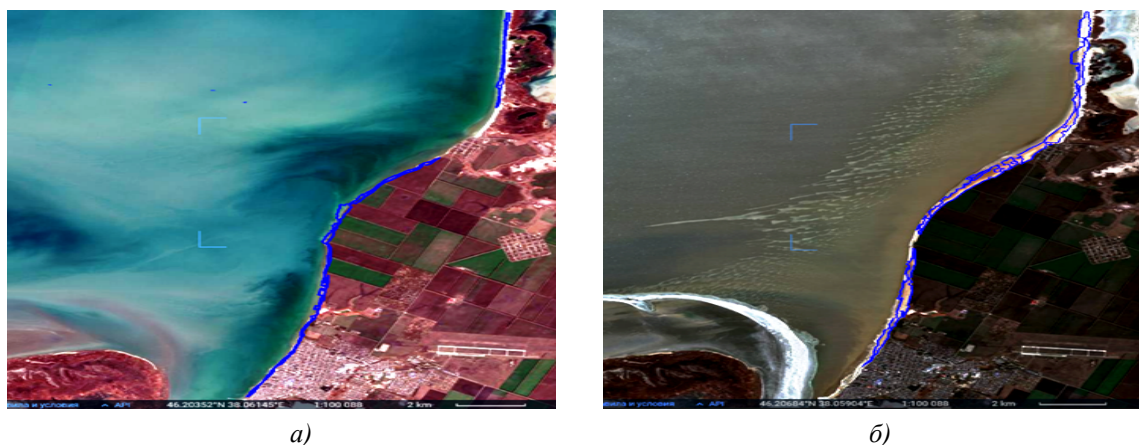


Рис. 13. Снимки области исследования — Хутор Морозовский:
а — 17.11.2019 г.; б — 22.11.2019 г.

Обсуждение и заключения. Моделирование сгонно-нагонных процессов в Азовском море базируется на решении системы уравнений волновой гидродинамики мелководного водоема, что позволяет учитывать сложные динамические процессы, влияющие на уровень моря и ветровое волнение. В данной работе используется метод локальных бинарных шаблонов (LBP) в комбинации с нейронными сетями для обработки граничных контуров водной среды. Этот подход позволяет более точно моделировать и прогнозировать экстренные колебания уровня моря, что особенно важно для мелководных водоемов (таких, как Азовское море), где такие явления могут иметь значительные экономические и экологические последствия. Полученные результаты подтверждают важность и необходимость дальнейших исследований в области гидродинамического моделирования и использования современных методов обработки данных для улучшения прогнозов природных явлений, связанных с изменениями уровня моря и ветровым волнением.

Список литературы

1. Alekseenko E., Roux B., Sukhinov A., Kotarba R., Fougere D. Coastal hydrodynamics in a windy lagoon. *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2013;20(2):189–198. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2013.02.003>
2. Holthuijsen L.H. *Waves in Oceanic and Coastal Waters*. Cambridge University Press. 2007. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511618536>
3. Kirby J.T. (2013). *Advanced Numerical Models for Simulating Tsunami Waves and Runup*. World Scientific Publishing Company. <https://doi.org/10.1142/9101>
4. Komen G.J., Cavaleri L., Donelan M., Hasselmann K., Hasselmann S., Janssen P.A.E.M. (1994). *Dynamics and Modelling of Ocean Waves*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511628955>
5. Mei C.C., Stiassnie M., Yue D.K.P. *Theory and Applications of Ocean Surface Waves: Linear Aspects*. World Scientific Publishing Company. 2005. <https://doi.org/10.1142/5678>

6. The official website of the Unified State Information System on the Situation in the World Ocean. URL: <http://esimo.ru/portal/> (дата обращения: 11.06.2024)
7. Protsenko S., Sukhinova T. Mathematical modeling of wave processes and transport of bottom materials in coastal water areas taking into account coastal structures. *MATEC Web of Conferences*. 2017;132(2):04002. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201713204002>
8. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A. Mathematical Modeling of Sediment Transport in the Coastal Zone of Shallow Reservoirs. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2014;6(4):351–363. <https://doi.org/10.1134/S2070048214040097>
9. Panasenkov N.D. Forecasting the Coastal Systems State using Mathematical Modelling Based on Satellite Images. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):54–65. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-54-65>
10. Sukhinov A.I., Protsenko S.V., Panasenkov N.D. Mathematical modeling and ecological design of the marine systems taking into account multi-scale turbulence using remote sensing data. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2022;6(3):104–113. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2022-1-3-104-113>
11. Sukhinov A., Panasenkov N., Simorin A. Algorithms and programs based on neural networks and local binary patterns approaches for monitoring plankton populations in sea systems. *E3S Web of Conferences*. 2022;363:02027. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202236302027>
12. Xu W., Yin X., Zhang W. A Review of Applications of Neural Networks in Coastal and Ocean Engineering. *Ocean Engineering*. 2019;186:106092. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2019.106092>
13. Zhang L., Wang L., Yang Z. Deep Learning for Remote Sensing Image Analysis: A Comprehensive Review. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*. 2018;11(10):3713–3723. <https://doi.org/10.1109/JSTARS.2018.2857630>
14. The official website of Earth observing system. URL: <https://eos.com/landviewer/account/pricing> (дата обращения: 12.06.2024)
15. The official website of NASA Worldview. URL: <https://worldview.earthdata.nasa.gov> (дата обращения: 12.06.2024)

References

1. Alekseenko E., Roux B., Sukhinov A., Kotarba R., Fougere D. Coastal hydrodynamics in a windy lagoon. *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2013;20(2):189–198. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2013.02.003>
2. Holthuijsen L.H. *Waves in Oceanic and Coastal Waters*. Cambridge University Press. 2007. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511618536>
3. Kirby J.T. (2013). *Advanced Numerical Models for Simulating Tsunami Waves and Runup*. World Scientific Publishing Company. <https://doi.org/10.1142/9101>
4. Komen G.J., Cavaleri L., Donelan M., Hasselmann K., Hasselmann S., Janssen P.A.E.M. (1994). *Dynamics and Modelling of Ocean Waves*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511628955>
5. Mei C.C., Stiassnie M., Yue D.K.P. *Theory and Applications of Ocean Surface Waves: Linear Aspects*. World Scientific Publishing Company. 2005. <https://doi.org/10.1142/5678>
6. The official website of the Unified State Information System on the Situation in the World Ocean. URL: <http://esimo.ru/portal/> (accessed: 11.06.2024)
7. Protsenko S., Sukhinova T. Mathematical modeling of wave processes and transport of bottom materials in coastal water areas taking into account coastal structures. *MATEC Web of Conferences*. 2017;132(2):04002. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201713204002>
8. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A. Mathematical Modeling of Sediment Transport in the Coastal Zone of Shallow Reservoirs. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2014;6(4):351–363. <https://doi.org/10.1134/S2070048214040097>
9. Panasenkov N.D. Forecasting the Coastal Systems State using Mathematical Modelling Based on Satellite Images. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):54–65. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-54-65>
10. Sukhinov A.I., Protsenko S.V., Panasenkov N.D. Mathematical modeling and ecological design of the marine systems taking into account multi-scale turbulence using remote sensing data. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2022;6(3):104–113. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2022-1-3-104-113>
11. Sukhinov A., Panasenkov N., Simorin A. Algorithms and programs based on neural networks and local binary patterns approaches for monitoring plankton populations in sea systems. *E3S Web of Conferences*. 2022;363:02027. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202236302027>
12. Xu W., Yin X., Zhang W. A Review of Applications of Neural Networks in Coastal and Ocean Engineering. *Ocean Engineering*. 2019;186:106092. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2019.106092>
13. Zhang L., Wang L., Yang Z. Deep Learning for Remote Sensing Image Analysis: A Comprehensive Review. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*. 2018;11(10):3713–3723. <https://doi.org/10.1109/JSTARS.2018.2857630>

14. The official website of Earth observing system. URL: <https://eos.com/landviewer/account/pricing> (accessed: 12.06.2024)

15. The official website of NASA Worldview. URL: <https://worldview.earthdata.nasa.gov> (accessed: 12.06.2024)

Поступила в редакцию 06.06.2024

Поступила после рецензирования 20.06.2024

Принята к публикации 21.06.2024

Об авторах:

Проценко Елена Анатольевна, доцент кафедры математики, ведущий научный сотрудник, Таганрогский институт им. А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (347936, РФ, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), кандидат физико-математических наук, [ORCID](#), eapros@rambler.ru

Панасенко Наталья Дмитриевна, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры вычислительных систем и информационной безопасности Донской государственной технической университет (РФ, 344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [AutorID](#), natalija93_93@mail.ru

Проценко Софья Владимировна, доцент кафедры математики, научный сотрудник, Таганрогский институт им. А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (347936, РФ, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), кандидат физико-математических наук, [ORCID](#), rab5555@rambler.ru

Заявленный вклад соавторов:

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Received 06.06.2024

Revised 20.06.2024

Accepted 21.06.2024

About the Authors:

Elena A. Protsenko, Associate Professor of the Department of Mathematics, Leading Researcher, A.P. Chekhov Taganrog Institute (branch) Rostov State University of Economics (48, Initiative St., Taganrog, 347936, RF), Candidate of Physical and Mathematical Sciences, [ORCID](#), eapros@rambler.ru

Natalya D. Panasenko, PhD (Technical Sciences), Senior Lecturer of the Department of Computer Systems and Information Security, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [AutorID](#), natalija93_93@mail.ru

Sofia V. Protsenko, Associate Professor of the Department of Mathematics, Researcher, A.P. Chekhov Taganrog Institute (branch) Rostov State University of Economics (48, Initiative St., Taganrog, 347936, RF), Candidate of Physical and Mathematical Sciences, [ORCID](#), rab5555@rambler.ru

Claimed contributor-ship:

All authors have made an equivalent contribution to the preparation of the publication.

Conflict of interest statement

The authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ MATHEMATICAL MODELLING



УДК 519.6

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-45-59>


Моделирование капиллярного разряда в режиме повторения для коротких капиллярных систем при различных способах заполнения

В.А. Гасилов^{ID}, Н.О. Савенко^{ID}✉, Ю.С. Шарова^{ID}

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация

✉ savenkonkt@gmail.com

Аннотация

Введение. В настоящее время активно исследуются частотные режимы работы ускорителей электронов на основе капиллярных разрядов. Электроны в них ускоряются под действием лазерных импульсов фемтосекундного диапазона длительности, пропускаемых через плазму разряда.

Материалы и методы. В работе рассматриваются результаты трехмерного магнетогидродинамического моделирования цикла капиллярного разряда, включающего стадии заполнения короткого капилляра рабочим газом (водород), формирование плазменного канала, восстановление рабочей среды перед началом следующего разряда. Расчеты выполнены в предположении о том, что система находится под внешним охлаждением, которое обеспечивает температурный баланс на промежуточных этапах рабочего цикла, а также при постоянных условиях подачи и откачки рабочего газа.

Результаты исследования. Результаты вычислительных экспериментов показывают возможность генерации пучков релятивистских электронов с частотой повторения около одного килогерца.

Обсуждение и заключение. Полученные результаты позволяют говорить о перспективности использования КЛПУ с малой длиной канала и высокой частотой повторения капиллярного разряда.

Ключевые слова: математическое моделирование, магнитная гидродинамика, капиллярный разряд, лазерное ускорение электронов

Благодарности. Результаты получены с использованием оборудования ЦКП ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (<http://ckp-kiam.ru>). Авторы признательны кандидату физ.-мат. наук Г.А. Багдасарову за обсуждение результатов вычислительных экспериментов.

Для цитирования. Гасилов В.А., Савенко Н.О., Шарова Ю.С. Моделирование капиллярного разряда в режиме повторения для коротких капиллярных систем при различных способах заполнения. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):45–59. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-45-59>

Original Theoretical Research

Modelling of Capillary Discharge in Repetition Mode for Short Capillary Systems with Various Filling Methods

Vladimir A. Gasilov^{ID}, Nikita O. Savenko^{ID}✉, Yulia S. Sharova^{ID}

Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

✉ savenkonkt@gmail.com

Abstract

Introduction. Currently, frequency modes of operation of electron accelerators based on capillary discharges are actively investigated. Electrons in these systems are accelerated by femtosecond laser pulses passing through the discharge plasma.

Materials and Methods. The paper presents results of three-dimensional magnetohydrodynamic modelling of the capillary discharge cycle, including stages of filling a short capillary with working gas (hydrogen), formation of the plasma channel, and restoration of the working medium before the start of the next discharge. Calculations were performed assuming the

system is under external cooling, which maintains thermal balance at intermediate stages of the working cycle, and under constant conditions of gas supply and evacuation.

Results. The computational experiments demonstrate the capability of generating beams of relativistic electrons with a repetition frequency of approximately one kilohertz.

Discussion and Conclusions. The obtained results allow us to speak about the prospects of using LWFA with a short channel length and a high repetition rate of the capillary discharge.

Keywords: mathematical modelling, magnetohydrodynamics, capillary discharge, laser acceleration of electrons

Acknowledgements. The results were obtained using the equipment of the “Center for Collective Use” IAM RAS (ckp.kiam.ru). The authors are grateful to candidate of physical and mathematical sciences G.A. Bagdasarov for discussing the results of computational experiments.

For citation. Gasilov V.A., Savenko N.O., Sharova Yu.S. Modelling of capillary discharge in repetition mode for short capillary systems with different filling methods. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):45–59. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-45-59>

Введение. Способ генерации релятивистских электронных пучков в поле лазерного излучения был предложен и обоснован в работе [1]. С тех пор компактные лазерные ускорители релятивистских электронов нашли применение в широком поле фундаментальных и прикладных исследований. Среди них можно выделить такие направления, как разработки лазеров на свободных электронах (ЛСЭ) [2], создание комптоновских источников излучения и электрон-позитронных коллайдеров [3, 4] и др. В работах [5–8] были представлены теория и результаты ряда экспериментов по генерации электронного пучка с помощью механизма лазерного кильватерного ускорения (LWFA).

Капиллярные разряды широко используются во многих экспериментах в области физики импульсной плазмы как простой и удобный инструмент генерации «спокойной», нетурбулизованной плазмы с надежно контролируемыми параметрами. Капиллярные разряды как средство создания плазменных каналов для лазерного ускорения электронов и других приложений подробно рассматриваются в работах [7–15].

В ряде приложений (медико-биологические исследования, науки о материалах и др.) востребованы не высокие показатели набираемой ускоренными электронами энергии, как было достигнуто в эксперименте [13], а, скорее, высокая частота повторения (порядка и более 1 кГц) импульсов в ускорителе электронов. Так, в работе [16] рассмотрен разрядный волновод для LWFA, полученный при использовании водорода в качестве рабочего газа и обеспечивающий частоту повторения в несколько КГц. Другие плазменные волноводы для LWFA, работающие на высоких частотах повторения, описаны в работах [17, 18]. В такого рода экспериментах применяются, как правило, сравнительно короткие капилляры, длиной 1–3 см. В этой связи отметим, что ряд публикаций в качестве одного из основных результатов исследований декларирует возможность применения коротких плазменных каналов для получения электронных пучков с энергией до 1 ГэВ [18–23].

В данной работе представлены результаты трехмерного моделирования капиллярного разряда. Основное внимание уделяется процессу формирования плазменного канала-волновода, который может служить для ускорения электронов лазерным импульсом. Проводится сравнение результатов расчетов с теоретическими оценками энергии ускоренных электронов. Основными внешними факторами, действующими на капилляр, в нашей модели принимаются поток газа на входе в питающие каналы капилляра и теплообмен плазмы со стенками капилляра.

Для моделирования описанного процесса применяется исследовательский мультифизичный код MARPLE, созданный в ИПМ им. М.В. Келдыша [20].

Материалы и методы. Вычислительные эксперименты для изучения динамики плазмы капиллярного разряда выполняются в одножидкостной двухтемпературной магнетогидродинамической модели, в которую включены электрон-ионный обмен энергией, теплопроводность ионной и электронной компонент плазмы. Основная система решаемых уравнений включает [24]:

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V}) = 0,$$

уравнение баланса импульса

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} &= -\nabla(p_i + p_e) + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \\ \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \varepsilon_i + p_i \nabla \cdot \mathbf{V} &= \nabla(\kappa_i \nabla T_i) - Q_{ie}, \\ \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \varepsilon_e + p_e \nabla \cdot \mathbf{V} &= \nabla(\kappa_e \nabla T_e) + \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} + Q_{ie} - Q_{\text{rad}}, \end{aligned}$$

уравнения Максвелла (без учета тока смещения)

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}), \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c(\nabla \times \mathbf{E}), \quad \Delta \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Основную систему уравнений замыкают уравнение состояния в форме

$$p_i = p_i(\rho, \varepsilon_i), p_e = p_e(n_e, \varepsilon_e),$$

а также закон Ома в форме $\mathbf{E} = \frac{1}{c}(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \frac{\mathbf{j}}{\sigma}$.

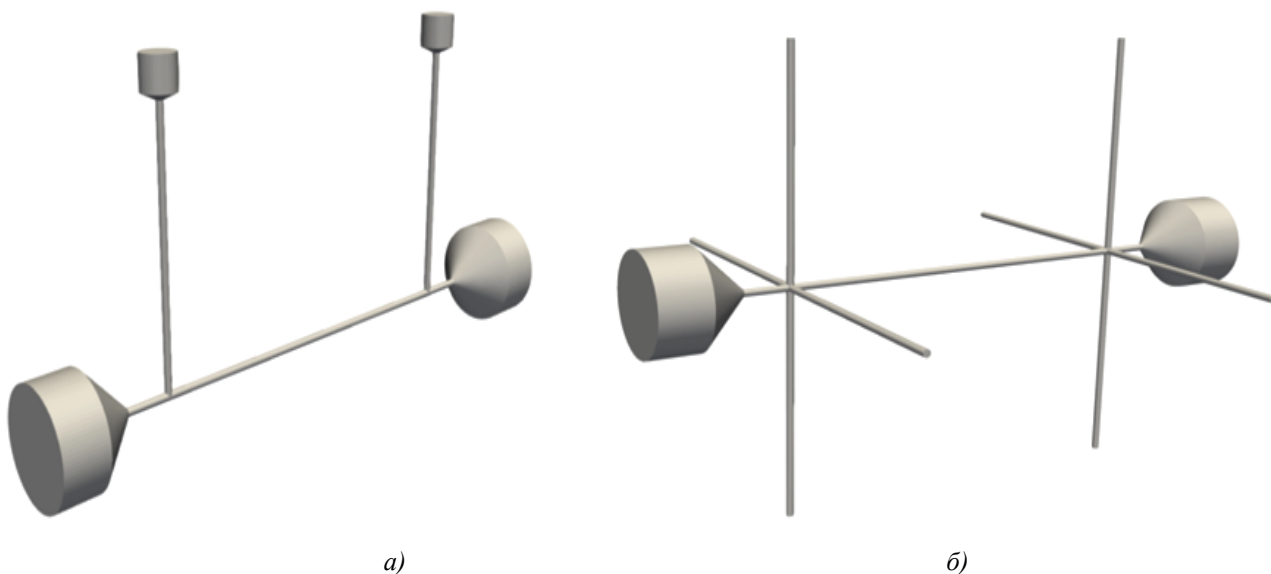
Предполагается, что в течение всего времени электрического разряда выполнено условие квазинейтральности газоплазменной среды $n_e - Zn_i = 0$.

Будем разделять цикл работы капилляра на три последовательных этапа. Первый этап — это заполнение капилляра холодным газом (водород) до установления течения. Второй — непосредственно электрический разряд, необходимый для формирования канала разряда в полностью ионизованной среде, причем завершение электрического импульса характеризуется весьма быстрой рекомбинацией в плазме разряда. На заключительном, третьем этапе цикла происходит истечение горячего газа из капилляра и замещение рабочей среды капилляра новой порцией газа из питающих каналов. Этапы заполнения и сброса рассчитываются в однотемпературном приближении, поскольку наличие электронной компоненты в этот период будет близко к нулю.

