

Computational Mathematics and Information Technologies

Вычислительная
математика /
Computational
Mathematics

Математическое
моделирование /
Mathematical Modelling

Информационные
технологии /
Information Technologies



www.cmit-journal.ru
DOI 10.23947/2587-8999



Computational Mathematics and Information Technologies

Рецензируемый научно-теоретический журнал

eISSN 2587-8999

Издается с 2017 года

Периодичность — 4 выпуска в год

DOI: 10.23947/2587-8999

Учредитель и издатель — Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ), г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Журнал «Computational Mathematics and Information Technologies» публикует обзоры, оригинальные статьи и краткие сообщения, посвященные математическому моделированию, численным методам и информационным технологиям для решения сложных и актуальных проблем науки и современной технологии. Область применения исследований — это механика сплошных сред, гидроаэродинамика, науки о Земле, химия, биология, обработка изображений и распознавание образов, теория параллельных вычислений и ее приложения, технологии больших баз данных и искусственного интеллекта и т. д.

Журнал «Computational Mathematics and Information Technologies» принимает к публикации научные и обзорные статьи в соответствии с разделами:

1. Вычислительная математика
2. Математическое моделирование
3. Информационные технологии

<i>Регистрация:</i>	Свидетельство о регистрации средства массовой информации ЭЛ № ФС 77 – 66529 от 21 июля 2016 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций
<i>Индексация и архивация:</i>	РИНЦ, CrossRef, CyberLeninka
<i>Сайт:</i>	https://cmit-journal.ru
<i>Адрес редакции:</i>	344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1
<i>E-mail:</i>	CMIT-EJ@yandex.ru
<i>Телефон:</i>	+7 (863) 273-85-14
<i>Дата выхода № 4, 2024 в свет:</i>	30.12.2024





Computational Mathematics and Information Technologies

Peer-reviewed scientific and theoretical journal

eISSN 2587-8999

Published since 2017

Periodicity — 4 issues per year

DOI: 10.23947/2587–8999

Founder and Publisher — Don State Technical University (DSTU), Rostov-on-Don, Russian Federation

The journal “Computational Mathematics and Information Technologies” publishes reviews, original articles and short reports on mathematical modeling, numerical methods and information technologies for solving complex and topical problems of science and modern technology. Research areas include continuum mechanics, fluid dynamics, Earth sciences, chemistry, biology, image processing and pattern recognition, parallel computing theory and its applications, big database and artificial intelligence technologies, etc.

The journal “Computational Mathematics and Information Technologies” accepts scientific and review articles for publication in accordance with the sections:

1. Computational Mathematics
2. Mathematical Modelling
3. Information Technologies

<i>Registration:</i>	Mass media registration certificate ЭЛ № ФС 77–66529 dated July 21, 2016 issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media
<i>Indexing and Archiving:</i>	RISC, Crossref, Cyberleninka
<i>Website:</i>	https://cmit-journal.ru
<i>Address of the Editorial Office:</i>	1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation
<i>E-mail:</i>	CMIT-EJ@yandex.ru
<i>Telephone:</i>	+7 (863) 273–85–14
<i>Date of publication No. 4, 2024:</i>	30.12.2024



Редакционная коллегия

Главный редактор, Сухинов Александр Иванович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация), [MathSciNet](#), [РИНЦ](#), [ORCID](#), [ResearcherID](#), [Scopus](#), sukhinov@gmail.com, spu-40.4@donstu.ru

Заместитель главного редактора, Якобовский Михаил Владимирович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), [РИНЦ](#), [ORCID](#)

Ответственный секретарь, Петров Александр Пхоун Чжо, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), [РИНЦ](#), [ИСТИНА](#), [ORCID](#), [ResearcherID](#), [Scopus](#)

Алексеевко Елена В., кандидат физико-математических наук, доцент, Университет Литораль Кот д'Опаль, (Булонь-сюр-Мер, Франция)

Воеводин Владимир Валентинович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Москва, Российская Федерация)

Гасилов Владимир Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация)

Гущин Валентин Анатольевич, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт автоматизации проектирования РАН (Москва, Российская Федерация)

Лазарева Галина Геннадьевна, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор РАН, Российский университет дружбы народов (Москва, Российская Федерация)

Петров Игорь Борисович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Московский физико-технический институт (государственный университет) (Москва, Российская Федерация)

Поляков Сергей Владимирович, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация)

Тишкин Владимир Федорович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация)

Четверушкин Борис Николаевич, академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор, научный руководитель Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация)

Чехонин Константин Александрович, доктор физико-математических наук, доцент, зам. директора Института прикладной математики ДВО РАН, руководитель (директор) Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН (Хабаровск, Российская Федерация)

Чистяков Александр Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

Editorial Board

Editor-in-Chief, Alexander I. Sukhinov, Corresponding member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation), [MathSciNet](#), [RSCI](#), [ORCID](#), [ResearcherID](#), [Scopus](#), sukhinov@gmail.com, spu-40.4@donstu.ru

Deputy Chief Editor, Mikhail V. Yakobovskii, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), [RSCI](#), [ORCID](#)

Executive Secretary, Alexander P. Petrov Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head Scientist Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), [RSCI](#), [Istina](#), [ORCID](#), [ResearcherID](#), [Scopus](#)

Elena V. Aleksenko, Ph.D. in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, University of Littoral Opal Coast (Boulogne-sur-Mer, France)

Vladimir V. Voevodin, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russian Federation)

Vladimir A. Gasilov, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation)

Valentin A. Gushchin, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Institute of Computer Aided Design, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation)

Galina G. Lazareva, Corresponding member of RAS, Dr. Sci. (Phys.-Math), Professor of RAS, RUDN University, (Moscow, Russian Federation)

Igor B. Petrov, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Moscow Institute of Physics and Technology (State University) (Moscow, Russian Federation)

Sergey V. Polyakov, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation)

Vladimir F. Tishkin, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation)

Boris N. Chetverushkin, Academician of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation)

Konstantin A. Chekhonin, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Deputy Director of the Institute for Applied Mathematics, Director of the Khabarovsk Branch of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences (Khabarovsk, Russian Federation)

Alexander E. Chistyakov, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

Содержание

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

- Увеличение точности решения краевых задач с линейными
обыкновенными дифференциальными уравнениями
методом Бубнова-Галеркина 7**
Н.К. Волосова, К.А. Волосов, А.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

- Прогнозирование поглощений бурового раствора на Python 19**
Н.В. Корнилаев, К.Ф. Коледина
- Прогнозирование динамики летних видов фитопланктона на основе
методов усвоения спутниковых данных 27**
Ю.В. Белова, А.А. Филина, А.Е. Чистяков
- Применение нейронных сетей для решения нелинейных краевых задач
для областей сложной формы 35**
А.В. Галабурдин
- Идентификация морских разливов нефти на основе нейросетевых
технологий 43**
В.В. Сидорякина, Д.А. Соломаха

Contents

COMPUTATIONAL MATHEMATICS

- Increasing the Accuracy of Solving Boundary Value Problems
with Linear Ordinary Differential Equations Using
the Bubnov-Galerkin Method 7**
*Natalya K. Volosova, Konstantin A. Volosov, Aleksandra K. Volosova, Mikhail I. Karlov,
Dmitriy F. Pastukhov, Yuriy F. Pastukhov*

INFORMATION TECHNOLOGIES

- Forecasting Drilling Mud Losses Using Python 19**
Nikita V. Kornilaev, Kamila F. Koledina
- Forecasting the Dynamics of Summer Phytoplankton Species based
on Satellite Data Assimilation Methods 27**
Yulia V. Belova, Alena A. Filina, Alexander E. Chistyakov
- Application of Neural Networks for Solving Nonlinear Boundary Problems
for Complex-Shaped Domains 35**
Alexander V. Galaburdin
- Identification of Marine Oil Spills Using Neural Network Technologies 43**
Valentina V. Sidoryakina, Denis A. Solomakha

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 519.6

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-7-18>


Увеличение точности решения краевых задач с линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями методом Бубнова-Галеркина

Н.К. Волосова¹ , К.А. Волосов² , А.К. Волосова² , М.И. Карлов³,
Д.Ф. Пастухов⁴ ✉, Ю.Ф. Пастухов⁴

¹ Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Российская Федерация

² Российский университет транспорта, г. Москва, Российская Федерация

³ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
г. Долгопрудный, Российская Федерация

⁴ Полоцкий государственный университет им. Евфросинии Полоцкой, г. Новополоцк, Республика Беларусь

✉ dmitrij.pastuhov@mail.ru

Аннотация

Введение. Исследуется возможность увеличения точности численного решения краевой задачи модифицированным методом Бубнова-Галеркина с линейным обыкновенным дифференциальным уравнением, в котором коэффициенты и правая часть являются непрерывными функциями. Порядок дифференциального уравнения n должен быть меньше числа координатных функций m .

Материалы и методы. Для численного решения краевой задачи использован модифицированный метод Петрова-Галеркина с системой линейно независимых базисных функций степенного вида на отрезке $[-1, 1]$ с единичной нормой Чебышева для каждой функции системы. В систему линейных алгебраических уравнений включены только линейно независимые краевые условия исходной задачи.

Результаты исследования. Впервые построена интегральная квадратурная формула на равномерной сетке с двадцать вторым порядком погрешности для вычисления элементов матрицы и коэффициентов правой части системы линейных алгебраических уравнений с учетом скалярного произведения двух функций по новой квадратурной формуле. Доказана теорема существования и единственности решения краевой задачи с неразделенными краевыми условиями общего вида, если известны n линейно независимых частных решений однородного дифференциального уравнения порядка n .

Обсуждение и заключение. Точно решена гидродинамическая задача в вязком сильном пограничном слое с уравнением третьего порядка. Аналитическое решение сравнено с численным решением, равномерная норма разности решений не превышает $5 \cdot 10^{-15}$. Полученные обобщенным методом Бубнова-Галеркина формулы могут быть полезными для решения краевых задач с линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями третьего и более высоких порядков.

Ключевые слова: гидродинамика, численные методы, обыкновенные дифференциальные уравнения, краевые задачи, метод Галеркина

Для цитирования. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Увеличение точности решения краевых задач с линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями методом Бубнова-Галеркина. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):7–18. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-7-18>

Increasing the Accuracy of Solving Boundary Value Problems with Linear Ordinary Differential Equations Using the Bubnov-Galerkin Method

Natalya K. Volosova¹ , Konstantin A. Volosov² , Aleksandra K. Volosova² , Mikhail I. Karlov³,
Dmitriy F. Pastukhov⁴ ✉, Yuriy F. Pastukhov⁴ 

¹ MGТУ named after N.E. Bauman, Moscow, Russian Federation

² Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation

³ Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russian Federation

⁴ Polotsk State University named after Euphrosyne of Polotsk, Novopolotsk, Republic of Belarus

✉ dmitrij.pastuhov@mail.ru

Abstract

Introduction. This study investigates the possibility of increasing the accuracy of numerically solving boundary value problems using the modified Bubnov-Galerkin method with a linear ordinary differential equation, where the coefficients and the right-hand side are continuous functions. The order of the differential equation n must be less than the number of coordinate functions m .

Materials and Methods. A modified Petrov-Galerkin method was used to numerically solve the boundary value problem. It employs a system of linearly independent power-type basis functions on the interval $[-1, 1]$, each normalized by the unit Chebyshev norm. The system of linear algebraic equations includes only the linearly independent boundary conditions of the original problem.

Results. For the first time, an integral quadrature formula with a 22nd order error was developed for a uniform grid. This formula is used to calculate the matrix elements and coefficients in the right-hand side of the system of linear algebraic equations, taking into account the scalar product of two functions based on the new quadrature formula. The study proves a theorem on the existence and uniqueness of a solution for boundary value problems with general non-separated conditions, provided that n linearly independent particular solutions of a homogeneous differential equation of order n are known.

Discussion and Conclusion. The hydrodynamic problem in a viscous strong boundary layer with a third-order equation was precisely solved. The analytical solution was compared with its numerical counterpart, and the uniform norm of their difference did not exceed $5 \cdot 10^{-15}$. The formulas derived using the generalized Bubnov-Galerkin method may be useful for solving boundary value problems with linear ordinary differential equations of the third and higher orders.

Keywords: hydrodynamics, numerical methods, ordinary differential equations, boundary value problems, Galerkin method

For Citation. Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Karlov M.I., Pastukhov D.F., Pastukhov Yu.F. Increasing the accuracy of solving boundary value problems with a linear differential equation using the Bubnov-Galerkin method. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):7–18. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-7-18>

Введение. Для решения краевой задачи на отрезке с обыкновенным дифференциальным уравнением наиболее известны метод прогонки [1] и метод стрельбы [1]. В указанных методах неизвестная функция отыскивается на заданной сетке (сеточная функция) с использованием разностных уравнений. В данной работе рассматривается краевая задача в пограничном слое вязкой несжимаемой жидкости с обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядка [2–3], а ее численное решение находится в функциональном виде. Гидродинамическая задача в пограничном вязком слое решается с помощью модифицированного метода Бубнова-Галеркина [4] с системой линейно независимых базисных функций. Базисные функции имеют простой степенной вид, каждая из них задана на отрезке $[-1, 1]$ и имеет единичную норму Чебышева. Неизвестная функция-решение раскладывается по системе линейно независимых базисных функций. В данной работе обобщена теорема существования и единственности решения краевой задачи на отрезке $[a, b]$ с линейным обыкновенным дифференциальным уравнением произвольного порядка n на случай неразделенных краевых условий.

В настоящей работе впервые получена квадратурная интегральная формула на равномерной сетке, у которой число интервалов кратно двадцати. Квадратурная формула имеет 22-ой порядок погрешности. По сравнению с предыдущей работой [4] новая квадратурная формула, применяемая для вычисления элементов матрицы и коэффициентов правой части системы линейных алгебраических уравнений с помощью формулы скалярного произведения двух функций, позволяет уменьшить норму Чебышева погрешности задачи в десятки раз. Для уравнения третьего порядка в СЛАУ включаются $n-1$ линейно независимых краевых условий и $m-n+1$ условий ортогональности невязки дифференциального уравнения к базисным функциям [4–5] (n — порядок ОДУ, m — число базисных функций). Получено точное решение задачи [2] с выбранными параметрами, что позволило вычислить векторную норму Чебышева разности точного и численного решения. Методы точных вычислений в гидродинамике приведены в работах [6–8].

Материалы и методы

Постановка задачи. Пусть неизвестная функция $u(x)$, принадлежащая классу n раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $u(x) \in C^n[a, b]$, является решением краевой задачи с обыкновенным дифференциальным уравнением порядка n с переменными коэффициентами $g_i(x) \in C[a, b], i = 0, n$:

$$\begin{cases} L[u(x)] = f(x), x \in (a, b) \\ L[u(x)] \equiv \left(\sum_{i=0}^n g_i(x) \frac{d^i}{dx^i} \right) u(x), \end{cases} \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{\mu}^i u^{(i)}(a) + \beta_{\mu}^i u^{(i)}(b)) = \gamma_{\mu}, \mu = \overline{1, n}. \quad (2)$$

В краевой задаче (1)–(2) функции $g_i(x) (i = \overline{0, n}), f(x) \in C[a, b]$ заданы и непрерывны на отрезке $[a, b]$. Краевые условия (2) заданы линейными формами относительно функции и производных до $n-1$ порядка включительно в точках $x = a, x = b$ и являются краевыми условиями общего вида. Для замкнутости задачи (1) необходимо, чтобы полное число краевых условий было равно n . Матрицы коэффициентов $\alpha_{\mu}^i, \beta_{\mu}^i, i = \overline{0, n-1}, \mu = \overline{1, n}$, а также числа $\gamma_{\mu}, \mu = \overline{1, n}$ заданы. Связь между числами $\alpha_{\mu}^i, \beta_{\mu}^i$ определяет существование и единственность решения краевой задачи (1)–(2).

Теорема 1. Пусть известно n линейно независимых частных решений однородного уравнения (1) $U_j(x), j = \overline{1, n}$. Тогда краевая задача (1)–(2) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда выполнено условие $\det A_{\mu j} \neq 0, \mu = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$,

где

$$A_{\mu j} = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{\mu}^i U_j^{(i)}(a) + \beta_{\mu}^i U_j^{(i)}(b)), \mu, j = \overline{1, n}.$$

Доказательство. Запишем общее решение линейного неоднородного уравнения (1):

$$u(x) = \sum_{j=1}^n U_j(x) D_j + \overline{u(x)}, j = \overline{1, n},$$

где D_j — произвольные постоянные интегрирования; $\overline{u(x)}$ — частное решение неоднородного уравнения (1)

$L[\overline{u(x)}] = f(x); U_j(x)$ — частные линейно независимые решения однородного уравнения $L[U_j(x)] = 0, j = \overline{1, n}$.

Подставим решение $u(x)$ в краевые условия (2):

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{\mu}^i u^{(i)}(a) + \beta_{\mu}^i u^{(i)}(b)) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[\alpha_{\mu}^i \left(\sum_{j=1}^n U_j^{(i)}(a) D_j + \overline{u^{(i)}(a)} \right) + \beta_{\mu}^i \left(\sum_{j=1}^n U_j^{(i)}(b) D_j + \overline{u^{(i)}(b)} \right) \right] = \gamma_{\mu} \Leftrightarrow \\ \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{\mu}^i U_j^{(i)}(a) + \beta_{\mu}^i U_j^{(i)}(b) \right) D_j &= \gamma_{\mu} - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{\mu}^i \overline{u^{(i)}(a)} + \beta_{\mu}^i \overline{u^{(i)}(b)}, \mu = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (3)$$

Неоднородная система n линейных алгебраических уравнений (3) относительно n неизвестных $D_j, j = \overline{1, n}$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда матрица A не вырождена, то есть $\det A_{\mu j} \neq 0, \mu = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$,

$$A_{\mu j} = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{\mu}^i U_j^{(i)}(a) + \beta_{\mu}^i U_j^{(i)}(b)), \mu, j = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Теорема 1 доказана. Отметим, что теорема 1 обобщает утверждение 1 в работе [4, с. 25] для случая разделенных краевых условий.

В работах по гидродинамике [2–3] Т.Я. Ершова приводит двумерную гидродинамическую задачу для вязкого слоя с учетом уравнения неразрывности в несжимаемой жидкости и уравнения динамики жидкости, сводимую с помощью автомодельных переменных к одному дифференциальному уравнению третьего порядка в сильном пограничном слое:

$$\begin{cases} Lu \equiv \varepsilon u''(x) + ru'(x) = f(x), x \in (0, 1), \varepsilon \in (0, 1), r = \text{const} > 0, \\ u(0) = 0, u(1) = 0, u'(1) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Решим задачу (5) аналитически с частным случаем правой части уравнения $f(x) \equiv 1, \varepsilon u''(x) + ru'(x) \equiv 1, z(x) = u'(x), \varepsilon z'(x) + rz(x) = 1$. Запишем общее решение однородного уравнения

$$\varepsilon z'(x) + rz(x) = 0 \Leftrightarrow z'(x) = -\frac{r}{\varepsilon} z(x) \Leftrightarrow z(x) = C_0 \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon} x\right).$$

Интегрируя дважды последнее решение, получим

$$u'(x) = \int z(x) dx = -C_0 \frac{\varepsilon}{r} \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon} x\right) + C_1, u(x) = \int u'(x) dx = C_0 \frac{\varepsilon^2}{r^2} \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon} x\right) + C_1 x + C_2.$$

Частное решение уравнения $\varepsilon u''(x) + ru'(x) \equiv 1$ ищем в виде:

$$\overline{u(x)} = Cx^2, \overline{u'}(x) = 0, 2rC = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2r}, \overline{u(x)} = \frac{x^2}{2r},$$

$$u_{\text{on}}(x) = u_{\text{oo}}(x) + \overline{u(x)} = C_0 \frac{\varepsilon^2}{r^2} \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon} x\right) + C_1 x + C_2 + \frac{x^2}{2r}, u'_{\text{on}}(x) = -C_0 \frac{\varepsilon}{r} \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon} x\right) + C_1 + \frac{x}{r}. \quad (6)$$

Функция (6) является общим решением уравнения (5) с правой частью $f(x) \equiv 1$. Используем краевые условия задачи (5):

$$u(0) = 0 \Leftrightarrow C_0 \frac{\varepsilon^2}{r^2} + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = -C_0 \frac{\varepsilon^2}{r^2},$$

$$u(1) = 0 \Leftrightarrow C_0 \frac{\varepsilon^2}{r^2} \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right) + C_1 + C_2 + \frac{1}{2r} = 0, u'(1) = 0 \Leftrightarrow -C_0 \frac{\varepsilon}{r} \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right) + C_1 + \frac{1}{r} = 0.$$

Тогда

$$C_1 = C_0 \frac{\varepsilon}{r} \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{r}, \quad C_0 \frac{\varepsilon^2}{r^2} \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right) + C_1 + C_2 + \frac{1}{2r} = 0 \Leftrightarrow$$

$$C_0 \frac{\varepsilon^2}{r^2} \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right) + C_0 \frac{\varepsilon}{r} \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{r} - C_0 \frac{\varepsilon^2}{r^2} + \frac{1}{2r} = 0 \Leftrightarrow C_0 = \frac{r}{2\left((\varepsilon^2 + \varepsilon r) \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right) - \varepsilon^2\right)},$$

$$C_2 = -C_0 \frac{\varepsilon^2}{r^2} = \frac{\varepsilon^2}{2r\left(\varepsilon^2 - (\varepsilon^2 + \varepsilon r) \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right)\right)}, \quad C_1 = \frac{\varepsilon \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right)}{2\left((\varepsilon^2 + \varepsilon r) \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right) - \varepsilon^2\right)} - \frac{1}{r}.$$

В итоге получаем:

$$u(x) = \frac{\varepsilon^2 \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon} x\right)}{2r\left((\varepsilon^2 + \varepsilon r) \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right) - \varepsilon^2\right)} + \left(\frac{\varepsilon \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right)}{2\left((\varepsilon^2 + \varepsilon r) \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right) - \varepsilon^2\right)} - \frac{1}{r} \right) x + \frac{\varepsilon^2}{2r\left(\varepsilon^2 - (\varepsilon^2 + \varepsilon r) \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right)\right)} + \frac{x^2}{2r}. \quad (7)$$

Для тестирования программы, использующей алгоритм Бубнова-Галеркина [2–4], выберем параметры $r = 1$, $\varepsilon = 1/2$, из формулы (7) получим функцию (8):

$$u(x) = \frac{\exp(2-2x)}{2(3-e^2)} + \frac{(e^2-2)x}{(3-e^2)} - \frac{e^2}{2(3-e^2)} + \frac{x^2}{2}. \quad (8)$$

Как и в работе [4], выберем систему базисных функций $\phi_i(x), i = \overline{0, m}, m > n$, линейно независимую

$$\{\phi_i(x)\}_{i=0}^m = \left\{ \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right)^i, x \in [a, b], i = \overline{0, m} \right\}, \quad \|\phi_i(x)\|_C = \max_{x \in [a, b]} |\phi_i(x)| = 1 \quad \forall i = \overline{0, m}. \quad (9)$$

Линейное преобразование $z = \frac{2x-a-b}{b-a}, z \in [-1, 1]$ взаимно однозначно отображает отрезок $[a, b]$ на отрезок $[-1, 1]$. Базисные функции $\phi_i(x)$ четного индекса четны на отрезке $[-1, 1]$, а нечетного индекса нечетны. Обозначим середину отрезка $[a, b]$ через $c = (a+b)/2$. Разложим решение общей задачи (1) по системе базисных функций (9):

$$u(x) = u(c) + \sum_{j=1}^m \phi_j(x) D_j = u(c) + \sum_{j=1}^m \left(\frac{2(x-c)}{b-a} \right)^j D_j. \quad (10)$$

Из формулы (10) следует тождество $u(c) = u(c)$, а сама формула (10) — это разложение неизвестной функции в степенной ряд с центром $x = c = (a+b)/2$.

