

Computational Mathematics and Information Technologies

Вычислительная
математика /
Computational
Mathematics

Математическое
моделирование /
Mathematical Modelling

Информационные
технологии /
Information Technologies



www.cmit-journal.ru
DOI 10.23947/2587-8999



Computational Mathematics and Information Technologies

Рецензируемый научно-теоретический журнал

eISSN 2587–8999

Издается с 2017 года

Периодичность — 4 выпуска в год

DOI: 10.23947/2587–8999

Учредитель и издатель — Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ), г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Журнал «Computational Mathematics and Information Technologies» публикует обзоры, оригинальные статьи и краткие сообщения, посвященные математическому моделированию, численным методам и информационным технологиям для решения сложных и актуальных проблем науки и современной технологии. Область применения исследований — это механика сплошных сред, гидроаэродинамика, науки о Земле, химия, биология, обработка изображений и распознавание образов, теория параллельных вычислений и ее приложения, технологии больших баз данных и искусственного интеллекта и т. д.

Журнал «Computational Mathematics and Information Technologies» принимает к публикации научные и обзорные статьи в соответствии с разделами:

1. Вычислительная математика
2. Математическое моделирование
3. Информационные технологии

<i>Регистрация:</i>	Свидетельство о регистрации средства массовой информации ЭЛ № ФС 77 – 66529 от 21 июля 2016 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций
<i>Индексация и архивация:</i>	РИНЦ, CrossRef, CyberLeninka
<i>Сайт:</i>	https://cmit-journal.ru
<i>Адрес редакции:</i>	344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1
<i>E-mail:</i>	CMIT-EJ@yandex.ru
<i>Телефон:</i>	+7 (863) 273–85–14
<i>Дата выхода № 1, 2025 в свет:</i>	31.03.2025





Computational Mathematics and Information Technologies

Peer-reviewed scientific and theoretical journal

eISSN 2587–8999

Published since 2017

Periodicity — 4 issues per year

DOI: 10.23947/2587–8999

Founder and Publisher — Don State Technical University (DSTU), Rostov-on-Don, Russian Federation

The journal “Computational Mathematics and Information Technologies” publishes reviews, original articles and short reports on mathematical modeling, numerical methods and information technologies for solving complex and topical problems of science and modern technology. Research areas include continuum mechanics, fluid dynamics, Earth sciences, chemistry, biology, image processing and pattern recognition, parallel computing theory and its applications, big database and artificial intelligence technologies, etc.

The journal “Computational Mathematics and Information Technologies” accepts scientific and review articles for publication in accordance with the sections:

1. Computational Mathematics
2. Mathematical Modelling
3. Information Technologies

<i>Registration:</i>	Mass media registration certificate ЭЛ № ФС 77–66529 dated July 21, 2016 issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media
<i>Indexing and Archiving:</i>	RISC, Crossref, Cyberleninka
<i>Website:</i>	https://cmit-journal.ru
<i>Address of the Editorial Office:</i>	1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation
<i>E-mail:</i>	CMIT-EJ@yandex.ru
<i>Telephone:</i>	+7 (863) 273–85–14
<i>Date of publication No. 1, 2025:</i>	31.03.2025



Редакционная коллегия

Главный редактор, Сухинов Александр Иванович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация), [Scopus](#), [ResearcherID](#), [MathSciNet](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#), sukhinov@gmail.com, spu-40.4@donstu.ru

Заместитель главного редактора, Якобовский Михаил Владимирович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), [Scopus](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Ответственный секретарь, Петров Александр Пхоун Чжо, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (Москва, Российская Федерация), [Scopus](#), [ResearcherID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#), [ИСТИНА](#)

Алексеев Елена В., кандидат физико-математических наук, PhD, профессор, Университет Литораль Кот д'Опаль, (Булонь-сюр-Мер, Франция), [Scopus](#), [ResearcherID](#), [ORCID](#)