В работе рассмотрено два случая геометрии системы: с двумя и с восемью подводящими каналами. Результаты проведенных расчетов сравниваются с результатами работы [21], полученными при тех же условиях реализации капиллярного разряда, но в более простой постановке задачи, рассматриваемой в сильно идеализированной двумерной постановке, в цилиндрической (r, z) геометрии. Будем считать, что капилляр круглого сечения имеет длину 2 см и диаметр 300 мкм (рис. 1). Расчетная область строится в следующем виде: основной канал капилляра — трубка с открытыми торцами, к которой примыкают подводящие каналы диаметром, равным капиллярному — 300 мкм. Подводящие каналы присоединены на расстоянии 0,8 см от центра основной трубки. На краях капилляра электроды с углом полураствора 45° и длиной 0,2 см, далее область свободного выхода газа длиной 0,2 см.

Построение расчетной области для капилляра с восемью подводящими каналами выполнено следующим образом: принимаем, что количество подводящих каналов на половину длины капилляра — 4, они присоединены к капилляру крестообразно. Такая геометрия всей конструкции позволяет получить более однородный поток газа в области сопряжения питающих каналов с капилляром.

Построение расчетной сетки выполнялось с учетом симметрии геометрической модели системы с восемью подводящими каналами, что позволяет ограничиться расчетами в одной восьмой части всей области, заполненной рабочим веществом (питающие каналы и основной капиллярный тракт). Электромагнитное поле рассчитывается для капиллярного канала в диэлектрике, как это принято в большинстве конструкций [2, 16, 21]. К торцам капилляра пристыкованы электроды из металла с высокой проводимостью (медь, алюминий). Соответственно данной конструкции на этапе расчета электрического разряда налагаются граничные условия для уравнений электродинамики из общей магнитогидродинамической системы. Для решения газодинамических уравнений используются обычные условия непроницаемости стенок капилляра, а на открытых торцах капилляра параметры газа вычисляются соответственно методике реализации неотражающих граничных условий [22].



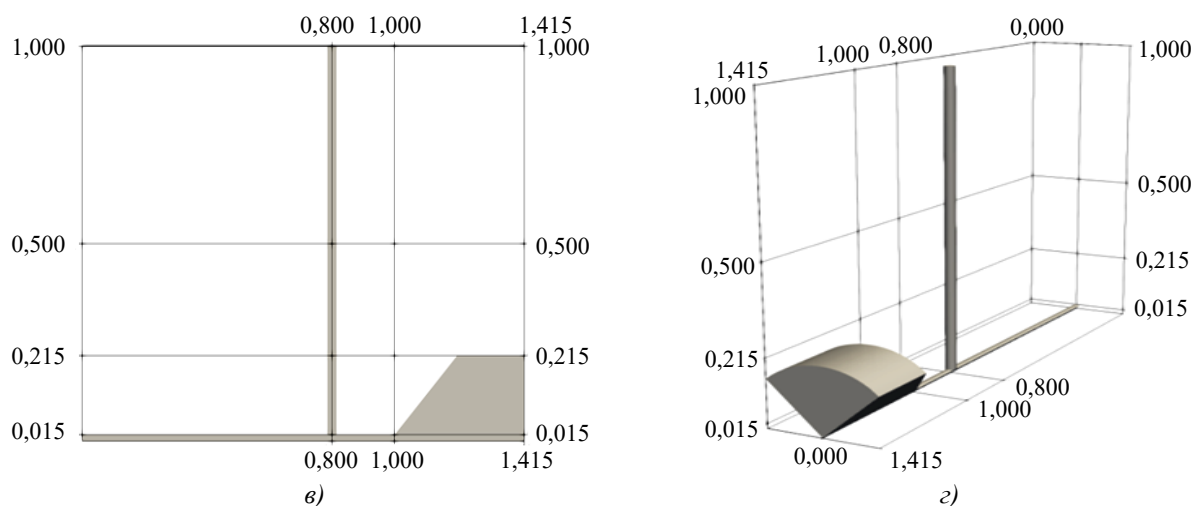


Рис. 1. Геометрия расчетной области: *а* — общий вид для системы с двумя питающими каналами; *б* — общий вид для системы с восемью питающими каналами; *в* — характерные размеры области одинаковы для обоих рассматриваемых вариантов конструкции капиллярной системы; *г* — характерные размеры области для системы с восемью подводщими трубками

Расчеты выполнены для двух последовательных рабочих циклов. На этапе заполнения капилляра, как первичного, так и повторного, на входной границе в питающие каналы для двухканальной системы принимается давление молекулярного водорода $p = 0,125$ бар при температуре 300 К, а для восьмиканальной конструкции — $p \approx 0,083$ бар при температуре 300 К. При таких значениях входных параметров газа обеспечивается его одинаковый расход при заполнении системы и примерно одинаковые значения параметров газового потока на оси капилляра после выхода на стационарный режим течения. При достижении стационарного состояния течения внутри системы будем считать этап заполнения окончанным. Достигнутые при этом параметры газа в капилляре служат начальными данными для этапа разряда.

В соответствии с данными многих экспериментов [16–19, 21] для производства расчетов применялась следующая зависимость электрического тока через капилляр:

$$I = I_0 \frac{t}{t_{\max}} \exp \left(1 - \frac{t}{t_{\max}} \right), \quad (1)$$

где $I_0 = 210$ А; t — текущий момент времени от начала разряда; $t_{\max} = 0,15$ мкс — момент максимальной силы тока. Профиль токового импульса представлен на рис. 2.

Азимутальная составляющая магнитного поля на границе изолятора, задаваемая в качестве граничного условия по магнитному полю, принимается приближенно равной $B_\varphi = 2I(t)/R$, где $I(t)$ вычисляется по формуле (1), R — радиус капиллярной трубки.

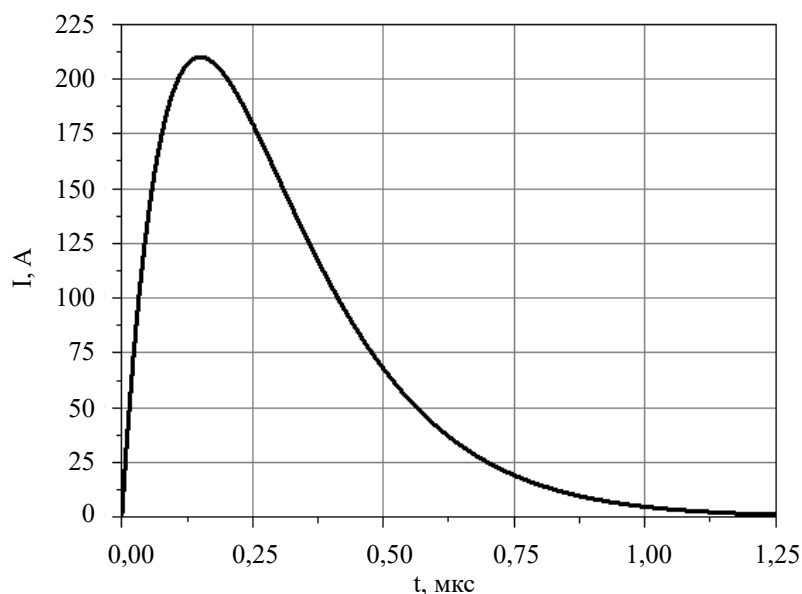


Рис. 2. Профиль тока в зависимости от времени

Вторая стадия «работы» капилляра завершается, когда заканчивается разрядный ток. За последующий короткий интервал времени рекомбинирует ионизованное электротокм вещество. Состояние газа в это время принимается в качестве начального состояния для этапа повторного заполнения.

На заключительном этапе моделируется процесс восстановления распределения нейтрального водорода в капилляре. Он включает в себя выход горячего водорода из капилляра и его замещение новой порцией холодного водорода из питающих каналов, т. е. начало повторного заполнения.

Для случая восьми питающих трубок, для всех трёх этапов разряда расчет выполняется в восьмой части полной области течения. Это возможно в силу симметрии конструкции капилляра с трубками питания. Будем считать электрод на торце капилляра цилиндрическим слоем металла — «кольцо» толщиной около десятой доли радиуса.

Результаты исследования

Первичное заполнение. Этап первичного заполнения завершается, когда формируется стационарный поток водорода через капилляр. На рис. 3 и 4 показаны профили плотности вдоль оси капилляра для различных моментов времени для систем с двумя и восемью подводящими каналами (рис. 3), а также в двумерной модели (рис. 4) с упрощенным (кольцевым) подводом газа в капилляр. Показаны соответствующие стадии эволюции состояния потока газа.

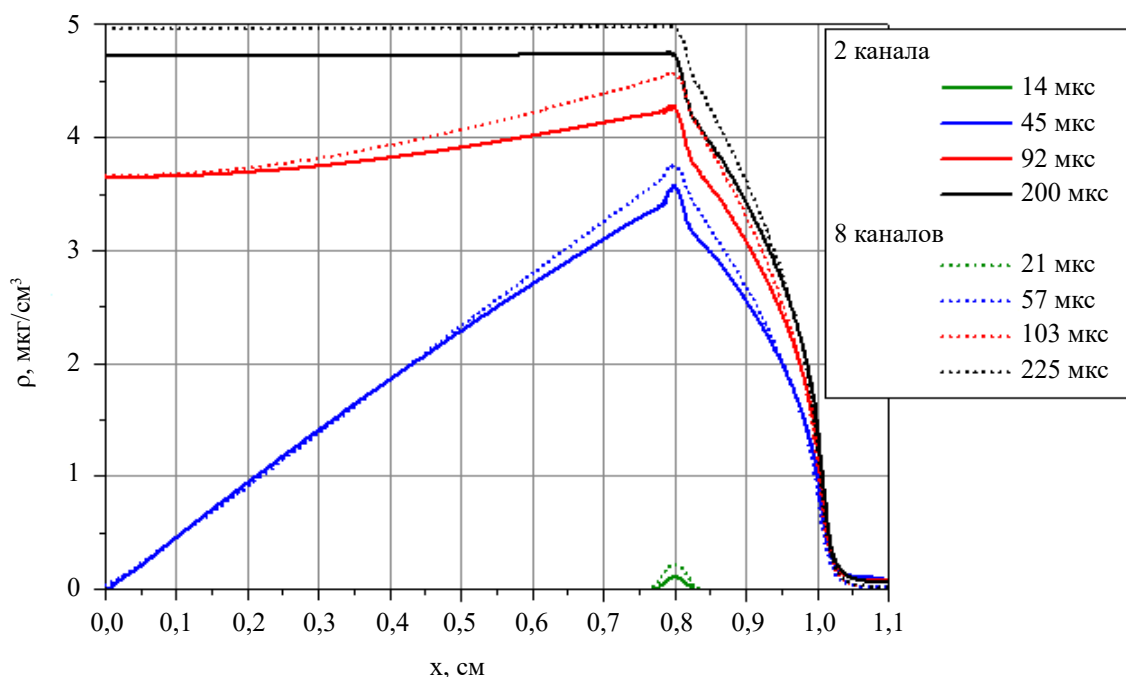


Рис. 3. Распределение плотности на оси капилляра для двух геометрий в соответствующие моменты времени

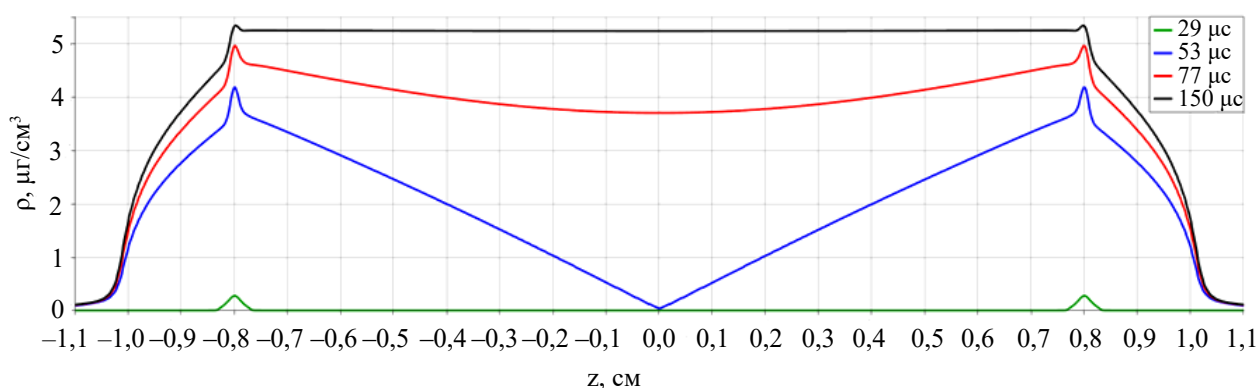


Рис. 4. Распределение плотности на оси капилляра для двумерной модели, рассмотренной в работе [21]

Небольшое различие параметров при выходе на стационар не оказывает существенного влияния на дальнейшие этапы. Как продемонстрировано на рис. 5, для трех различных геометрий питающих каналов время установления составляет: 2 подводящих канала — 200 мкс, 8 подводящих каналов — 225 мкс, двумерная модель питания капилляра — 125 мкс.

За счет теплопроводности температура газа на этой стадии выравнивается и оказывается равной температуре стенки капилляра, значение которой составляет 300 К.

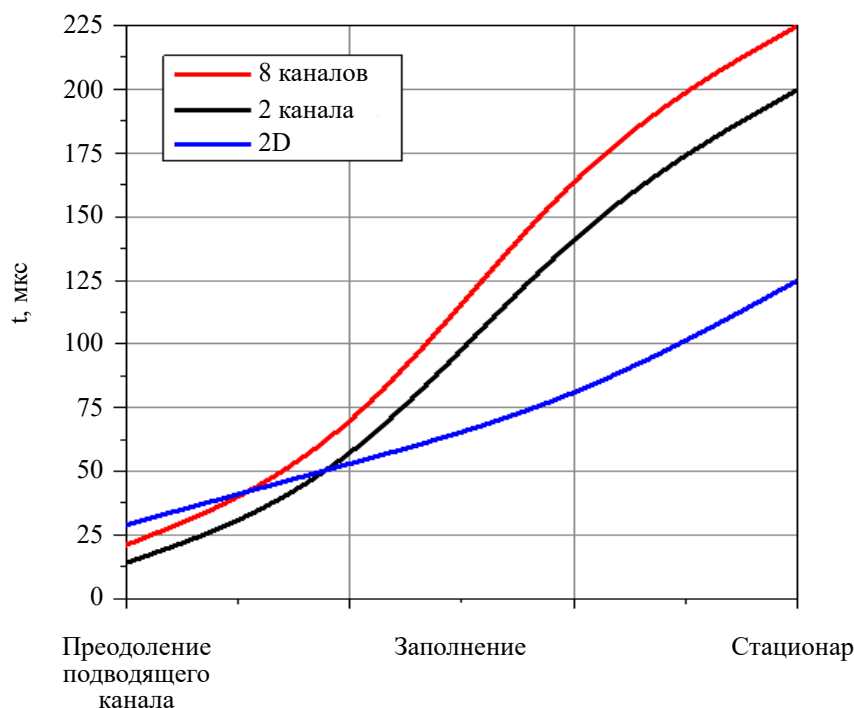


Рис. 5. Время установления течения на этапе первичного заполнения для различных геометрий

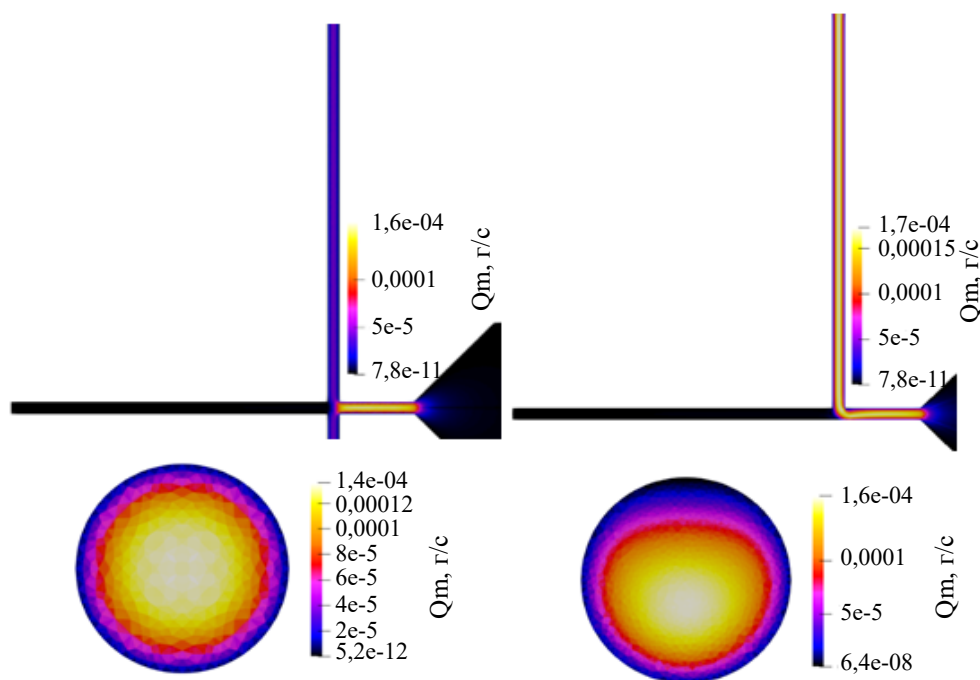


Рис. 6. Распределение потока массы в сечении капилляра вблизи входа питающего канала для восьми и двух питающих каналов

На рис. 6 представлено распределение потока массы (г/с) в сечении вдоль системы и поперёк основного канала вблизи подводящей трубки (0,82 см) для восьми и двух подводящих трубок.

Небольшая, но вполне заметная асимметрия параметров потока, наблюдаемая в различных сечениях в варианте заполнения капилляра двумя питающими трубками, является показателем качества волноводного канала, который должен обладать достаточно высокой радиальной симметрией для того, чтобы обеспечить высокую эффективность ускорения электронов лазерным импульсом. При этом симметрия течения важна в основном в окрестности оси капилляра, где, соответственно, и формируется канал с параметрами, необходимыми для ускорения электронов.

Разряд. Для того, чтобы сформировать плазменный канал, такой, чтобы с наибольшей эффективностью провести через него ускоряющий лазерный импульс, в потоке холодного газа производится электрический разряд. Для моделирования разряда используется начальное состояние газа, такое, которое мы получаем после установления на этапе заполнения.

Используемая нами МГД модель не включает описания стадии электрического пробоя. Пробой длится около 10 нс и минимально влияет на свойства плазменного канала. Для моделирования второй стадии газ приводится в слабо-ионизированное состояние путём увеличения температуры до 0,3 эВ. На рис. 7 и 8 показано, что такой искусственно создаваемый начальный скачок температуры составляет менее 5 % от максимальной температуры разряда и не оказывает существенного влияния на состояние электро-разрядной плазмы.