Замечание. Метод Бубнова-Галеркина является ортогональным, однако метод не требует, чтобы система базисных функций была системой ортогональных полиномов, как, например, многочлены Лежандра на отрезке $[-1, 1]$ с весовой функцией $\rho(z) \equiv 1, z \in [-1, 1]$. Достаточно линейной независимости системы функций (9). Отметим, что ортогональность системы функций (9) невязке дифференциального уравнения в задаче (1) записывается с весовой функцией $\rho(z) \equiv 1, z \in [-1, 1]$. А находить производные любого порядка от функций (9) значительно проще, чем от многочленов Лежандра.

Подставим (10) в уравнение (1) и запишем невязку уравнения (1):

$$R(u(x)) = L[u(x)] - f(x) = L\left(u(c) + \sum_{j=1}^m \phi_j(x) D_j\right) - f(x) = L(u(c)) + \sum_{j=1}^m L\phi_j(x) D_j - f(x).$$

Согласно методу Бубнова-Галеркина, запишем условия ортогональности невязки максимальному числу координатных функций $\{1, z, z^2, \dots, z^{m-3}\}$, для решения задачи (5) с уравнением третьего порядка, дающим максимальный вклад в невязку уравнения (5) ($m-n+1$ функциям в общей задаче (1)):

$$\langle R(u(x)), \phi_i(x) \rangle = 0, i = \overline{0, m-3} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \langle L\phi_j(x), \phi_i(x) \rangle D_j = \langle f(x) - L(u(c)), \phi_i(x) \rangle, i = \overline{0, m-3}, \quad (11)$$

где в формуле (11) символом $\langle q, g \rangle$ обозначено скалярное произведение функций:

$$\langle q, g \rangle = \int_a^b q(x)g(x)dx, \quad L(u(c)) = g_0(x)u(c) = g_0(x)u_c. \quad (12)$$

Для замкнутости системы (11) необходимо еще два уравнения. Как показано в работе [9] в краевой задаче необходимо искать решение на классе допустимых функций, то есть использовать все линейно независимые краевые условия. На концах отрезка в точках $x = a, x = b$, используя формулу (10), получим:

$$u(a) \equiv u_a = u(c) + \sum_{j=1}^m \left(\frac{(2a-a-b)}{b-a} \right)^j D_j = u_c + \sum_{j=1}^m (-1)^j D_j, \quad u(b) \equiv u_b = u(c) + \sum_{j=1}^m \left(\frac{(2b-a-b)}{b-a} \right)^j D_j = u_c + \sum_{j=1}^m D_j.$$

Складывая два последних уравнения и выражая $u(c) = u_c$, получим:

$$u_c = \left(\frac{u_a + u_b}{2} \right) - D_2 - D_4 - \dots - \begin{cases} D_m, m = 2l \\ D_{m-1}, m = 2l + 1. \end{cases} \quad (13)$$

Аналогично, выражая $\frac{u_b - u_a}{2}$, получим формулу:

$$\frac{u_b - u_a}{2} = D_1 + D_3 + \dots + \begin{cases} D_{m-1}, m = 2l \\ D_m, m = 2l + 1. \end{cases} \quad (14)$$

Вычислим первую производную $u(x)$ из формулы (10) и приравняем ее к нулю в точке $x = b$ согласно краевому условию задачи (5):

$$u'(x) = \sum_{j=1}^m \phi_j'(x) D_j = \sum_{j=1}^m \frac{2j}{(b-a)} \left(\frac{(2x-a-b)}{b-a} \right)^{j-1} D_j = 0 \Leftrightarrow D_1 + 2D_2 + 3D_3 + \dots + mD_m = 0. \quad (15)$$

Подставим значение $u(c)$ из формулы (13) в правую часть уравнения (11), затем перенесем в левую часть уравнения (11) все слагаемые с D_j . С учетом формул (14), (15) получим систему линейных алгебраических уравнений (16) относительно неизвестных коэффициентов D_j

$$\sum_{j=1}^m a_{i,j} D_j = \overline{f_i}, \quad i = \overline{0, m-1}, \quad (16)$$

где элементы матрицы $a_{i,j}, i = \overline{0, m-1}, j = \overline{1, m}$ и коэффициенты правой части $\overline{f_i}$ системы уравнений (16) равны

$$a_{i,j} = \begin{cases} \langle L\phi_j, \phi_i \rangle, \text{ если } j \equiv 1 \pmod{2}, i = \overline{0, m-3} \\ \langle L(\phi_j - 1), \phi_i \rangle, \text{ если } j \equiv 0 \pmod{2}, i = \overline{0, m-3} \\ 1, \text{ если } i = m-2, j \equiv 1 \pmod{2} \\ 0, \text{ если } i = m-2, j \equiv 0 \pmod{2} \\ j, \text{ если } i = m-1 \end{cases},$$

$$\overline{f_i} = \begin{cases} \left\langle f(x) - L\left(\frac{u_a + u_b}{2}\right), \phi_i(x) \right\rangle, \text{ если } i = \overline{0, m-3}, L\left(\frac{u_a + u_b}{2}\right) = \left(\frac{u_a + u_b}{2}\right) g_0(x) \\ \frac{u_b - u_a}{2}, \text{ если } i = m-2 \\ 0, \text{ если } i = m-1 \end{cases}.$$

Действие линейного дифференциального оператора третьего порядка в задаче (5) на базисную функцию с индексом j можно представить системой формул (17):

$$L\phi_j = \begin{cases} g_0(x), \text{ если } j = 0, \\ \frac{2g_1(x)}{(b-a)} + g_0(x) \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right), \text{ если } j = 1, \\ 8g_2(x) \frac{1}{(b-a)^2} + 4g_1(x) \frac{(2x-a-b)}{(b-a)^2} + g_0(x) \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right)^2, \text{ если } j = 2, \\ 8j(j-1)(j-2)g_2(x) \frac{(2x-a-b)^{j-3}}{(b-a)^j} + 4j(j-1)g_2(x) \frac{(2x-a-b)^{j-2}}{(b-a)^j} + \\ + 2jg_1(x) \frac{(2x-a-b)^{j-1}}{(b-a)^j} + g_0(x) \frac{(2x-a-b)^j}{(b-a)^j}, \text{ если } j \geq 3. \end{cases} \quad (17)$$

Численное решение задачи (5) после подстановки (13) в формулу (10) примет вид (18):

$$u(x) = \left(\frac{u_a + u_b}{2} \right) + \sum_{j=1}^m \left[\left(\frac{(2x-a-b)}{b-a} \right)^j + \left(\frac{-1+(-1)^{j+1}}{2} \right) \right] D_j. \quad (18)$$

В решении (18) неизвестный вектор D находится из СЛАУ (16) $D = A^{-1} \bar{f}$. Оценка равномерной нормы решения $u(x)$ дает следующий результат:

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \frac{|u_a| + |u_b|}{2} + 2 \sum_{j=1}^m |D_j| \leq \frac{|u_a| + |u_b|}{2} + 2m \max_{j=1, m} D_j = \frac{|u_a| + |u_b|}{2} + 2m \|D\|_C \leq \frac{|u_a| + |u_b|}{2} + 2m \|A^{-1}\|_C \|\bar{f}\|_C \Rightarrow \\ \|u\|_C &\leq \frac{|u_a| + |u_b|}{2} + 2m \|A^{-1}\|_C \|\bar{f}\|_C. \end{aligned}$$

где норма обратной матрицы A^{-1} определяется формулой $\|A^{-1}\|_C = \max_{i=1, m} \sum_{j=1}^m |a_{i,j}^{-1}|$.

В работе [4] для вычисления всех матричных элементов $a_{i,j}$, а также коэффициентов правой части $\bar{f}_i$ СЛАУ (16) посредством скалярного произведения 2-х функций (12) применялась составная квадратурная интегральная формула (19) с равномерным шагом и с 12-м порядком погрешности $O(h^{12})$, которую использовала программа для численного решения тестового примера 3:

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \int_a^b y_1(x) y_2(x) dx = 5h \sum_{i=0}^{n_1} y_1(x_i) y_2(x_i) C_i + O(h^{12}), n_1 = 10p, h = \frac{b-a}{n_1}, p \in N, \quad (19)$$

где весовые коэффициенты интегральной квадратурной формулы (19) определяются величиной остатка по модулю 10 от номера узла равномерной сетки i .

$$C_i = \begin{cases} \frac{16067}{299376}, i = 0 \vee i = n_1, \\ \frac{16067}{149688}, (i \equiv 0 \bmod 10) \wedge (0 < i < n_1), \\ \frac{26575}{74844}, (i \equiv 1 \bmod 10) \vee (i \equiv 9 \bmod 10), \\ \frac{-16175}{99792}, (i \equiv 2 \bmod 10) \vee (i \equiv 8 \bmod 10), \\ \frac{5675}{6237}, (i \equiv 3 \bmod 10) \vee (i \equiv 7 \bmod 10), \\ \frac{-4825}{5544}, (i \equiv 4 \bmod 10) \vee (i \equiv 6 \bmod 10), \\ \frac{17807}{12474}, i \equiv 5 \bmod 10. \end{cases} \quad (20)$$

Применяя формулу скалярного произведения двух функций по формуле (19) с весовыми коэффициентами (20) и алгоритмом Петрова-Галеркина (16)–(18) с числом базисных функций $m = 16$ и числом интервалов интегрирования $n_1 = 20$ программа дает равномерную норму невязки в задаче (5) (точное решение вычисляется по формуле (8) на равномерной сетке:

$$\begin{aligned} u_i^{exact}, x_i = a + h \cdot i, i = \overline{0, n_1}, h = \frac{b-a}{n_1}, \\ \|u^{num} - u^{exact}\|_C = \max_{i=0, n_1} |u_i^{num} - u_i^{exact}| \approx 2,016997679987753E-012. \end{aligned}$$

В данной работе впервые получена новая квадратурная интегральная формула с равномерным шагом и с 22-м порядком погрешности $O(h^{22})$ для увеличения точности скалярного произведения и вычисления матричных элементов, а также коэффициентов правой части СЛАУ (16), тем самым уменьшая норму погрешности задачи (5).

Для квадратурной интегральной формулы на равномерной сетке [1, с. 87] и с погрешностью $O(h^{22})$ с учетом симметрии запишем квадратурную формулу относительно средней точки отрезка $[a, b]$:

$$c = (a+b)/2 \Leftrightarrow z=0, \quad x = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2} z, z \in [-1, 1], x \in [a, b], dx = \frac{(b-a)}{2} dz$$

получим:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^1 f(z) dz, \int_{-1}^1 f(z) dz = C_0 f(0) + \sum_{i=1}^{i=10} C_i (f(-z_i) + f(z_i)), z_i = i/10. \quad (21)$$

Подставляя в формулу (21) степенные функции четной степени (функции нечетной степени дают тривиальное тождество $0=0$) $f(z) = \{0, z^2, z^4, z^6, z^8, z^{10}, z^{12}, z^{14}, z^{16}, z^{18}, z^{20}\}$, получим систему из 11 линейных алгебраических неоднородных уравнений относительно переменных $C_i, i = \overline{0,10}$:

$$I_{2k} = \int_{-1}^1 z^{2k} dz = \frac{2}{2k+1} = \begin{cases} C_0 + 2 \sum_{i=1}^{10} C_i, k=0 \\ 2 \sum_{i=1}^{10} z_i^{2k} C_i, k=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10; z_i = i/10, i = \overline{1,10}. \end{cases} \quad (22)$$

Результаты исследования. Система уравнений (22) решалась в программной среде Texas Instruments в символьном виде без округлений. Коэффициенты C_i представлены формулой (24), а их проверка приведена таблице 1, представляющей численное значение I_k^{num} (правая часть формулы (22)) и точное значение интеграла $I_k^{exact} = \frac{1+(-1)^k}{k+1}$ (левая часть (22)) для степенных функций $f(z) = \{1, z, z^2, \dots, z^{21}, z^{22}\}$ на отрезке $[-1,1]$ с учетом коэффициентов.

Таблица 1

Сравнение численных и точных значений

k	$I_k^{exact} = \frac{1+(-1)^k}{k+1}$	I_k^{num}
0	2,000000000000000	2,000000000000003
1	0,000000000000000E+000	1,379105163401562E-015
2	0,666666666666667	0,666666666666679
3	0,000000000000000E+000	2,586472702681419E-015
4	0,400000000000000	0,399999999999999
5	0,000000000000000E+000	-3,694961003830599E-016
6	0,285714285714286	0,285714285714285
7	0,000000000000000E+000	-4,388850394221322E-016
8	0,222222222222222	0,222222222222222
9	0,000000000000000E+000	-1,752070710736575E-016
10	0,181818181818182	0,181818181818181
11	0,000000000000000E+000	-1,613292832658431E-016
12	0,153846153846154	0,153846153846153
13	0,000000000000000E+000	-8,500145032286355E-017
14	0,133333333333333	0,133333333333333
15	0,000000000000000E+000	2,602085213965211E-017
16	0,117647058823529	0,117647058823529
17	0,000000000000000E+000	1,092875789865388E-016
18	0,105263157894737	0,105263157894737
19	0,000000000000000E+000	1,578598363138894E-016
20	9,523809523809523E-002	9,523809523809518E-002
21	0,000000000000000E+000	1,717376241217039E-016
22	8,695652173913043E-002	8,695652174444995E-002

Условия системы (22) и таблица 1 показывают, что у квадратурных формул (22) и (23) двадцать второй порядок погрешности.

Если

$$b-a = nh, n = 20s, s \in N, \left(\frac{b-a}{2} \right) = 10sh, x_i = a + i \cdot h, i = \overline{0,n},$$

то

$$\int_a^b f(x) dx = 10h \sum_{i=0}^{n=20s} C_i f(x_i) + O(h^{22}), x_i = a + i \cdot h, i = \overline{0,n},$$

а скалярное произведение двух функций по аналогии с формулами (19), (20) будет иметь вид:

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \int_a^b y_1(x) y_2(x) dx = 10h \sum_{i=0}^{n_1} y_1(x_i) y_2(x_i) C_i + O(h^{22}), n_1 = 20s, h = \frac{b-a}{n_1}, s \in N, \quad (23)$$

где C_i — весовые коэффициенты в составной квадратурной интегральной формуле (23) получены решением СЛАУ (22):

$$C_i = \begin{cases} \frac{1145302367137}{48426042384720}, & \text{если } i = 0 \text{ или } i = n_1, \\ \frac{1145302367137}{24213021192360}, & \text{если } (i \equiv 0 \bmod 20) \text{ и } (0 < i < n_1), \\ \frac{335582304250}{1470076286679}, & \text{если } (i \equiv 1 \bmod 20) \text{ или } (i \equiv 19 \bmod 20), \\ \frac{-19467909708875}{41162136027012}, & \text{если } (i \equiv 2 \bmod 20) \text{ или } (i \equiv 18 \bmod 20), \\ \frac{8274871497250}{3430178002251}, & \text{если } (i \equiv 3 \bmod 20) \text{ или } (i \equiv 17 \bmod 20), \\ \frac{-413929922392625}{54882848036016}, & \text{если } (i \equiv 4 \bmod 20) \text{ или } (i \equiv 16 \bmod 20), \\ \frac{50652939811064}{2450127144465}, & \text{если } (i \equiv 5 \bmod 20) \text{ или } (i \equiv 15 \bmod 20), \\ \frac{-155790561130375}{3430178002251}, & \text{если } (i \equiv 6 \bmod 20) \text{ или } (i \equiv 14 \bmod 20), \\ \frac{286955364893000}{3430178002251}, & \text{если } (i \equiv 7 \bmod 20) \text{ или } (i \equiv 13 \bmod 20), \\ \frac{-502376261017625}{3920203431144}, & \text{если } (i \equiv 8 \bmod 20) \text{ или } (i \equiv 12 \bmod 20), \\ \frac{1704056522480500}{10290534006753}, & \text{если } (i \equiv 9 \bmod 20) \text{ или } (i \equiv 11 \bmod 20), \\ \frac{-1684005984173647}{9355030915230}, & \text{если } i \equiv 10 \bmod 20. \end{cases} \quad (24)$$

Найдем характеристическое уравнение и частные решения однородного уравнения (5) с выбранными параметрами:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, r = 1, \varepsilon u''(x) + ru''(x) = \frac{1}{2}u''(x) + u''(x) = 0 \Rightarrow \lambda^3 + 2\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -2,$$

которым соответствуют 3 частных линейно независимых решения:

$$\{U_1(x) = 1, U_2(x) = x, U_3(x) = \exp(-2x)\}, \{U'_1(x) = 0, U'_2(x) = 1, U'_3(x) = -2\exp(-2x)\}, \\ \{U''_1(x) = 0, U''_2(x) = 0, U''_3(x) = 4\exp(-2x)\}.$$

Проверим существование и единственность решения краевой задачи (5) с параметрами $\varepsilon = \frac{1}{2}, r = 1$.
Запишем элементы матрицы по формуле (4):

$$A_{ij} = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{\mu}^i U_j^{(i)}(a) + \beta_{\mu}^i U_j^{(i)}(b)), \mu, j = \overline{1, n}, u(0) = 0, u(1) = 0, u'(1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1^0 = 1; \alpha_1^1 = 0; \alpha_1^2 = 0; \beta_1^0 = 0; \beta_1^1 = 0; \beta_1^2 = 0,$$

$$\alpha_2^0 = 0; \alpha_2^1 = 0; \alpha_2^2 = 0; \beta_2^0 = 1; \beta_2^1 = 0; \beta_2^2 = 0,$$

$$\alpha_3^0 = 0; \alpha_3^1 = 0; \alpha_3^2 = 0; \beta_3^0 = 0; \beta_3^1 = 1; \beta_3^2 = 0,$$

$$A_{11} = \alpha_1^0 U_1^{(0)}(0) + \beta_1^0 U_1^{(0)}(1) + \alpha_1^1 U_1^{(1)}(0) + \beta_1^1 U_1^{(1)}(1) + \alpha_1^2 U_1^{(2)}(0) + \beta_1^2 U_1^{(2)}(1) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1,$$

$$A_{21} = \alpha_2^0 U_1^{(0)}(0) + \beta_2^0 U_1^{(0)}(1) + \alpha_2^1 U_1^{(1)}(0) + \beta_2^1 U_1^{(1)}(1) + \alpha_2^2 U_1^{(2)}(0) + \beta_2^2 U_1^{(2)}(1) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1,$$

$$A_{31} = \alpha_3^0 U_1^{(0)}(0) + \beta_3^0 U_1^{(0)}(1) + \alpha_3^1 U_1^{(1)}(0) + \beta_3^1 U_1^{(1)}(1) + \alpha_3^2 U_1^{(2)}(0) + \beta_3^2 U_1^{(2)}(1) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0,$$

$$A_{12} = \alpha_1^0 U_2^{(0)}(0) + \beta_1^0 U_2^{(0)}(1) + \alpha_1^1 U_2^{(1)}(0) + \beta_1^1 U_2^{(1)}(1) + \alpha_1^2 U_2^{(2)}(0) + \beta_1^2 U_2^{(2)}(1) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0,$$

$$A_{22} = \alpha_2^0 U_2^{(0)}(0) + \beta_2^0 U_2^{(0)}(1) + \alpha_2^1 U_2^{(1)}(0) + \beta_2^1 U_2^{(1)}(1) + \alpha_2^2 U_2^{(2)}(0) + \beta_2^2 U_2^{(2)}(1) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1,$$

$$A_{32} = \alpha_3^0 U_2^{(0)}(0) + \beta_3^0 U_2^{(0)}(1) + \alpha_3^1 U_2^{(1)}(0) + \beta_3^1 U_2^{(1)}(1) + \alpha_3^2 U_2^{(2)}(0) + \beta_3^2 U_2^{(2)}(1) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1,$$

$$A_{13} = \alpha_1^0 U_3^{(0)}(0) + \beta_1^0 U_3^{(0)}(1) + \alpha_1^1 U_3^{(1)}(0) + \beta_1^1 U_3^{(1)}(1) + \alpha_1^2 U_3^{(2)}(0) + \beta_1^2 U_3^{(2)}(1) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot e^{-2} + 0 \cdot (-2) +$$

$$+ 0 \cdot (-2e^{-2}) + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 4e^{-2} = 1,$$

$$A_{23} = \alpha_2^0 U_3^{(0)}(0) + \beta_2^0 U_3^{(0)}(1) + \alpha_2^1 U_3^{(1)}(0) + \beta_2^1 U_3^{(1)}(1) + \alpha_2^2 U_3^{(2)}(0) + \beta_2^2 U_3^{(2)}(1) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot e^{-2} + 0 \cdot (-2) +$$

$$+ 0 \cdot (-2e^{-2}) + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 4e^{-2} = e^{-2},$$

$$A_{33} = \alpha_3^0 U_3^{(0)}(0) + \beta_3^0 U_3^{(0)}(1) + \alpha_3^1 U_3^{(1)}(0) + \beta_3^1 U_3^{(1)}(1) + \alpha_3^2 U_3^{(2)}(0) + \beta_3^2 U_3^{(2)}(1) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot e^{-2} + 0 \cdot (-2) +$$

$$+ 1 \cdot (-2e^{-2}) + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 4e^{-2} = -2e^{-2}.$$

Так как $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & e^{-2} \\ 0 & 1 & -2e^{-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & e^{-2} \\ 1 & -2e^{-2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3e^{-2} + 1 \neq 0$, то согласно Теореме 1 краевая задача (5) с параметрами

$\varepsilon = \frac{1}{2}, r = 1$ имеет единственное решение. Точное решение с правой частью $f(x) \equiv 1, \varepsilon = \frac{1}{2}, r = 1$ задается функцией (8).