Воеводин Владимир Валентинович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Москва, Российская Федерация), [Scopus](#), [ResearcherID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Гасилов Владимир Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), [Scopus](#), [ResearcherID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Гущин Валентин Анатольевич, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт автоматизации проектирования РАН (Москва, Российская Федерация), [Scopus](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Лазарева Галина Геннадьевна, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор РАН, Российский университет дружбы народов (Москва, Российская Федерация), [Scopus](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Петров Игорь Борисович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Московский физико-технический институт (государственный университет) (Москва, Российская Федерация), [Scopus](#), [SPIN-код](#)

Поляков Сергей Владимирович, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), [Scopus](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Тишкин Владимир Федорович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), [Scopus](#), [ResearcherID](#), [SPIN-код](#)

Четверушкин Борис Николаевич, академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор, научный руководитель Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), [Scopus](#), [ResearcherID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Чехонин Константин Александрович, доктор физико-математических наук, доцент, зам. директора Института прикладной математики ДВО РАН, руководитель (директор) Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН (Хабаровск, Российская Федерация), [Scopus](#), [ResearcherID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Чистяков Александр Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация), [Scopus](#), [ResearcherID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Editorial Board

Editor-in-Chief, Alexander I. Sukhinov, Corresponding member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation), [Scopus](#), [ResearcherID](#), [MathSciNet](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#), sukhinov@gmail.com, spu-40.4@donstu.ru

Deputy Chief Editor, Mikhail V. Yakobovskii, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), [Scopus](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Executive Secretary, Alexander P. Petrov Dr.Sci. (Phys.-Math.), Leading Research Fellow, Institute of Control Sciences RAS (Moscow, Russian Federation), [Scopus](#), [ResearcherID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#), [Istina](#)

Elena V. Aleksenko, Ph.D., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, University of Littoral Opal Coast (Boulogne-sur-Mer, France), [Scopus](#), [ResearcherID](#), [ORCID](#)

Vladimir V. Voevodin, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russian Federation), [Scopus](#), [ResearcherID](#), [ORCID](#)

Vladimir A. Gasilov, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), [Scopus](#), [ResearcherID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Valentin A. Gushchin, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Institute of Computer Aided Design, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), [Scopus](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Galina G. Lazareva, Corresponding member of RAS, Dr. Sci. (Phys.-Math), Professor of RAS, RUDN University, (Moscow, Russian Federation), [Scopus](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Igor B. Petrov, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Moscow Institute of Physics and Technology (State University) (Moscow, Russian Federation), [Scopus](#), [SPIN-code](#)

Sergey V. Polyakov, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), [Scopus](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Vladimir F. Tishkin, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), [Scopus](#), [ResearcherID](#), [SPIN-code](#)

Boris N. Chetverushkin, Academician of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), [Scopus](#), [ResearcherID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Konstantin A. Chekhonin, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Deputy Director of the Institute for Applied Mathematics, Director of the Khabarovsk Branch of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences (Khabarovsk, Russian Federation), [Scopus](#), [ResearcherID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Alexander E. Chistyakov, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation), [Scopus](#), [ResearcherID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Содержание

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

- Решение краевых задач для некоторых нелинейных
дифференциальных уравнений методом Бубнова-Галеркина 7**
Н.К. Волосова, К.А. Волосов, А.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов
- Достаточные условия сходимости решений линеаризованной задачи
к решению исходной нелинейной задачи транспорта
многофракционных наносов в зоне мелководья 20**
В.В. Сидорякина

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

- Оценка точности спутниковой альтиметрии Sentinel-3
в прибрежных районах Азовского моря 31**
С.В. Проценко, Е.А. Проценко, А.В. Харченко
- Оценка предельной скорости однонаправленного
транспортного потока с высокой вычислительной эффективностью 39**
И.А. Кутейников