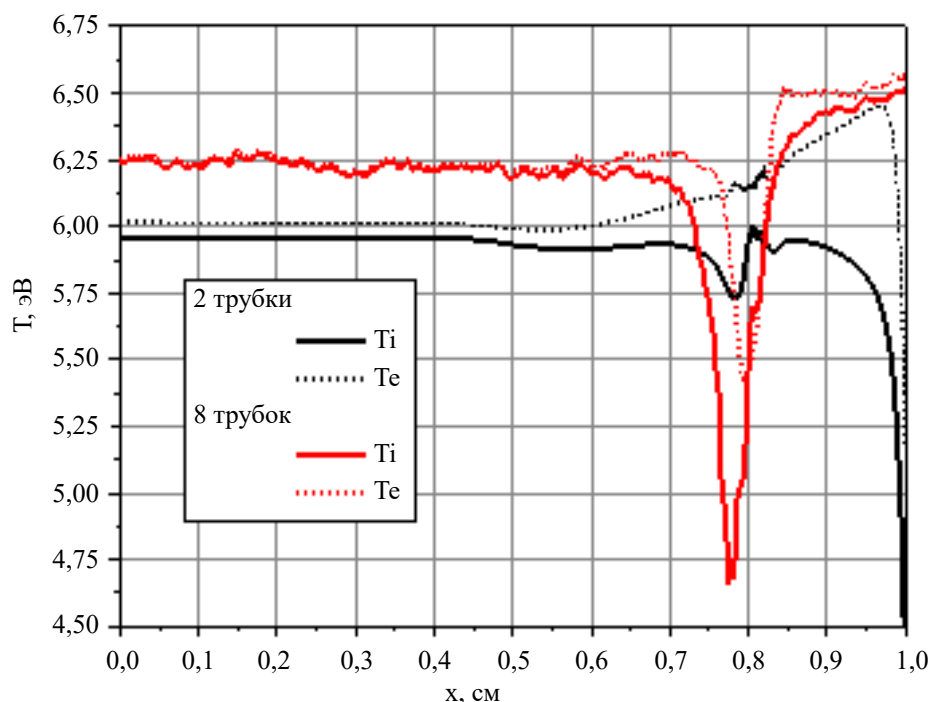


Рис. 7. Распределение электронной и ионной компонент температуры вдоль оси капилляра в момент максимальной силы тока для двух и восьми питающих каналов

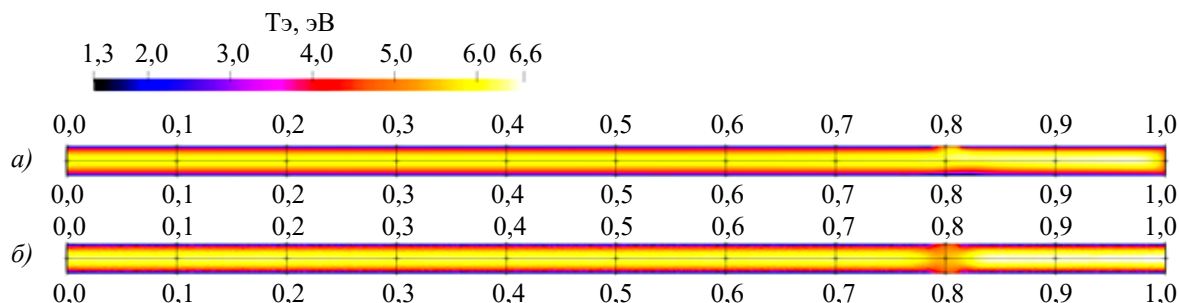


Рис. 8. Распределение электронной температуры в продольном сечении в момент максимальной силы тока: а — 8 питающих каналов; б — 2 питающих канала

Получено следующее распределение плотности электронов вдоль оси капилляра для различных моментов времени (рис. 9). Незначительное повышение плотности в окрестности выхода в начальный период обусловлено тем, что капиллярный газ испытывает некоторое торможение при вытеснении газа, который заполнял сопло к окончанию первого этапа процесса заполнения.

Для случаев двух и восьми подводящих каналов распределение плотности плазмы разряда практически идентичное с небольшими отличиями в области от 0,75 до 1 см (рис. 10). Это вызвано вытеснением плазмы разряда в подводящие каналы в процессе разряда: следует учесть, что площадь сечения, по которому поступает газ в капилляр, в случае восьми трубок в 4 раза больше, чем в случае двух трубок.

Наиболее наглядно неоднородность просматривается в сечении потока, взятом в окрестности подводящих каналов, что показано на рис. 11. В области стыковки питающих каналов плотность электронов примерно в два раза ниже, чем в центральной части капилляра. Также можно отметить хорошую симметрию распределения. Отметим ещё раз, что радиальная симметрия распределения и однородности канала вдоль оси важна для ускорения. Большое значение имеет также и достаточно большой градиент плотности по границам формируемого волновода, что создаёт благоприятные условия для коллимации лазерного излучения в волноводе, что наглядно показано на рис. 15.

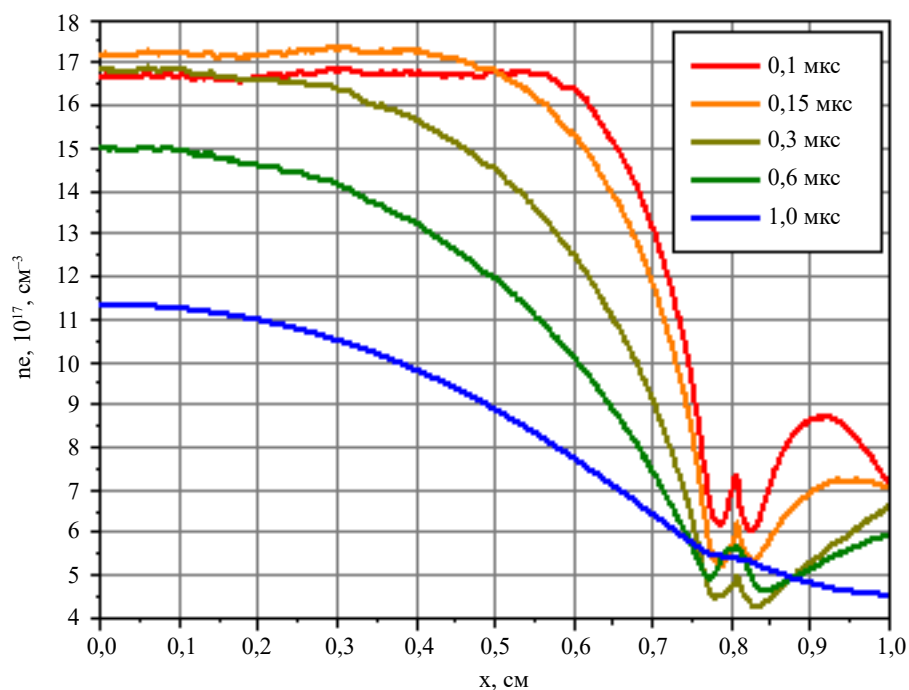


Рис. 9. Концентрация электронов на оси капилляра в различные моменты времени относительно времени начала электрического разряда для системы с восемью питающими каналами

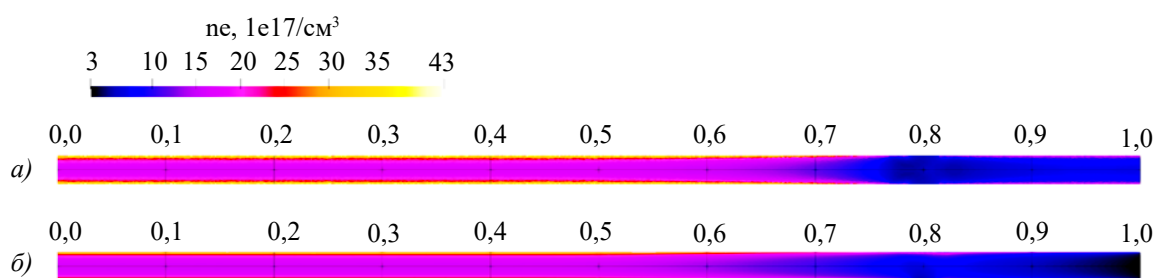


Рис. 10. Распределение электронной плотности в продольном сечении в момент максимальной силы тока: *a* — 8 питающих каналов; *б* — 2 питающих канала

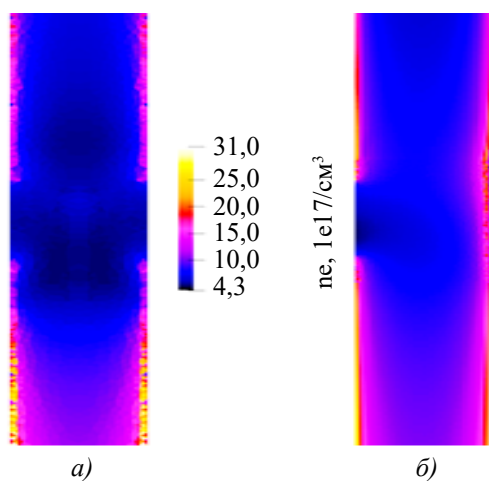


Рис. 11. Распределение электронной плотности в продольном сечении в окрестности крепления питающих каналов в момент максимальной силы тока: *a* — 8 питающих каналов; *б* — 2 питающих канала

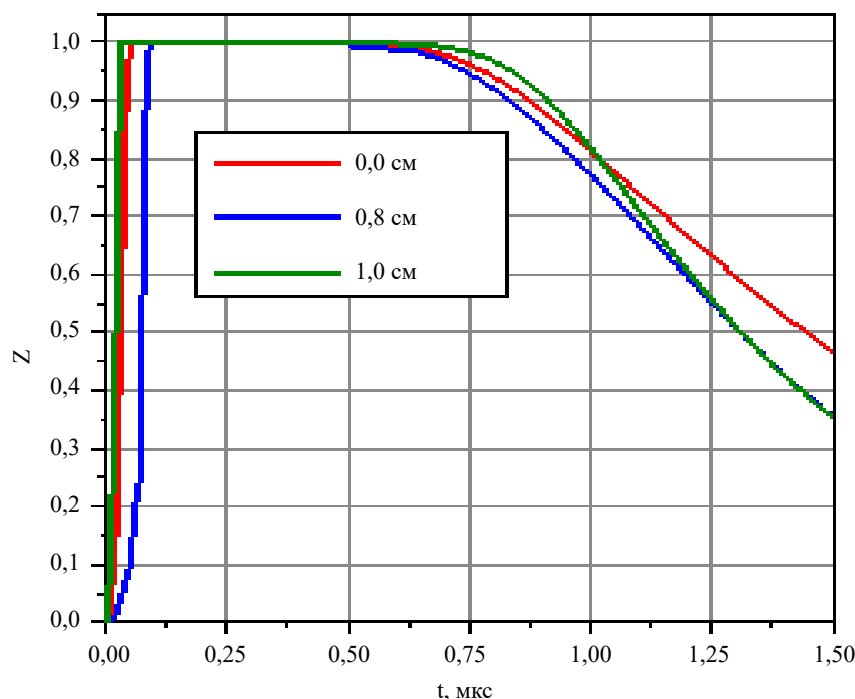


Рис. 12. Уровни ионизации водорода в трех контрольных точках на оси капилляра (указано расстояние точек относительно его центра) в зависимости от времени

Канал считается подготовленным для пропускания через него ускоряющего лазерного импульса, когда уровень ионизации водорода достигает единицы. Рассмотрим эволюцию ионизации (рис. 12) в трех контрольных точках на оси, взятых на определённом расстоянии от центра капилляра: 0 см — центр основного канала, 0,8 см — точка напротив подводящих каналов, 1 см — торец капилляра. Исходя из данных, представленных на рис. 12, можно сделать вывод, что волновод с требуемыми свойствами формируется по всей длине капилляра и существует от момента максимальной силы тока (150 нс) до момента ≈ 700 нс, т. е. в течение времени ≈ 500 –600 нс.

Из распределения плотности, представленного на рис. 10, следует, что имеется отличие структур плазменных волноводов в зависимости геометрии подводящих каналов. Это отличие несущественно для распределения плотности электронов в центральной части капилляра. Расхождения в распределении плотности электронов в окрестности питающих каналов и далее до открытого торца гораздо более заметны — до 50 % от средней плотности на отрезке от 0,75 до 1 см по длине капилляра. В варианте питания восемью каналами заметная часть плазмы вытесняется в них, поэтому вблизи входа питающих каналов находится область плазмы пониженной плотности. В варианте с двумя каналами вытеснение плазмы в каналы менее заметно и в большей степени плазма вытекает через торцы капилляра.

Наиболее важной характеристикой плазмы в отношении ее использования как рабочей среды для ускорения электронов лазерным импульсом является концентрация электронов на оси капилляра. Среднее значение концентрации электронов в момент максимальной силы тока для обоих случаев оказывается почти одинаковым в области течения между центральным сечением капилляра и вплоть до расстояния от центра примерно 0,75 см, с небольшим отличием в торцевых областях, и равно $n_e \approx 1,8 \times 10^{18} \text{ см}^{-3}$. В области наибольшего разрежения, от 0,75 до 1 см, электронная концентрация примерно равна $n_e \approx 0,8 \times 10^{18} \text{ см}^{-3}$. Отметим, что данные значения концентрации находятся в хорошем соответствии с значением концентрации $\sim 2 \times 10^{18} \text{ см}^{-3}$, определенной в [2, 21] для капилляра с такими же, как в настоящей работе, диаметром и длиной, и рассчитанной на эксперимент с энергией ускоряющего лазерного импульса ~ 3 Дж при длительности около 30 фс.

На рис. 13 и 14 представлено поперечное распределение плотности и электронной концентрации в центре трубки ($x = 0$ см). Полученные значения плотности для восьми и двух подводящих трубок близки к значению, полученному в двумерном варианте. Незначительные различия в распределениях плотности электронов для двух вариантов заполнения капилляра обусловлены различной структурой используемых в этих вариантах сеток, что также отражается на картине температуры (рис. 7, 8). На рис. 15 представлено распределение концентрации электронов поперёк капилляра на различном расстоянии от центра.

Поперечная динамика капиллярной плазмы, приводящая к формированию плазменного канала с параметрами, пригодными для лазерного ускорения, аналогична рассмотренной в [9], где для расчетов использовалось одномерная модель течения в приближении цилиндрической симметрии. Трёхмерное моделирование показывает, что время жизни плазменного канала определяется истечением плазмы в открытые торцевые отверстия капилляра, и, частично, в обратном течении в питающие каналы.

Длительность электрического импульса оказывает меньшее влияние на время существования канала сравнительно с капилляром большей длины — 10 сантиметров и более.

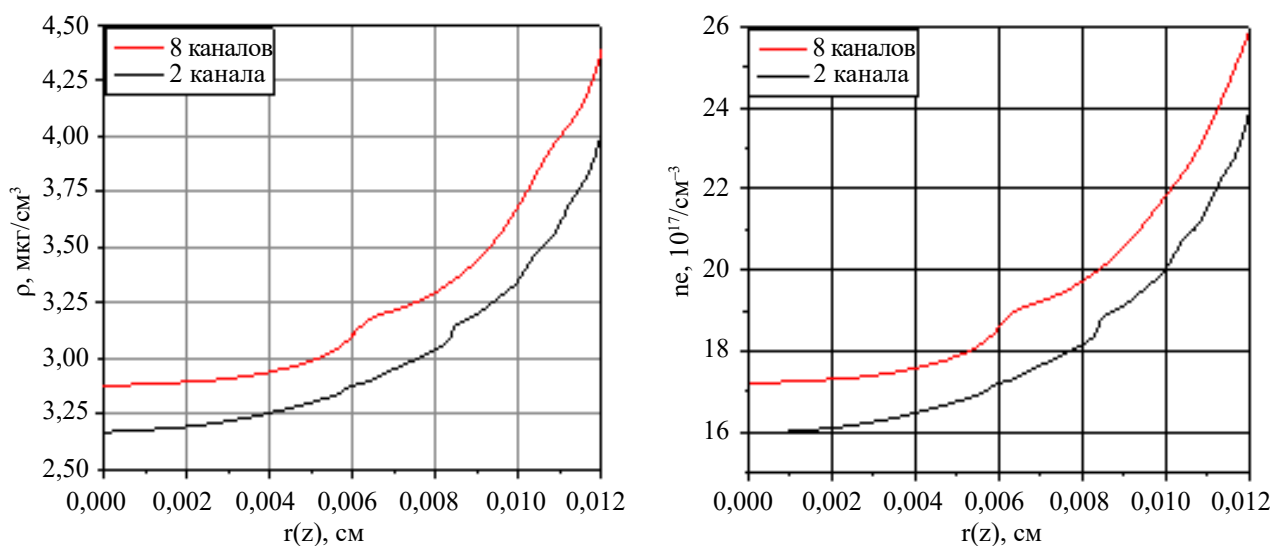


Рис. 13. Поперечное распределение плотности и концентрации электронов в центре капилляра для двух и восьми питающих каналов в момент максимальной силы тока

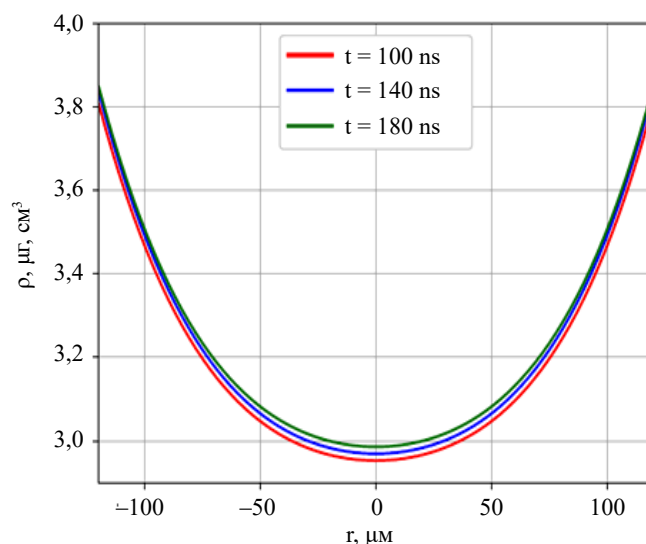


Рис. 14. Поперечное распределение плотности в центре капилляра в двумерной модели [21]

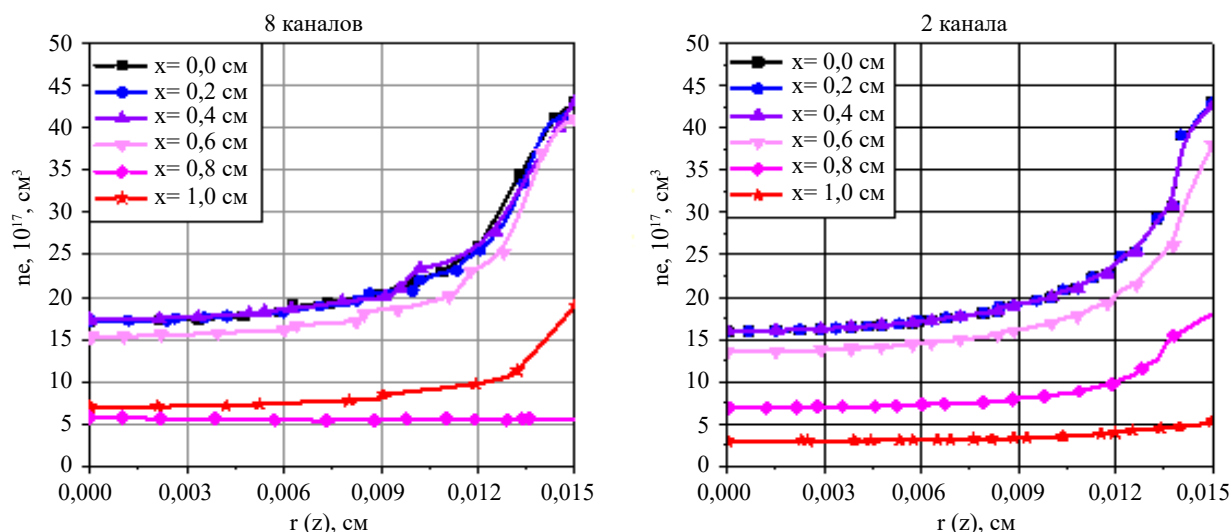


Рис. 15. Поперечное распределение концентрации электронов на различном расстоянии от центра капилляра для восьми и двух питающих каналов

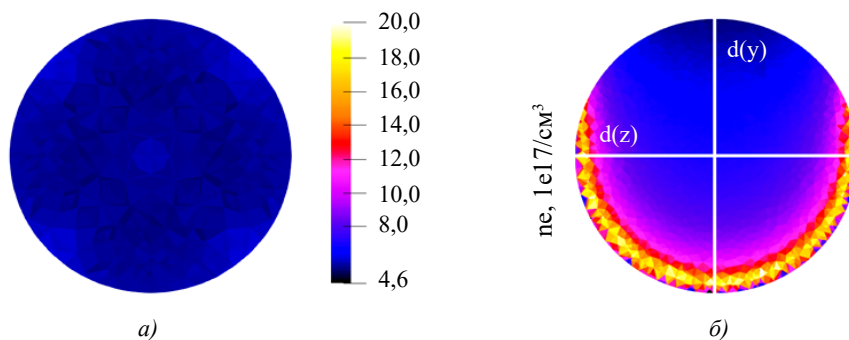


Рис. 16. Распределение концентрации электронов в сечении поперёк капилляра вблизи крепления питающих каналов ($x = 0,8$): а — 8 питающих каналов; б — 2 питающих канала

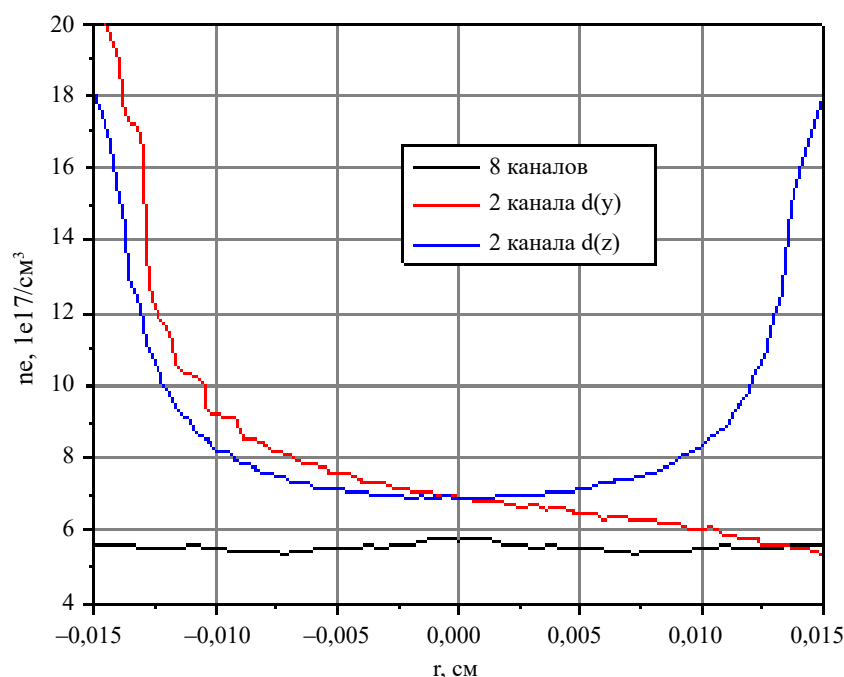


Рис. 17. Распределение электронной концентрации по диаметру сечения в варианте питания восемью каналами, а также по вертикальной и горизонтальной осям в варианте с двумя питающими каналами

На рис. 16 и 17 показано распределение электронной концентрации в месте крепления питающих каналов. В варианте с восемью каналами данная область обладает большей оптической прозрачностью, чем в варианте двух каналов. Помимо меньшей прозрачности, для «двухканальной» системы заметно нарушение радиальной симметрии плазменного канала. Длительность этапа электрического разряда измеряется от момента начала разряда до момента практически полной рекомбинации водорода.