Других решений нет.

Обратная матрица A^{-1} в системе линейных алгебраических уравнений СЛАУ (16) вычисляется библиотекой линейной алгебры *msimsl* для отыскания вектора коэффициентов разложения $D_j, j = 1, m$. Программа с использованием формул (16), (17), (18), (23), (24) дает численное решение задачи (5)

$$x_i = a + h \cdot i, i = \overline{0, n_1}, h = \frac{b-a}{n_1}, n_1 = 20, a = 0, b = 1,$$

с параметрами $\varepsilon = \frac{1}{2}, r = 1, f(x) \equiv 1, g_3(x) = \varepsilon = \frac{1}{2}, g_2(x) = r = 1, g_1(x) = 0, g_0(x) = 0$, представленное в таблице 2.

Число базисных функций $m = 18$.

Таблица 2

Численное u_i^{num} и точное u_i^{exact} решения задачи (5)

x_i	u_i^{num}	u_i^{exact}	$u_i^{num} - u_i^{exact}$
0,000000E+000	0,0000000000E+000	0,0000000000E+000	0,00000000E+000
5,0000000E-002	1,99620012886537E-002	1,99620012886524E-002	1,231653667E-015
0,1000000000	3,48011017443269E-002	3,48011017443259E-002	1,006139616E-015
0,1500000000	4,52427162923431E-002	4,52427162923431E-002	6,938893903E-018
0,2000000000	5,19432275007362E-002	5,19432275007366E-002	-3,816391647E-016
0,2500000000	5,54965548776091E-002	5,54965548776098E-002	-6,800116025E-016
0,3000000000	5,64400990171948E-002	5,64400990171955E-002	-7,563394355E-016
0,3500000000	5,52601200856299E-002	5,52601200856307E-002	-8,118505867E-016
0,4000000000	5,23966044761353E-002	5,23966044761364E-002	-1,033895191E-015
0,4500000000	4,82476683407243E-002	4,82476683407254E-002	-1,075528555E-015
0,5000000000	4,31735420704626E-002	4,31735420704638E-002	-1,221245327E-015
0,5500000000	3,75001756023005E-002	3,75001756023019E-002	-1,415534356E-015
0,6000000000	3,15225006355969E-002	3,15225006355983E-002	-1,450228825E-015
0,6500000000	2,55073824076967E-002	2,55073824076980E-002	-1,356553758E-015
0,7000000000	1,96962905709227E-002	1,96962905709242E-002	-1,467576060E-015
0,7500000000	1,43077159020167E-002	1,43077159020178E-002	-1,103284130E-015
0,8000000000	9,53935703127063E-003	9,53935703127128E-003	-6,574601973E-016
0,8500000000	5,57009907686709E-003	5,57009907686645E-003	6,435824095E-016
0,9000000000	2,56180398726754E-003	2,56180398726446E-003	3,080001531E-015
0,9500000000	6,609305099950E-004	6,609305099896E-004	5,435105490E-015
1,0000000000	0,0000000000E+000	-1,110223024625157E-016	1,110223024E-016

В первом столбце таблицы 1 указаны значения узлов x_i равномерной сетки, во втором столбце записано численное решение u_i^{num} , в третьем столбце точное решение u_i^{exact} в узлах x_i . В последнем столбце находится разность решений $u_i^{num} - u_i^{exact}$.

```

norma C= 5.435105490669834E-015 m= 18 nl= 20
D( 1 ) -5.425383160656392E-002
D( 2 ) -2.983293942866721E-002
D( 3 ) 5.161097980956100E-002
D( 4 ) -1.280274489240004E-002
D( 5 ) 2.580548990467546E-003
D( 6 ) -4.300914983764449E-004
D( 7 ) 6.144164266031110E-005
D( 8 ) -7.680205348721532E-006
D( 9 ) 8.533561145054888E-007
D( 10 ) -8.533561228810689E-008
D( 11 ) 7.757808092804512E-009
D( 12 ) -6.464699539332031E-010
D( 13 ) 4.970810665385744E-011
D( 14 ) -3.580968394013108E-012
D( 15 ) 2.492338836360626E-013
D( 16 ) -3.917330812303257E-015
D( 17 ) -1.695030669349015E-015
D( 18 ) -3.164721066953407E-015
Fortran Pause - Enter command<CR> or <CR> to continue.

```

Рис. 1. Результаты работы программы

С учетом формул (23)–(24) программа дает норму погрешности $\|u^{num} - u^{exact}\|_C = \max_{i=0, n_1} |u_i^{num} - u_i^{exact}| \approx 5,435105E-015$ с результатом в десятки раз меньшим, чем с применением формул скалярного произведения функций (19)–(20). Рис. 1 показывает, что число базисных функций является оптимальным, если коэффициенты разложения решения по базисным функциям по абсолютной величине уменьшаются с ростом их индекса. Преимущество формул скалярного произведения (23)–(24) перед формулами (19)–(20) заключается также в слабой зависимости нормы погрешности от числа базисных функций в большом диапазоне их числа.

Обсуждение и заключение. Обобщена теорема существования и единственности решения краевой задачи с линейным обыкновенным дифференциальным уравнением порядка n на случай неразделенных краевых условий, если известны n линейно независимых частных решений соответствующего однородного уравнения. Аналитически решена краевая задача с дифференциальным уравнением третьего порядка в пограничном слое с несжимаемой жидкостью с параметрами $\varepsilon = 0,5$, $r = 1$ и постоянной правой частью $f(x) = 1$. Предложен метод Бубнова-Галеркина с системой линейно независимых на отрезке $[-1, 1]$ базисных функций, ограниченных с единичной нормой Чебышева для численного решения краевой гидродинамической задачи с сильным пограничным слоем. Впервые получена квадратурная интегральная формула с равномерным шагом для вычисления матричных элементов и коэффициентов правой части методом Бубнова-Галеркина в СЛАУ (16) с двадцать вторым порядком погрешности. Векторная норма Чебышева для разности точного решения и численного решения на равномерной сетке со скалярным произведением (23), (24) сравнима с 10^{-15} и в десятки раз меньше нормы невязки со скалярным произведением по формулам (19), (20) в одной и той же гидродинамической задаче.

Список литературы / References

- Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы: учебное пособие для студентов физико-математических специальностей высших учебных заведений*. Москва: Бином. Лаборатория знаний; 2011. 636 с.
Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Numerical methods: a textbook for students of physics and mathematics specialties of higher educational institutions*. Binom. lab. Knowledge; 2011. 636 p. (In Russ.)
- Ершова Т.Я. Краевая задача для дифференциального уравнения третьего порядка с сильным пограничным слоем. *Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика*. 2020;1:30–39. <https://doi.org/10.3103/S0278641920010057>
Ershova, T.Ya. Boundary value problem for a third-order differential equation with a strong boundary layer. *Bulletin of Moscow University. Episode 15: Computational mathematics and cybernetics*. 2020;1:30–39. (In Russ.) <https://doi.org/10.3103/S0278641920010057>
- Ершова Т.Я. О сходимости сеточного решения задачи для уравнения третьего порядка в случае сильного пограничного слоя. В: *Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения»*. Москва: МАКС Пресс; 2020. С. 77–78.
Ershova, T.Ya. On the convergence of a grid solution to the problem for a third-order equation in the case of a strong boundary layer. *Lomonosov readings: scientific conference*. Moscow: MAKSS Press LLC, 2020. P. 77–78. (In Russ.)
- Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированный метод Бубнова-Галеркина для решения краевых задач с линейным обыкновенным дифференциальным уравнением. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(3):23–33. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-3-23-33>
Volosova N.K. [et al.]. Modified Bubnov-Galerkin method for solving boundary value problems with a linear ordinary differential equation. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(3):23–33. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-3-23-33>
- Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. *Численные методы в задачах и упражнениях*. Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний; 2010. 240 с.
Bahvalov N.S., Lapin A.V., Chizhonkov E.V. *Numerical methods in problems and exercises*. Moscow: BINOM. Knowledge laboratory; 2010. 240 p. (In Russ.)

6. Петров А.Г. Высокоточные численные схемы решения плоских краевых задач для полигармонического уравнения и их применение к задачам гидродинамики. *Прикладная математика и механика*. 2023;87(3):343–368. <https://doi.org/10.31857/S0032823523030128>

Petrov A.G. High-precision numerical schemes for solving plane boundary value problems for a polyharmonic equation and their application to problems of hydrodynamics. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2023;87(3):343–368 (In Russ.) <https://doi.org/10.31857/S0032823523030128>

7. Проскурин Д.К., Сысоев Д.В., Сазонова С.А. Сходимость вычислительного процесса при реализации вариационного метода решения краевой задачи гидродинамики. *Вестник Воронежского государственного технического университета*. 2021;17(3):14–19. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2021.17.3.002>

Proskurin D.K., Sysoev D.V., Sazonova S.A. Convergence of the computational process when implementing the variational method for solving the boundary value problem of hydrodynamics. *Bulletin of the Voronezh State Technical University*. 2021;17(3):14–19. (In Russ.) <https://doi.org/10.36622/VSTU.2021.17.3.002>

8. Сидорякина В.В., Соломаха Д.А. Симметризованные варианты методов Зейделя и верхней релаксации решения двумерных разностных задач эллиптического типа. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):12–19. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-12-19>

Sidoryakina V.V., Solomaha D.A. Symmetrized versions of the Seidel and upper relaxation methods for solving two-dimensional difference problems of elliptic. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):12–19. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-12-19>

9. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. *Сборник задач по оптимизации: Теория. Примеры. Задачи*. Москва: Физматлит; 2008. 256 с.

Alekseev V.M., Galeev E.M., Tikhomirov V.M. *Collection of optimization problems: Theory. Examples. Problems*. Moscow: Fizmatlit; 2008. 256 p. (In Russ.)

Об авторах:

Наталья Константиновна Волосова, аспирант Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана (105005, Российская Федерация, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, стр. 1), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9151-1000), navalosova@yandex.ru

Константин Александрович Волосов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Российская Федерация, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9151-1000), konstantinvolosov@yandex.ru

Александра Константиновна Волосова, кандидат физико-математических наук, начальник аналитического отдела ООО «Трамплин» Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Российская Федерация, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9151-1000), alya01@yandex.ru

Михаил Иванович Карлов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Московского физико-технического института (141701, ГСП-4, Российская Федерация, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9), karlov.mipt@gmail.com

Дмитрий Феликсович Пастухов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9151-1000), dmitrij.pastuhov@mail.ru

Юрий Феликсович Пастухов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9151-1000), pulsar1900@mail.ru

Заявленный вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Natalya K. Volosova, Post-graduate Student of Bauman Moscow State Technical University (2nd Baumanskaya St. 5–1, Moscow, 105005, Russian Federation), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9151-1000), navalosova@yandex.ru

Konstantin A. Volosov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics of the Russian University of Transport (Obraztsova St. 9–9, Moscow, GSP-4, 127994, Russian Federation), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9151-1000), konstantinvolosov@yandex.ru

Aleksandra K. Volosova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Chief Analytical Department “Tramplin” LLC, Russian University of Transport (Obraztsova St. 9–9, Moscow, GSP-4, 127994, Russian Federation), [ORCID](#), alya01@yandex.ru

Mikhail I. Karlov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (9, Institutsky Lane, GSP-4, Dolgoprudny, 141701, Russian Federation), karlov.mipt@gmail.com

Dmitriy F. Pastukhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (Blokhin St. 29, Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), [ORCID](#), dmitrij.pastuhov@mail.ru

Yuriy F. Pastukhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (Blokhin St. 29, Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), [ORCID](#), pulsar1900@mail.ru

Contributions of the authors: the authors contributed equally to this article.

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 18.11.2024

Поступила после рецензирования / Revised 12.12.2024

Принята к публикации / Accepted 16.12.2024

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

INFORMATION TECHNOLOGIES



УДК 004.855.5

Оригинальное эмпирическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-19-26>


Прогнозирование поглощений бурового раствора на Python

Н.В. Корнилаев¹ , К.Ф. Коледина^{1,2} ¹ Уфимский государственный нефтяной технический университет, г. Уфа, Российская Федерация² Институт нефтехимии и катализа УФИЦ РАН, г. Уфа, Российская Федерация nik-kornilaev@mail.ru

Аннотация

Введение. Поглощения бурового раствора являются одним из наиболее распространённых видов осложнений в бурении скважин. Первостепенной задачей является прогнозирование процесса поглощения, так как предупреждение данного вида осложнения позволит минимизировать потери бурового раствора, а также предотвратить аварии в скважине. Возникновение поглощений обусловлено прежде всего геологическими свойствами пластов. Выяснение связи между возникновением поглощений бурового раствора и геологическими характеристиками разбуриваемых пластов представляет как фундаментальный, так и практический интерес. В связи со сложностью определения вероятности возникновения поглощений с помощью известных математических моделей была поставлена цель исследования — построить с помощью методов машинного обучения систему, прогнозирующую значения вероятности возникновения поглощений в зависимости от местоположения скважины и её стратиграфического описания.

Материалы и методы. Экспериментальные данные о 735 скважинах Шкаповского месторождения (координаты местоположения, геологический индекс пласта, значение интенсивности поглощений) были подготовлены авторами к вычислениям. Исходные данные были разделены на обучающую и тестовую выборки. Представлены варианты решения задачи классификации по четырем классам интенсивности поглощений с использованием следующих моделей машинного обучения: «дерево решений», «случайный лес», «линейный дискриминантный анализ».

Результаты исследования. Результаты прогнозирования по трём моделям сравнивались с экспериментальными данными тестовой выборки. Для оценки качества моделей использовались метрики «точность» и «полнота». По всем трём моделям была достигнута средняя точность предсказания значений — 91 %. Было установлено, что наиболее точной моделью является «линейный дискриминантный анализ».

Обсуждение и заключение. Прогнозы высокой точности позволяют предсказывать, с какой вероятностью будут возникать поглощения определённой интенсивности в зависимости от местоположения новой скважины и её стратиграфического описания. В работе представлено три метода решения задачи, показавших наилучшие результаты.

Ключевые слова: Python, поглощение, бурение, методы машинного обучения, дерево решений, дискриминантный анализ, случайный лес

Для цитирования. Корнилаев Н.В., Коледина К.Ф. Прогнозирование поглощений бурового раствора на Python. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):19–26. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-19-26>

Original Empirical Research

Forecasting Drilling Mud Losses Using Python

Nikita V. Kornilaev¹ , Kamila F. Koledina^{1,2} ¹ Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russian Federation² Institute of Petrochemistry and Catalysis, Ufa Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation nik-kornilaev@mail.ru

Abstract

Introduction. Drilling mud losses are among the most common complications encountered during well drilling. Forecasting these losses is a priority as it helps minimize drilling fluid wastage and prevent wellbore incidents. Mud loss events are primarily influenced by the geological properties of the formations being drilled. Understanding the relationship between

mud loss occurrences and the geological characteristics of the formations has both fundamental and practical significance. Given the complexity of predicting mud loss probabilities using traditional mathematical models, this study aims to develop a machine-learning-based system to predict the probability of mud losses based on well location and stratigraphic description. **Materials and Methods.** Experimental data from 735 wells at the Shkapovskoye oil field, including well location coordinates, geological layer indices, and mud loss intensities, were prepared for computational analysis. The dataset was divided into training and testing subsets. The classification problem was addressed using four intensity classes with the following machine learning models: Decision Tree, Random Forest, and Linear Discriminant Analysis.

Results. Predictions generated by the three models were compared against the experimental data in the test set. The evaluation metrics included accuracy and recall. All three models achieved an average prediction accuracy of 91%. Linear Discriminant Analysis was identified as the most accurate model.

Discussion and Conclusion. High-accuracy predictions enable reliable forecasting of the probability and intensity of mud losses based on the location and stratigraphic description of new wells. The study presents three machine learning methods that demonstrated superior results in solving this problem.

Keywords: Python, mud loss, drilling, machine learning methods, Decision Tree, Discriminant Analysis, Random Forest

For Citation. Kornilaev N.V., Koledina K.F. Forecasting Drilling Mud Losses Using Python. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):19–26. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-19-26>

Введение. На сегодняшний день с целью повышения конкурентоспособности и оптимизации расходов на бурение скважин широко применяются методы искусственного интеллекта для управления технологическим процессом. Предупреждение осложнений и аварий является основной задачей, так как это позволяет сократить или вовсе избежать непредвиденных расходов на ликвидацию последствий.

Поглощения представляют собой полную или частичную потерю бурового раствора при её фильтрации в пласт. Данное явление зависит от многих факторов, объединённых в две большие группы: геологические и технологические. Геологические факторы, т. е. характеристики горных пород (пористость, трещиноватость, проницаемость) имеют наибольшее влияние, чем технологические (свойства подобранного бурового раствора, давление промывочной жидкости). Это объясняется тем, что на поверхности земли возможно подобрать заданный режим бурения, контролируя все необходимые параметры, однако получить точные характеристики горных пород не всегда удастся. В условиях высоких горных давлений и температур пласты могут обладать непредсказуемыми характеристиками. В работе [1] подробно исследовалась закономерность возникновения поглощений на Южно-Орловском месторождении в Самарской области. В таблице 1 представлены данные о наличии и интенсивности поглощений в соответствии с исследованиями на определённых интервалах бурения со стратиграфическим описанием залегающих пластов.

Таблица 1

Интенсивность поглощений в скважинах

№ скважины	Интервал поглощения	Стратиграфия	Поглощение, м ³ /ч
16	2079–2087	C_1^t	10
	2174–2624	$D_3^{mn} + D_3^{fm}$	катастрофическое
4	2005	$D_3^{mn} + D_3^{fm}$	0,4
5	2124–2181	$D_3^{mn} + D_3^{fm}$	6–20
	2188		полное
	2245–2259		
12	1925–1964	C_1^t	2–3
	2064–2114	D_3^{fm}	4–18
	2150–2178	D_3^{mn}	полное
19	2099–2103	D_3^{fm}	12–60
	2130–2236	D_3^{mn}	полное

Из таблицы 1 видно, что в скважинах со схожими свойствами горных пород наблюдаются поглощения с различной интенсивностью, что говорит о непредсказуемом характере возникновения поглощений.

Множество исследований [2–5] было направлено на прогнозирование различных видов осложнений и разработку рекомендательных систем при возможном их возникновении, в том числе и для поглощений. Основой работы программных продуктов являются искусственные нейронные сети, обученные на больших объемах геоданных со станций геолого-технологических измерений. К общим недостаткам данных программных комплексов относится невозможность оперативного получения полного объема информации с забоя в режиме

реального времени, из-за чего количество входных данных ограничивается, что снижает точность прогноза модели. Помимо этого, при разработке необходимо учитывать протекционизм нефтегазовых компаний в современных условиях, что делает невозможным получить множество исходных данных для создания модели. Следовательно, необходимо разрабатывать эффективные алгоритмы и программные комплексы, работающие в условиях ограничения исходных данных.

Таким образом, была поставлена цель исследования — построить с помощью методов машинного обучения систему, прогнозирующую вероятность возникновения поглощений бурового раствора заданной интенсивности в зависимости от местоположения и стратиграфического описания вскрываемых пластов.

Для реализации цели были поставлены следующие задачи:

- подготовить экспериментальные данные для расчётов;
- проанализировать алгоритмы машинного обучения и создать программу с применением наиболее оптимальных методов.

Материалы и методы. Для исследования поглощений было выбрано Шкаповское месторождение республики Башкортостан. В работе [6] была представлена карта месторождения, на которой скважины обозначены условными знаками, передающими информацию об интенсивности поглощений в каждой скважине. Карта Шкаповского месторождения представлена на рис. 1.

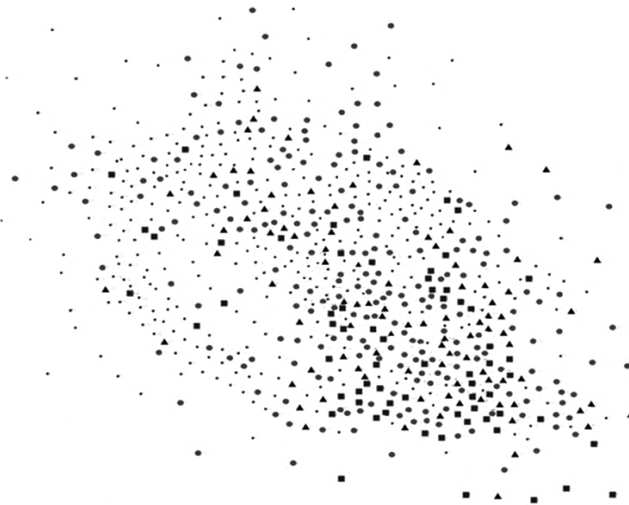


Рис. 1. Шкаповское месторождение

Было выделено 4 класса поглощений по их интенсивности, на рис. 1 они отмечены следующим образом:

- $0 \text{ м}^3/\text{час}$ — поглощения отсутствуют (точки);
- от 0 до $40 \text{ м}^3/\text{час}$ — поглощения с небольшой интенсивностью (круги);
- от 40 до $80 \text{ м}^3/\text{час}$ — поглощения средней интенсивности (треугольники);
- более $80 \text{ м}^3/\text{час}$ — катастрофические поглощения (квадраты).