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

- Автоматическое распознавание значений глубины
на лоцманских картах с использованием методов глубокого обучения 52**
Е.О. Рахимбаева, Т.А. Алышов, Ю.В. Белова

Contents

COMPUTATIONAL MATHEMATICS

- Solution of Boundary Value Problems for Certain Nonlinear Differential Equations Using the Bubnov-Galerkin Method 7**
Natalya K. Volosova, Konstantin A. Volosov, Aleksandra K. Volosova, Mikhail I. Karlov, Dmitriy F. Pastukhov, Yuriy F. Pastukhov
- Sufficient Conditions for the Convergence of Solutions of the Linearized Problem to the Solution of the Original Nonlinear Problem of Multifractional Sediment Transport in Shallow Water 20**
Valentina V. Sidoryakina

MATHEMATICAL MODELLING

- Accuracy Assessment of Sentinel-3 Satellite Altimetry in the Coastal Areas of the Azov Sea 31**
Sofya V. Protsenko, Elena A. Protsenko, Anton V. Kharchenko
- Estimation of the Unidirectional Traffic Flow Velocity Limit with High Computational Efficiency 39**
Ivan A. Kuteynikov

INFORMATION TECHNOLOGIES

- Automatic Depth Value Recognition on Pilot Charts Using Deep Learning Methods 52**
Elena O. Rakhimbaeva, Tajaddin A. Alyshov, Yulia V. Belova

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 519.6

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-7-19>


Решение краевых задач для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений методом Бубнова-Галеркина

Н.К. Волосова¹ , К.А. Волосов² , А.К. Волосова² , М.И. Карлов³,
Д.Ф. Пастухов⁴ , Ю.Ф. Пастухов⁴

¹ Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Российская Федерация

² Российский университет транспорта, г. Москва, Российская Федерация

³ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
г. Долгопрудный, Российская Федерация

⁴ Полоцкий государственный университет им. Евфросинии Полоцкой, г. Новополоцк, Республика Беларусь

dmitrij.pastuhov@mail.ru

Аннотация

Введение. Исследуется возможность численного решения модифицированным методом Бубнова-Галеркина краевой задачи с нелинейным дифференциальным уравнением, непрерывными коэффициентами и правой частью. В постановке задачи частные производные коэффициентов уравнения являются непрерывными функциями по всем аргументам. Порядок нелинейного дифференциального уравнения n строго меньше числа координатных функций m .

Материалы и методы. Для численного решения нелинейной краевой задачи использован модифицированный метод Петрова-Галеркина и идея единственности разложения гладкой функции по системе линейно независимых базисных функций степенного вида на отрезке $[-1, 1]$ с единичной нормой Чебышева для каждой функции системы. В систему линейных алгебраических уравнений включены линейно независимые краевые условия. При этом элементы матрицы и правая часть системы зависят от индекса простой итерации s . От индекса s зависит и вектор коэффициентов разложения решения по базисным функциям. Обратная матрица системы находилась библиотекой линейной алгебры Msimsl на языке Fortran.

Результаты исследования. Сформулированы достаточные условия существования и единственности решения краевой задачи с нелинейным дифференциальным уравнением методом простой итерации. При выполнении достаточных условий коэффициенты разложения абсолютно уменьшаются с ростом номера базисной функции.

Обсуждение и заключение. Точно решены три краевых задачи с нелинейным уравнением второго порядка и одна задача с уравнением третьего порядка. Аналитические решения сравнены с численными решениями, равномерная норма разности имеет порядок 10^{-13} , 10^{-11} , 10^{-10} , 10^{-10} соответственно. Модифицированный метод Бубнова-Галеркина позволяет находить решение каждой ветви многозначной функции в краевых задачах с нелинейными дифференциальными уравнениями.