Истечение горячего газа и повторное заполнение капилляра. По окончании рекомбинации водорода в капилляре остаётся достаточное количество горячего газа под высоким давлением. Продолжается активное расширение газа в направлении открытых торцов и питающих каналов, начавшееся в момент инициации электроразряда.

Будем считать истечение горячего газа завершённым в момент, когда давление водорода в питающем резервуаре превышает давление расширяющегося газа и возобновляется процесс заполнения капилляра холодным газом. Отметим, что при повторном заполнении центральная часть капилляра уже содержит газ, который, остывая, приходит к начальному состоянию.

Повторное заполнение происходит практически как первичное. Отличие состоит в более плотной среде по сравнению с её первичным состоянием, а также в более высокой температуре газа в системе «капилляр + питающие каналы». Времена первичного и повторного заполнения оказываются близкими, для удобства анализа циклов работы капилляра будем считать их равными.

На рис. 18 представлено сравнение профилей плотности вдоль оси для первичного и повторного заполнения для случая с двумя питающими каналами.

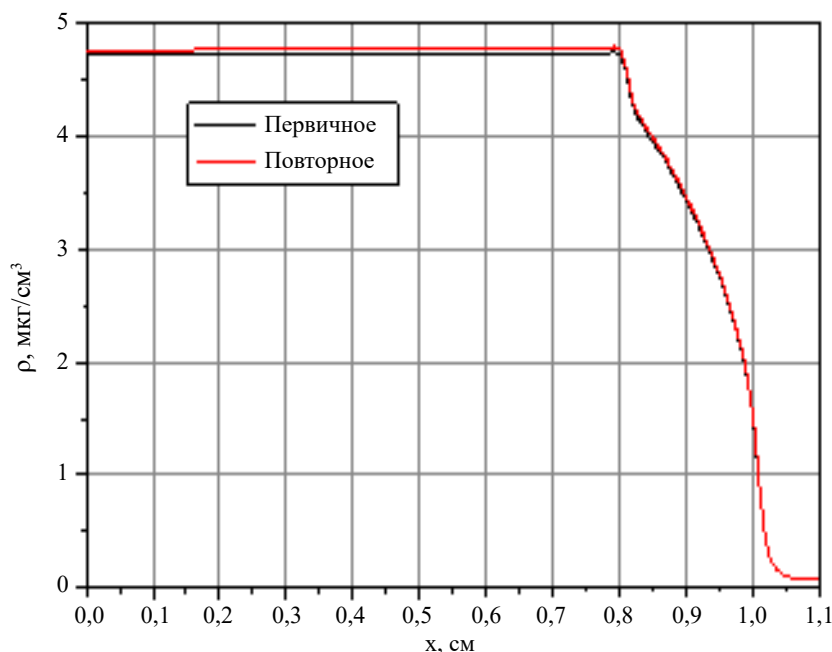


Рис. 18. Профили плотности вдоль оси капилляра для первичного и повторного заполнения на примере случая с двумя трубками

Обсуждение и заключение. Расчетное время одного цикла «заполнение — разряд — релаксация» представлено в таблице 1. В варианте расчета по двумерной модели время повторного заполнения не превышает половины времени первичного заполнения.

Таблица 1

Расчетное время одного цикла «заполнение — разряд — релаксация»

Форма крепления	8 каналов	2 канала	2D
Время заполнения, мкс	225	200	125
Ионизированное состояние, мкс	5	5	5
Выход нагретого газа, мкс	< 50	< 45	
Суммарное время цикла, мкс	≈ 280	≈ 250	≈ 130 (перв.) ≈ 60 (повт.)

Наибольшее влияние на частоту работы короткого капилляра оказывает форма подводящих каналов (2 трубки, 8 трубок, двумерная модель заполнения). Диаметры питающих каналов, а также их длина очевидно влияют на темп заполнения. В меньшей степени на длительность цикла влияют температура и давление поступающего в систему газа. Степень интенсивности заполнения определяется экспериментальными условиями [2].

Построенная авторами математическая модель капиллярной системы позволяет сделать вывод о том, что можно обеспечить работу капилляра в диапазоне частот от 1 до 16,5 КГц.

В заключение оценим энергию электронов, набираемую при их ускорении лазерным импульсом в канале капиллярного разряда, для чего можно воспользоваться, например, предложенной в работе [23] формулой:

$$W \text{ (GeV)} \sim \frac{0,4 I (W/cm^2)}{n_e (1/cm^3)}, \quad (2)$$

где W — энергия ускоренных электронов; $I \leq 10^{18} W/cm^2$ — интенсивность лазера ускорителя; n_e — средняя концентрация электронов на пути следования луча.

В качестве исходных данных для оценки возьмем параметры плазменной среды в центре капилляра в момент близкий к максимальной силе разрядного тока (~150 нс). Используя полученные на этапе разряда данные, можно ожидать энергии электронов при ускорении, по формуле (2), $W_e \leq 0,5$ ГэВ, что справедливо для всех трёх рассмотренных вариантов геометрии.

Полученные значения ускорения и возможной частоты работы ускорителя позволяют говорить о перспективности использования КЛПУ с малой длиной канала. Важной характеристикой электронного пучка является его эмиттанс. Для его аккуратной оценки необходимо выполнить моделирование на основе PIC модели, например,

в пондеромоторном приближении [5]. Соответствующие вычислительные эксперименты являются предметом отдельного исследования.

Список литературы

1. Tajima T., Dawson J.M. Laser Electron Accelerator. *Phys. Rev. Lett.* 1979;43:267. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.43.267>
2. Molodozhentsev A., Korn G., Maier A., Pribyl L. LWFA-driven Free Electron Laser for ELI-Beamlines. *ICFA Advanced Beam Dynamics Workshop on Future Light Sources*. JACoW, Geneva. 2018;60:62–67. <https://doi.org/10.18429/JACoW-FLS2018-TUA2WC02>
3. Leemans W., Esarey E. Laser-driven plasma-wave electron accelerators. *Phys. Today*. 2009;62(3):44.
4. Schroeder C.B., Esarey E., Geddes C.G.R., Benedetti C., Leemans W.P. Physics considerations for laser-plasma linear colliders. *Phys. Rev. Accel. Beams*. 2010;13:101301. <https://doi.org/10.1103/PhysRevSTAB.13.101301>
5. Leemans W.P., Gonsalves A.J., Mao H.-S., Nakamura K., Benedetti C., Schroeder C.B., et al. Multi-GeV Electron Beams from Capillary-Discharge-Guided Subpetawatt Laser Pulses in the Self-Trapping Regime. *Phys. Rev. Lett.* 2014;113:245002. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.245002>
6. Gonsalves A.J., Nakamura K., Daniels J., Benedetti C., Pieronek C., de Raadt T.C.H., et al. Petawatt laser guiding and electron beam acceleration to 8 GeV in a laser-heated capillary discharge waveguide. *Phys. Rev. Lett.* 2019;122:084801. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.084801>
7. Esarey E., Schroeder C.B., Leemans W.P. Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators. *Rev. Mod. Phys.* 2009;81:1229. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.1229>
8. Spence D.J., Hooker S.M. Investigation of a hydrogen plasma waveguide. *Phys. Rev. E*. 2001;63:015401(R). <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.63.015401>
9. Bobrova N.A., Esaulov A.A., Sakai J.-I., Sasorov P.V., Spence D.J., Butler A., et al. Simulations of a hydrogen-filled capillary discharge waveguide. *Phys. Rev. E*. 2002;65:016407. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.65.016407>
10. Hosokai T., Kando M., Dewa H., Kotaki H., Kondo S., Hasegawa N., et al. Optical guidance of terrawatt laser pulses by the implosion phase of a fast z-pinch discharge in a gas-filled capillary. *Opt. Lett.* 2000;25:10–12. <https://doi.org/10.1364/OL.25.000010>
11. Kameshima T., Kotaki H., Kando M., Daito I., Kawase K., Fukuda Y., et al. Laser pulse guiding and electron acceleration in the ablative capillary discharge plasma. *Phys. Plasmas*. 2009;16:093101. <https://doi.org/10.1063/1.3212589>
12. Gonsalves A.J., Nakamura K., Lin C., Panasenkov D., Shiraishi S., Sokollik T., et al. Tunable laser plasma accelerator based on longitudinal density tailoring. *Nat. Phys.* 2011;7:862–866. <https://doi.org/10.1038/nphys2071>
13. Pieronek C., Gonsalves A., Benedetti C., Bulanov S., van Tilborg J., Bin J., et al. Laser-heated capillary discharge waveguides as tunable structures for laser-plasma acceleration. *Phys. Plasmas*. 2020;27:093101. <https://doi.org/10.1063/5.0014961>
14. Bobrova N.A., Sasorov P.V., Benedetti C., Bulanov S.S., Geddes C.G.R., Schroeder C.B., et al. Laser-heater assisted plasma channel formation in capillary discharge waveguides. *Phys. Plasmas*. 2013;20:020703. <https://doi.org/10.1063/1.4793447>
15. Bagdasarov G.A., Bobrova N.A., Olkhovskaya O.G., Gasilov V.A., Benedetti C., Bulanov S.S., et al. Creation of axially uniform plasma channel in laser-assisted capillary discharge. *Phys. Plasmas*. 2021;28:053104. <https://doi.org/10.1063/5.0046428>
16. Gonsalves A.J., Liu F., Bobrova N.A., Sasorov P.V., Pieronek C., Daniels J., et al. Demonstration of a High Repetition Rate Capillary Discharge Waveguide. *J. Appl. Phys.* 2016;119:033302. <https://doi.org/10.1063/1.4940121>
17. Alejo A., Cowley J., Picksley A., Walczak R., Hooker S.M. Demonstration of kilohertz operation of hydrodynamic optical-field-ionized plasma channels. *Phys. Rev. Accel. Beams*. 2022;25:011301. <https://doi.org/10.1103/PhysRevAccelBeams.25.011301>
18. D'Arcy R., Chappell J., Beinortaitė J., Diederichs S., Boyle G., Foster B., et al. Recovery time of a plasma-wakefield accelerator. *Nature*. 2022;603:58–62. <https://doi.org/10.1038/s41586-021-04348-8>
19. Bagdasarov G.A., Kruchinin K.O., Molodozhentsev A.Yu., Sasorov P.V., Bulanov S.V., Gasilov V.A. Discharge Plasma Formation in Square Capillary with Gas Supply Channels. *Phys. Rev. Res.* 2022;4:013063. <https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.4.013063>
20. Gasilov V.A., Boldarev A.S., Olkhovskaya O.G., Boykov D.S., Sharova Yu.S., Savenko N.O., et al. MARPLE: software for multiphysics modelling in continuous media. *Numerical Methods and Programming*. 2023;24(4):316–338. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v24r423>
21. Sasorov P., Bagdasarov G., Bobrova N., Grittani G., Molodozhentsev A., Bulanov S.V. Capillary discharge in the high repetition rate regime. *Physical Review Research*. 2024;6:013290. <https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.6.013290>
22. Савенко Н.О. О разностной аппроксимации газодинамических потоков на свободной границе расчетной области. *Препринты ИПИМ им. М.В. Келдыша*. 2023;51:28с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2023-51>
23. Leemans W.P., Nagler B., Gonsalves A.J., Toth Cs., Nakamura K., Geddes C.G.R., et al. GeV electron beams from a centimeter-scale accelerator. *Nature physics*. 2006;2:696–699. <https://doi.org/10.1063/1.2718524>
24. Брагинский С.И., Леонтович М.А. (ред.). Явления переноса в плазме. В кн.: *Вопросы теории плазмы*. Выпуск 1. ГосАтомиздат. 1963 г. С. 183–272.

References

1. Tajima T., Dawson J.M. Laser Electron Accelerator. *Phys. Rev. Lett.* 1979;43:267. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.43.267>
2. Molodozhentsev A., Korn G., Maier A., Pribyl L. LWFA-driven Free Electron Laser for ELI-Beamlines. *ICFA Advanced Beam Dynamics Workshop on Future Light Sources*. JACoW, Geneva. 2018;60:62–67. <https://doi.org/10.18429/JACoW-FLS2018-TUA2WC02>
3. Leemans W., Esarey E. Laser-driven plasma-wave electron accelerators. *Phys. Today*. 2009;62(3):44.
4. Schroeder C.B., Esarey E., Geddes C.G.R., Benedetti C., Leemans W.P. Physics considerations for laser-plasma linear colliders. *Phys. Rev. Accel. Beams*. 2010;13:101301. <https://doi.org/10.1103/PhysRevSTAB.13.101301>
5. Leemans W.P., Gonsalves A.J., Mao H.-S., Nakamura K., Benedetti C., Schroeder C.B., et al. Multi-GeV Electron Beams from Capillary-Discharge-Guided Subpetawatt Laser Pulses in the Self-Trapping Regime. *Phys. Rev. Lett.* 2014;113:245002. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.245002>
6. Gonsalves A.J., Nakamura K., Daniels J., Benedetti C., Pieronek C., de Raadt T.C.H., et al. Petawatt laser guiding and electron beam acceleration to 8 GeV in a laser-heated capillary discharge waveguide. *Phys. Rev. Lett.* 2019;122:084801. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.084801>
7. Esarey E., Schroeder C.B., Leemans W.P. Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators. *Rev. Mod. Phys.* 2009;81:1229. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.1229>
8. Spence D.J., Hooker S.M. Investigation of a hydrogen plasma waveguide. *Phys. Rev. E*. 2001;63:015401(R). <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.63.015401>
9. Bobrova N.A., Esaulov A.A., Sakai J.-I., Sasorov P.V., Spence D.J., Butler A., et al. Simulations of a hydrogen-filled capillary discharge waveguide. *Phys. Rev. E*. 2002;65:016407. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.65.016407>
10. Hosokai T., Kando M., Dewa H., Kotaki H., Kondo S., Hasegawa N., et al. Optical guidance of terrawatt laser pulses by the implosion phase of a fast z-pinch discharge in a gas-filled capillary. *Opt. Lett.* 2000;25:10–12. <https://doi.org/10.1364/OL.25.000010>
11. Kameshima T., Kotaki H., Kando M., Daito I., Kawase K., Fukuda Y., et al. Laser pulse guiding and electron acceleration in the ablative capillary discharge plasma. *Phys. Plasmas*. 2009;16:093101. <https://doi.org/10.1063/1.3212589>
12. Gonsalves A.J., Nakamura K., Lin C., Panasenkov D., Shiraishi S., Sokollik T., et al. Tunable laser plasma accelerator based on longitudinal density tailoring. *Nat. Phys.* 2011;7:862–866. <https://doi.org/10.1038/nphys2071>
13. Pieronek C., Gonsalves A., Benedetti C., Bulanov S., van Tilborg J., Bin J., et al. Laser-heated capillary discharge waveguides as tunable structures for laser-plasma acceleration. *Phys. Plasmas*. 2020;27:093101. <https://doi.org/10.1063/5.0014961>
14. Bobrova N.A., Sasorov P.V., Benedetti C., Bulanov S.S., Geddes C.G.R., Schroeder C.B., et al. Laser-heater assisted plasma channel formation in capillary discharge waveguides. *Phys. Plasmas*. 2013;20:020703. <https://doi.org/10.1063/1.4793447>
15. Bagdasarov G.A., Bobrova N.A., Olkhovskaya O.G., Gasilov V.A., Benedetti C., Bulanov S.S., et al. Creation of axially uniform plasma channel in laser-assisted capillary discharge. *Phys. Plasmas*. 2021;28:053104. <https://doi.org/10.1063/5.0046428>
16. Gonsalves A.J., Liu F., Bobrova N.A., Sasorov P.V., Pieronek C., Daniels J., et al. Demonstration of a High Repetition Rate Capillary Discharge Waveguide. *J. Appl. Phys.* 2016;119:033302. <https://doi.org/10.1063/1.4940121>
17. Alejo A., Cowley J., Picksley A., Walczak R., Hooker S.M. Demonstration of kilohertz operation of hydrodynamic optical-field-ionized plasma channels. *Phys. Rev. Accel. Beams*. 2022;25:011301. <https://doi.org/10.1103/PhysRevAccelBeams.25.011301>
18. D'Arcy R., Chappell J., Beinortaite J., Diederichs S., Boyle G., Foster B., et al. Recovery time of a plasma-wakefield accelerator. *Nature*. 2022;603:58–62. <https://doi.org/10.1038/s41586-021-04348-8>
19. Bagdasarov G.A., Kruchinin K.O., Molodozhentsev A.Yu., Sasorov P.V., Bulanov S.V., Gasilov V.A. Discharge Plasma Formation in Square Capillary with Gas Supply Channels. *Phys. Rev. Res.* 2022;4:013063. <https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.4.013063>
20. Gasilov V.A., Boldarev A.S., Olkhovskaya O.G., Boykov D.S., Sharova Yu.S., Savenko N.O., et al. MARPLE: software for multiphysics modelling in continuous media. *Numerical Methods and Programming*. 2023;24(4):316–338. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v24r423>
21. Sasorov P., Bagdasarov G., Bobrova N., Grittani G., Molodozhentsev A., Bulanov S.V. Capillary discharge in the high repetition rate regime. *Physical Review Research*. 2024;6:013290. <https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.6.013290>
22. Savenko N.O. On the difference approximation of gasdynamic flows on the free boundary of the computational domain. *Preprints of the Institute of Applied Mathematics named after M.V. Keldysh*. 2023;51:28. (in Russ.). <https://doi.org/10.20948/prepr-2023-51>
23. Leemans W.P., Nagler B., Gonsalves A.J., Toth Cs., Nakamura K., Geddes C.G.R., et al. GeV electron beams from a centimeter-scale accelerator. *Nature physics*. 2006;2:696–699. <https://doi.org/10.1063/1.2718524>
24. Braginsky S.I., Leontovich M.A. (eds). Phenomena of transport in plasma. In: *Questions of plasma theory*. Issue 1. GosAtomIzdat. 1963. P. 183–272. (in Russ.).