С помощью сервиса Яндекс.Карты были определены длина и ширина месторождения, затем с помощью программного комплекса GeoGebra на основе данных с карты были определены координаты каждой скважины. Фрагмент расчёта представлен на рис. 2.

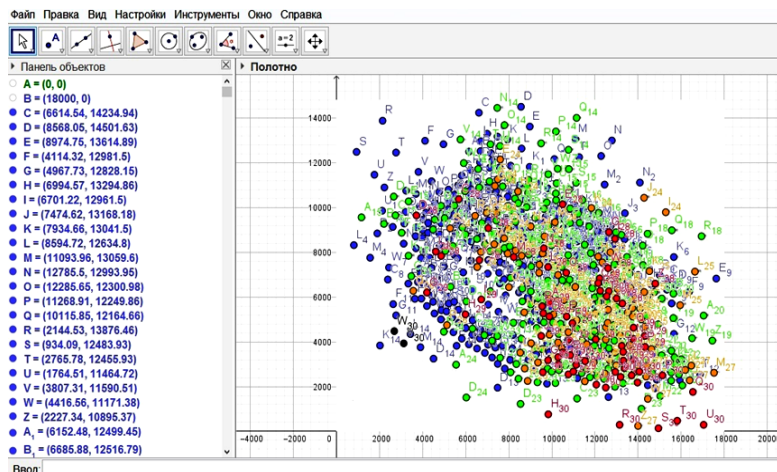


Рис. 2. Определение координат скважин

Скважины, помеченные разноцветными точками, здесь и далее соответствуют интенсивности поглощений в порядке возрастания интенсивности: синие точки — 0 м³/час; зелёные точки — от 0 до 40 м³/час; оранжевые точки — 40 до 80 м³/час; красные точки — более 80 м³/час.

Для определения стратиграфического описания воспользуемся информацией о том, что основным продуктивным горизонтом является пласт пашийского (d3_p3), кыновского (d3_kn) и старооскольского (d2_st) горизонтов девонской системы. Также имеют промышленное значение, но в меньшей мере, отложения бобриковского горизонта (c1_bb) [7]. Данные по скважинам представлены следующими категориями: координаты, стратиграфическое описание, интенсивность поглощений. На полученных данных были опробованы различные методы машинного обучения и выбраны наиболее подходящие для последующего улучшения модели.

Дерево решений. Данный алгоритм представляет собой создание древовидной структуры, в которой реализованы правила: «Если ..., то...». Данные правила формируются в процессе решения на обучающей выборке за счёт обобщений множества наблюдений, причем они являются легко интерпретируемыми. С математической точки зрения решающее правило представляет собой набор конъюнкций:

$$R(x) = \bigwedge_{j \in J} [a_j \leq f_i(x) \leq b_j], \quad (1)$$

где J — множество признаков, отбираемые для формирования вывода; $f_i(x)$ — вещественный признак; a_j, b_j — набор условий. Если вся совокупность признаков удовлетворяет условиям, то возвращается 1, иначе 0.

К преимуществам алгоритма можно отнести простоту интерпретации относительно нейронных сетей и некоторых других алгоритмов машинного обучения, невысокие требования к предварительной обработке данных. Недостатками решающих деревьев являются высокая вероятность переобучения, так как алгоритм может построить слишком большое дерево, которое может быть неприменимо к другому набору исходных данных.

Случайный лес. Алгоритм случайного леса (Random Forest) — универсальный алгоритм машинного обучения, суть которого состоит в использовании ансамбля решающих деревьев.

По сравнению с другими методами машинного обучения теоретическая часть алгоритма Random Forest проста, формула итогового классификатора $a(x)$ выглядит следующим образом:

$$a(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N b_i(x), \quad (2)$$

где N — количество деревьев; i — счетчик для деревьев; b — решающее дерево; $a(x)$ — сгенерированная на основе данных выборка.

Однако, несмотря на универсальность, у данного метода наблюдается ряд существенных недостатков:

- сложность интерпретации;
- случайный лес не умеет экстраполировать;
- алгоритм склонен к переобучению на сильно зашумленных данных;
- для данных, включающих категориальные переменные с различным количеством уровней, случайные леса предвзяты в пользу признаков с большим количеством уровней [9].

Линейный дискриминантный анализ (LDA). Основная идея выбранного алгоритма заключается в предположении о многомерном нормальном распределении внутри классов и поиске линейного преобразования для максимизации межклассовой дисперсии и минимизации внутриклассовой [10].

Предложенный алгоритм обладает следующими преимуществами:

- меньшая склонность к переобучению (в отличие от алгоритма логистической регрессии), поскольку LDA основан на моделировании распределения данных в каждом классе и ему требуется меньше параметров для оценки;
- при большом количестве классов и их хорошем линейном разделении является более стабильным и эффективным.

Основным недостатком LDA является чувствительность к выбросам и неэффективность к сильно превышающему числу признаков над числом объектов.

Результаты исследования. Решение задачи классификации осуществлялось с помощью языка программирования Python, использовались библиотеки sklearn, pandas, numpy, tkinter, СУБД MySQL. Блок-схема программы представлена на рис. 3.

Для визуализации результатов моделирования сравним интенсивность поглощений скважин тестовой выборки и интенсивности поглощений, предсказанные моделями. Схемы интенсивности скважин тестовой выборки представлены на рис. 4.

На рис. 5–7 представлены схемы месторождений со скважинами с предсказанными интенсивностями поглощений для трёх рассмотренных моделей машинного обучения. Отмечены отличия от тестовой выборки.

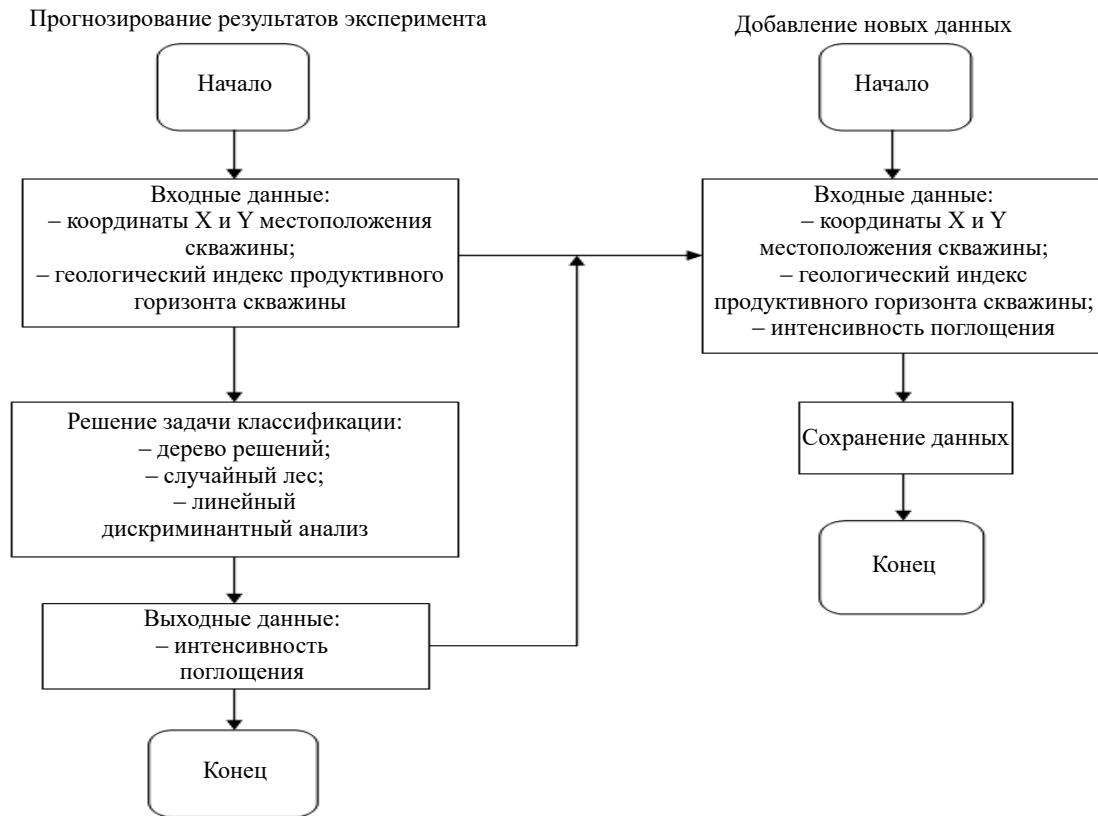


Рис. 3. Блок-схема программы

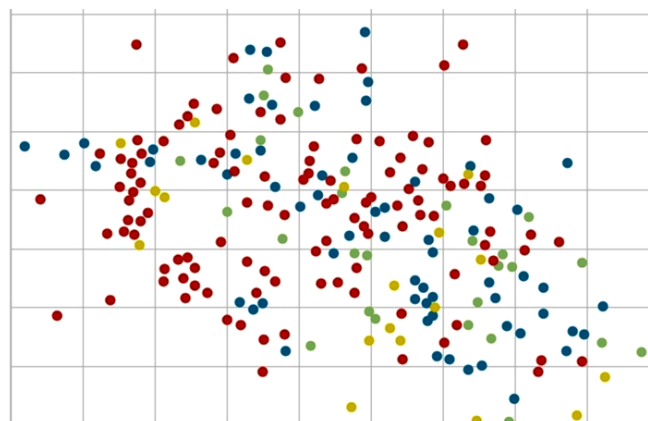


Рис. 4. Схема интенсивности поглощений (скважины тестовой выборки)

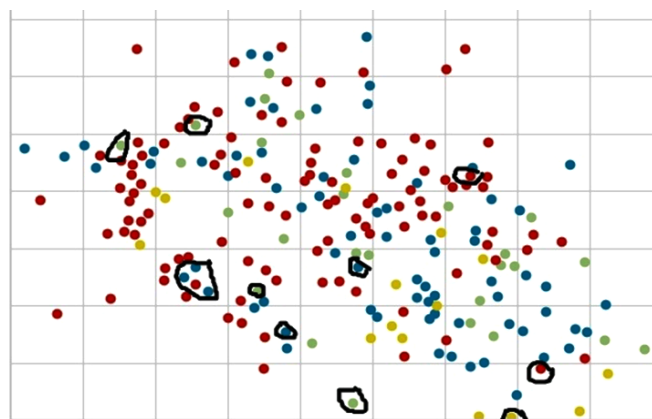


Рис. 5. Схема интенсивности поглощений (для алгоритма «Дерево решений»)

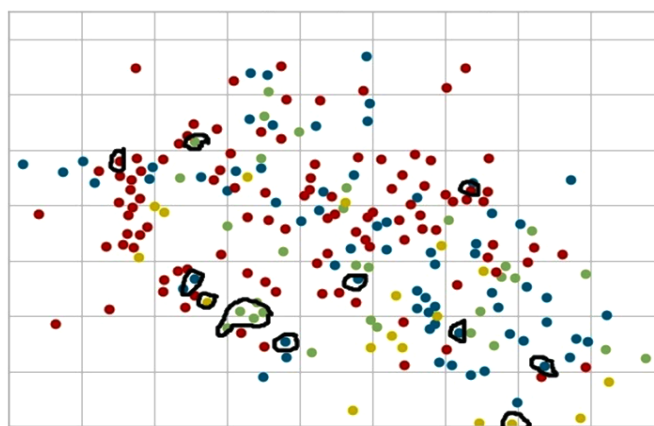


Рис. 6. Схема интенсивности поглощений (для алгоритма «Линейный дискриминантный анализ»)

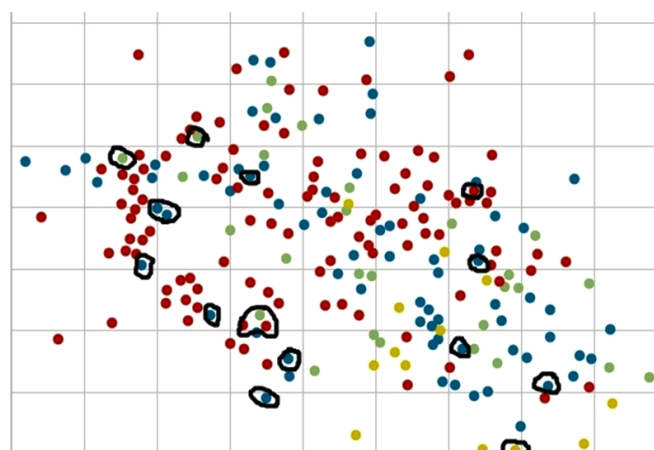


Рис. 7. Схема интенсивности поглощений (для алгоритма «Случайный лес»)

Наибольшее количество «несовпадений» наблюдается у модели алгоритма «Случайный лес». Это можно объяснить недостаточным размером и количеством признаков обучающей выборки для построения ансамбля решающих деревьев.

В качестве метрик точности использовались метрики *recall* (полнота), характеризующие способность находить рассматриваемый класс, а также показатель *precision* (точность), позволяющий отличать один класс от другого. Данные метрики рассчитываются по формулам (3, 4):

$$\text{precision} = \frac{TP}{TP + FP}, \quad (3)$$

$$\text{recall} = \frac{TP}{TP + FN}, \quad (4)$$

где *TP* — верно предсказанные значения рассматриваемого класса; *FP* — неверно предсказанные значения рассматриваемого класса; *FN* — неверно предсказанные значения других классов.

Результаты расчётов для каждого из классов приведены в таблице 2.

Таблица 2

Метрики оценки качества моделей машинного обучения

Класс поглощений	Максимальная точность	Максимальная полнота
0 м ³	0,88 (ЛДА)	0,97 (Дерево решений)
0–40 м ³	0,89 (Случайный лес)	0,93 (ЛДА)
40–80 м ³	0,93 (Дерево решений)	0,84 (ЛДА)
> 80 м ³	0,98 (ЛДА)	0,92 (Случайный лес)

Из таблицы 2 можно сделать вывод, что все три модели показали высокие результаты прогнозирования. Наиболее эффективным алгоритмом в рассматриваемой задаче является линейный дискриминантный анализ.

Обсуждение и заключение. Результаты, полученные в ходе решения задачи прогнозирования интенсивности поглощений бурового раствора в скважинах, актуальны для применения в реальной оценке возникновения осложнений на промысле. Несмотря на высокую предсказательную способность данной модели, главным ее недостатком является неприменимость на других месторождениях. Для получения актуального решения задачи классификации на других месторождениях необходимо переобучать модель на соответствующих промысловых данных. Поэтому необходимо разрабатывать решения для предварительного анализа «сырых» данных, предоставленных геологоразведкой, и последующей передачи данных для алгоритмов машинного обучения.

Список литературы / References

1. Шиповский К.А., Циркова В.С., Коваль М.Е., Кожин В.Н. Закономерности распределения зон поглощений в одиночных рифах депрессионной зоны Камско-Кинельской системы прогибов. *Экспозиция Нефть Газ*. 2021;1(80):34–39. <https://doi.org/10.24412/2076-6785-2021-1-34-39>
- Shipovskiy K.A., Tsirkova V.S., Koval M.E., Kozhin V.N. Regularities of the distribution of lost circulation areas in single reefs of the depression zone of the Kama-Kinel downfold system. *Exposition Oil & Gas*. 2021;1(80):34–39. (In Russ.) <https://doi.org/10.24412/2076-6785-2021-1-34-39>
2. Ерёмин Н.А., Селенгинский Д.А. О возможностях применения методов искусственного интеллекта в решении нефтегазовых задач. *Известия Тульского государственного университета. Науки о земле*. 2023;1(1):201–211. <https://doi.org/10.46689/2218-5194-2023-1-1-201-211>
- Eremin N.A., Selenginsky D.A. On the possibilities of applying artificial intelligence methods in solving oil and gas problems. *Proceedings of Tula State University. Earth sciences*. 2023;1(1):201–211. (In Russ.) <https://doi.org/10.46689/2218-5194-2023-1-1-201-211>
3. Абу-Абед Ф.Н., Борисов Н.А., Хабаров А.Р. Использование методов распознавания образов для анализа аварийных ситуаций. В: *Сборник статей XVI международной научно-практической конференции «Математические методы и информационные технологии в экономике, социологии и образовании»*. Пенза: Автономная некоммерческая научно-образовательная организация «Приволжский Дом знаний»; 2005. С. 428–431.
- Abu-Abed F.N., Borisov N.A., Khabarov A.R. The use of pattern recognition methods for the analysis of emergency situations. In: *Collection of articles of the XVI International scientific and practical conference “Mathematical methods and information technologies in economics, Sociology and Education”*. Penza: Autonomous non-profit scientific and educational organization “Volga House of Knowledge”; 2005. pp. 428–431. (In Russ.).
4. Кодиров Ш.Ш., Шестаков А.Л. Разработка искусственной нейронной сети для прогнозирования прихватов колонн буровых труб. *Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника»*. 2019;19(3):20–32. <https://doi.org/10.14529/ctcr190302>
- Kodirov Sh.Sh., Shestakov A.L. Development of an artificial neural network for predicting the tack of drill pipe columns. *Bulletin of SUSU. The series “Computer technology, control, radio electronics”*. 2019;19(3):20–32. (In Russ.) <https://doi.org/10.14529/ctcr190302>
5. Дмитриевский А.Н., Еремин Н.А., Черников А.Д., Зинатулина Л.И. Использование методов искусственного интеллекта для предотвращения осложнений при строительстве скважин. *Известия тульского государственного университета. Науки о земле*. 2021;4:132–145. <https://doi.org/10.46689/2218-5194-2021-4-1-132-144>
- Dmitrievsky A.N., Eremin N.A., Chernikov A.D., Zinatulina L.I. The use of artificial intelligence methods to prevent complications during well construction. *Proceedings of Tula State University. Earth sciences*. 2021;4:132–145. (In Russ.) <https://doi.org/10.46689/2218-5194-2021-4-1-132-144>
6. Линд Ю.Б., Кабирова А.Р., Нурисламова Л.Ф. Прогнозирование осложнений в процессе бурения с использованием технологии параллельных вычислений. В: *Труды международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии»*. Новосибирск: Издательский центр ЮУрГУ; 2012. С. 571–576.
- Lind Yu.B., Kabirova A.R., Nurislamova L.F. Predicting complications in the drilling process using parallel computing technology. In: *Proceedings of the international scientific conference “Parallel Computing Technologies”*. Novosibirsk: SUSU Publishing Center; 2012. pp. 571–576. (In Russ.)
7. Требин Г.Ф., Чарыгин Н.В., Обухова Т.М. *Нефти месторождений Советского Союза. Справочник*. 2-е изд., доп. и перераб. Москва: Недра; 1980. 583 с.
- Trebin G.F., Charygin N.V., Obukhova T.M. *Oil fields of the Soviet Union. Guide*. 2nd ed., additional and revised. Moscow: Nedra; 1980. 583 p. (In Russ.)
8. DecisionTrees — Geeksforgeeks. URL: <https://www.geeksforgeeks.org/decision-tree-introduction-example/> (accessed: 21.04.2024).
9. Random Forest Algorithm in Machine Learning — Geekforgeeks. URL: <https://www.geeksforgeeks.org/random-forest-algorithm-in-machine-learning/> (accessed: 21.04.2024).
10. Linear Discriminant Analysis in Machine Learning — GeeksforGeeks. URL: <https://www.geeksforgeeks.org/ml-linear-discriminant-analysis/> (accessed: 21.04.2024).

Об авторах:

Никита Владимирович Корнилаев, студент кафедры информационных технологий и прикладной математики Уфимского государственного нефтяного технологического университета (450064, Российская Федерация, г. Уфа, ул. Космонавтов, 1), [ORCID](#), nik-kornilaev@mail.ru

Камила Феликсовна Коледина, доктор физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий и прикладной математики Уфимского государственного нефтяного технологического университета (450064, Российская Федерация, г. Уфа, ул. Космонавтов, 1), научный сотрудник Института нефтехимии и катализа Российской академии наук (450075, Российская Федерация, г. Уфа, пр-т Октября, 141), [ORCID](#), koledinakamila@mail.ru

Заявленный вклад авторов:

Н.В. Корнилаев: разработка программы и реализация алгоритма.

К.Ф. Коледина: формализация задачи, тестирование, разработка спецификации.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Nikita V. Kornilaev, student at the Department of Information Technologies and Applied Mathematics of the Ufa State Petroleum Technological University (1, Kosmonavtov str., Ufa, 450064, Russian Federation), [ORCID](#), nik-kornilaev@mail.ru

Kamila F. Koledina, Dr. Sc. (Phys.-Math.), Associate Professor at the Department of Information Technologies and Applied Mathematics of the Ufa State Petroleum Technological University (1, Kosmonavtov str., 450064, Ufa, Russian Federation), Research Fellow of the Institute of Petrochemistry and Catalysis of the Russian Academy of Sciences (450075, October ave., 141, Ufa, Russian Federation), [ORCID](#), koledinakamila@mail.ru

Claimed Contributorship:

N.V. Kornilaev: Program development and algorithm implementation.

K.F. Koledina: task formalization, testing, specification development.