Ключевые слова: гидродинамика, механика, численные методы, нелинейные дифференциальные уравнения, краевые задачи, метод Галеркина

Для цитирования. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Решение краевых задач для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений методом Бубнова-Галеркина. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(1):7–19. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-7-19>

Solution of Boundary Value Problems for Certain Nonlinear Differential Equations Using the Bubnov-Galerkin Method

Natalya K. Volosova¹ , Konstantin A. Volosov² , Aleksandra K. Volosova² , Mikhail I. Karlov³,
Dmitriy F. Pastukhov⁴ ✉, Yuriy F. Pastukhov⁴ 

¹ MGTU named after. N.E. Bauman, Moscow, Russian Federation

² Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation

³ Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russian Federation

⁴ Polotsk State University named after Euphrosyne of Polotsk, Novopolotsk, Republic of Belarus

✉ dmitrij.pastuhov@mail.ru

Abstract

Introduction. This study investigates the possibility of numerically solving a boundary value problem with a nonlinear differential equation, continuous coefficients, and a right-hand side using the modified Bubnov-Galerkin method. In the problem formulation, the partial derivatives of the equation's coefficients are continuous functions of all arguments. The order of the nonlinear differential equation n is strictly less than the number of coordinate functions m .

Materials and Methods. To numerically solve the nonlinear boundary value problem, the modified Petrov-Galerkin method and the uniqueness property of decomposing a smooth function into a system of linearly independent polynomial basis functions on the interval $[-1, 1]$ with a unit Chebyshev norm for each function in the system are used. The system of linear algebraic equations includes linearly independent boundary conditions. The matrix elements and the right-hand side of the system depend on the simple iteration index s . The coefficient vector of the solution decomposition into basis functions also depends on the index s . The inverse matrix of the system was computed using the Msimsl linear algebra library in Fortran.

Results. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution to the boundary value problem with a nonlinear differential equation using the simple iteration method have been formulated. When the sufficient conditions are met, the decomposition coefficients decrease absolutely as the basis function index increases.

Discussion and Conclusion. Three boundary value problems with a second-order nonlinear equation and one problem with a third-order equation were solved exactly. The analytical solutions were compared with numerical solutions, with the uniform norm of the difference having an order of 10^{-13} , 10^{-11} , 10^{-10} , 10^{-10} , respectively. The modified Bubnov-Galerkin method allows for solving each branch of a multivalued function in boundary value problems with nonlinear differential equations.

Keywords: hydrodynamics, mechanics, numerical methods, nonlinear differential equations, boundary value problems, Galerkin method

For Citation. Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Karlov M.I., Pastukhov D.F., Pastukhov Yu.F. Solution of Boundary Value Problems for Certain Nonlinear Differential Equations Using the Bubnov-Galerkin Method. *Computation Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(1):7–19. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-7-19>

Введение. Для решения краевой задачи на отрезке с нелинейным дифференциальным уравнением известен, например, метод Ньютона [1, с. 460]. Методы решения краевых задач в гидродинамике и в механике содержатся также в работах [2, 3]. Методы решения нелинейных краевых задач имеют много общего с методами решения линейных задач [1, с. 458]. В данной работе модифицированный метод Бубнова-Галеркина, предложенный в работах [4, 5] для решения краевых задач с линейными дифференциальными уравнениями, был обобщен на случай краевых задач с нелинейными дифференциальными уравнениями.

В данной работе любая ветвь (график) гладкого решения нелинейного дифференциального уравнения представляется в виде линейной комбинации базисных функций степенного вида (то есть численное решение представимо в функциональном виде). Все базисные функции заданы на отрезке $[-1, 1]$ с единичной нормой Чебышева.

Решение нелинейной краевой задачи сводится к методу простой итерации. В каждой итерации решается система линейных алгебраических уравнений, элементы матрицы которой и коэффициенты правой части зависят от номера итерации s . Для уравнения третьего порядка в СЛАУ включаются $n-1$ линейно независимых краевых условий и $m-n+1$ условий ортогональности невязки дифференциального уравнения к базисным функциям [1, 6] (n — порядок ОДУ, m — число базисных функций).