Поступила в редакцию 04.06.2024

Поступила после рецензирования 24.06.2024

Принята к публикации 25.06.2024

Об авторах:

Гасилов Владимир Анатольевич, главный научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук (РФ, 125047, Москва, Миусская пл., 4), [ORCID](#), [MathNet](#), vgasilov@keldysh.ru

Савенко Никита Олегович, младший научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук (РФ, 125047, Москва, Миусская пл., 4), [ORCID](#), [MathNet](#), savenkonkt@gmail.com

Шарова Юлия Сергеевна, младший научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук (РФ, 125047, Москва, Миусская пл., 4), [ORCID](#), [MathNet](#), yulia-shar@mail.ru

Заявленный вклад соавторов:

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Received 04.06.2024

Revised 24.06.2024

Accepted 25.06.2024

About the Authors:

Vladimir A. Gasilov, Principal Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (4, Miusskaya sq., Moscow, 125047, RF), [ORCID](#), [MathNet](#), vgasilov@keldysh.ru

Nikita O. Savenko, Junior Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (4, Miusskaya sq., Moscow, 125047, RF), [ORCID](#), [MathNet](#), savenkonkt@gmail.com

Yulia S. Sharova, Junior Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (4, Miusskaya sq., Moscow, 125047, RF), [ORCID](#), [MathNet](#), yulia-shar@mail.ru

Claimed contributor-ship:

All authors have made an equivalent contribution to the preparation of the publication.

Conflict of interest statement

The authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ INFORMATION TECHNOLOGY



УДК 519.6

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-60-67>


Определение границы раздела сред по трёхмерным данным матричного ультразвукового датчика с использованием свёрточных нейронных сетей

А.В. Васюков

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
г. Долгопрудный, Российская Федерация

✉ vasyukov.av@mipt.ru

Аннотация

Введение. Работа посвящена моделированию процесса ультразвукового медицинского исследования в гетерогенной среде, в которой присутствуют области с существенно разной скоростью звука. Такие постановки задач возникают, например, при визуализации структур мозга через череп. Целью данной работы является сравнение возможных подходов к определению границы раздела акустически контрастных сред с использованием свёрточных нейронных сетей.

Материалы и методы. В работе выполняется численное моделирование прямой задачи — получение синтетических расчётных ультразвуковых изображений по известной геометрии и реологии области, а также параметрам датчика. На расчётных изображениях воспроизводятся искажения и артефакты, типичные для постановок со стенкой черепа. Для решения обратной задачи определения границы раздела сред по сигналу с датчика используются свёрточные нейронные сети 2D и 3D структуры, следующие общей архитектуре UNet. Сети обучаются на наборах расчётных данных, после чего тестируются на отдельных примерах, не использованных при обучении.

Результаты исследования. Получены расчётные В-сканы для характерных постановок. Показана возможность локализации границы аберратора с хорошим качеством как для 2D, так и для 3D свёрточных сетей. Показано более высокое качество результата для 3D сетей в случае наличия значительного шума и артефактов во входных данных. Установлено, что сеть 3D архитектуры может обеспечить получение формы границы раздела сред за 0,1 секунды.

Обсуждение и заключения. Результаты работы могут быть использованы для развития технологий транскраниального ультразвукового исследования. Быстрая локализация границы стенки черепа может быть включена в алгоритмы построения изображения для компенсации искажений, вызванных различием скоростей звука в костных и в мягких тканях.

Ключевые слова: транскраниальное УЗИ, матричный датчик, аберрации, математическое моделирование, сеточно-характеристический метод, свёрточные сети

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 22-11-00142).

Для цитирования. Васюков А.В. Определение границы раздела сред по данным матричного ультразвукового датчика с использованием свёрточных нейронных сетей. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):60–67. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-60-67>

Locating the Interface between Different Media Based on Matrix Ultrasonic Sensor Data Using Convolutional Neural Networks

Alexey V. Vasyukov 

Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russian Federation

✉ vasyukov.av@mipt.ru

Abstract

Introduction. The study focuses on modelling the process of ultrasound medical examination in a heterogeneous environment with regions of significantly different sound speeds. Such scenarios typically arise when visualizing brain structures through the skull. The aim of this work is to compare possible approaches to determining the interface between acoustically contrasting media using convolutional neural networks.

Materials and Methods. Numerical modelling of the direct problem is performed, obtaining synthetic calculated ultrasonic images based on known geometry and rheology of the area as well as sensor parameters. The calculated images reproduce distortions and artifacts typical for setups involving the skull wall. Convolutional neural networks of 2D and 3D structures following the UNet architecture are used to solve the inverse problem of determining the interface between media based on a sensor signal. The networks are trained on computational datasets and then tested on individual samples not used in training.

Results. Numerical B-scans for characteristic setups were obtained. The possibility of localizing the aberrator boundary with good quality for both 2D and 3D convolutional networks was demonstrated. A higher quality result was obtained for the 3D network in the presence of significant noise and artifacts in the input data. It was established that the 3D architecture network can provide the shape of the interface between media in 0.1 seconds.

Discussion and Conclusions. The results can be used for the development of transcranial ultrasound technologies. Rapid localization of the skull boundary can be incorporated into imaging algorithms to compensate for distortions caused by differences in sound velocities in bone and soft tissues.

Keywords: transcranial ultrasound, matrix probe, aberrations, mathematical modelling, grid-characteristic method, convolutional networks

Funding information. The work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project 22-11-00142).

For citation. Vasyukov A.V. Locating the interface between different media based on matrix ultrasonic sensor data using convolutional neural networks. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):60–67. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-60-67>

Введение. Данная работа рассматривает задачу формирования ультразвукового изображения в гетерогенной среде, в которой присутствуют области с существенно разной скоростью звука. Такая постановка ориентирована на дальнейшее приложение к задачам визуализации структур мозга через кости черепа. Несмотря на многолетнее развитие медицинской техники, конкретно эта задача на данный момент всё ещё является крайне сложной — существующие методики имеют множество ограничений и требуют крайне высокой квалификации специалиста, проводящего исследование.

Проблема следует из того факта, что типовые алгоритмы, на которые опирается работа распространённого коммерчески доступного оборудования, основаны на том, что скорость звука в исследуемой области изменяется слабо. Это предположение уместно, когда речь идёт о мягких тканях. Однако, при исследовании мозга через череп данное базовое предположение не выполняется, из-за чего традиционные подходы к формированию ультразвуковых изображений дают сильно искажённую картину [1].

В рамках данной работы рассматривается задача определения положения границы раздела двух сред — жёсткой (модельной стенки черепа) и мягкой (модельной ткани мозга). Требуется, чтобы предложенный метод решения задачи мог работать в режиме, близком к реальному времени, что обеспечит возможность его прикладного использования. В будущем быстрое решение задачи локализации границы стенки черепа может быть включено в алгоритмы построения изображения для компенсации искажений, вызванных различием скоростей звука в костных и в мягких тканях.

Для решения данной задачи рассматриваются свёрточные нейронные сети. Выбор обусловлен богатым опытом их использования для родственных биомедицинских задач, а также возможностью обеспечить высокую скорость их работы. В работе [2] свёрточные сети были применены для задач УЗИ, работа [3] показала возможность их использования в задачах эластографии, в публикациях [4–6] изложен опыт использования свёрточных сетей для трёхмерных ультразвуковых данных. При этом использование данного общего подхода требует аккуратности и калибровки для каждой конкретной задачи [7].

Материалы и методы. При решении прямой задачи в работе выполняется численное моделирование процесса распространения ультразвукового импульса в образце для получения синтетических расчётных ультразвуковых изображений по известной геометрии и реологии области, а также параметрам датчика.

Для описания среды используется приближение акустики [8]. Эта модель является значительным упрощением по сравнению с полной системой уравнений упругости, в ней присутствуют только продольные волны, сдвиговых волн в акустическом приближении нет. Тем не менее, этот подход широко используется для описания ультразвуковых импульсов в биологических тканях, так как в них для ультразвука коэффициент затухания сдвиговых волн на четыре порядка больше, чем продольных [9].

Для численного решения прямой задачи используется метод трассировки лучей с реконструкцией волнового фронта [1], который позволяет получить расчётные ультразвуковые изображения, качественно и количественно соответствующие экспериментальным данным. Метод позволяет описывать отражение от протяжённых границ и от точечных отражателей. В рамках данной работы граница между слоями и границы крупных пор описываются как протяжённые границы, а малые отражатели в среде считаются точечными. После регистрации отражённого сигнала выполняется его обработка и построение В-скана по алгоритмам из [10].

Обратная задача в рамках данной работы — определение формы границы раздела акустически контрастных слоев. Входными данными для решения обратной задачи является отклик от среды, зарегистрированный матричным ультразвуковым датчиком. Выходными данными обратной задачи является положение границы раздела двух сред.

Для решения обратной задачи определения границы раздела сред по сигналу с датчика используются свёрточные нейронные сети.

Для обучения нейронных сетей формировался набор синтетических данных из результатов 1024 расчётов прямой задачи. Для тестирования сетей использовались отдельно подготовленные примеры, которые не входили в обучающую выборку.

В данной работе исследуются 2D и 3D сети с целью сравнения результатов. Все свёрточные сети следуют общей архитектуре UNet [11]. Глубина как 2D, так и 3D сети составляла 4 блока.

В случае 2D сети объём трёхмерных данных представляется как набор двумерных срезов. При обработке каждого среза на вход сети подаются три канала — целевой срез и два соседних, что до некоторой степени позволяет сети получить информацию о трёхмерном окружении объектов на срезе [12, 13].

В случае 3D сети на вход подаются трёхмерные данные, при этом используется подход на основе патчей [14, 15], так как он позволяет гибко управлять требованиями к оперативной памяти на GPU при обработке входных данных большого размера.

Результаты исследования. Постановка прямой задачи предполагает расчёт распространения ультразвукового сигнала в области, содержащей границу между акустически контрастными слоями. Расчетная область представляет собой параллелепипед. Верхняя грань параллелепипеда соответствует внешней границе области, в центре которой расположен матричный ультразвуковой датчик. Вне зоны контакта с датчиком верхняя грань моделируется как свободная поверхность. В области расположения датчика задаётся профиль внешнего давления. Для трёх остальных границ расчётной области ставится неотражающее граничное условие.

В рассмотренной постановке предполагается, что граница между двумя акустически контрастными слоями гладкая, может иметь произвольную форму. Кроме того, верхний слой содержит множество мелких отражателей, которые создают фоновый шум на итоговом ультразвуковом изображении, а также некоторое количество крупных пор, отклик от которых по интенсивности сравним с отражением от границы между слоями.

Скорость звука в обоих слоях постоянная. Верхний слой более жесткий, скорость звука в нём принимается 3,0 км/с. Нижний слой более мягкий, скорость звука в нём 1,5 км/с. Число мелких отражателей в расчётах варьировалось от 100 до 2500. Число крупных пор — от 5 до 50.

Матричный датчик имеет квадратную форму 24×24 элемента. Датчик излучает сигнал с частотой 3 МГц. Частота дискретизации при приёме сигнала составляет 45 МГц. Итоговая размерность полученных данных $24 \times 24 \times 1024$. Здесь 24×24 — физические размеры датчика, а 1024 — количество отсчётов по времени, записанных в ходе эксперимента каждым элементом датчика.

На рис. 1 представлен профиль границы раздела сред в одном из расчётов. Показаны четыре среза полных трёхмерных данных — положение границы под рядами элементов датчика с 5-го по 8-ой. По вертикальной оси — 24 элемента матричного датчика в данном срезе. По горизонтальной оси — отсчёты по времени. На рисунке изображение обрезано до первых 400 отсчётов из полного набора в 1024 отсчёта.

На рис. 2 продемонстрировано необработанное ультразвуковое изображение для данного расчёта. Общий «шум», который визуальным образом виден как флуктуации интенсивности серого фона, связан с большим количеством малых отражателей в среде. Граница раздела сред видна как область интенсивного отклика переменной амплитуды. Видны отдельные яркие отклики от крупных пор на глубинах 50, 70, 90, 110, 130 и особенно 230 (последние два среза на рисунке). Данные яркие отклики особенно сильно мешают автоматической обработке изображения, так как даже превышают по интенсивности отклик от искомой границы.

На рис. 3 и 4 показаны результаты работы свёрточной сети 2D структуры. На рис. 5 и 6 — результаты для 3D сети.

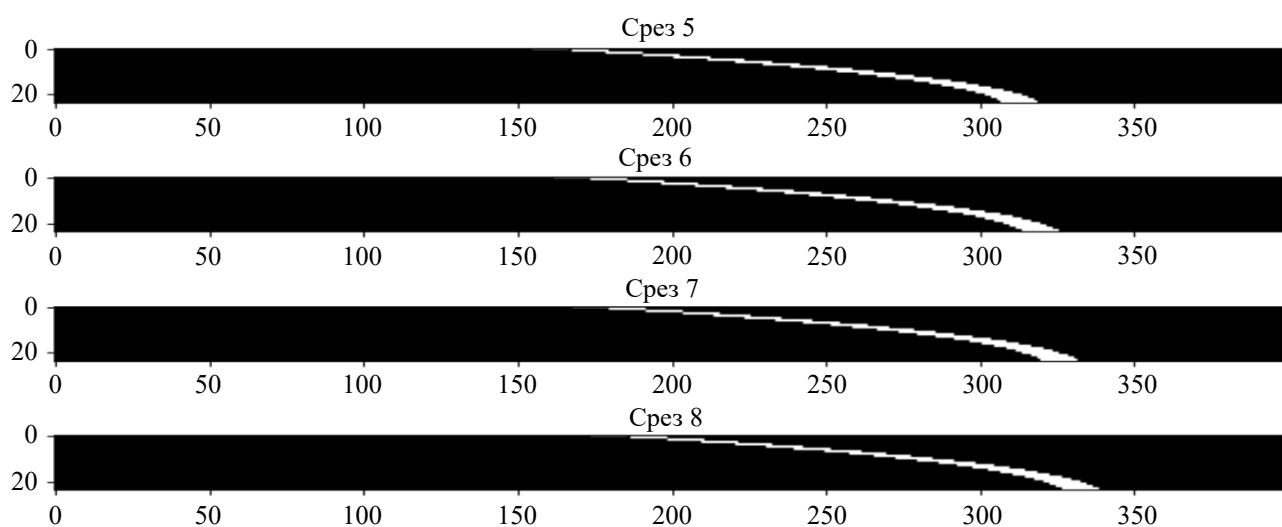


Рис. 1. Расположение границы раздела сред

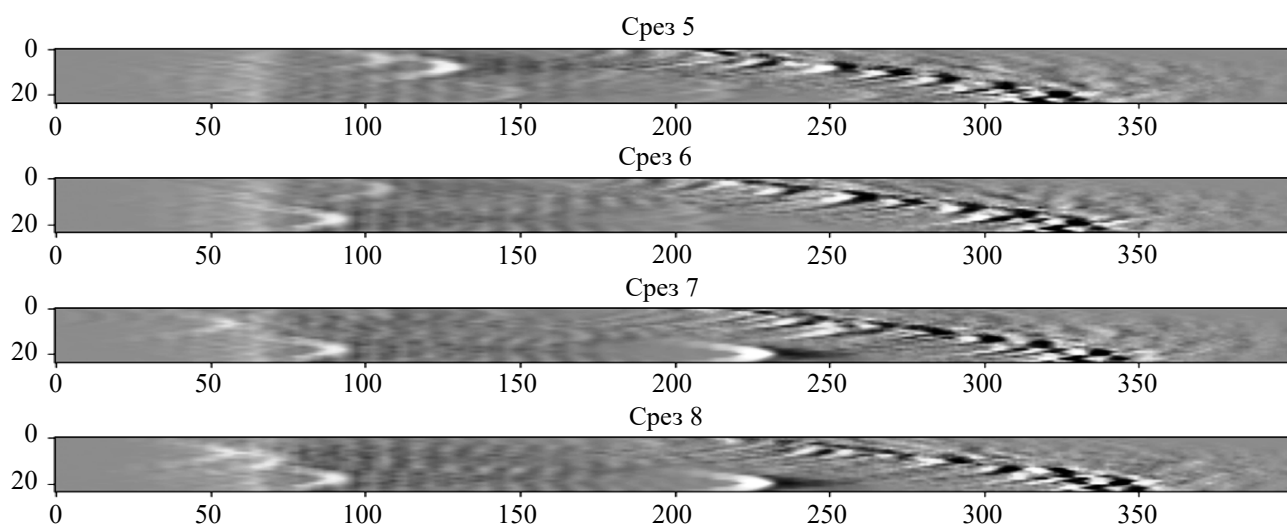


Рис. 2. Ультразвуковое изображение (В-скан)