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 21.10.2024

Поступила после рецензирования / Reviewed 07.11.2024

Принята к публикации / Accepted 15.11.2024

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

INFORMATION TECHNOLOGIES



УДК 519.6

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-27-34>


Прогнозирование динамики летних видов фитопланктона на основе методов усвоения спутниковых данных

Ю.В. Белова¹ , А.А. Филина² , А.Е. Чистяков¹ ¹ Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация² ООО «НИЦ супер-ЭВМ и нейрокомпьютеров», г. Таганрог, Российская Федерация✉ yvbelova@yandex.ru

Аннотация

Введение. В качестве основного инструмента исследований функционирования водных экосистем и прогнозирования изменения концентрации фитопланктона в мелководном водоеме в летний период обычно используется математический инструмент с применением спутниковых данных, что позволяет осуществлять корректный мониторинг, анализ и моделирование динамики протекания биогеохимических процессов в пространстве и во времени с учетом совокупного действия ряда физико-химических, биологических и антропогенных факторов, влияющих на изучаемую водную экосистему. Авторами разработана математическая модель, коррелирующая со спутниковой информацией, позволяющая прогнозировать поведение летних видов фитопланктона в мелководном водоеме в условиях ускоренного времени, описывать окислительно-восстановительные процессы водной среды, сульфатредукции, трансформации биогенных веществ (минерального питания фитопланктона), изучать развитие заморных явлений, возникающих в результате антропогенной эвтрофикации, строить прогнозы изменения кислородного и биогенного режимов функционирования водоема.

Материалы и методы. Для моделирования численности видового состава летнего фитопланктона, коррелирующего с методами усвоения спутниковых данных, разработан оперативный алгоритм восстановления параметров качества вод Азовского моря, который базируется на методе многомерной оптимизации Левенберга-Марквардта. Начальное распределение фитопланктонных популяций было получено в результате применения метода LBP (локальных бинарных шаблонов) к космическим снимкам Таганрогского залива и использовано в качестве входных данных для разработанной математической модели.

Результаты исследования. На основе комплексированных моделей гидродинамики и биологической кинетики, а также методов усвоения спутниковых данных, разработан программный комплекс, который позволяет строить кратко- и среднесрочные прогнозы экологической обстановки мелководных водоемов на основе различных входных данных, коррелирующих со спутниковой информацией.

Обсуждение и заключение. В рамках проводимых исследований состояния водных систем установлено, что одним из механизмов повышения качества прогнозирования биогеохимических процессов морских экосистем является уточнение начальных данных. Установлено, что использование спутниковых данных наряду с методами математического моделирования позволяют изучать пространственно-временное распределение загрязнений различной природы, планктонных популяций исследуемого водного объекта, оценивать характер и масштабы природного или техногенного явления для предотвращения негативных последствий экономического и социального характера.

Ключевые слова: прогнозирование, популяции летнего фитопланктона, прибрежная система, спутниковые данные, численный эксперимент

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–71–10102, <https://rscf.ru/project/22-71-10102/>

Для цитирования. Белова Ю.В., Филина А.А., Чистяков А.Е. Прогнозирование динамики летних видов фитопланктона на основе методов усвоения спутниковых данных. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):27–34. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-27-34>

Forecasting the Dynamics of Summer Phytoplankton Species based on Satellite Data Assimilation Methods

Yulia V. Belova¹ , Alena A. Filina² , Alexander E. Chistyakov¹ 

¹ Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

² Supercomputers and Neurocomputers Research Center, Taganrog, Russian Federation

✉ yvbelova@yandex.ru

Abstract

Introduction. Mathematical tools integrated with satellite data are typically employed as the primary means for studying aquatic ecosystems and forecasting changes in phytoplankton concentration in shallow water bodies during summer. This approach facilitates accurate monitoring, analysis, and modeling of the spatiotemporal dynamics of biogeochemical processes, considering the combined effects of various physicochemical, biological, and anthropogenic factors impacting the aquatic ecosystem. The authors have developed a mathematical model aligned with satellite data to predict the behavior of summer phytoplankton species in shallow water under accelerated temporal conditions. The model describes oxidative-reduction processes, sulfate reduction, and nutrient transformations (phytoplankton mineral nutrition), investigates hypoxia events caused by anthropogenic eutrophication, and forecasts changes in the oxygen and nutrient regimes of the water body.

Materials and Methods. To simulate the population dynamics of summer phytoplankton species correlated with satellite data assimilation methods, an operational algorithm for restoring water quality parameters of the Azov Sea was developed based on the Levenberg-Marquardt multidimensional optimization method. The initial distribution of phytoplankton populations was obtained by applying the Local Binary Patterns (LBP) method to satellite images of the Taganrog Bay and was used as input data for the mathematical model.

Results. Using integrated hydrodynamic and biological kinetics models combined with satellite data assimilation methods, a software suite was developed. This suite enables short- and medium-term forecasts of the ecological state of shallow water bodies based on diverse input data correlated with satellite information.

Discussion and Conclusion. The conducted studies on aquatic systems revealed that improving the accuracy of initial data is one mechanism for enhancing the quality of biogeochemical process forecasting in marine ecosystems. It was established that using satellite data alongside mathematical modeling methods allows for studying the spatiotemporal distribution of pollutants of various origins, plankton populations in the studied water body, and assessing the nature and scale of natural or anthropogenic phenomena to prevent negative economic and social consequences.

Keywords: forecasting, summer phytoplankton populations, coastal system, satellite data, numerical experiment

Funding. The study was supported by the Russian Science Foundation grant no. 22–71–10102, <https://rscf.ru/project/22-71-10102/>

For Citation. Belova Yu.V., Filina A.A., Chistyakov A.E. Forecasting the dynamics of summer phytoplankton species based on satellite Data assimilation methods. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):27–34. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-27-34>

Введение. Дистанционное зондирование Земли (ДЗЗ) представляет собой современный и перспективный способ оценки биологического состояния мелководных водоемов, динамики биогеохимических процессов, в том числе поведения фитопланктонных популяций в летний период в акватории мелководных систем. Существующая на сегодняшний день проблема построения и применения вычислительно-эффективных алгоритмов прогнозирования, а также оснащения их реальными входными данными является основной для получения численного решения задач прогнозного моделирования процессов гидробиологии водоемов Юга России.

Исследования в данной области ведутся многими российскими и зарубежными учеными. Например, в [1] описано применение методов дистанционного зондирования в картировании цветения цианобактерий в озерах на севере Италии. В работе [2] показана эффективность алгоритма максимальной высоты пика (MPH) MERIS при извлечении значений концентрации хлорофилла-«а» (chl-a) как инструмента мониторинга эвтрофикации водоема. Г.И. Марчуком, В.П. Шутяевым, Г.К. Коротаевым, В.Б. Залесным активно развивались методы усвоения данных наблюдений в задачах физики атмосферы и океана [3, 4]. А.А. Зеленко, Ю.Д. Реснянский занимались изучением морских наблюдательных систем [5]. О.И. Криворотко, С.И. Кабанихиным разработаны алгоритмы восстановления источников возмущений в системе нелинейных уравнений мелкой воды [6]. Работы Г.И. Марчука и В.П. Шутяева посвящены разработке итерационных алгоритмов, которые основаны на теории сопряженных уравнений и позволяют решать задачи вариационного усвоения данных [7]. Y. Chao, H. Zhang и др. в [8] предложена трехмерная система моделирования океана в районе Калифорнии с обработкой спутниковых данных в реальном времени. Модель океана имеет горизонтальное разрешение около трех километров и использует многомасштабную трехмерную вариационную методологию обработки данных.

В работе [9] учеными R. Robertson и C. Dong проводится сравнение следующих алгоритмов параметризации вертикального перемешивания воды в океане: модификации Nakanishi-Niino алгоритма Mellor-Yamada (NN), алгоритма Large-McWilliams-Doney's Kpp (LMD), Mellor-Yamada 2.5 (MY), а также четырех версий алгоритма Generic Length Scale (GLS). Активно развиваются алгоритмы обработки спутниковых снимков для параметризации моделей гидродинамики и гидробиологии, выявления зон загрязнения и пр. В исследовании [10] описаны алгоритмы и приведён код для автоматического обнаружения нитей апвеллинга (AFD), основанного на обработке изображений и распознавании образов. В исследовании [11] изучается вопрос о возможности использования спутниковых изображений Sentinel-2 с беспилотным летательным аппаратом для получения многоспектральных аэрофотоснимков и выявления наличия мусора на поверхности моря для его мониторинга, сбора и удаления.

Целью данного исследования является совместное использование эффективных методов математического моделирования и методов усвоения спутниковых данных для проведения детальных исследований функционирования водных экосистем, прогнозирования динамики изменения численности видового состава летнего фитопланктона в мелководном водоеме, что, в свою очередь, позволит наблюдать и анализировать динамику протекания биогеохимических процессов мелководных систем в пространстве и во времени, с учетом совокупного действия физико-химических, биологических и антропогенных факторов, влияющих на изучаемую водную экосистему.

Материалы и методы. Разработанная математическая 4D-модель эволюции летнего фитопланктона в прибрежных системах основана на системе нестационарных уравнений в частных производных с нелинейными функциями правых частей ψ_i :

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + u \frac{\partial q_i}{\partial x} + v \frac{\partial q_i}{\partial y} + (w - w_{gi}) \frac{\partial q_i}{\partial z} = \mu_i \Delta q_i + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_i \frac{\partial q_i}{\partial z} \right) + \psi_i, \quad (1)$$

где u, v, w — компоненты вектора скорости конвективного переноса; μ_i, ν_i — коэффициенты турбулентного переноса в горизонтальном и вертикальном направлении соответственно; w_{gi} — скорость гравитационного осаждения i -ой компоненты, находящейся во взвешенном состоянии; Δ — двумерный оператор Лапласа; ψ_i — нелинейные функции источников, описывающие химико-биологические процессы; i — вид субстанции, $i \in M = \{P, MP, N, D, BT, BD, H_2S, S, SO_4, O_2\}$. Расшифровка множества моделируемых субстанций представлена в таблице 1.

Таблица 1

Множество моделируемых субстанций

№	Обозначение	Описание
1	P	Виды летнего фитопланктона
2	MP	Метаболит фитопланктона
3	N	Питательные вещества
4	D	Детрит
5	BT	Аэробные бактерии <i>Thiobacillus</i>
6	BD	Анаэробные бактерии рода <i>Desulfovibrio</i>
7	H_2S	Сероводород
8	S	Элементарная сера
9	SO_4	Сульфаты
10	O_2	Растворенный кислород

Функции источников и параметры модели описаны в работе [12]. К модели добавляются соответственные начальные и граничные условия. Представленная математическая модель основана на работах выдающихся ученых А.И. Сухинова, Б.Н. Четверушкина, Г.Г. Матишова, Е.В. Якушева, Е.Р. Weiner и др. [13, 14].

Разработка программного комплекса для исследований и прогнозирования. Прогнозирование динамики поведения фитопланктона в мелководном водоеме в летний период осуществлялось на базе разработанного исследовательско-прогнозного комплекса (ИПК) с интегрируемым алгоритмом его взаимодействия с геоинформационными системами (ГИС). В специфику программно-алгоритмического аппарата входит возможность анализа и оценки масштабов развития стихийных катаклизмов (включая процессы эвтрофирования, «цветения», загрязнения водной среды компонентами различной этиологии и пр.), построения кратко- и среднесрочных прогнозов их развития в ускоренном масштабе времени с возможностью дальнейшего предотвращения негативного влияния экономического и социального характера. Ввиду быстрого развития факторов, отрицательно влияющих на процесс протекания опасных и чрезвычайных явлений (климатические, техногенные), использование современных и эффективных методик прогнозирования и интеграция с ГИС и спутниковыми данными на сегодняшний день являются очень актуальными.

Моделирование динамики биологических и геохимических показателей мелководного водоема (Азовское море и Таганрогский залив) осуществлялось с помощью решения прямой и обратной задач ДЗЗ, водной среды. Для решения прямой задачи дистанционного зондирования в видимом диапазоне требуется нахождение спектральной зависимости коэффициента отражения $R_{rsw} = (\lambda, -0, \theta_0, \beta)$ от концентраций компонентов водной системы и их оптических свойств [15]:

$$R_{rsw}(\lambda, -0, \theta_0, \beta) = T_{surf} L_w(+0, \theta_v, \beta_v, \lambda) / E_d(+0, \lambda), \quad (8)$$

где λ — длина волны; β — угол визирования водной поверхности спутниковым датчиком; θ_0 — солнечный зенитный угол; T_{surf} — фактор ослабления солнечного света при прохождении через раздел сред «вода — воздух»; $E_d(+0, \lambda)$ — освещенность водной поверхности; $L_w(+0, \theta_v, \beta_v, \lambda)$ — яркость водной поверхности, определяемая с помощью данных дистанционного зондирования.

Решение обратной задачи основано на создании алгоритма восстановления водных параметров по спутниковым данным. На оптические свойства воды могут влиять живые организмы, растворенные и взвешенные вещества, микротурбулентные неоднородности, пузырьковые газы. В данной работе выделены основные цветообразующие компоненты (вода, растворенное органическое вещество (ров); хлорофилл фитопланктона (хл), минеральная взвесь (мв)); первичные гидрооптические параметры воды (a — коэффициент поглощения; b_b — коэффициент обратного рассеяния, которые являются свертками оптических свойств цветообразующих компонент, характеризующихся свойствами аддитивности):

$$a = \sum_{k=1}^K C_k a_k^*; \quad b = \sum_{k=1}^K C_k b_{bk}^*, \quad (9)$$

где a_k^*, b_{bk}^* — первичные гидрооптические характеристики k -ой компоненты; C_k — удельные концентрации k -ой компоненты. Совокупность спектральных значений коэффициентов a^*, b_b^* составляет гидрооптическую модель Азовского моря. Коэффициент $R_{rsw} = (\lambda, -0, \theta_0, \beta)$ был определен как вторичная гидрооптическая характеристика водной среды, характеризующая свойства воды, свойства яркости света, определяемый на горизонте по поверхностным слоем водной толщи, слабо зависящий от θ_0 и β :

$$R_{rsw}(\lambda, C, a, b_b) = a_0 + a_1 \{b_b(\lambda) / a(\lambda)\} + a_2 \{b_b(\lambda) / a(\lambda)\}^2, \quad (10)$$

где $a_k, k = \overline{0, 2}, b_b(\lambda), a(\lambda)$ — известные коэффициенты для каждого компонента водной среды (гидрооптическая модель Азовского моря).

Опишем разработанный алгоритм восстановления водных параметров Азовского моря, который основан на эффективном методе многомерной оптимизации Левенберга-Марквардта (ЛМ). Вектор концентраций цветообразующих компонент задавался в виде:

$$C = (C_{chl}, C_{mв}, C_{pov})^T.$$

Для нахождения оптимального вектора концентрации C осуществлен поиск абсолютного минимума функции невязки $f(C)$:

$$f(C) = \sum_j [S_j - R_{rsw}(\lambda, C, a, b_b)]^2. \quad (11)$$

Выражение для расчета оптимального вектора C имеет вид:

$$C_{k+1} = C_k + \lambda_k (F_k^T F_k + \mu_k D_k)^{-1} F_k R_{rsw}(\lambda, C_k, a, b_b), \quad (12)$$

где $F_k = \left(\frac{\partial R_{rsw}(\lambda, C_k, a, b_b)}{\partial C_k} \right)$ — матрица; μ_k — направление минимизации; D_k — диагональ матрицы $F_k^T F_k$; λ_k — длина шага оптимизации; τ — операция транспонирования.

Выражение (9) и приведенная параметризация (10) использовались для расчета спектрального значения коэффициента отражения водной толщи $R_{rsw} = (\lambda, C, a, b_b)$ по векторам концентраций цветообразующих компонент. Расчет выполнен для длин волн 412, 443, 490, 510, 590, 670 нм (положение каналов Sea Viewing Wide Field Sensor (SeaWiFS)).

Наряду с синхронными данными ДЗЗ датчиков SeaWiFS и спектрометра MODIS, для верификации точности восстановления вектора, полученного на основе алгоритма ЛМ, использовались подспутниковые измерения гидродинамических, гидрооптических, биогеохимических параметров исследуемого водоема, включая коэффициенты рассеяния, поглощения, ослабления для 9 длин волн спектрального диапазона 412–715 нм, измеряемые на каждой станции в ходе проведения экспедиционных работ. При сопоставлении полученных результатов, измеренных и восстановленных по данным спутникового мониторинга, получено согласование концентраций цветообразующих компонент, показатель корреляции между которыми в среднем составил 0,75.

Результаты исследования. На основе комплексированных моделей гидродинамики и биологической кинетики был проведен вычислительный эксперимент. В качестве реальной области моделирования был выбран

Таганрогский залив, так как в этой части Азовского моря в летний период производится основная доля биомассы фитопланктона. Для этого разработан и встроен в программный комплекс «Azov3D» модуль для расчета процессов биологической кинетики [16–18]. Входными данными для расчетов являются распределения солёности и температуры, полученные по картографической информации, скорости течения водной среды, рассчитанные на основе математической модели гидродинамики, обработанные данные многолетних наблюдений о концентрациях биогенных веществ и основных видов фитопланктона [19]. Также в качестве входных данных использовано пространственное распределение фитопланктонных популяций, являющееся результатом применения метода локальных бинарных шаблонов (Local Binary Patterns, LBP) к спутниковым снимкам, полученным авторами данного метода [20]. Данный метод позволяет получить границы фитопланктонных «пятен», загрязняющих веществ, в том числе нефти и нефтепродуктов, на спутниковых снимках. На рис. 1 *а* изображен начальный спутниковый снимок, полученный 6 августа 2020 г. с помощью спутника Sentinel-2 L2A [21], на рис. 1 *б* — начальное распределение фитопланктонных популяций, полученное в результате применения метода LBP, поступающее в качестве начальных данных в программный модуль. Значение концентрации характерно для фитопланктона в летний период по данным многолетних наблюдений.

Результаты работы программного комплекса для временного интервала 30 суток и равномерного распределения рассчитываемых субстанций фитопланктона и биогенных веществ изображены на рис. 2.

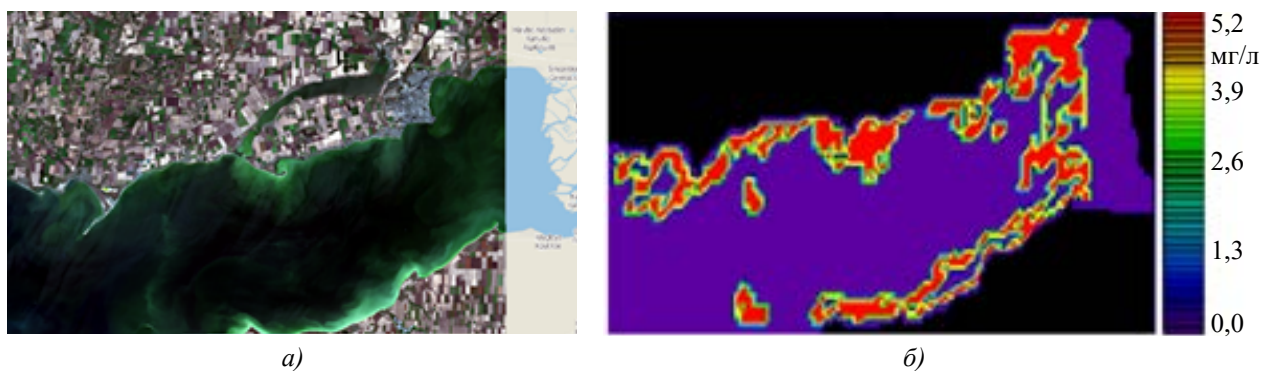


Рис. 1. Изображения фитопланктона: *а* — спутниковый снимок моделируемой области; *б* — первоначальное распределение популяций фитопланктона

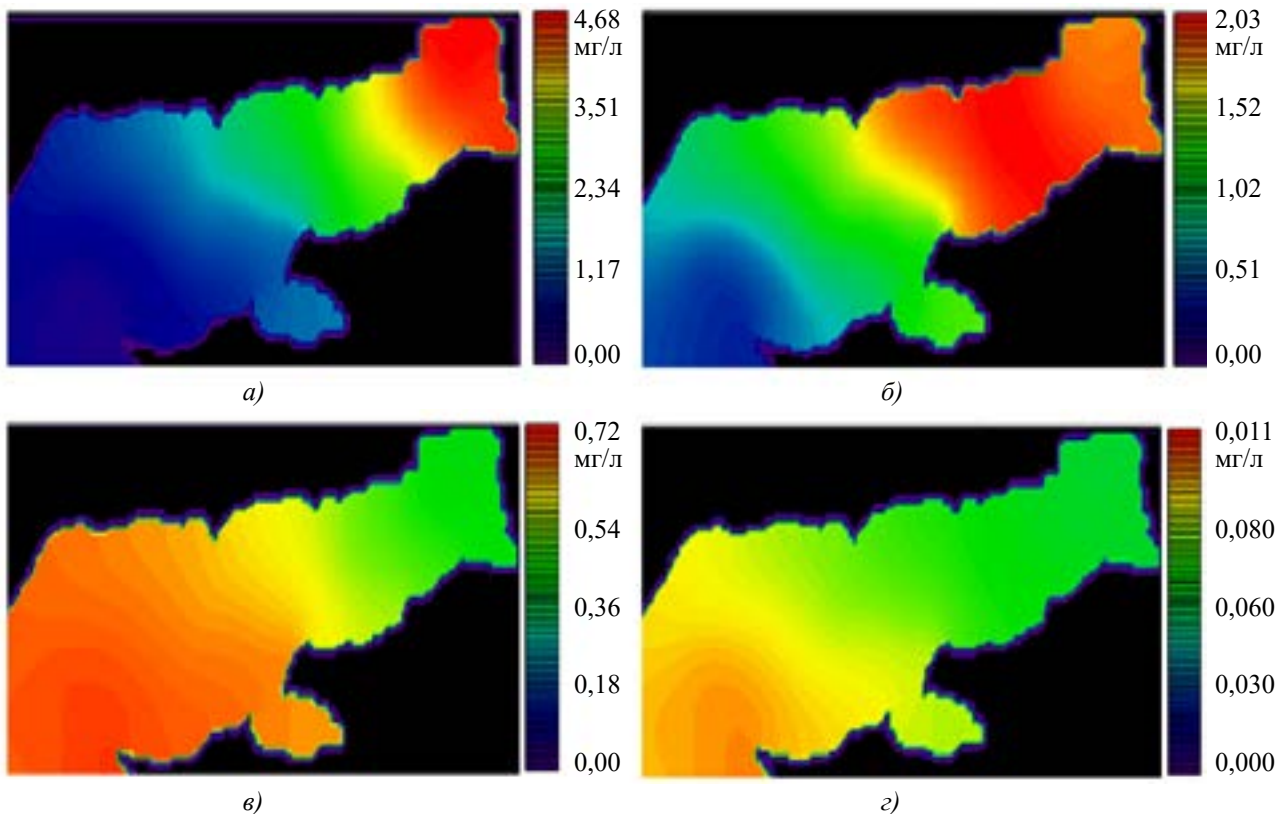


Рис. 2. Распределение концентраций зеленых водорослей: *а* — *Chlorella vulgaris* green algae; *б* — сине-зеленого *Aphanizomenon flos-aquae*; *в* — фосфатов; *з* — нитратов в Таганрогском заливе в летний период

Обсуждение и заключение. В рамках проводимых исследований состояния водных систем установлено, что одним из механизмов повышения качества прогнозирования биогеохимических процессов морских экосистем является уточнение начальных данных. В системах усвоения данных наблюдений наряду со стационарными измерениями большую значимость приобретают методы обработки и усвоения спутниковой информации, активно развивающиеся в стране в течение последних десятилетий. Установлено, что использование спутниковых данных наряду с методами математического моделирования позволяют изучать пространственно-временное распределение загрязнений различной природы, планктонных популяций исследуемого водного объекта, оценивать характер и масштабы природного или техногенного явления для предотвращения негативных последствий экономического и социального характера.