В работах [7–10] получены новые результаты и идеи решения краевых задач, в том числе решения задач с высокой степенью точности или в областях сложной формы.

Материалы и методы

Постановка задачи. Пусть неизвестная функция $u(x)$, принадлежащая классу n раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $C^n[a, b]$, является решением краевой задачи с нелинейным дифференциальным уравнением порядка n с переменными коэффициентами $g_i(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(i)}(x)) \in C[a, b], i = 0, n$

$$\begin{cases} L[u(x)] = f(x, u(x)), x \in (a, b), u(x) \in (c, d) \\ L[u(x)] \equiv \left(\sum_{i=0}^n g_i(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(i)}(x)) \frac{d^i}{dx^i} \right) u(x), \end{cases} \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{\mu}^i u^{(i)}(a) + \beta_{\mu}^i u^{(i)}(b)) = \gamma_{\mu}, \mu = \overline{1, n}. \quad (2)$$

В краевой задаче (1)–(2) заданные функции $g_i(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(i)}(x)) \in C[a, b], i = \overline{0, n}$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ по всем аргументам. Каждое слагаемое нелинейного уравнения (1) можно представить так, чтобы коэффициент $g_i(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(i)}(x)), i = \overline{0, n}$, умноженный на производную $\frac{d^i u(x)}{dx^i}$, зависел от производных функции $u^{(p)}(x), p = \overline{0, i}$ не выше i -го порядка.

Для простоты краевые условия (2) заданы в точках $x=a, x=b$ линейными формами относительно функции и производных до $n-1$ порядка включительно, как и в линейной краевой задаче. Для замкнутости задачи (1) необходимо, чтобы полное число краевых условий было равно n . Матрицы коэффициентов $\alpha_{\mu}^i, \beta_{\mu}^i, i = \overline{0, n-1}, \mu = \overline{1, n}$, а также числа $\gamma_{\mu}, \mu = \overline{1, n}$ заданы. Для однозначного выделения ветви нелинейного решения уравнения (1) можно задать одно или несколько дополнительных условий к краевым условиям вида (2).

Пусть также коэффициенты $g_i(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(i)}(x)) \in C[a, b], i = \overline{0, n}$ непрерывно дифференцируемы по переменным $u^{(p)}$, то есть $\frac{\partial g_i}{\partial u^{(p)}} \in C[c_i, d_i], p = \overline{0, i}$.

Обобщим метод Бубнова-Галеркина, предложенный в работах [4, 5] для решения краевых задач с линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями, на случай нелинейного дифференциального уравнения. Предположим, что любую гладкую функцию $u(x)$ или ее выделенную ветвь (решение уравнения (1)) можно однозначно представить линейной суммой базисных степенных функций [4, 5]:

$$\{\phi_i(x)\}_{i=0}^m = \left\{ \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right)^i, x \in [a, b], i = \overline{0, m} \right\}, \|\phi_i(x)\|_C = \max_{x \in [a, b]} |\phi_i(x)| = 1 \forall i = \overline{0, m}, \quad (3)$$

$$u(x) = u(c) + \sum_{j=1}^m \phi_j(x) D_j = u(c) + \sum_{j=1}^m \left(\frac{2(x-c)}{b-a} \right)^j D_j, c = \frac{a+b}{2}. \quad (4)$$

Поиск вектора разложения D_j для решения краевой задачи (1)–(2) по базисным функциям $\phi_j(x)$ является целью численного алгоритма. Запишем невязку нелинейного уравнения (1) и учтем представление его решения формулой (4):

$$\begin{aligned} R(u(x)) &= L[u(x)] - f(x, u(x)) = \left(\sum_{i=0}^n g_i(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(i)}(x)) \frac{d^i}{dx^i} \right) u(x) - f(x, u(x)) = \\ &= \sum_{j=1}^m D_j \sum_{i=1}^n g_i(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(i)}(x)) \frac{d^i \phi_j(x)}{dx^i} + g_0(x, u(x)) \cdot u(x) - f(x, u(x)) = \\ &= \sum_{j=1}^m D_j \sum_{i=1}^n g_i(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(i)}(x)) \frac{d^i \phi_j(x)}{dx^i} - \overline{f(x, u(x))}, \overline{f(x, u(x))} = f(x, u(x)) - g_0(x, u(x)) \cdot u(x). \end{aligned}$$