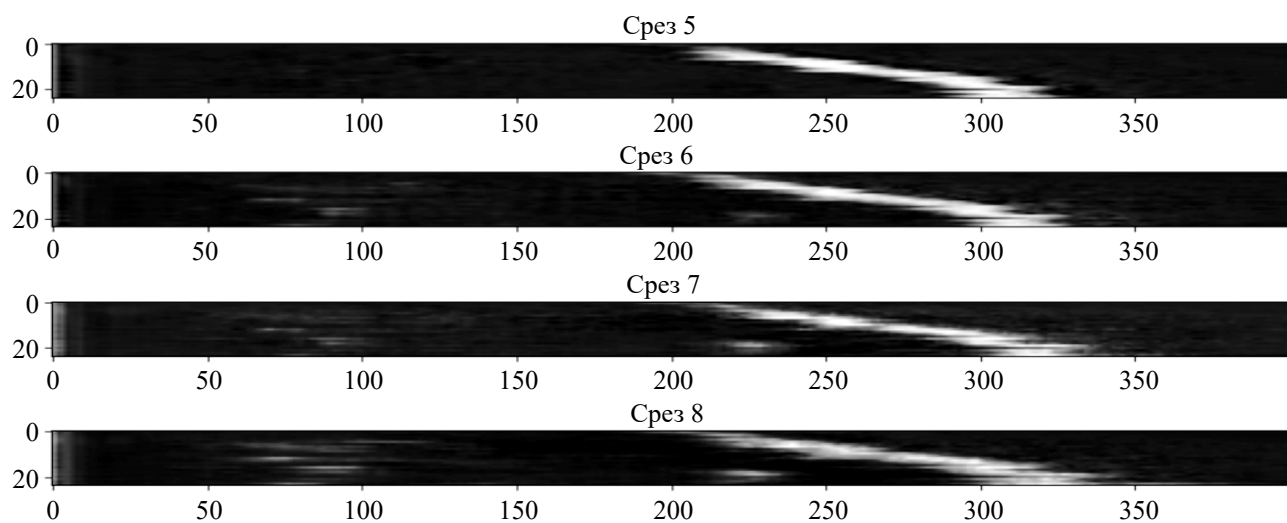


Рис. 3. Предсказания 2D сети в исходном виде

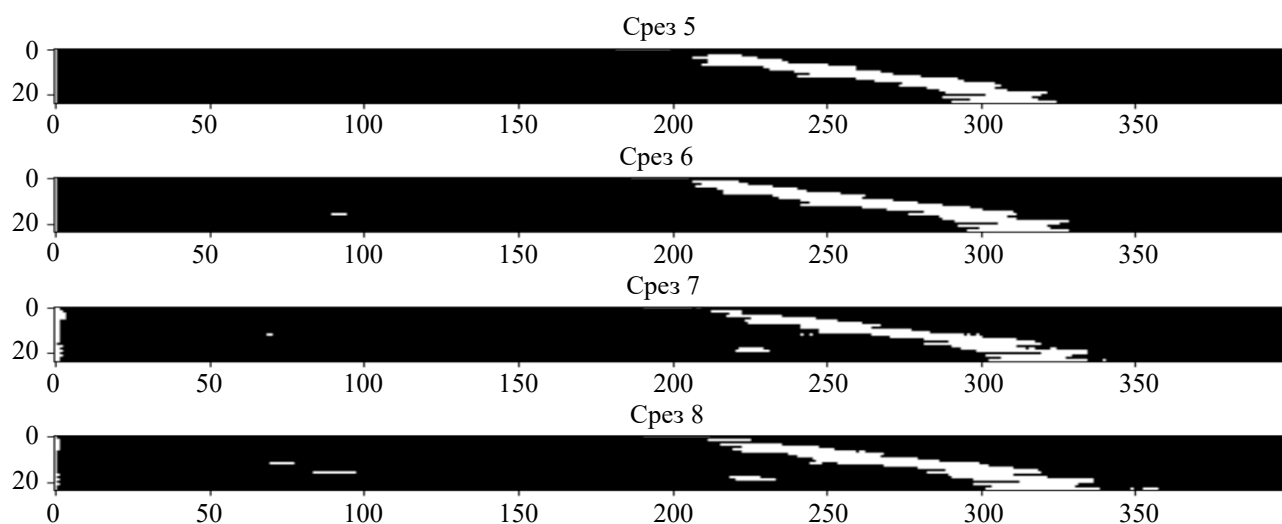


Рис. 4. Предсказания 2D сети после бинаризации

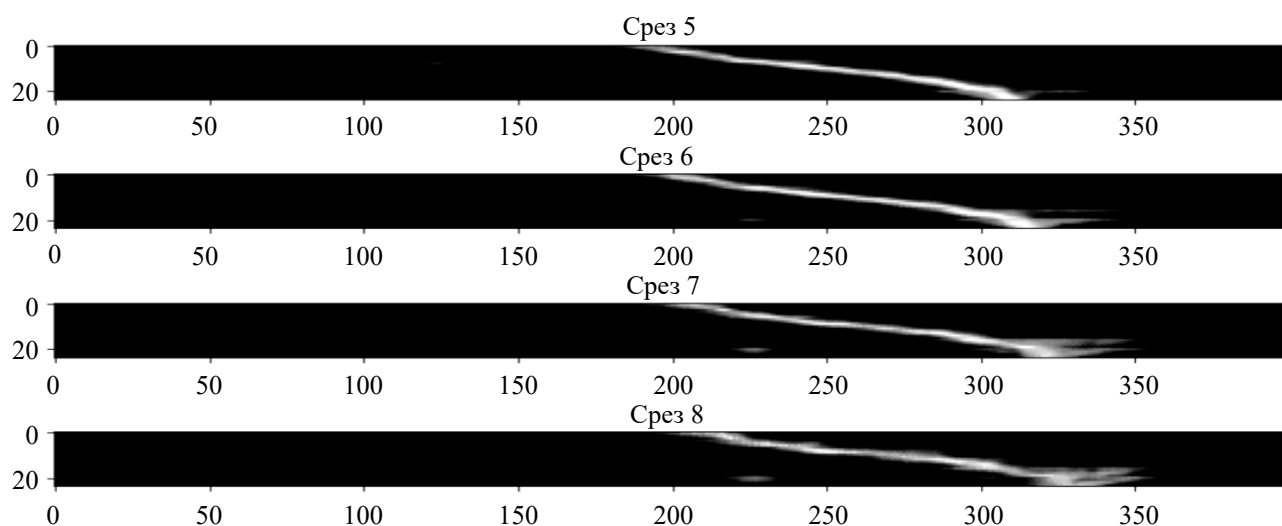


Рис. 5. Предсказания 3D сети в исходном виде

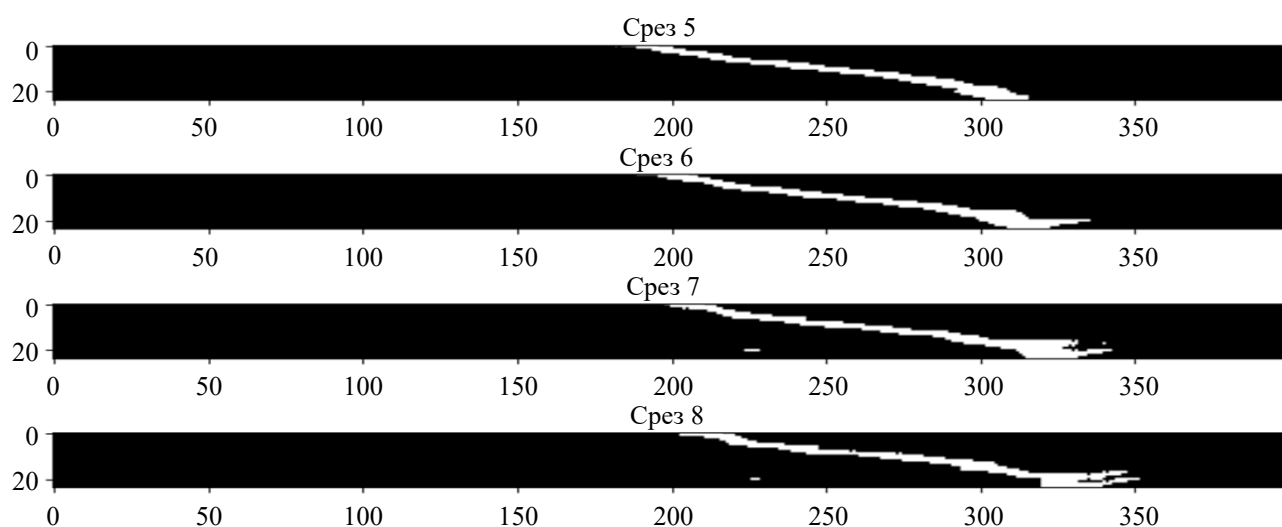


Рис. 6. Предсказания 3D сети после бинаризации

Обсуждение и заключения. Результаты работы показывают, что свёрточная сеть 3D структуры демонстрирует заметно лучшие результаты по определению формы и положения границы по сравнению с подходом обработки трёхмерного массива данных в виде срезов с использованием 2D сетей.

На качественном уровне видно, что граница в целом определяется корректно в обоих сценариях, однако для 3D сети существенно меньше её размытие. Отдельно стоит отметить, что 3D сеть практически не подвержена во входном сигнале влиянию шума и помех, как случайных, так и вызванных наличием крупных ярких отражателей. Результаты 2D сети (рис. 3 и 4) показывают значительное количество срабатываний в области перед искомой границей — там, где в объекте находились крупные поры. Это не является какой-либо случайной ошибкой — сеть решает задачу сегментации с целью обнаружить акустически контрастные границы и границы пор также попадают в эту категорию. Однако этот эффект является нежелательным. При использовании 3D сети (рис. 5 и 6) проблемы этого рода практически исключены. Это связано с тем, что трёхмерная структура входных данных позволяет свёрточной сети в полной мере использовать пространственную информацию об отражателях и обучиться игнорировать геометрически малые объекты.

Полное время выполнения всех операций над одним трёхмерным изображением с использованием 3D сети составляло около 0,1 секунды на коммерчески доступных видеокάρтах. Таким образом, показана возможность локализации границы аберратора в реальном времени с хорошим качеством. Этот факт может быть использован в дальнейшем для создания новых алгоритмов построения ультразвуковых изображений с применением методов компенсации искажений, вызванных различием скоростей звука в тканях.

Список литературы

1. Beklemysheva K.A., Grigoriev G.K., Kulberg N.S., Petrov I.B., Vasyukov A.V., Vassilevski Y.V. Numerical simulation of aberrated medical ultrasound signals. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2018;33(5):277–288. <https://doi.org/10.1515/rnam-2018-0023>
2. Perdios D., Vonlanthen M., Martinez F., Arditi M., Thiran J.P. Single-shot CNN-based ultrasound imaging with sparse linear arrays. In: *2020 IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS)*. Las Vegas, NV, USA; 2020. P. 1–4. <https://doi.org/10.1109/IUS46767.2020.9251442>
3. Patel D., Tibrewala R., Vega A., Dong L., Hugenberg N., Oberai A. Circumventing the solution of inverse problems in mechanics through deep learning: Application to elasticity imaging. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2019;353:448–466. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.04.045>
4. Hongya Lu, Haifeng Wang, Qianqian Zhang, Sang Won Yoon, Daehan Won. A 3D Convolutional Neural Network for Volumetric Image Semantic Segmentation. *Procedia Manufacturing*. 2019;39:422–428. <https://doi.org/10.1016/j.promfg.2020.01.386>
5. Potočník B., Šavc M. Deeply-Supervised 3D Convolutional Neural Networks for Automated Ovary and Follicle Detection from Ultrasound Volumes. *Applied Sciences*. 2022;12(3):1246. <https://doi.org/10.3390/app12031246>
6. Brown K., Dormer J., Fei B., Hoyt K. Deep 3D convolutional neural networks for fast super-resolution ultrasound imaging. *Proceedings SPIE 10955, Medical Imaging 2019: Ultrasonic Imaging and Tomography*. 2019;10955:1095502. <https://doi.org/10.1117/12.2511897>
7. Mast T.D., Hinkelman L.M., Metlay L.A., Orr M.J., Waag R.C. Simulation of ultrasonic pulse propagation, distortion, and attenuation in the human chest wall. *J. Acoust. Soc. Amer.* 1999;6:3665–3677. <https://doi.org/10.1121/1.428209>
8. Madsen E.L., Sathoff H.J., Zagzebski J.A. Ultrasonic shear wave properties of soft tissues and tissuelike materials. *J. Acoust. Soc. Am.* 1983;74(5):1346–1355. <https://doi.org/10.1121/1.390158>
9. Vassilevski Y.V., Beklemysheva K.A., Grigoriev G.K., Kulberg N.S., Petrov I.B., Vasyukov A.V. Numerical modelling of medical ultrasound: phantom-based verification. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2017;32(5):339–346. <https://doi.org/10.1515/rnam-2017-0032>
10. Ronneberger O., Fischer P., Brox T. U-Net: Convolutional Networks for Biomedical Image Segmentation. *Lecture Notes in Computer Science*. 2015;9351:234–241. https://doi.org/10.1007/978-3-319-24574-4_28
11. Paserin O., Mulpuri K., Cooper A., Abugharbieh R., Hodgson A. Improving 3D Ultrasound Scan Adequacy Classification Using a Three-Slice Convolutional Neural Network Architecture. In: *CAOS 2018 (EPiC Series in Health Sciences Vol 2)*. Beijing, China; 2018. P. 152–156. <https://doi.org/10.29007/2tct>
12. Jiang M., Spence J.D., Chiu B. Segmentation of 3D ultrasound carotid vessel wall using U-Net and segmentation average network. In: *42nd Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine & Biology Society (EMBC)*. Montreal, QC, Canada; 2020. P. 2043–2046. <https://doi.org/10.1109/EMBC44109.2020.9175975>
13. Zheng Y., Liu D., Georgescu B., Nguyen H., Comaniciu D. 3D deep learning for efficient and robust landmark detection in volumetric data. *Lecture Notes in Computer Science*. 2015;9349:565–572. https://doi.org/10.1007/978-3-319-24553-9_69
14. Ghimire K., Chen Q., Feng X. Patch-Based 3D UNet for Head and Neck Tumor Segmentation with an Ensemble of Conventional and Dilated Convolutions. *Lecture Notes in Computer Science*. 2021;12603:78–84. https://doi.org/10.1007/978-3-030-67194-5_9
15. Coupeau P., Fasquel J.B., Mazerand E., Menei P., Montero-Menei C.N., Dinomais M. Patch-based 3D U-Net and transfer learning for longitudinal piglet brain segmentation on MRI. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2022;214:106563. <https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2021.106563>

References

1. Beklemysheva K.A., Grigoriev G.K., Kulberg N.S., Petrov I.B., Vasyukov A.V., Vassilevski Y.V. Numerical simulation of aberrated medical ultrasound signals. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2018;33(5):277–288. <https://doi.org/10.1515/rnam-2018-0023>
2. Perdios D., Vonlanthen M., Martinez F., Arditi M., Thiran J.P. Single-shot CNN-based ultrasound imaging with sparse linear arrays. In: *2020 IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS)*. Las Vegas, NV, USA; 2020. P. 1–4. <https://doi.org/10.1109/IUS46767.2020.9251442>
3. Patel D., Tibrewala R., Vega A., Dong L., Hugenberg N., Oberai A. Circumventing the solution of inverse problems in mechanics through deep learning: Application to elasticity imaging. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2019;353:448–466. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.04.045>
4. Hongya Lu, Haifeng Wang, Qianqian Zhang, Sang Won Yoon, Daehan Won. A 3D Convolutional Neural Network for Volumetric Image Semantic Segmentation. *Procedia Manufacturing*. 2019;39:422–428. <https://doi.org/10.1016/j.promfg.2020.01.386>
5. Potočník B., Šavc M. Deeply-Supervised 3D Convolutional Neural Networks for Automated Ovary and Follicle Detection from Ultrasound Volumes. *Applied Sciences*. 2022;12(3):1246. <https://doi.org/10.3390/app12031246>
6. Brown K., Dormer J., Fei B., Hoyt K. Deep 3D convolutional neural networks for fast super-resolution ultrasound imaging. *Proceedings SPIE 10955, Medical Imaging 2019: Ultrasonic Imaging and Tomography*. 2019;10955:1095502. <https://doi.org/10.1117/12.2511897>
7. Mast T.D., Hinkelman L.M., Metlay L.A., Orr M.J., Waag R.C. Simulation of ultrasonic pulse propagation, distortion, and attenuation in the human chest wall. *J. Acoust. Soc. Amer.* 1999;6:3665–3677. <https://doi.org/10.1121/1.428209>
8. Madsen E.L., Sathoff H.J., Zagzebski J.A. Ultrasonic shear wave properties of soft tissues and tissuelike materials. *J. Acoust. Soc. Am.* 1983;74(5):1346–1355. <https://doi.org/10.1121/1.390158>
9. Vassilevski Y.V., Beklemysheva K.A., Grigoriev G.K., Kulberg N.S., Petrov I.B., Vasyukov A.V. Numerical modelling of medical ultrasound: phantom-based verification. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2017;32(5):339–346. <https://doi.org/10.1515/rnam-2017-0032>
10. Ronneberger O., Fischer P., Brox T. U-Net: Convolutional Networks for Biomedical Image Segmentation. *Lecture Notes in Computer Science*. 2015;9351:234–241. https://doi.org/10.1007/978-3-319-24574-4_28
11. Paserin O., Mulpuri K., Cooper A., Abugharbieh R., Hodgson A. Improving 3D Ultrasound Scan Adequacy Classification Using a Three-Slice Convolutional Neural Network Architecture. In: *CAOS 2018 (EPiC Series in Health Sciences Vol 2)*. Beijing, China; 2018. P. 152–156. <https://doi.org/10.29007/2tct>
12. Jiang M., Spence J.D., Chiu B. Segmentation of 3D ultrasound carotid vessel wall using U-Net and segmentation average network. In: *42nd Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine & Biology Society (EMBC)*. Montreal, QC, Canada; 2020. P. 2043–2046. <https://doi.org/10.1109/EMBC44109.2020.9175975>
13. Zheng Y., Liu D., Georgescu B., Nguyen H., Comaniciu D. 3D deep learning for efficient and robust landmark detection in volumetric data. *Lecture Notes in Computer Science*. 2015;9349:565–572. https://doi.org/10.1007/978-3-319-24553-9_69
14. Ghimire K., Chen Q., Feng X. Patch-Based 3D UNet for Head and Neck Tumor Segmentation with an Ensemble of Conventional and Dilated Convolutions. *Lecture Notes in Computer Science*. 2021;12603:78–84. https://doi.org/10.1007/978-3-030-67194-5_9
15. Coupeau P., Fasquel J.B., Mazerand E., Menei P., Montero-Menei C.N., Dinomais M. Patch-based 3D U-Net and transfer learning for longitudinal piglet brain segmentation on MRI. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2022;214:106563. <https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2021.106563>

Поступила в редакцию 06.04.2024

Поступила после рецензирования 26.04.2024

Принята к публикации 27.04.2024

Об авторе:

Васюков Алексей Викторович, старший научный сотрудник кафедры информатики и вычислительной математики Московского физико-технического института (национального исследовательского университета) (РФ, 141701, Долгопрудный, Институтский переулок, 9), кандидат физико-математических наук, [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9142-1000), vasyukov.av@mipt.ru

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Received 06.04.2024

Revised 26.04.2024

Accepted 27.04.2024

About the Author:

Alexey V. Vasyukov, Senior Research Fellow at the Department of Informatics and Computational Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University) (9, Institutsky Lane, Dolgoprudny, 141701, RF), PhD in Physics and Mathematics, [ORCID](#), vasyukov.av@mipt.ru

Conflict of interest statement

The author does not have any conflict of interest.

The author has read and approved the final manuscript.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ INFORMATION TECHNOLOGY



УДК 004.032.26

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-68-79>


Применение нейронных сетей для решения задачи Дирихле для областей сложной формы

А.В. Галабурдин

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

✉ Galaburdin@mail.ru

Аннотация

Введение. Многие задачи в математике сводятся к решению дифференциальных уравнений в частных производных для областей сложной формы. Не всегда существующие аналитические и численные методы позволяют эффективно получить решение подобных задач. В последнее время достаточно успешно для решения дифференциальных уравнений в частных производных применяются нейронные сети. При этом обычно рассматриваются краевые задачи для областей, имеющих простую форму. В данной работе предпринимается попытка построить нейронную сеть, способную эффективно решать краевые задачи для областей сложной формы.

Материалы и методы. Предлагается метод построения нейронной сети для решения задачи Дирихле для областей сложной формы. В качестве активационных функций принимаются производные от сингулярных решений уравнения Лапласа. Сингулярные точки этих решений распределены по замкнутым кривым, охватывающих границу области. Настройка весов сети сводится к минимизации среднеквадратической ошибки обучения.

Результаты исследования. Представлены результаты решения задач Дирихле для различных областей сложной формы. Результаты представлены в виде таблиц, содержащих точное решение и решение, полученное при помощи нейронной сети. На рисунках представлен вид областей и расположение точек, в которых определялось решение.

Обсуждение и заключения. Представленные результаты свидетельствуют о хорошем совпадении полученного решения с точным. Отмечается, что данный метод легко применим к различным краевым задачам. Указываются способы повышения эффективности подобных нейронных сетей.

Ключевые слова: задача Дирихле для области сложной формы, нейронные сети

Для цитирования. Галабурдин А.В. Применение нейронных сетей для решения задачи Дирихле для областей сложной формы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):68–79. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-68-79>

Original Theoretical Research

Application of Neural Networks to Solve the Dirichlet Problem for Areas of Complex

Shape Alexander V. Galaburdin

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

✉ Galaburdin@mail.ru

Abstract

Introduction. Many mathematical problems are reduced to solving partial differential equations (PDEs) in domains of complex shapes. Existing analytical and numerical methods do not always provide efficient solutions for such problems. Recently, neural networks have been successfully applied to solve PDEs, typically addressing boundary value problems for domains with simple shapes. This paper attempts to construct a neural network capable of effectively solving boundary value problems for domains of complex shapes.

Materials and Methods. A method for constructing a neural network to solve the Dirichlet problem for regions of complex shape is proposed. Derivatives of singular solutions of the Laplace equation are accepted as activation functions. Singular

points of these solutions are distributed along closed curves encompassing the boundary of the domain. The adjustment of the network weights is reduced to minimizing the root-mean-square error during training.

Results. The results of solving Dirichlet problems for various complex-shaped domains are presented. The results are provided in tables, comparing the exact solution and the solution obtained using the neural network. Figures show the domain shapes and the locations of points where the solutions were determined.

Discussion and Conclusion. The presented results indicate a good agreement between the obtained solution and the exact one. It is noted that this method can be easily applied to various boundary value problems. Methods for enhancing the efficiency of such neural networks are suggested.

Keywords: Dirichlet problem, complex-shaped domain, neural networks

For citation. Galaburdin A.V. Application of Neural Networks to Solve the Dirichlet Problem for Areas of Complex Shape. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):68–79. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-68-79>

Введение. Достаточно часто при моделировании различных явлений используются дифференциальные уравнения в частных производных. При этом области, на которых определены дифференциальные уравнения, часто имеют достаточно сложную форму, которая или не позволяет применять известные методы, или же существенно затрудняет их применение. Быстрое развитие вычислительной техники позволило использовать при решении дифференциальных уравнений в частных производных различные методы машинного обучения.