Авторами построена пространственно-неоднородная математическая модель эволюции летнего фитопланктона в мелководной водоеме, численно реализованная в ИПК, взаимодействующего с разного рода ГИС и спутниковой информацией. Модель позволяет в оперативном режиме прогнозировать динамику изменения плотности и пространственного распределения рассматриваемых планктонных популяций, проводить изучение и анализ окислительно-восстановительных процессов, трансформации биогенных веществ (минерального питания фитопланктона), сульфатредукции, протекающих в водной толще, изучать развитие заморных явлений, возникающих в результате антропогенной эвтрофикации, строить прогнозы изменения кислородного и биогенного режимов функционирования водоема.

ИПК позволяет разрабатывать комплекс превентивных мер для обеспечения экологической безопасности и сокращения экономического ущерба исследуемого региона. В работе также построен эффективный и быстро реализуемый алгоритм восстановления водных параметров мелководного региона (Азовское море), основанный на эффективном методе многомерной оптимизации ЛМ.

Разработанный ИПК может быть успешно применен для построения кратко- и среднесрочных прогнозов экологической обстановки мелководных водоемов Юга России на базе различной входной информации, например, данных о пространственном распределении фитопланктона в летний период, полученных в результате применения метода локальных бинарных шаблонов к спутниковым снимкам.

Список литературы / References

1. Bresciani M., Giardino C., Lauceri R., Matta E., Cazzaniga I., Pinardi M., et al. Earth observation for monitoring and mapping of cyanobacteria blooms. Case studies on five Italian lakes. *Journal of Limnology*. 2017;76:127–139. <https://doi.org/10.4081/jlimnol.2016.1565>
2. Pitarch J., Ruiz-Verdú A., Sendra M.D., and Santoleri R. Evaluation and reformulation of the maximum peak height algorithm (MPH) and application in a hypertrophic lagoon. *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 2017;122(2):1206–1221. <https://doi.org/10.1002/2016JC012174>
3. Shutyaev V.P. Methods for observation data assimilation in problems of physics of atmosphere and ocean. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2019;55(1):17–31. <https://doi.org/10.1134/S0001433819010080>
4. Коротаев Г.К., Шутяев В.П. Численное моделирование циркуляции океана со сверхвысоким пространственным разрешением. *Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана*. 2020;56(3):334–346. <https://doi.org/10.31857/S0002351520030104>
- Korotaev G.K., Shutyaev V.P. Numerical simulation of ocean circulation with ultrahigh spatial resolution. *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Physics of the atmosphere and ocean*. 2020;56(3):334–346. (In Russ.) <https://doi.org/10.31857/S0002351520030104>
5. Зеленько А.А., Реснянский Ю.Д. Морские наблюдательные системы как составная часть оперативной океанологии (обзор). *Метеорология и гидрология*. 2018;12:5–30.
- Zelenko A.A., Resnyansky Yu.D. Marine observation systems as an integral part of operational oceanology (review). *Meteorology and hydrology*. 2018;12:5–30. (In Russ.)
6. Кабанихин С.И., Криворотко О.И. Алгоритм восстановления источника возмущений в системе нелинейных уравнений мелкой воды. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2018;58(8):138–147. <https://doi.org/10.31857/S004446690002008-9>
- Kabanikhin S.I., Krivorotko O.I. Algorithm for restoring the source of disturbances in a system of nonlinear shallow water equations. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2018;58(8):138–147. (In Russ.) <https://doi.org/10.31857/S004446690002008-9>
7. Марчук Г.И., Шутяев В.П. Сопряженные уравнения и итерационные алгоритмы в задачах вариационного усвоения данных. *Труды института математики и механики УрО РАН*. 2011;17(2):136–150.
- Marchuk G.I., Shutyaev V.P. Conjugate equations and iterative algorithms in problems of variational data assimilation. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences*. 2011;17(2):136–150. (In Russ.)
8. Chao Y., Farrara J.D., Zhang H., Armenta K.J., Centurioni L., Chavez F., et al. Development, Implementation, and Validation of a California Coastal Ocean Modeling, Data Assimilation, and Forecasting System. *Deep-Sea Research Part II: Topical Studies in Oceanography*. 2018;151:49–63. <https://doi.org/10.1016/j.dsr2.2017.04.013>

9. Robertson R., Dong C. An evaluation of the performance of vertical mixing parameterizations for tidal mixing in the Regional Ocean Modeling System (ROMS). *Geoscience Letters*. 2019;6(15). <https://doi.org/10.1186/s40562-019-0146-y>
10. Artal O., Sepúlveda H.H., Mery D., Pieringer C. Detecting and characterizing upwelling filaments in a numerical ocean model. *Computers and Geosciences*. 2019;122:25–34. <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2018.10.005>
11. Themistocleous K., Papoutsas C., Michaelides S., Hadjimitsis D. Investigating Detection of Floating Plastic Litter from Space Using Sentinel-2 Imagery. *Remote Sensing*. 2020;12(16):2648. <https://doi.org/10.3390/RS12162648>
12. Никитина А.В., Филина А.А. Математическое моделирование процессов эволюции микроорганизмов мелководного водоема в кислород-дефицитных условиях. В: *Труды международной научной конференции «Интеллектуальные информационные технологии и математическое моделирование»*. Ростов-на-Дону. 2022. С. 66–75.
- Nikitina A.V., Filina A.A. Mathematical modeling of the processes of evolution of microorganisms in a shallow reservoir in oxygen-deficient conditions. Intelligent information technologies and mathematical modeling. *Proceedings of the International Scientific Conference*. Edited by V.V. Dolgov. Rostov-on-Don. 2022:66–75. (In Russ.)
13. Четверушкин Б.Н. Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред. *Математическое моделирование*. 2012;24(11):33–52. <https://doi.org/10.1134/S2070048213030034>
- Chetverushkin B.N. Resolution limits of continuous media mode and their mathematical formulations. *Math Models Comput Simul*. 2013;5:266–279. (In Russ.) <https://doi.org/10.1134/S2070048213030034>
14. Yakushev E.V., Mikhailovsky G.E. Mathematical modeling of the influence of marine biota on the carbon dioxide ocean-atmosphere exchange in high latitudes. *Air-Water Gas Transfer, Sel. Papers, Third Int. Symp., Heidelberg University*, ed. by B. Jaehne and E.C. Monahan. Hanau: AEON Verlag & Studio. 1995:37–48.
15. Haltrin V.I., Kattawar G.W. Self-consistent solutions to the equation of transfer with elastic and inelastic scattering in oceanic optics: I. Model. *Applied Optics*. 1993;32(27):5356–5367. <https://doi.org/10.1364/AO.32.005356>
16. Сухинов А.И., Проценко Е.А., Чистяков А.Е., Шретер С.А. Сравнение вычислительных эффективностей явной и неявной схем для задачи транспорта наносов в прибрежных водных системах. Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2015). *Труды международной научной конференции*. 2015;297–307.
- Sukhinov A.I., Protsenko E.A., Chistyakov A.E., Shreter S.A. Comparison of computational efficiencies of explicit and implicit schemes for the problem of sediment transport in coastal water systems. Parallel computing technologies (PaVT'2015). *Proceedings of the international scientific conference*. 2015; 297–307. (In Russ.)
17. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Построение дискретной двумерной математической модели транспорта наносов. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2011;8(121):32–44.
- Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A. Construction of a discrete two-dimensional mathematical model of sediment transport. *Bulletin of SFedU. Engineering sciences*. 2011;8(121):32–44. (In Russ.)
18. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Бондаренко Ю.С. Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2011;8(121):6–13.
- Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Bondarenko Yu.S. Estimation of the error in solving the diffusion equation based on schemes with weights. *Bulletin of SFedU. Engineering sciences*. 2011;8(121):6–13. (In Russ.)
19. Сухинов А.И., Белова Ю.В., Никитина А.В., Атаян А.М. Моделирование биогеохимических процессов в Азовском море с использованием статистически обработанных данных о речном стоке. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2020;20(4):437–445. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2020-20-4-437-445>
- Sukhinov A.I., Belova Y.V., Nikitina A.V., Atayan A.M. Modeling biogeochemical processes in the Azov Sea using statistically processed data on river flow. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2020;20(4):437–445. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2020-20-4-437-445>
20. Sukhinov A.I., Panasenko N.D. Comparative investigation of neural and locally binary algorithms for image identification of plankton populations. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2022;1(2):70–80. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2022-1-2-70-80>
21. The official website of Earth observing system. URL: <http://eos.com/landviewer/account/pricing> (accessed: 01.02.2024).

Об авторах:

Юлия Валериевна Белова, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID, yvbelova@yandex.ru](mailto:yvbelova@yandex.ru)

Алёна Александровна Филина, кандидат технических наук, научный сотрудник ООО «НИИ супер-ЭВМ и нейрокомпьютеров» (347900, Российская Федерация, г. Таганрог, пер. Итальянский, 106), [ORCID, j.a.s.y@mail.ru](mailto:j.a.s.y@mail.ru)

Александр Евгеньевич Чистяков, доктор физико-математических наук, профессор кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID, cheese_05@mail.ru](mailto:cheese_05@mail.ru)

Заявленный вклад авторов:

Ю.В. Белова: программная реализация, визуализация и анализ расчетов.

А.А. Филина: численная и программная реализация, анализ результатов.

А.А. Чистяков: постановка задачи, разработка методов исследования.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Yulia V. Belova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of “Mathematics and Computer Science”, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [ORCID](#), yvbelova@yandex.ru

Alena A. Filina, Candidate of Technical Sciences, Researcher of Super-Computers and Neurocomputers Research Center (106, Italiansky lane, Taganrog, 347900, Russian Federation), [ORCID](#), j.a.s.s.y@mail.ru

Alexander E. Chistyakov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of “Computer Engineering and Automated Systems Software”, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [ORCID](#), cheese_05@mail.ru

Claimed Contributorship:

Yu.V. Belova: software implementation, visualization and analysis of calculations.

A.A. Filina: numerical and software implementation, analysis of results.

A.E. Chistyakov: problem statement, development of research methods.

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 11.11.2024

Поступила после рецензирования / Revised 26.11.2024

Принята к публикации / Accepted 02.12.2024

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

INFORMATION TECHNOLOGIES



УДК 004.032.26

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-35-42>


Применение нейронных сетей для решения нелинейных краевых задач для областей сложной формы

А.В. Галабурдин

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

✉ Galaburdin@mail.ru

Аннотация

Введение. Многие практически важные задачи сводятся к нелинейным дифференциальным уравнениям. В настоящей работе рассмотрен один из вариантов применения нейронных сетей к решению некоторых нелинейных краевых задач для областей сложной формы, а именно к решению стационарного дифференциального уравнения теплопроводности с коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры.

Материалы и методы. Исходная нелинейная краевая задача сводится к линейной с помощью преобразования Кирхгофа. Нейронная сеть строится для решения полученной линейной краевой задачи. При этом в качестве активационных функций принимаются производные от сингулярных решений уравнения Лапласа, а сингулярные точки этих решений распределены по замкнутым кривым, охватывающим границу области. Для настройки весов сети минимизировалась среднеквадратическая ошибка обучения.

Результаты исследования. Получены результаты решения задачи теплопроводности для различных областей сложной формы и различных форм зависимости коэффициента теплопроводности от температуры. Полученные результаты представлены в виде таблиц, которые содержат точное решение и решение, полученное при помощи нейронной сети.

Обсуждение и заключение. По результатам проведенных расчетов можно сделать вывод о том, что предложенный метод является достаточно эффективным для решения указанного типа краевых задач. Использование в качестве активационных функций производных от сингулярных решений уравнения представляется весьма перспективным.

Ключевые слова: нелинейные краевые задачи для областей сложной формы, нейронные сети

Благодарности. Автор выражает благодарность сотрудникам редакции за указанные замечания по оформлению, которые позволили сделать статью более удобной для восприятия.

Для цитирования. Галабурдин А.В. Применение нейронных сетей для решения нелинейных краевых задач для областей сложной формы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):35–42. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-35-42>

Original Theoretical Reserach

Application of Neural Networks for Solving Nonlinear Boundary Problems for Complex-Shaped Domains

Alexander V. Galaburdin

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

✉ Galaburdin@mail.ru

Abstract

Introduction. Many practically significant tasks reduce to nonlinear differential equations. In this study, one of the applications of neural networks for solving specific nonlinear boundary problems for complex-shaped domains is considered. Specifically, the focus is on solving a stationary heat conduction differential equation with a thermal conductivity coefficient dependent on temperature.

Materials and Methods. The original nonlinear boundary problem is linearized through Kirchhoff transformation. A neural network is constructed to solve the resulting linear boundary problem. In this context, derivatives of singular solutions to the

Laplace equation are used as activation functions, and these singular points are distributed along closed curves encompassing the boundary of the domain. The weights of the network were tuned by minimizing the mean squared error of training.

Results. Results for the heat conduction problem are obtained for various complex-shaped domains and different forms of dependence of the thermal conductivity coefficient on temperature. The results are presented in tables that contain the exact solution and the solution obtained using the neural network.

Discussion and Conclusion. Based on the computational results, it can be concluded that the proposed method is sufficiently effective for solving the specified type of boundary problems. The use of derivatives of singular solutions to the Laplace equation as activation functions appears to be a promising approach.

Keywords: nonlinear boundary problems for complex-shaped domains, neural networks

Acknowledgments. The author expresses gratitude to the editorial staff for their remarks on the formatting, which allowed the article to be made more accessible.

For Citation. Galaburdin A.V. Application of Neural Networks for Solving Nonlinear Boundary Problems for Complex-Shaped Domains. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):35–42. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-35-42>

Введение. При построении моделей различных природных явлений часто используется аппарат дифференциальных уравнений. Сложность моделируемых явлений приводит, соответственно, к сложным системам дифференциальных уравнений с непростой формой области. В настоящее время при решении подобных краевых задач все чаще применяется метод нейронных сетей.

Следует отметить, что теоретические основы метода нейронных сетей были заложены еще в середине прошлого века в трудах А.Н. Колмогорова [1]. Развитие теории в работе [2] раскрыто применительно к решению задачи о прогибе мембраны. В [3] предложена структура нейронной сети, позволяющей решать уравнения Лапласа, Пуассона, теплопроводности. Численное решение уравнения Пуассона в двумерной области, полученное методом Галеркина и методом Ритца с глубокими нейронными сетями представлено в статье [4]. В статье [5] исследованы подходы к решению задач тепломассопереноса на основе нейронной сети персептронного типа.

В последнее время достаточно часто при решении уравнений в частных производных используют физико-информированную нейронную сеть [6]. В статье [7] представлены решения задач классической механики посредством применения физико-информированных нейронных сетей. В работе [8] рассмотрен подход к решению прямых и обратных задач рассеяния с использованием радиально-базисной нейронной сети. В статье [9] на основе метода доверительных областей разработан метод обучения РБФ-сетей с настраиваемым функциональным базисом при решении краевых задач математической физики. Статья [10] посвящена изучению использования физико-информированных нейронных сетей при решении нестационарной нелинейной системы дифференциальных уравнений, описывающей процесс движения одномерного теплопроводного газа. В работах [11, 12] рассматривается применение нейронных сетей при решении уравнений Навье-Стокса. В работах [13, 14] при построении нейронной сети используются в качестве активационных функций радиально-базисные функции и при обучении варьируются их параметры.

Настоящая работа является развитием подхода к решению дифференциальных уравнений в частных производных методом нейронных сетей, изложенного в статье [15]. Целью данной работы является разработка подхода к применению нейронных сетей для решения нелинейных краевых задач для областей сложной формы.

Материалы и методы. Рассмотрим краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(W) \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(W) \frac{\partial W}{\partial y} \right) = 0 \quad (1)$$

на плоской области G ограниченной замкнутой кривой γ .

Данное уравнение описывает стационарное тепловое поле. В этом случае W — температура, а $k(W)$ — коэффициент теплопроводности. С помощью преобразования Кирхгофа [16, 17] данная задача сводилась к линейной. Суть преобразования состоит в том, что вводится функция $u(W)$, для которой

$$\text{grad}(u(W)) = \frac{du(W)}{dW} \text{grad}(W).$$

Тогда можно положить

$$\frac{du(W)}{dW} = k(W) \quad (2)$$

и исходное дифференциальное уравнение примет вид $\Delta u(x, y) = 0$.

Из (2) получим

$$u(x, y) = \int_{W_0}^W k(W) dW,$$

где W_0 — произвольная исходная величина.

Если в исходной задаче на границе области заданы значения $W = W_o$, то для u получим граничные условия

$$u_o = \int_{w_o}^{w_o} k(W) dW.$$

Выразив W , получим решение исходной краевой задачи.

Таким образом, исходная нелинейная задача сводится к задаче Дирихле, которая решается с применением нейронной сети [15]. В основу нейронной сети положено соотношение

$$u_i = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N c_k \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_k [U]_{ik} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N c_k [u]_k \left[\frac{\partial U}{\partial n} \right]_{ik}.$$

В приведенном выражении величины $[U]_{ik}$ и $\left[\frac{\partial U}{\partial n} \right]_{ik}$ можно рассматривать как активационные функции, а $c_k \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_k$ и $c_k [u]_k$ — как веса.

Используя метод наименьших квадратов и требуя выполнения указанного соотношения в каждой точке границы для всех функций обучающего множества, можно получить систему уравнений для определения весов. Чтобы улучшить обусловленность данной системы уравнений следует увеличить сингулярность величин $[U]_{ik}$ и $\left[\frac{\partial U}{\partial n} \right]_{ik}$, сместив контур интегрирования на некоторое расстояние от границы области γ .

Окончательно, решение задачи Дирихле следует искать в виде:

$$u(x) = \sum_{k=1}^N w_k p(s_k) U(x, \sigma_k) + \sum_{k=1}^N v_k p(s_k) V(x, \sigma_k),$$

где $p(s_k)$ — значение неизвестной функции u на границе области; $U(x, \sigma_k)$ и $V(x, \sigma_k)$ — активационные функции; σ_k и τ_k — точки замкнутых кривых γ_1 и γ_2 , охватывающих границу области; γ, x — точки области G .

Замкнутые кривые γ_1 и γ_2 подобны контуру γ и получаются из него смещением каждой точки в направлении внешней нормали к границе области на расстояния ρ_1 и ρ_2 соответственно. В процессе обучения сети определяются веса и величины ρ_1 и ρ_2 . Для этого минимизируется функционал ошибки

$$\Pi(w_k, v_k, \rho_1, \rho_2) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^N w_k p_k^j U(x_i, \sigma_k) + v_k p_k^j V(x_i, \sigma_k) - p_k^j \right\}^2$$

где x_i — координата i -ой точки граничного контура γ ; p_k^j — граничное значение j -ой функции обучающего множества в точке x_k .

Из соотношений $\frac{\partial \Pi}{\partial w_m} = 0$ и $\frac{\partial \Pi}{\partial v_m} = 0$, $m = 1, 2, \dots, N$ получим систему линейных уравнений для определения w_m и v_m .

Значение ρ_1 определяется простым перебором, а $\rho_2 = \rho_1 + 1$.

Для оценки точности полученного решения можно сравнить значения u на границе области, вычисленные с помощью нейронной сети

$$\tilde{u}(s_i) = \sum_{k=1}^N w_k p(s_k) U(s_i, \sigma_k) + \sum_{k=1}^N v_k p(s_k) V(s_i, \sigma_k)$$

с заданными граничными условиями $u(s)$.

Полученные параметры сети не обеспечивают желаемую точность полученного решения. Повысить точность можно итерационным уточнением полученного результата по следующей схеме:

$$\begin{aligned} \Delta u^0(s_i) &= p(s_i), \quad q^0(s_i) = p(s_i), \\ \Delta v^{n+1}(s_i) &= \sum_{k=1}^N w_k \Delta u^n(s_k) U(s_i, \sigma_k) + \sum_{k=1}^N v_k \Delta u^n(s_k) V(s_i, \tau_k), \\ \Delta u^{n+1}(s_i) &= \Delta u^{n+1}(s_i) - \Delta v^{n+1}(s_i), \quad u_i^{n+1}(s_i) = \Delta u_i^{n+1}(s_i) - \Delta u^{n+1}(s_i), \end{aligned}$$

где $u_i^{n+1}(s_i)$ — значения уточненного решения на границе области.

Процесс уточнения решения продолжается до тех пор, пока величина

$$\frac{\|\Delta u^{n+1}(s_i)\|}{\|u_i^{n+1}(s_i)\|}$$

не будет достаточно малой (меньше заданного δ_0) или же пока она не начнет расти. Приведенные ниже результаты получены при $\delta_0 = 0,0025$.