Потребуем [1, 4–6], чтобы невязка $R(u(x))$ была ортогональна максимальному числу $m-n+1$ базисных функций (здесь m — число базисных координатных функций, а n — порядок дифференциального уравнения):

$$\langle R(u(x)), \phi_k(x) \rangle = 0 \Leftrightarrow k = \overline{0, m-n},$$

$$\left\langle \sum_{j=1}^m D_j \sum_{i=1}^n g_i(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(i)}(x)) \frac{d^i \phi_j(x)}{dx^i} - \overline{f(x, u(x))}, \phi_k(x) \right\rangle = 0 \forall k = \overline{0, m-n} \Leftrightarrow \quad (5)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m A_{k,j} D_j = F_k, F_k = \langle \overline{f(x, u(x))}, \phi_k(x) \rangle \\ A_{k,j} = \left\langle \sum_{i=1}^n g_i(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(i)}(x)) \frac{d^i \phi_j(x)}{dx^i}, \phi_k(x) \right\rangle, k = \overline{0, m-n}. \end{cases}$$

Остальные линейно независимые краевые условия (2) для системы линейных алгебраических уравнений (5) следует выбрать из множества допустимых функций исходной краевой задачи (1) [11].

Будем решать СЛАУ (5), в которой матричные коэффициенты и коэффициенты правой части зависят неявно от решения $u(x)$, методом простой итерации. Для этого рассмотрим неявную зависимость решения от вектора разложения $D_j^s, s = 0, 1, 2, \dots, j = \overline{1, m}$, (4) по системе базисных функций с номером итерации s .

Получим из (5):

$$A_{k,j} = A_{k,j}(u^s) = A_{k,j}(u(D^s)), F_k = F_k(u^s) = F_k(u(D^s)), D = D^{s+1},$$

$$\sum_{j=1}^m A_{k,j}(D^s) \cdot D_j^{s+1} = F_k(D^s), j = \overline{1, m}, k = \overline{0, m-n}, D^{s+1} = A^{-1}(D^s) \cdot F(D^s), s = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Обозначим предельные значения

$$\lim_{s \rightarrow \infty} A(D^s) = A^*, \lim_{s \rightarrow \infty} F(D^s) = F^*, \lim_{s \rightarrow \infty} D^s = D^*.$$

Запишем предельный вид уравнения (6):

$$A^* D^* = F^*. \quad (7)$$

Теорема 1 (достаточные условия существования и единственности решения D^* уравнения (7) в простой итерации (6)).

Пусть коэффициенты уравнения (1) непрерывны $g_i(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(i)}(x)) \in C[a, b], i = \overline{0, n}$ и непрерывно дифференцируемы по всем аргументам, начиная со второго $\frac{\partial g_i}{\partial u^{(p)}} \in C[c_p, d_p], p = \overline{0, i}, i = \overline{1, n}$. Пусть предельная матрица A^* в (7), вычисляемая по формулам (5), не вырождена. Пусть выполнены условия сжимающего отображения $q = \|A^{-1}\| \cdot \|G\| < 1$. Тогда в краевой задаче (1) с краевыми условиями (2) существует единственное решение. Норма невязки убывает согласно формуле $\|\delta D^s\| \leq \|\delta D^0\| q^s / (1 - q)$, где s — номер итерации в алгоритме (6).