В последнее время для решения подобных задач все чаще стали привлекать метод нейронных сетей, теоретические основы которого были заложены еще в середине прошлого века в трудах А.Н. Колмогорова [1]. При разработке подобных методов обычно используют хорошо изученные дифференциальные уравнения, решения которых находятся достаточно просто. Многие разработчики для этой цели применяют краевые задачи для уравнения Лапласа.

Так, работа [2] посвящена оценке качества приближенных решений уравнения Лапласа, построенных с помощью нейронных сетей. А в [3] нейронная сеть применяется при решении задачи о прогибе мембраны. В статье [4] рассматривается пример численного решения уравнения Пуассона в двумерной области методом Галеркина и методом Рунге с глубокими нейронными сетями. Различные подходы к обучению радиально-базисной нейронной сети при решении уравнения Пуассона обсуждаются в [5].

В работе [6] предложена архитектура сети, которая позволяет находить решение уравнений Лапласа, Пуассона, теплопроводности и волновых уравнений для областей прямоугольной формы. Методы решения дифференциальных уравнений в частных производных с использованием радиально-базисных нейронных сетей, сетей прямого распространения и модифицированной нейронной сети рассматриваются в [7]. Используя нейронную сеть персептронного типа с одним скрытым слоем в [8] получена аналитическая аппроксимация решения уравнений в частных производных параболического типа.

Использование радиально-базисных функций при реализации метода конечных элементов с применением нейронной сети исследуется в [9]. В работах [10, 11] при обучении радиально-базисных нейронных сетей варьируются параметры радиально-базисных функций.

Большую популярность приобретает сейчас метод решения уравнений в частных производных, использующий физико-информированную нейронную сеть [12]. В работе [13] описываются алгоритмы применения физико-информированных нейронных сетей при решении задач классической механики.

Методом искусственных нейронных сетей работе [14] решались уравнения Навье-Стокса. В статье [15] исследованы подходы к решению задач теплопереноса на основе нейронной сети персептронного типа.

Приведенные выше примеры наглядно свидетельствуют о широком спектре задач, решаемых с привлечением нейронных сетей, и о разнообразных подходах к применению нейронных сетей при решении различных краевых задач. Нейронные сети чаще применяются к решению краевых задач для областей, имеющих простую форму. Цель данной работы — предложить подход к использованию нейронных сетей при решении краевых задач для областей сложной формы.

Материалы и методы. Рассмотрим задачу Дирихле для плоской области G , ограниченной гладкой замкнутой кривой γ . Одним из эффективных методов, применяемых при решении данной задачи, является метод граничных интегральных уравнений. Для получения соответствующего граничного интегрального уравнения можно воспользоваться формулой Грина:

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial n} U \, d\gamma - \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial n} u \, d\gamma.$$

Здесь U — сингулярное решение уравнения Лапласа.

Используя квадратурную формулу для вычисления интегралов, данное соотношение можно представить в виде

$$u_i = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N C_k \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_k [U]_{ik} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N C_k [u]_k \left[\frac{\partial U}{\partial n} \right]_{ik}, \quad (1)$$

где u_i — значение u в i -ой точке границы γ , C_k — коэффициенты квадратурной формулы.

В данном выражении величины $[U]_{ik}$ и $\left[\frac{\partial U}{\partial n}\right]_{ik}$ можно рассматривать как активационные функции, а $C_k \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_k$ и $C_k [u]_k$ — как веса.

Требуя выполнения соотношения (1) в каждой точке границы для всех функций обучающего множества, можно, используя метод наименьших квадратов, получить систему уравнений для определения весов. Однако данные системы уравнений являются плохо обусловленными. Для того, чтобы улучшить обусловленность указанных систем уравнений, можно увеличить сингулярность величин $[U]_{ik}$ и $\left[\frac{\partial U}{\partial n}\right]_{ik}$, сместив контур интегрирования на некоторое расстояние от границы области γ .

Тогда решение задачи Дирихле будем искать в виде:

$$u(x) = \sum_{k=1}^N w_k f(s_k) U(x, \sigma_k) + \sum_{k=1}^N v_k f(s_k) V(x, \tau_k),$$

где $f(s_k)$ — значение неизвестной функции u на границе области; $U(x, \sigma_k)$ и $V(x, \tau_k)$ — активационные функции; σ_k и τ_k точки замкнутых кривых γ_1 и γ_2 , охватывающих границу области γ ; x — точка области G .

Кривые γ_1 и γ_2 подобны контуру γ и получаются из него смещением каждой точки в направлении внешней нормали к границе области на расстояния ε_1 и ε_2 соответственно.

При обучении сети настраиваются веса и определяются величины ε_1 и ε_2 , для чего минимизируется функционал ошибки

$$J(w_k, v_k, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^N w_k f_k^j U(x_i, \sigma_k) + v_k f_k^j V(x_i, \tau_k) - f_i^j \right\}^2,$$

где x_i — координата i -ой точки граничного контура γ ; f_i^j — граничное значение j -ой функции обучающего множества в точке x_i .

Из соотношений $\frac{\partial J}{\partial w_m} = 0$ и $\frac{\partial J}{\partial v_m} = 0$, $m = 1, 2, \dots, N$ получим систему линейных уравнений для определения w_m и v_m .

Значения ε_1 и ε_2 определяются простым перебором. При этом полагается $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + 1$, а значения $\varepsilon_1 = a + hj$, $j = 1, 2, \dots, L$. Выбирается значение ε_1 , которое обеспечивает лучший результат. После этого все параметры нейронной сети определены и ее настройка завершается.

Оценить точность полученного решения можно, сравнив значения u на границе области, вычисленные с помощью нейронной сети

$$\tilde{u}(s_i) = \sum_{k=1}^N w_k f(s_k) U(s_i, \sigma_k) + \sum_{k=1}^N v_k f(s_k) V(s_i, \tau_k)$$

с заданными граничными условиями $f(s)$.

Определенные параметры сети не всегда обеспечивают желаемую точность полученного с помощью нейронной сети решения. В этом случае нужной точности можно достичь итерационным уточнением полученного результата:

$$\Delta u^o(s_i) = f(s_i), \quad u_t^o(s_i) = f(s_i),$$

$$\Delta v^{n+1}(s_i) = \sum_{k=1}^N w_k \Delta u^n(s_k) U(s_i, \sigma_k) + \sum_{k=1}^N v_k \Delta u^n(s_k) V(s_i, \tau_k),$$

$$\Delta u^{n+1}(s_i) = \Delta u^{n+1}(s_i) - \Delta v^{n+1}(s_i), \quad u_t^{n+1}(s_i) = u_t^{n+1}(s_i) + \Delta u^{n+1}(s_i),$$

$u_t^{n+1}(s_i)$ — значения уточненного решения на границе области.

Процесс уточнения решения продолжается до тех пор, пока или не будет достигнута заданная точность

$$\frac{\|\Delta u^{n+1}(s_i)\|}{\|u_t^{n+1}(s_i)\|} < \delta \quad \text{или же не начнет расти величина} \quad \frac{\|\Delta u^{n+1}(s_i)\|}{\|u_t^{n+1}(s_i)\|}.$$

После этого можно вычислить значение решения в любой точке x области G по формуле:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{k=1}^N w_k u_k u_t(s_k) U(x, \sigma_k) + \sum_{k=1}^N v_k u_t(s_k) V(x, \tau_k),$$

где $u_t(s_k)$ найденные уточненные значения неизвестной функции на границе γ .

В качестве обучающего множества использовались функции, являющиеся решением уравнения Лапласа

$$r^k \cos\left(\text{karccos}\left(\frac{x}{r}\right)\right) + r^k \sin\left(\text{karccos}\left(\frac{x}{r}\right)\right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots, M$.

Причем данные функции задавались в различных системах координат, повернутых друг относительно друга на угол кратный $2\pi/5$.

Результаты исследования. Представленный выше метод был использован при решении задачи Дирихле для областей, граница γ которых задавалась в виде

$$\begin{cases} x = a \cos(t) + g \cos(\infty t), \\ y = b \sin(t) + q \sin(\infty t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

где a, b, g, q, ∞ — изменяемые параметры.

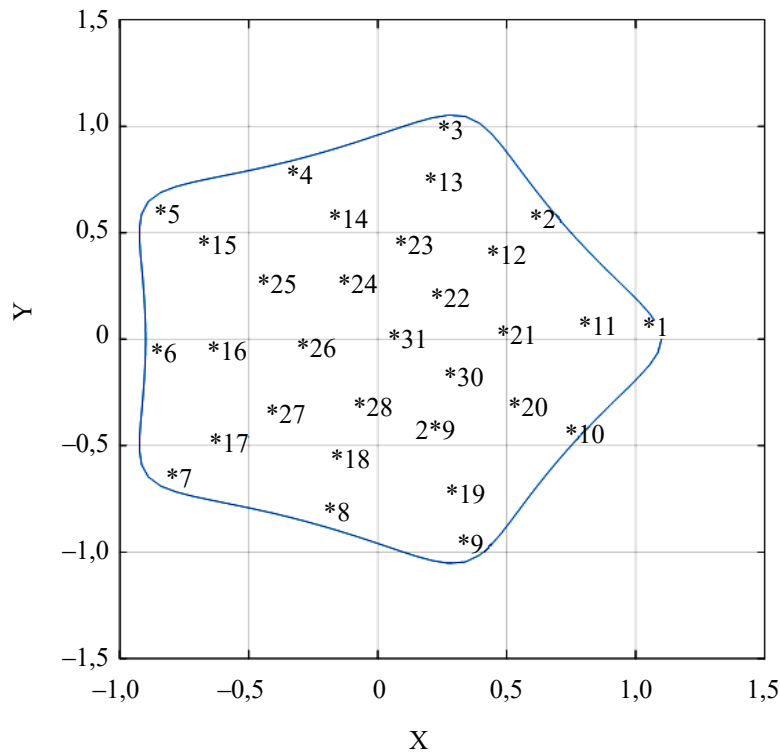


Рис. 1. Область $G1$

На рис. 1 представлена область, граница которой соответствует $a = 1, b = 1, g = 0,1, q = -0,1, \infty = 4$. Звездочками с номерами обозначены места расположения точек области $G1$, в которых вычисляются точные значения решения задачи Дирихле и значения, полученные при помощи нейронной сети при значении $\varepsilon_1 = 5$.

В таблице 1 представлены результаты расчетов, соответствующие решению

$$u = e^{2,45x} \cos 2,45y. \quad (2)$$

В таблице представлены номера точек области $G1$, их координаты, точное решение задачи Дирихле и решение, полученные нейронной сетью.

В таблице 2 представлены результаты расчетов, соответствующие решению

$$u = \frac{x^3 + xy^2 + x^2 - y^2 + 5x + 5}{(x+1)^2 + y^2}. \quad (3)$$

в области $G1$.

На рис. 2 представлена область, соответствующая $a = 1, b = 1, g = 0,1, q = 0,1, \infty = 5$. В таблице 3 и 4 представлены результаты расчетов, соответствующие решению (2) и (3) в области $G2$ при значении $\varepsilon_1 = 6,45$. На рис. 3 представлена область $G3$, соответствующая $a = 1, b = 1, g = 0,2, q = -0,2, \infty = 2$, а результаты расчетов, соответствующие решению (2) и (3) в области $G3$ при $\varepsilon_1 = 6,3$, представлены в таблицах 5 и 6.

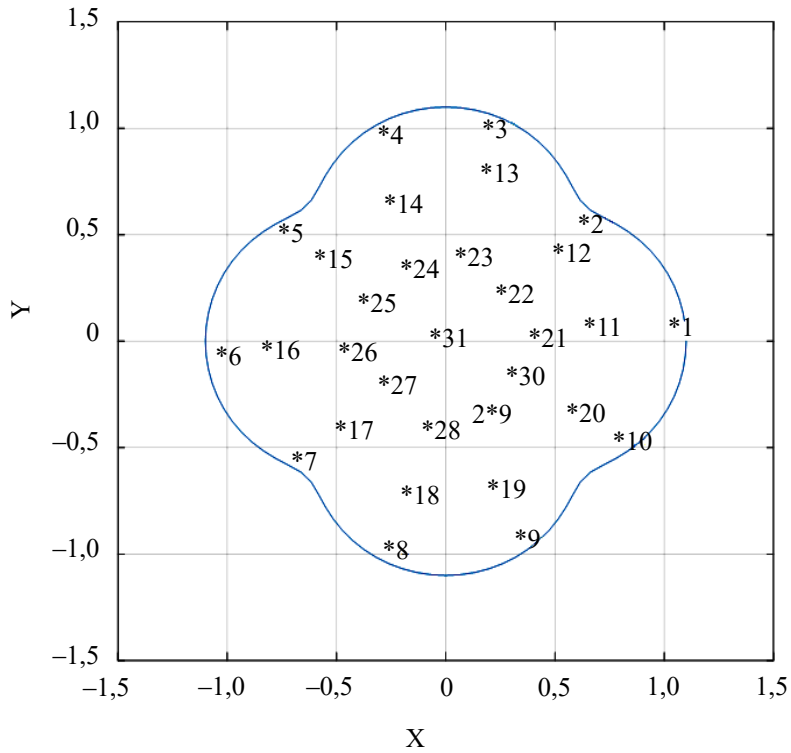


Рис. 2. Область G2

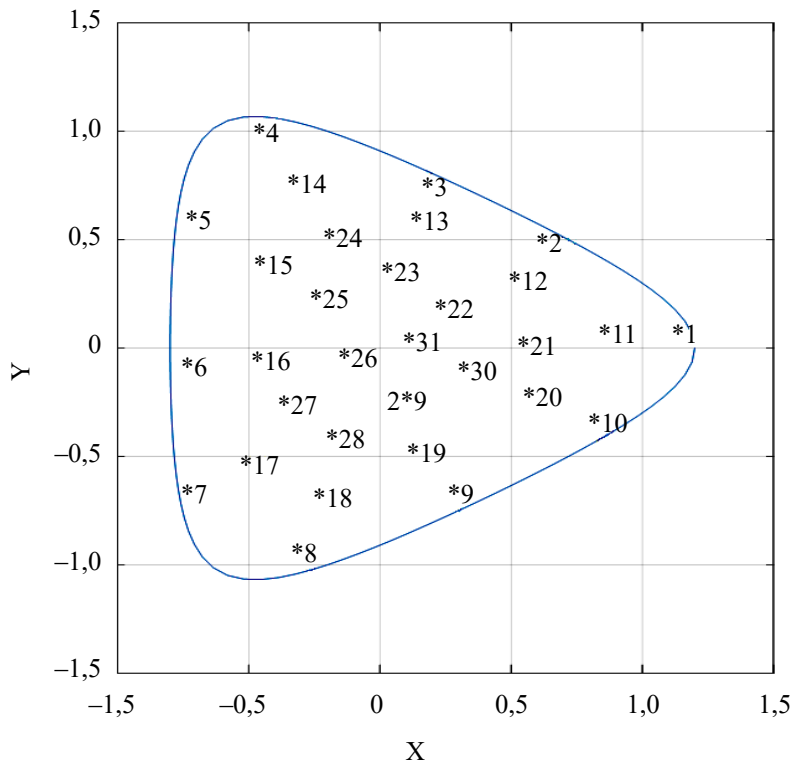


Рис. 3. Область G3

Таблица 1

Результаты расчетов

Номер точки	1	2	3	4	5	6	7
x	1,0351	0,6510	0,2626	−0,3216	−0,8728	−0,8497	−0,8020
y	0,0602	0,5496	1,0030	0,7890	0,5597	−0,0620	−0,6571
Точное решение	12,4909	1,0954	−1,4745	−0,1611	0,0234	0,1233	−0,0055

Продолжение таблицы 1

Решение НС	12,477	1,1020	-1,4730	-0,1630	0,0240	0,1240	-0,0090
Номер точки	8	9	10	11	12	13	14
x	-0,2036	0,3771	0,7239	0,7804	0,4546	0,1996	-0,2272
y	-0,8273	-0,9658	-0,4493	0,0437	0,3866	0,7557	0,5518
Точное решение	0,2675	-1,7992	2,6689	6,7272	1,7790	-0,4516	0,1244
Решение НС	0,2736	-1,7670	2,6512	6,7282	1,7803	-0,4501	0,1245
Номер точки	15	16	17	18	19	20	21
x	-0,6570	-0,5950	-0,6056	-0,1406	0,2827	0,5081	0,4747
y	0,4233	-0,0455	-0,4941	-0,5800	-0,7287	-0,3129	0,0239
Точное решение	0,1017	0,2313	0,0800	0,1058	-0,4254	2,5011	3,1943
Решение НС	0,1023	0,2312	0,0817	0,1020	-0,4318	2,4936	3,1933
Номер точки	22	23	24	25	26	27	28
x	0,2190	0,1240	-0,1139	-0,3981	-0,2894	-0,3700	-0,0650
y	0,1909	0,4589	0,2673	0,2597	-0,0257	-0,2984	-0,2831
Точное решение	1,5265	0,5851	0,6001	0,3033	0,4912	0,3007	0,6557
Решение НС	1,5259	0,5857	0,5997	0,3032	0,4903	0,3003	0,6527
Номер точки	29	30	31				
x	0,1694	0,2492	0,0744				
y	-0,4441	-0,1493	0,0000				
Точное решение	0,7030	1,7196	1,1998				
Решение НС	0,6961	1,7160	1,1980				

Таблица 2

Результаты расчетов

Номер точки	1	2	3	4	5	6	7
x	1,0351	0,6510	0,2626	-0,3216	-0,8728	-0,8497	-0,8020
y	0,0602	0,5496	1,0030	0,7890	0,5597	-0,0620	-0,6571
Точное решение	3,9985	3,8121	3,1740	4,1404	7,0650	9,9034	5,9459
Решение НС	4,0010	3,8210	3,1740	4,1330	7,0860	9,8590	5,9370
Номер точки	8	9	10	11	12	13	14
x	-0,2036	0,3771	0,7239	0,7804	0,4546	0,1996	-0,2272
y	-0,8273	-0,9658	-0,4493	0,0437	0,3866	0,7557	0,5518
Точное решение	3,8595	3,2536	3,8810	4,0331	4,0649	3,7186	4,8021
Решение НС	3,8675	3,2293	3,8793	4,0297	4,0655	3,7168	4,7974
Номер точки	15	16	17	18	19	20	21
x	-0,6570	-0,5950	-0,6056	-0,1406	0,2827	0,5081	0,4747
y	0,4233	-0,0455	-0,4941	-0,5800	-0,7287	-0,3129	0,0239
Точное решение	6,8777	7,6080	6,2579	4,5410	3,7216	4,0829	4,2223
Решение НС	6,8790	7,5937	6,2519	4,5407	3,7254	4,0835	4,2207
Номер точки	22	23	24	25	26	27	28
x	0,2190	0,1240	-0,1139	-0,3981	-0,2894	-0,3700	-0,0650
y	0,1909	0,4589	0,2673	0,2597	-0,0257	-0,2984	-0,2831
Точное решение	4,4902	4,3447	5,1277	6,1527	5,9413	5,9450	4,9773
Решение НС	4,4883	4,3425	5,1237	6,1467	5,9351	5,9387	4,9750
Номер точки	29	30	31				
x	0,1694	0,2492	0,0744				
y	-0,4441	-0,1493	0,0000				

Продолжение таблицы 2

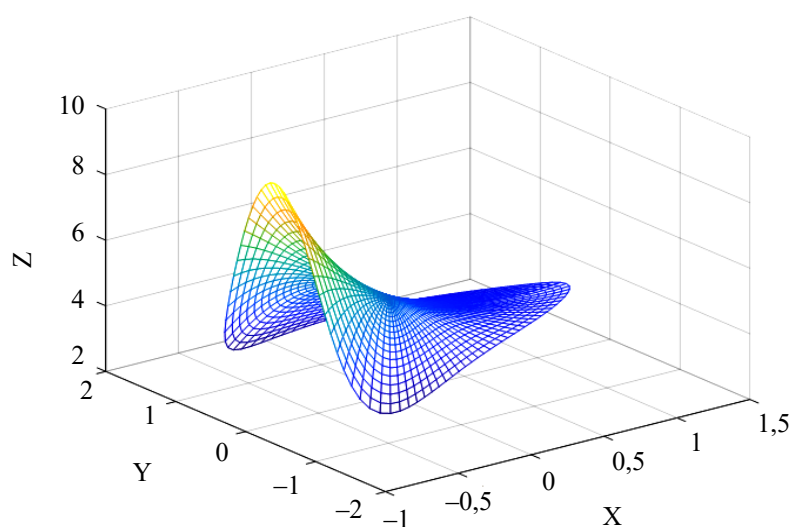
Точное решение	4,3023	4,4661	4,8261				
Решение НС	4,3041	4,4653	4,8236				

Таблица 3

Результаты расчетов

Номер точки	1	2	3	4	5	6	7
x	1,0403	0,6832	0,2463	-0,3558	-0,7924	-1,0403	-0,6832
y	0,0633	0,5522	0,9914	0,9278	0,4881	-0,0633	-0,5522
Точное решение	12,6374	1,1533	-1,3835	-0,2702	0,0526	0,0772	0,0406
Решение НС	12,5300	1,1510	-1,3230	-0,2480	0,0360	0,1000	0,0290
Номер точки	8	9	10	11	12	13	14
x	-0,2463	0,3558	0,7924	0,7591	0,4985	0,1798	-0,2596
y	-0,9914	-0,9278	-0,4881	0,0462	0,4029	0,7235	0,6771
Точное решение	-0,4138	-1,5445	2,5519	6,3819	1,8691	-0,3111	-0,0465
Решение НС	-0,4635	-1,4973	2,5558	6,3787	1,8724	-0,3007	-0,0338
Номер точки	15	16	17	18	19	20	21
x	-0,5782	-0,7591	-0,4985	-0,1798	0,2596	0,5782	0,4217
y	0,3562	-0,0462	-0,4029	-0,7235	-0,6771	-0,3562	0,0257
Точное решение	0,1559	0,1547	0,1625	-0,1290	-0,1660	2,6505	2,8047
Решение НС	0,1554	0,1509	0,1558	-0,1404	-0,1775	2,6392	2,8042
Номер точки	22	23	24	25	26	27	28
x	0,2770	0,0999	-0,1442	-0,3212	-0,4217	-0,2770	-0,0999
y	0,2238	0,4019	0,3761	0,1979	-0,0257	-0,2238	-0,4019
Точное решение	1,6820	0,7064	0,4246	0,4027	0,3551	0,4329	0,4331
Решение НС	1,6832	0,7097	0,4288	0,4031	0,3514	0,4279	0,4261
Номер точки	29	30	31				
x	0,1442	0,3212	-0,0282				
y	-0,3761	-0,1979	0,0000				
Точное решение	0,8608	1,9437	0,9332				
Решение НС	0,8512	1,9369	0,9308				

На рис. 4 и рис. 5 представлены графически полученные результаты решения задачи Дирихле в G_3 для решения (3).