Определить значение u в любой точке x области G можно по формуле

$$\tilde{u}(x) = \sum_{k=1}^N w_k u_i(s_k) U(x, \sigma_k) + \sum_{k=1}^N v_k u_i(s_k) V(s_i, \tau_k).$$

В качестве обучающего множества использовалось множество функций, являющихся решением уравнения Лапласа

$$r^k \cos\left(k \arccos\left(\frac{x}{r}\right)\right) + r^k \sin\left(k \arccos\left(\frac{x}{r}\right)\right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots, M$. Расчеты проводились при $M = 75$.

Указанные функции задавались в различных системах координат, повернутых друг относительно друга на угол, кратный $2\pi/5$.

Активационные функции:

$$U(x, y, t, s) = \frac{\beta^5 - 10\beta^3\delta^2 + 5\beta\delta^4 + \delta^5 - 10\delta^3\beta^2 + 5\delta\beta^4}{R^{10}},$$

$$V(x, y, t, s) = \frac{\beta^7 - 21\beta^5\delta^2 + 35\beta^3\delta^4 - 7\beta\delta^6}{R^{10}} n_x + \frac{\delta^7 - 21\delta^5\beta^2 + 35\delta^3\beta^4 - 7\delta\beta^6}{R^{10}} n_y,$$

где $\delta = x - t$; $\beta = y - s$; $R = \sqrt{\delta^2 + \beta^2}$; n_x, n_y — координаты вектора внешней нормали к границе области.

Результаты исследования. Предложенный метод применялся при решении задачи (1) для областей, граница γ которых задавалась в виде

$$\begin{cases} x = a \cos(t) + g \sin(\omega t) \\ y = a_1 \cos(t) + g_1 \sin(\omega t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

где a, a_1, g, g_1, ω — изменяемые параметры.

Задача 1. Рассмотрим область $G1$, соответствующую значениям параметров: $a = 1,15$; $a_1 = 1,15$; $g = 0,05$; $g_1 = -0,05$; $\omega = 7$ (рис. 1).

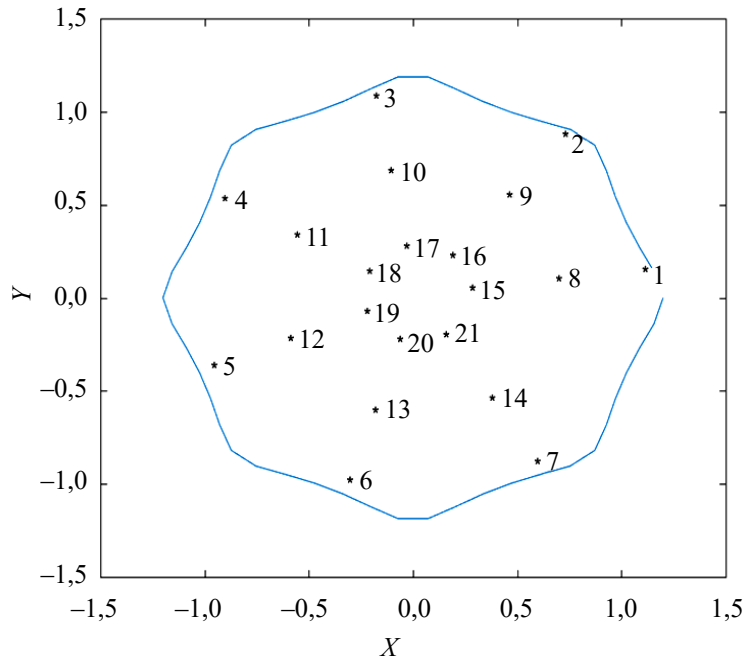


Рис. 1. Область $G1$

Звездочками обозначены места расположения точек области $G1$, в которых вычисляются точные значения решения задачи и значения, полученные при помощи нейронной сети при значении $\rho_1 = 7$, $\rho_2 = 8$.

Рассматривалось уравнение (1) для случая $k(W) = th(5W)$, которое имеет точное решение

$$W_o = \text{arch}(11,25((x-1,5)^2 + (y-1,5)^2)^5).$$

Результаты расчетов представлены в таблице 1.

Задача 2. Рассмотрим область $G2$ (рис. 2), соответствующую значениям параметров $a = 1$; $a_1 = 1$; $g = 0$; $g_1 = 0,3$; $\omega = 3$; $\rho_1 = 10,51$; $\rho_2 = 11,51$.

В уравнении (1) полагалось $k(W) = ch(5W)$, точное решение в этом случае имеет вид

$$W_o = \operatorname{arsh}(5e^{5x} \sin 5y) / 5.$$

Результаты расчетов представлены в таблице 2.

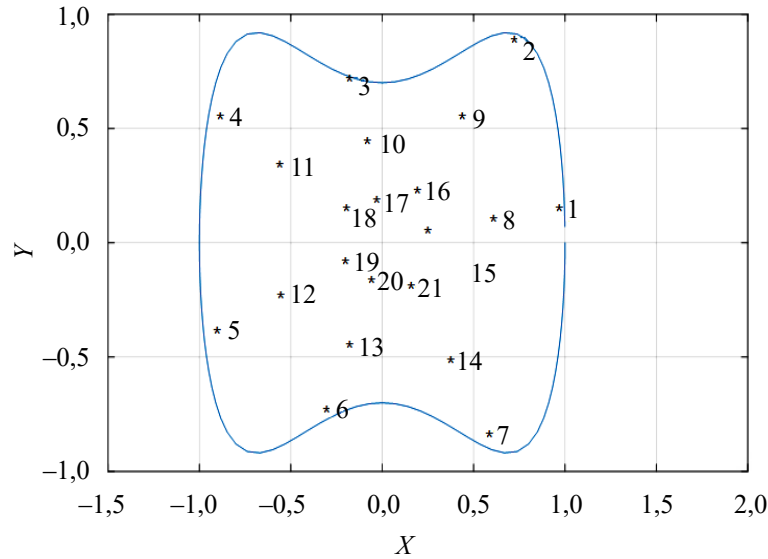


Рис. 2. Область G2

Таблица 1

Результаты расчетов

Номер точки	1	2	3	4	5	6	7
x	1,0534	0,6865	-0,1869	0,8848	-0,9709	-0,3193	0,5811
y	0,1275	0,8240	1,0218	0,3939	-0,3832	-0,9998	-0,9001
Точное решение	3,0529	2,6521	2,3621	2,8550	3,3731	3,8462	4,1520
Решение НС	3,0535	2,6479	2,3629	2,8491	3,3771	3,8434	4,1566
Номер точки	8	9	10	11	12	13	14
x	0,6937	0,4521	0,1231	-0,5826	-0,6035	-0,1984	0,3612
y	0,0839	0,5426	0,6729	0,3252	-0,2382	-0,6215	-0,5595
Точное решение	3,2590	3,0804	2,9504	3,1696	3,4495	3,7625	3,9935
Решение НС	3,2584	3,0790	2,9487	3,1681	3,4494	3,7628	3,9947
Номер точки	15	16	17	18	19	20	21
x	0,3340	0,2176	-0,0592	-0,2805	-0,2361	-0,0776	0,1413
y	0,0404	0,2612	0,3240	0,1566	-0,0932	-0,2431	-0,2189
Точное решение	3,5104	3,4526	3,4064	3,4820	3,5887	3,7314	3,8544
Решение НС	3,5100	3,4520	3,4058	3,4815	3,5885	3,7315	3,8547

Таблица 2

Результаты расчетов

Номер точки	1	2	3	4	5	6	7
x	0,9085	0,6728	-0,1902	-0,8641	-0,9230	-0,3228	0,5679
y	0,1291	0,8320	0,6703	0,5138	-0,4025	-0,7484	0,8587
Точное решение	0,3489	0,6987	0,6948	0,5361	0,3820	0,2615	0,1561
Решение НС	0,3510	0,6982	0,6941	0,5346	0,3850	0,2666	0,1589
Номер точки	8	9	10	11	12	13	14
x	0,5983	0,4430	-0,1253	-0,5690	-0,5737	-0,2006	0,3530
y	0,0850	0,5479	0,4414	0,3383	-0,2502	-0,4652	-0,5338

Окончание таблицы 1

Точное решение	0,1849	0,5233	0,5761	0,4537	0,3508	0,29214	0,1806
Решение НС	0,1879	0,5231	0,5753	0,4533	0,3521	0,29578	0,1836
Номер точки	15	16	17	18	19	20	21
x	0,2880	0,2133	-0,0603	0,2739	-0,2245	-0,0785	0,1381
y	0,0409	0,2638	0,2125	0,1629	-0,0979	-0,1820	-0,2088
Точное решение	0,0585	0,2897	0,3780	0,3021	0,2534	0,2496	0,1573
Решение НС	0,0607	0,2901	0,3780	0,3026	0,2544	0,2512	0,1591

Задача 3. Рассмотрим уравнение (1) в области $G3$ (рис. 3).

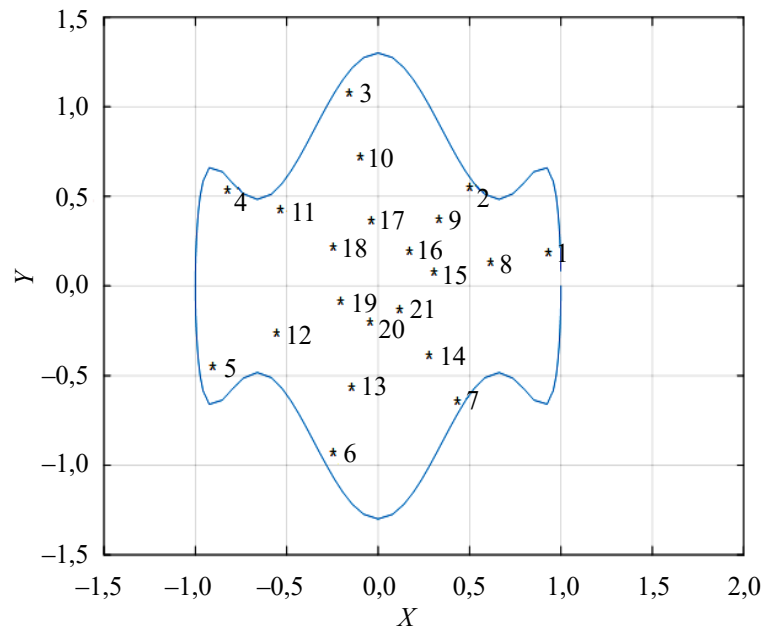


Рис. 3. Область $G3$

В этом случае полагаем $a = 1$; $a_1 = 1$; $g = 0$, $g_1 = 0,3$; $\omega = 5$; $\rho_1 = 11,65$; $\rho_2 = 12,65$. $K(W) = W^{1,5}$ а точное решение имеет вид:

$$W_o = \left\{ 2,5 \left((x^2 - y^2) \cos 1,5x \operatorname{ch} 1,5y + 2xy \sin 1,5x \operatorname{sh} 1,5y \right) + 25\sqrt{5} \right\}^{0,4}.$$

Результаты проведенных расчетов представлены в таблице 3.

Таблица 3

Результаты расчетов

Номер точки	1	2	3	4	5	6	7
x	0,9090	0,4788	-0,1752	-0,8421	-0,9238	-0,2642	0,4126
y	0,1524	0,5207	1,0491	0,5014	-0,4754	-0,9563	-0,6755
Точное решение	4,9224	5,0814	4,9816	4,7718	4,7525	4,9738	5,0741
Решение НС	5,0164	5,0845	5,0215	4,8410	4,7800	5,0122	5,1008
Номер точки	8	9	10	11	12	13	14
x	0,5986	0,3153	-0,1154	-0,5546	-0,5742	-0,1642	0,2564
y	0,1004	0,3429	0,6908	0,3962	-0,2955	-0,5944	-0,4199
Точное решение	4,9672	4,9862	4,9595	4,9035	4,8956	4,9575	4,9874
Решение НС	5,0201	5,0286	5,0030	4,9507	4,9375	4,9987	5,0289
Номер точки	15	16	17	18	19	20	21
x	0,2882	0,1518	-0,0555	-0,2671	-0,2246	-0,2246	0,1003
y	0,0483	0,1651	0,3326	0,1910	-0,1156	-0,2326	-0,1643
Точное решение	4,9643	4,9616	4,9576	4,9483	4,9471	4,9575	4,9625
Решение НС	5,0060	5,0049	4,9998	4,9910	4,9893	4,9988	5,0040

На рис. 4 и рис. 5 представлены для сравнения графически точное решение задачи 3 и решение, полученное при помощи нейронной сети.

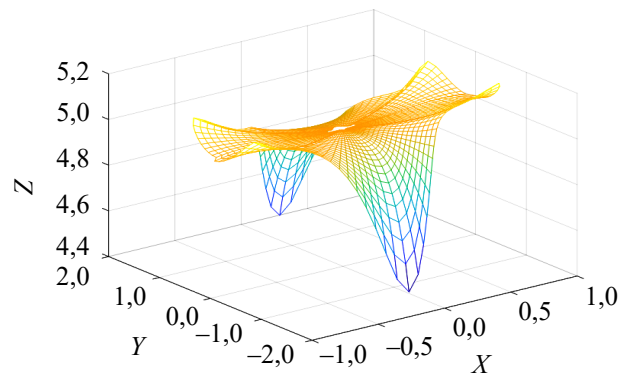


Рис. 4. Точное решение задачи 3

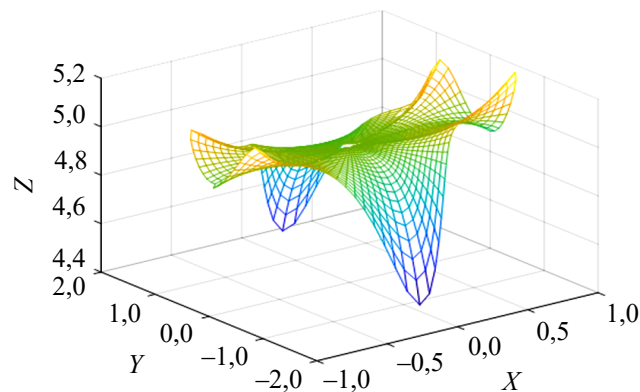


Рис. 5. Решение задачи 3, полученное нейронной сетью

Обсуждение и заключение. Представленные результаты являются развитием подхода к решению дифференциальных уравнений в частных производных методом нейронных сетей, изложенного в статье [15]. Они убедительно доказывают эффективность предложенного метода построения нейронной сети для решения краевых задач для областей сложной формы. Он обладает достаточно высоким потенциалом, что позволяет его развивать и совершенствовать, применяя при решении самых разных краевых задач.

Список литературы / References

1. Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения. *Доклады Академии наук СССР*. 1957;114(5):953–956.
Kolmogorov A.N. On the representation of continuous functions of several variables in the form of superpositions of continuous functions of one variable and addition. *Reports of the USSR Academy of Sciences*. 1957;114(5):953–956. (In Russ.)
2. Варшавчик Е.А., Галяутдинова А.Р., Седова Ю.С., Тархов Д.А. Решение дифференциальных уравнений в частных производных для областей с постоянными границами. В: *Сборник статей по материалам третьей всероссийской научно-практической конференции «Искусственный интеллект в решении актуальных социальных и экономических проблем XXI века»*. Пермь: издательство ПГНИУ; 2018. С. 294.
Varshavchik E.A., Galyautdinova A.R., Sedova Yu.S., Tarkhov D.A. Solution of partial differential equations for domains with constant boundaries. *Artificial intelligence in solving current social and economic problems of the 21st century: collection of articles. Art. based on materials from the Third All-Russian. scientific-practical conf.* Perm, May 14–18, 2018. Perm. state national research univ.; 2018. P. 294. (In Russ.)
3. Епифанов А.А. Применение методов глубокого обучения для решения дифференциальных уравнений в частных производных. *Успехи кибернетики*. 2020;1(4):22–28. <https://doi.org/10.51790/2712-9942-2020-1-4-3>
Epifanov A.A. Application of deep learning methods for solving partial differential equations. *Advances in cybernetics*. 2020;1(4):22–28. (In Russ.) <https://doi.org/10.51790/2712-9942-2020-1-4-3>
4. Cai S., Wang Z., Wang S., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks for heat transfer problems. *Journal of Heat Transfer*. 2021;143(6):060801. <https://doi.org/10.1115/1.4050542>
5. Корсунов Н.И., Ломакин А.В. Моделирование процессов, описываемых волновым дифференциальным уравнением, с использованием ячеистых нейронных сетей. *Научные ведомости. Серия: История. Политология. Экономика. Информатика*. 2014;15(186):103–107.
Korsunov N.I., Lomakin A.V. Modeling processes described by a wave differential equation using cellular neural networks. *Scientific bulletins. Series History. Political science. Economy. Informatics*. 2014;15(186):103–107. (In Russ.)

6. Raissia M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*. 2019;378:686–707.
7. Зрелова Д.П., Ульянов С.В. Модели физически информированных/осведомленных классических Лагранжевых/Гамильтоновых нейронных сетей в глубоком обучении. *Современные информационные технологии и ИТ-образование*. 2022;18(2):310–325. <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.310-325>
- Zrelova D.P., Ulyanov S.V. Models of physically informed / aware classical Lagrangian / Hamiltonian neural networks in deep learning. *Modern information technologies and IT education*. 2022;18(2):310–325. (In Russ.) <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.310-325>
8. Шевкун С.А., Самойлов Н.С. Применение нейросетевого подхода к решению прямых и обратных задач рассеяния. *Вестник инженерной школы ДВФУ*. 2021;2(47):210–225.
- Shevkun S.A., Samoilov N.S. Application of a neural network approach to solving direct and inverse scattering problems. *Engineering School Bulletin FEFU*. 2021;2(47):210–225. (In Russ.)
9. Горбаченко В.И., Жуков М.В. Решение краевых задач математической физики с помощью сетей радиальных базисных функций. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2017;57(1):133–143.
- Gorbachenko V.I., Zhukov M.V. Solving boundary value problems of mathematical physics using radial basis networks. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2017;57(1):133–143. (In Russ.)
10. Кузнецов К.С., Амосова Е.В. Численное решение системы уравнений Навье-Стокса в случае сжимаемой среды с использованием нейронных сетей. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2024;67:31–41. <https://doi.org/10.17223/19988605/67/4>
- Kuznetsov K.S., Amosova E.V. Numerical solution of the system of Navier-Stokes equations in the case of a compressible medium using neural networks. *Bulletin of Tomsk State University. Management, computer technology and information science*. 2024;67:31–41. (In Russ.) <https://doi.org/10.17223/19988605/67/4>
11. Almajid M. Abu-alsaud M. Prediction of porous media fluid flow using physics informed neural networks. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 2021;208:109205. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.109205>
12. Eivazi H., Tahani M., Schlatter P., Vinuesa R. Physics-informed neural networks for solving Reynolds-averaged Navier-Stokes equations. *Physics of Fluids*. 2022;34(7):075117. <https://doi.org/10.1063/5.0095270>
13. Kansa E.J. Motivation for using radial basis functions to solve PDEs. URL: <http://uahtitan.uah.edu/kansaweb.html> (accessed: 28.11.2024).
14. Kansa E.J. Multiquadrics . A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. II. Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Comput. Math. Appl.* 1990;19(8):47–161.
15. Галабурдин А.В. Применение нейронных сетей для решения задачи Дирихле для областей сложной формы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):68–79. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-68-79>
- Galaburdin A.V. Application of neural networks to solve the Dirichlet problem for areas of complex shape. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2) :68–79. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-68-79> (In Russ.)
16. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. *Методы граничных элементов*. Москва: Мир; 1987. 524 с.
- Brebbia K., Telles J., Vroubel L. *Boundary element methods*. Moscow: Mir; 1987. 524 p. (In Russ.)
17. Аккуранов Ю.Н., Михайлов В.Н. The method of boundary integral equations for solving nonlinear heat transmission problem. *USSR Comput. Maths. Math. Phys.* 1980;20:117–125.

Об авторе:

Александр Васильевич Галабурдин, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9151-9151), Galaburdin@mail.ru

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

About the Author:

Alexander V. Galaburdin, Cand. Sci. (Phys. – math.), Associate Professor at the Department Mathematics and informatics, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostovon-Don, 344003, Russian Federation), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9151-9151), Galaburdin@mail.ru

Conflict of Interest Statement: the author declares no conflict of interest.

The author has read and approved the final version of manuscript.

Поступила в редакцию / Received 12.11.2024

Поступила после рецензирования / Reviewed 03.12.2024

Принята к публикации / Accepted 07.12.2024

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

INFORMATION TECHNOLOGIES



УДК 519.6

Оригинальное эмпирическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-43-48>

Идентификация морских разливов нефти на основе нейросетевых технологий

В.В. Сидорякина^{1,2} , Д.А. Соломаха¹¹ Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация² Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (РИНХ), г. Таганрог, Российская Федерация✉ cvv9@mail.ru

Аннотация

Введение. Обнаружение разливов нефти является важной задачей в деле мониторинга состояния морской экосистемы, защиты и минимизации последствий аварийных ситуаций. Для оперативной оценки и реагирования на чрезвычайные ситуации необходима разработка быстрых и точных методов обнаружения и картирования разливов нефти в море. Данные аэрофотосъемки с высоким пространственным разрешением предоставляют исследователям возможность удаленного наблюдения за цветом вод. Улучшению и автоматизации процедур интерпретации и анализа снимков способствуют технологии искусственного интеллекта. Целью настоящей работы является разработка подходов к идентификации разлившейся на водной поверхности нефти с использованием нейросетей и машинного обучения.

Материалы и методы. Методами компьютерного анализа изображений и машинного обучения созданы алгоритмы, способные автоматически идентифицировать морские разливы нефти. Для задачи сегментации изображений применялась сверточная нейронная сеть U-Net. Для разработки архитектуры нейросети была использована библиотека PyTorch, написанная на языке Python. В качестве оптимизатора нейросети был выбран AdamW. Обучение нейронной сети проводилось с помощью датасета, созданного на основе 8700 изображений.

Результаты исследования. Оценка производительности обнаружения разлитой нефти на водной поверхности выполнена на основе метрик IoU, Precision, Recall, Accuracy и F1 score. Проведенные расчеты с использованием указанных метрик демонстрируют точность идентификации около 83–88 %, что позволяет сделать вывод об эффективности используемых алгоритмов.

Обсуждение и заключение. Сверточная сеть U-Net успешно обучена и способна давать высокую точность при обнаружении морских разливов нефти на заданном датасете. Перспективами дальнейших работ авторов является создание алгоритмов с использованием более сложной нейросетевой модели и методов аугментации изображений.

Ключевые слова: морские системы, обнаружение разлива нефти, аэрофотоснимки, глубокое обучение, сегментация изображений, U-Net, оптимизатор AdamW

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23–21–00509, <https://rscf.ru/project/23-21-00509>

Для цитирования. Сидорякина В.В., Соломаха Д.А. Идентификация морских разливов нефти на основе нейросетевых технологий. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):43–48. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-43-48>

Original Empirical Research

Identification of Marine Oil Spills Using Neural Network Technologies

Valentina V. Sidoryakina^{1,2} , Denis A. Solomakha¹¹ Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation² Taganrog Institute named after A.P. Chekhov (branch) of RSUE, Taganrog, Russian Federation✉ cvv9@mail.ru

Abstract

Introduction. Detecting oil spills is a critical task in monitoring the marine ecosystem, protecting it, and minimizing the consequences of emergency situations. The development of fast and accurate methods for detecting and mapping oil spills at sea is essential for prompt assessment and response to emergencies. High-resolution aerial photography provides

researchers with a tool for remote monitoring of water discoloration. Artificial intelligence technologies contribute to improving and automating the interpretation and analysis of such images. This study aims to develop approaches for identifying oil spilled on water surfaces using neural networks and machine learning techniques.

Materials and Methods. Algorithms capable of automatically identifying marine oil spills were developed using computer image analysis and machine learning methods. The U-Net convolutional neural network was employed for image segmentation tasks. The neural network architecture was designed using the PyTorch library implemented in Python. The AdamW optimizer was chosen for training the network. The neural network was trained on a dataset comprising 8,700 images.

Results. The performance of oil spill detection on water surfaces was evaluated using metrics such as IoU, Precision, Recall, Accuracy, and F1 score. Calculations based on these metrics demonstrated identification accuracy of approximately 83–88%, confirming the efficiency of the algorithms used.

Discussion and Conclusion. The U-Net convolutional network was successfully trained and demonstrated high accuracy in detecting marine oil spills on the given dataset. Future work will focus on developing algorithms using more advanced neural network models and image augmentation methods.

Keywords: marine systems, oil spill detection, aerial photography, deep learning, image segmentation, U-Net, AdamW optimizer

Funding. The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 23–21–00509, <https://rscf.ru/project/23-21-00509>

For Citation. Sidoryakina V.V., Solomakha D.A. Identification of Marine Oil Spills Using Neural Network Technologies. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):43–48. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-43-48>

Введение. Нефтяные разливы являются одним из основных источников загрязнения морей, оказывая негативное влияние на экосистему водоема. Токсичные химические вещества, входящие в состав нефти, после попадания в водоём могут длительное время оставаться в его толще и даже опускаться на морское дно, оказывая влияние на скорость седиментации. Разлив нефти может быть вызван намеренно, когда грузовые суда, транспортирующие нефть, сбрасывают отработанное масло и льяльные воды в море. Однако, большинство нефтяных разливов имеют случайный характер и, как правило, связаны с аварийными ситуациями, время, место и масштаб которых трудно предугадать. К ним можно, например, отнести аварии танкеров и утечки из морских установок. Для обнаружения и оперативного принятия мер по эффективной ликвидации последствий разлива нефти необходим набор современных методов мониторинга состояния морских экосистем, требующий высокой точности и оперативности [1, 2].

Идентификация морских разливов нефти на основе нейросетевых технологий в последние годы приобретает важное значение в деле контроля за экологической ситуацией водных объектов. С применением нейронных сетей возможно эффективно обрабатывать большие объемы данных, что позволяет в реальном времени детектировать изменения на морской поверхности [3]. Алгоритмы глубокого обучения способны выявлять паттерны, характерные для разливов нефти, даже при наличии сложных фонов и шумов в данных. Использование таких технологий не только повышает скорость идентификации, но и способствует более точному прогнозированию потенциальных зон загрязнения.

К настоящему времени в мировой исследовательской практике накоплен значительный опыт в области идентификации нефтяных разливов на водных поверхностях на основе нейросетевых технологий [4–9]. Несмотря на имеющийся задел, вопросы распознавания данных структур в морских водах являются актуальными и нуждаются в дополнительных разработках. К данной области исследований и отнесена настоящая работа.

Материалы и методы. Для решения задач сегментации изображений нефтяных пятен на морской поверхности в работе используется сверточная нейронная сеть глубокого обучения U-Net. Выбор данной сети авторами сделан обоснованно, на основе её сравнения с сетями FCN32, SegNet, DelitedSegNet в задаче распознавания структур на водной поверхности [10, 11]. Для разработки архитектуры сети была использована библиотека PyTorch, написанная на языке Python.

Наиболее важную роль в искусственных нейронных сетях играют методы оптимизации, существенно влияющие на процесс обучения. Конечная точность в процессе обучения нейросети определяется согласованием значений весов искусственных нейронов с функцией потерь, которую с каждой эпохой необходимо минимизировать. Когда оптимизация проходит быстро и сходится к глобальному минимуму, то увеличивается точность распознавания и уменьшается время обучения. В качестве оптимизатора нейросети был выбран AdamW — один из самых эффективных алгоритмов оптимизации в обучении нейронных сетей. AdamW обновляет скорость обучения для каждого веса сети индивидуально во время обучения. Для минимизации функции потерь применялся алгоритм модифицированного градиентного спуска. Использованы следующие параметры: размер пакета — 64, значение импульса — 0,9, скорость обучения — 0,001.

Обучение нейронной сети проводилось с помощью датасета, созданного на основе 8700 изображений. Изображения представляют снимки, полученные в ходе аэрофотосъемки. Перед обучением данные были разделены следующим образом: 90 % — тренировочная выборка, 5 % — валидационная выборка, 5 % — тестовая выборка.

На рис. 1, 2 представлены графики точности и потерь на этапах обучения и валидации модели нейронной сети.

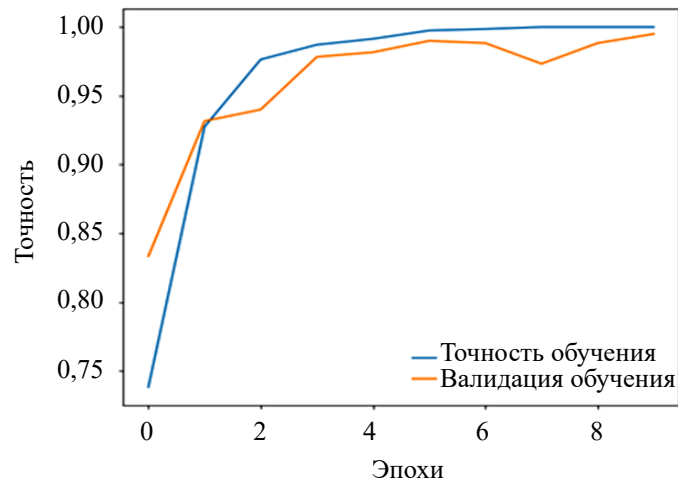


Рис. 1. График точности при обучении нейросети

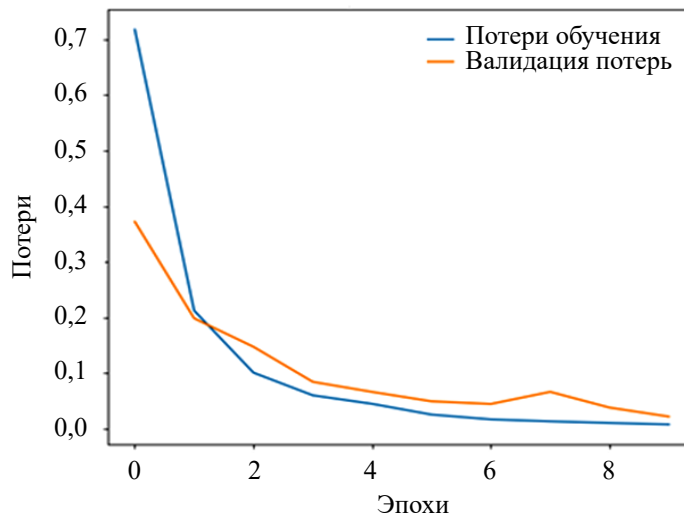
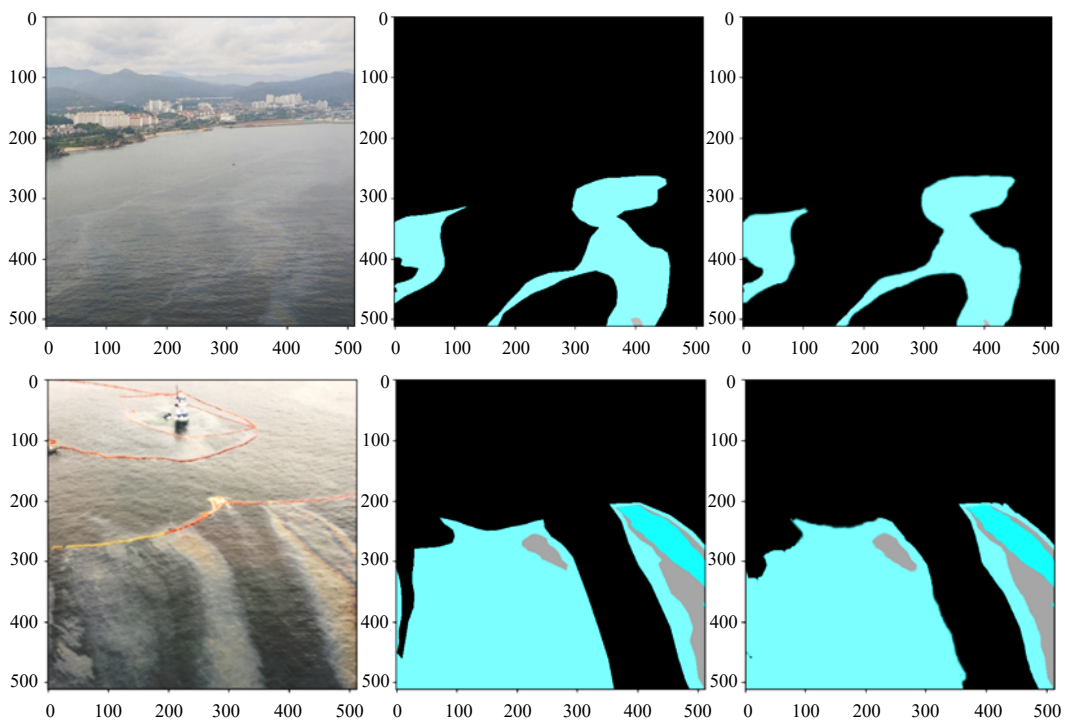


Рис. 2. График функции потерь при обучении нейросети

Результаты численных экспериментов, проводимых по сегментации разливов нефти для различных её типов, представлены на рис. 3.



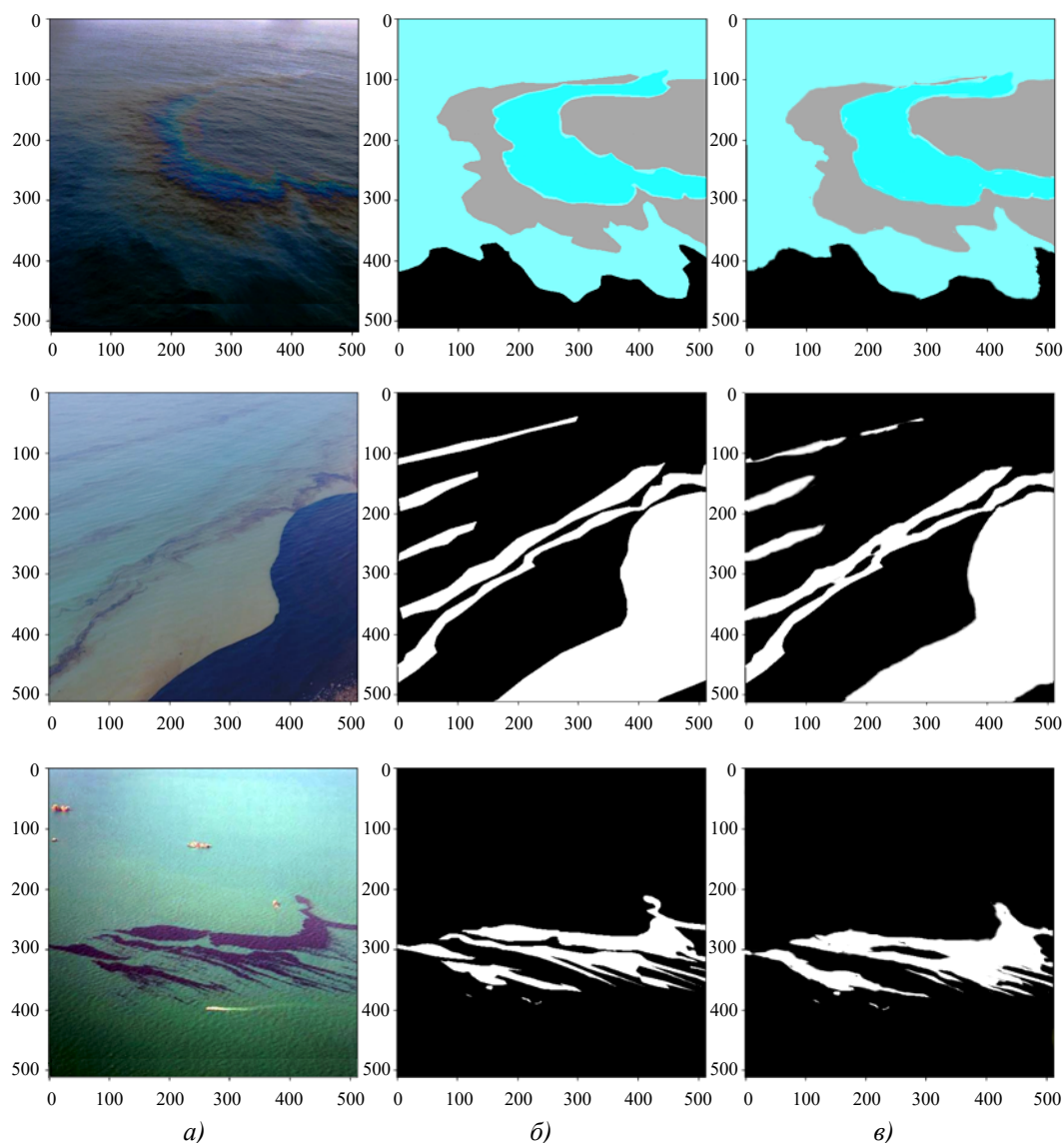


Рис. 3. Численные эксперименты, проводимые для аэрофотоснимков:
a — входные изображения; *б* — маски изображений; *в* — результаты сегментации

При создании цветовой сегментации использована модель RGB, включающая: Rainbow oil (55, 255, 255), silver oil (155, 255, 255), brown oil (180, 180, 180), black oil (0, 0, 0), background (255, 255, 255). Для идентификации определенного типа нефти выбран конкретный спектр. Для оценки метрики автоматизированных классификаторов использовались метрики: IoU, Precision, Recall, Accuracy и F1 score, получившие широкое распространение в задачах обнаружения и сегментации.

Таблица 1

Точность моделей при использовании рассматриваемого набора данных

Модель нейронной сети	IoU	Precision	Recall	Accuracy	F1 score
Вероятность распознавания разливов нефти по данным аэрофотоснимков	0,83	0,86	0,88	0,85	0,87

Из данных таблицы следует, что достигнутая точность по упомянутым метрикам составляет 83–88 %, что демонстрирует не только успешное обнаружение нефти, но и её типизации — аспект, который в значительной степени игнорируется в данной области исследования. Расчеты выполнены с использованием графического процессора NVIDIA GeForce RTX 4090.

Обсуждение и заключение. Результаты работы связаны с проблемой обнаружения и сегментации случаев морских разливов нефти с использованием структур глубокого обучения. Семантическая сегментация выполнена с использованием полностью сверточной сети U-Net. Точность распознавания данных структур на водной поверхности составила более 83 % (по расчетам для метрик IoU, Precision, Recall, Accuracy и F1 score), что демонстрирует эффективность используемых алгоритмов.

Перспективами дальнейших работ авторов является создание алгоритмов с использованием более сложной нейросетевой модели и методов аугментации изображений. Авторы выражают признательность за обширный набор данных, предоставленный зарубежными коллегами [12], позволивший провести экспериментальную часть данного исследования.

Список литературы / References

1. Сидорякина В.В. Математическая модель процесса распространения нефтяных загрязнений в прибрежных морских системах. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):39–46. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-39-46>
- Sidoryakina V.V. Mathematical model of the process of oil pollution spreading in coastal marine systems. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):39–46. (In Russ.). <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-39-46>
2. Sidoryakina V., Filina A. A set of tools for predictive modeling of the spatial distribution of oil pollution. *E3S Web of Conferences*. 2024;592:04017. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202459204017>
3. Муратов М.В., Конов Д.С., Петров Д.И., Петров И.Б. Применение сверточных нейронных сетей для поиска и определения физических характеристик неоднородностей в геологической среде по сейсмическим данным. *Математические заметки СВФУ*. 2023;30(1):101–113. <https://doi.org/10.25587/SVFU.2023.87.50.008>
- Muratov M.V., Konov D.S., Petrov D.I., Petrov I.B. Application of convolutional neural networks for searching and determining physical characteristics of heterogeneities in the geological environment based on seismic data. *Mathematical notes of NEFU*. 2023;30(1):101–113. (In Russ.). <https://doi.org/10.25587/SVFU.2023.87.50.008>
4. Huang X., Zhang B., Perrie W., Lu Y., Wang C. A novel deep learning method for marine oil spill detection from satellite synthetic aperture radar imagery. *Marine Pollution Bulletin*. 2022;179:11366. <https://doi.org/10.1016/j.marpolbul.2022.113666>
5. Rousso R., Katz N., Sharon G., Glizerin Y., Kosman E., Shuster A. Automatic Recognition of Oil Spills Using Neural Networks and Classic Image Processing. *Water*. 2022;14:1127. <https://doi.org/10.3390/w14071127>
6. Favorskaya M., Nishchhal N. Verification of Marine Oil Spills Using Aerial Images Based on Deep Learning Methods. *Informatics and Automation*. 2022; 21(5):937–962. <https://doi.org/10.15622/ia.21.5.4>
7. Zeng K., Wang Y. A Deep Convolutional Neural Network for Oil Spill Detection from Spaceborne SAR Images. *Remote Sens*. 2020;12:1015. <https://doi.org/10.3390/rs12061015>
8. Yekeen S.T., Balogun A.L. Automated Marine Oil Spill Detection Using Deep Learning Instance Segmentation Model. *Int. Arch. Photogramm. Remote Sens. Spatial Inf. Sci.* 2020;XLIII-B3-2020:1271–1276. <https://doi.org/10.5194/isprs-archives-XLIII-B3-2020-1271-2020>
9. Сафин М.А., Бикбулатов Р.И., Пирогова А.М. Повышение эффективности автоматической идентификации разливов нефти с помощью беспилотных летальных аппаратов. *Инженерный вестник Дона*. 2022;12. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n12y2022/8046 (дата обращения: 25.11.2024).
- Safin M.A., Bikbulatov R.I., Pirogova A.M. Improving the efficiency of automatic identification of oil spills using unmanned aerial vehicles. *Engineering Bulletin of the Don*. 2022;12. (in Russ.). URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n12y2022/8046 (accessed: 25.11.2024).
10. Sukhinov A., Sidoryakina V., Solomakha D. Identification of plankton populations in the surface waters of the Azov Sea based on neural network structures of various architectures. *BIO Web of Conferences*. 2024;141:03003. <https://doi.org/10.1051/bioconf/202414103003>
11. Сухинов А.И., Сидорякина В.В., Соломаха Д.А. Идентификация планктонных популяций на поверхности морских систем на основе методов машинного обучения. В: *Материалы международной научно-практической конференции «Приоритетные направления развития науки и образования в условиях формирования технологического суверенитета»*. Ростов-на-Дону: ДГТУ-Принт; 2024. С. 272–277.
- Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V., Solomakha D.A. Identification of plankton populations on the surface of marine systems based on machine learning methods. *Priority areas for the development of science and education in the context of the formation of technological sovereignty: materials of the International scientific and practical conference*. Rostov-on-Don: DSTU-Print; 2024. P. 272–277. (In Russ.)
12. Bui N.A., Oh Y.G., Lee I.P. Oil spill detection and classification through deep learning and tailored data augmentation. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*. 2024;129:103845. <https://doi.org/10.1016/j.jag.2024.103845>

Об авторах:

Валентина Владимировна Сидорякина, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1); доцент кафедры математики и физики Таганрогского института имени А.П. Чехова (филиала) Ростовского государственного экономического университета (347936, Российская Федерация, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48); [ORCID](#), [SPIN-код](#), [ResearcherID](#), [MathSciNet](#), [ScopusID](#), cvv9@mail.ru

Денис Анатольевич Соломаха, студент кафедры математики и информатики Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [SPIN-код](#), solomakha.05@yandex.ru

Заявленный вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Valentina V. Sidoryakina, Cand. Sci. (Phys. – math.), Associate Professor at the Department of Mathematics and Computer Science, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation); Associate Professor at the Department of Mathematics and Physics, Taganrog Institute named after A.P. Chekhov (branch) of RSUE (RINH) (347936, Russian Federation, Taganrog, Initiativnaya Str., 48), [ORCID](#), [SPIN-code](#), [ResearcherID](#), [MathSciNet](#), [ScopusID](#), cvv9@mail.ru

Denis A. Solomakha, 4th year student at the Department of Mathematics and Computer Science, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [SPIN-code](#), solomakha.05@yandex.ru

Claimed Contributorship: the authors contributed equally to this article.

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 30.10.2024

Поступила после рецензирования / Reviewed 29.11.2024

Принята к публикации / Accepted 06.12.2024