Рис. 4. НС решение в G_3 , соответствующее (3)

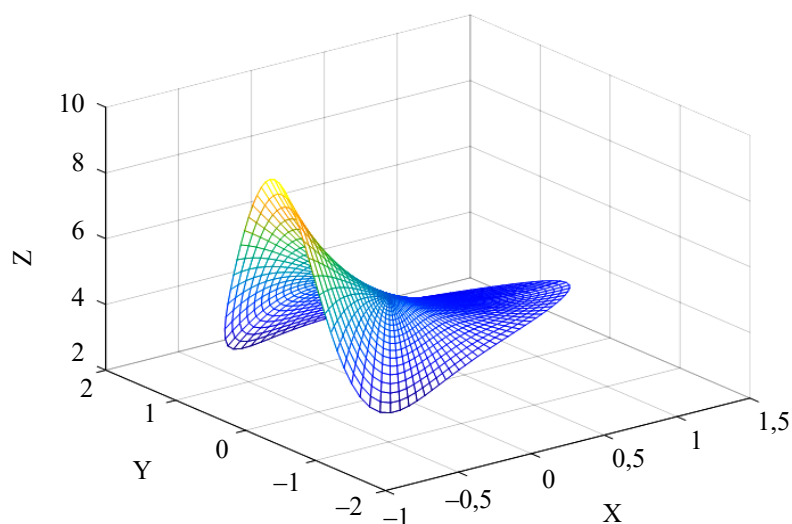


Рис. 5. Точное решение в G3, соответствующее (3)

Таблица 4

Результаты расчетов

Номер точки	1	2	3	4	5	6	7
x	1,0403	0,6832	0,2463	-0,3558	-0,7924	-1,0403	-0,6832
y	0,0633	0,5522	0,9914	0,9278	0,4881	-0,0633	-0,5522
Точное решение	3,9985	3,8023	3,1994	3,5918	7,2276	12,5939	6,2589
Решение НС	3,9990	3,7940	3,1690	3,6220	7,2120	12,488	6,2450
Номер точки	8	9	10	11	12	13	14
x	-0,2463	0,3558	0,7924	0,7591	0,4985	0,1798	-0,2596
y	-0,9914	-0,9278	-0,4881	0,0462	0,4029	0,7235	0,6771
Точное решение	3,2856	3,3263	3,8398	4,0402	4,0187	3,7979	4,4638
Решение НС	3,3086	3,3405	3,8291	4,0326	4,0107	3,7853	4,4515
Номер точки	15	16	17	18	19	20	21
x	-0,5782	-0,7591	-0,4985	-0,1798	0,2596	0,5782	0,4217
y	0,3562	-0,0462	-0,4029	-0,7235	-0,6771	-0,3562	0,0257
Точное решение	6,7562	8,9677	6,1858	4,1803	3,8289	4,0072	4,2753
Решение НС	6,7422	8,9594	6,1844	4,1866	3,8342	4,0038	4,2690
Номер точки	22	23	24	25	26	27	28
x	0,2770	0,0999	-0,1442	-0,3212	-0,4217	-0,2770	-0,0999
y	0,2238	0,4019	0,3761	0,1979	-0,0257	-0,2238	-0,4019
Точное решение	4,3835	4,4688	5,0283	5,9328	6,5585	5,7193	4,8676
Решение НС	4,3760	4,4594	5,0170	5,9234	6,5537	5,7168	4,8675
Номер точки	29	30	31				
x	0,1442	0,3212	-0,0282				
y	-0,3761	-0,1979	0,0000				
Точное решение	4,4325	4,3410	5,0723				
Решение НС	4,4321	4,3377	5,0668				

Таблица 5

Результаты расчетов

Номер точки	1	2	3	4	5	6	7
x	1,1387	0,6789	0,1404	-0,4339	-0,7355	-0,7488	-0,7213
y	0,0610	0,4697	0,7826	1,0207	0,5615	-0,0620	-0,6858

Продолжение таблицы 5

Точное решение	16,0958	2,1517	–0,4790	–0,2769	0,0320	0,1579	–0,0187
Решение НС	16,055	2,1310	–0,4540	–0,2700	0,0420	0,1780	–0,0090
Номер точки	8	9	10	11	12	13	14
x	–0,3119	0,2489	0,7847	0,8836	0,4897	0,0792	–0,3416
y	–0,9953	–0,7209	–0,4028	0,0444	0,3136	0,5423	0,7854
Точное решение	–0,3552	–0,3575	3,7699	8,6620	2,3870	0,2911	–0,1498
Решение НС	–0,3695	–0,3003	3,7043	8,6771	2,3820	0,3008	–0,1382
Номер точки	15	16	17	18	19	20	21
x	–0,5300	–0,4937	–0,5321	–0,2508	0,1566	0,5793	0,5776
y	0,4312	–0,0454	–0,5297	–0,7550	–0,4856	–0,2725	0,0244
Точное решение	0,1343	0,2965	0,0732	–0,1490	0,5459	3,2463	4,109099
Решение НС	0,1459	0,3115	0,0881	–0,1402	0,5636	3,2274	4,1094
Номер точки	22	23	24	25	26	27	28
x	0,2626	0,0059	–0,2309	–0,2835	–0,1876	–0,3050	–0,1775
y	0,1262	0,2540	0,5029	0,2748	–0,0254	–0,3423	–0,4667
Точное решение	1,8128	0,8243	0,1887	0,3903	0,6302	0,3166	0,2683
Решение НС	1,8150	0,8318	0,2004	0,4015	0,6414	0,3311	0,2834
Номер точки	29	30	31				
x	0,0459	0,3328	0,1744				
y	–0,2032	–0,1161	0,0000				
Точное решение	0,9832	2,1689	1,5329				
Решение НС	0,9924	2,1689	1,5373				

Таблица 6

Результаты расчетов

Номер точки	1	2	3	4	5	6	7
x	1,1387	0,6789	0,1404	–0,4339	–0,7355	–0,7488	–0,7213
y	0,0610	0,4697	0,7826	1,0207	0,5615	–0,0620	–0,6858
Точное решение	4,0101	3,8766	3,6988	3,1990	6,4195	8,8530	5,4894
Решение НС	4,0110	3,8840	3,6990	3,2160	6,4370	8,8080	5,4920
Номер точки	8	9	10	11	12	13	14
x	–0,3119	0,2489	0,7847	0,8836	0,4897	0,0792	–0,3416
y	–0,9953	–0,7209	–0,4028	0,0444	0,3136	0,5423	0,7854
Точное решение	3,2886	3,7558	3,9008	4,0079	4,0963	4,2640	4,1824
Решение НС	3,2830	3,7587	3,8986	4,0062	4,0998	4,2648	4,1807
Номер точки	15	16	17	18	19	20	21
x	–0,5300	–0,4937	–0,5321	–0,2508	0,1566	0,5793	0,5776
y	0,4312	–0,0454	–0,5297	–0,7550	–0,4856	–0,2725	0,0244
Точное решение	6,2152	6,9516	5,7855	4,1727	4,2569	4,0602	4,1378
Решение НС	6,2154	6,9378	5,7897	4,1682	4,2566	4,0600	4,1380
Номер точки	22	23	24	25	26	27	28
x	0,2626	0,0059	–0,2309	–0,2835	–0,1876	–0,3050	–0,1775
y	0,1262	0,2540	0,5029	0,2748	–0,0254	–0,3423	–0,4667
Точное решение	4,4559	4,8437	4,9521	5,6575	5,5545	5,5934	4,9136
Решение НС	4,4563	4,8424	4,9498	5,6532	5,5499	5,5904	4,9112
Номер точки	29	30	31				

Продолжение таблицы 6

x	0,0459	0,3328	0,1744				
y	-0,2032	-0,1161	0,0000				
Точное решение	4,8040	4,3626	4,6270				
Решение НС	4,8022	4,3624	4,6263				

Во всех случаях при уточнении решения принималось $M = 75$, $\delta = 0,00025$ и использовалась евклидова норма. В качестве активационных функций брались

$$U(x, y, t, s) = \frac{\partial^6}{\partial^3 t \partial^3 s} Y, \quad V(x, y, t, s) = \frac{\partial^5}{\partial^3 t \partial^2 s} Y - \frac{\partial^5}{\partial^2 t \partial^3 s} Y,$$

$$Y = \ln \frac{1}{R}, \quad R = \sqrt{(x-t)^2 + (y-s)^2}.$$

Обсуждение и заключения. Представленные результаты убедительно доказывают, что предложенный метод построения нейронной сети для решения задачи Дирихле для областей сложной формы весьма эффективен. Он может быть использован и при решении других дифференциальных уравнений в частных производных. Его легко можно перестроить и для решения пространственных задач, для решения краевых задач для многосвязных областей. Его эффективность можно повысить посредством соответствующего подбора активационных функций (за счет подбора параметров ε_1 и ε_2), за счет более оптимального подбора обучающего множества, за счет более оптимальной настройки весов. Все вышеуказанное свидетельствует о достаточно высоком потенциале предложенного метода.

Список литературы

1. Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения. *Доклады Академии наук СССР*. 1957;114(5):953–956.
2. Варшавчик Е.А., Галютдинова А.Р., Седова Ю.С., Тархов Д.А. Решение дифференциальных уравнений в частных производных для областей с постоянными границами. Искусственный интеллект в решении актуальных социальных и экономических проблем XXI века. В: *Труды Третьей всерос. науч.-практ. конф.* Пермь: Издательство Перм. гос. нац. исслед. ун-та; 2018. С. 294–303.
3. Бортковская М.Р., Каверзнева Т.Т., Семенова Д.А., Шишкина И.А., Тархов Д.А., Удалов П.П. Построение математической модели прогиба мембраны с помощью двухслойного метода Эйлера по дифференциальному уравнению и экспериментальным данным. Искусственный интеллект в решении актуальных социальных и экономических проблем XXI века. В: *Труды Третьей всерос. науч.-практ. конф.* Пермь: Издательство Перм. гос. нац. исслед. ун-та; 2018. С. 194–201.
4. Елифанов А.А. Применение методов глубокого обучения для решения дифференциальных уравнений в частных производных. *Успехи кибернетики*. 2020;1(4):22–28. <https://doi.org/10.51790/2712-9942-2020-1-4-3>
5. Горбаченко В.И., Артюхина Е.В. Два подхода к обучению радиально-базис-ных нейронных сетей при решении дифференциальных уравнений в частных производных. Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. *Информатика и вычислительная техника*. 2007;2:56–66.
6. Корсунов Н.И., Ломакин А.В. Моделирование процессов, описываемых волновым дифференциальным уравнением, с использованием ячеистых нейронных сетей. *Научные ведомости. Серия История. Политология. Экономика. Информатика*. 2014;15(186):103–107.
7. Коваленко А.Н., Черноморец А.А., Петина М.А. О применении нейронных сетей для решения дифференциальных уравнений в частных производных. *Научные ведомости. Серия Экономика. Информатика*. 2017; 258:103–110.
8. Вершинин В.Е., Пономарев Р. Ю. Применение методов нейросетевого моделирования при решении начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. *Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика*. 2017;9(35):132–147. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-132-147>
9. Земскова Ю.Н. Применимость компактно поддерживаемых нейронных сетей для решения дифференциальных уравнений в частных производных методом конечных элементов. *Известия ПГПУ им. В.Г. Белинского*. 2009;13(17): 44–148.
10. Kansa E.J. Motivation for using radial basis functions to solve PDEs. URL: <http://uahtitan.uah.edu/kansaweb.html> (дата обращения: 16.01.1999).
11. Kansa E.J. Multiquadrics. A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. II. Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Comput. Math. Appl.* 1990;19 (8/9):147–161.
12. Raissia M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*. 2019;378:686–707

13. Зрелова Д.П., Ульянов С.В. Модели физически информированных осе-домленных классических Лагранжевых Гамильтоновых нейронных сетей в глубоком обучении. *Современные информационные технологии и ИТ-образование*. 2022;18(2):310–325. <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.310-325>
14. Chen J., Viquerat J., Hachem E. U-net Architectures for Fast Prediction of Incompressible Laminar Flows. URL: <https://arxiv.org/pdf/1999.13532.pdf> (дата обращения: 17.05.1999).
15. Cai S., Wang Z., Wang S., Perdikaris P., Karniadakis G. E. Physics-informed neural networks for heat transfer problems. *Journal of Heat Transfer*. 2021;143(6):060801. <https://doi.org/10.1115/1.4050542>

References

1. Kolmogorov A.N. On the Representation of Continuous Functions of Several Variables by Superpositions of Continuous Functions of One Variable and Addition. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 1957; 114(5): 953–956. (in Russ.).
2. Varshavchik E.A., Galyautdinova A.R., Sedova Y. S., Tarkhov D.A. Solving Partial Differential Equations for Regions with Constant Boundaries. Artificial Intelligence in Solving Current Social and Economic Problems of the 21st Century. In: *Proceedings of the Third All-Russian Scientific-Practical Conference*. Perm: Publishing House of Perm State National Research University; 2018. pp. 294–303. (in Russ.).
3. Bortkovskaya M.R., Kaverzneva T.T., Semenova D.A., Shishkina I.A., Tarkhov D.A., Udalov P.P. Construction of a Mathematical Model of Membrane Deflection Using the Two-Layer Euler Method Based on a Differential Equation and Experimental Data. Artificial Intelligence in Solving Current Social and Economic Problems of the 21st Century. In: *Proceedings of the Third All-Russian Scientific-Practical Conference*. Perm: Publishing House of Perm State National Research University; 2018. pp. 194–201. (in Russ.).
4. Epifanov A.A. Application of Deep Learning Methods for Solving Partial Differential Equations. *Advances in Cybernetics*. 2020;1(4): 22–28. (In Russ.). <https://doi.org/10.51790/2712-9942-2020-1-4-3>
5. Gorbatchenko V.I., Artyukhina E.V. Two Approaches to Training Radial Basis Neural Networks for Solving Partial Differential Equations. *Izvestiya Vuzov. Povolzhskiy Region. Technical Sciences. Informatics and Computer Technology*. 2007;2:56–66. (in Russ.).
6. Korsunov N.I., Lomakin A.V. Modelling Processes Described by the Wave Differential Equation Using Cellular Neural Networks. *Scientific Bulletins. Series History. Political Science. Economics. Informatics*. 2014;15(186):103–107. (in Russ.).
7. Kovalenko A.N., Chernomorets A.A., Petina M.A. On the Application of Neural Networks for Solving Partial Differential Equations. *Scientific Bulletins. Series Economics. Informatics*. 2017;258:103–110. (in Russ.).
8. Vershinin V.E., Ponomarev R.Y. Application of Neural Network Modelling Methods for Solving Initial-Boundary Value Problems for Partial Differential Equations. *Bulletin of Tyumen State University. Physical-Mathematical Modelling. Oil, Gas, Energy*. 2017;9(35):132–147. (in Russ.). <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-132-147>
9. Zemskova Y.N. Applicability of Compactly Supported Neural Networks for Solving Partial Differential Equations Using the Finite Element Method. *Izvestiya PGPU im. V.G. Belinskogo*. 2009;13(17):144–148. (in Russ.).
10. Kansa E.J. Motivation for Using Radial Basis Functions to Solve PDEs. URL: <http://uahtitan.uah.edu/kansaweb.html> (accessed: January 16, 1999).
11. Kansa E.J. Multiquadrics. A Scattered Data Approximation Scheme with Applications to Computational Fluid Dynamics. II. Solutions to Parabolic, Hyperbolic, and Elliptic Partial Differential Equations. *Comput. Math. Appl.* 1990; 19(8/9):147–161.
12. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-Informed Neural Networks: A Deep Learning Framework for Solving Forward and Inverse Problems Involving Nonlinear Partial Differential Equations. *Journal of Computational Physics*. 2019;378:686–707.
13. Zrelova D.P., Ulyanov S.V. Models of Physically Informed Classical Lagrangian Hamiltonian Neural Networks in Deep Learning. *Modern Information Technologies and IT Education*. 2022;18(2):310–325. (in Russ.). <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.310-325>
14. Chen J., Viquerat J., Hachem E. U-net Architectures for Fast Prediction of Incompressible Laminar Flows. URL: <https://arxiv.org/pdf/1999.13532.pdf> (accessed: May 17, 1999).
15. Cai S., Wang Z., Wang S., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-Informed Neural Networks for Heat Transfer Problems. *Journal of Heat Transfer*. 2021;143(6):060801. <https://doi.org/10.1115/1.4050542>

Поступила в редакцию 26.04.2024

Поступила после рецензирования 14.05.2024

Принята к публикации 15.05.2024

Об авторе:

Александр Васильевич Галабурдин, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики Донского государственного технического университета (РФ, 344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID, Galaburdin@mail.ru](mailto:Galaburdin@mail.ru)

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Received 26.04.2024

Revised 14.05.2024

Accepted 15.05.2024

About the Author:

Alexander V. Galaburdin, associate professor of the department Mathematics and informatics, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostovon-Don, 344003, RF), Cand.Sci. (Phys. – math.), associate professor, [ORCID](#), Galaburdin@mail.ru

Conflict of interest statement

The author does not have any conflict of interest.

The author has read and approved the final manuscript.