Доказательство. Рассмотрим приращение уравнения (6) в окрестности всех его предельных значений

$$A^* D^* = F^* \Rightarrow \delta A^* D^* + A^* \delta D^* = \delta F^*,$$

$\delta A^s = A^s - A^*$ — приращение матрицы размерности $m \times m$; A^* — матрица размерности $m \times m$; $\delta D^{s+1} = D^{s+1} - D^*$ — приращение вектора размерности m ; $\delta F^s = F^s - F^*$ — приращение вектора размерности m . Введем целый индекс $t = \overline{1, m}$ и рассмотрим приращение указанных величин $\delta A^s, \delta F^s$ как функцию приращения компоненты вектора δD_p^s , используя формулу (5) $\delta D_t^s = D_t^s - D_t^*$:

$$\delta A_{k,j}(\delta D_t^s) D^* = \left\langle \sum_{j=1}^m D_j \sum_{i=1}^n \sum_{p=0}^i \frac{\partial g_i}{\partial u_p} \cdot \phi_t^{(p)}(x) \cdot \phi_j^{(i)}(x), \phi_k(x) \right\rangle \delta D_t^s, u_p \equiv u^{(p)}(x) \quad t = \overline{1, m}, k = \overline{0, m-n}, j = \overline{1, m}.$$

В последней формуле добавилось суммирование по индексу p , так как коэффициенты нелинейного ОДУ $g_i(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(i)}(x))$ зависят от функции и от ее производных до i -го порядка включительно. Эффективная правая часть нелинейного уравнения $\overline{f(x, u(x))} = f(x, u(x)) - g_0(x, u(x)) \cdot u(x)$ зависит только от функции $u(x)$:

$$\delta F_k(\delta D_t^s) = \left\langle \frac{\partial \overline{f(x, u(x))}}{\partial u} \phi_t(x), \phi_k(x) \right\rangle \delta D_t^s, t = \overline{1, m}.$$

Получаем $\delta D^{s+1} = A^{*-1} (\delta F^s - \delta A^s D^*)$ и последнее уравнение заменяем близким к нему уравнением простой итерации

$$\delta D^{s+1} = (A^s)^{-1} (\delta F^s - \delta A^s D^s) = (A^s)^{-1} G^s \delta D^s. \quad (8)$$

В уравнении (8)

$$A_{k,j}^s = \left\langle \sum_{i=1}^n g_i(x, u^s(x), u'^s(x), \dots, u^{(i)s}(x)) \frac{d^i \phi_j(x)}{dx^i}, \phi_k(x) \right\rangle, k = \overline{0, m-n}, j = \overline{1, m}, \quad (9)$$

$$G_{k,t}^s = \left\langle \frac{\partial \overline{f(x, u(x))}}{\partial u} \phi_t(x), \phi_k(x) \right\rangle - \left\langle \sum_{j=1}^m D_j \sum_{i=1}^n \sum_{p=0}^i \frac{\partial g_i}{\partial u_p} \cdot \phi_t^{(p)}(x) \cdot \phi_j^{(i)}(x), \phi_k(x) \right\rangle, k = \overline{0, m-n}, t = \overline{1, m}, \quad (10)$$

$\delta D_t^{s+1} = \delta D_t^s = 0, t = \overline{m-n+1, m}$ так как последние строки матричных коэффициентов и коэффициентов правой части в уравнении (5) определяются краевыми условиями и являются постоянными числами. В формуле (10) $\phi_t^{(p)}$ обозначает производную p -го порядка от базисной координатной функции с индексом t . Аналогично для $\phi_j^{(i)}(x)$. Явные формулы для $\phi_j^{(i)}(x)$ содержатся в работах [4, 5].

Оценим по норме правую и левую часть уравнения (8)

$$\|\delta D^{s+1}\| \leq \left\| \left(A^s \right)^{-1} \right\| \|G^s\| \|\delta D^s\| = q \|\delta D^s\|, q^s = \left\| \left(A^s \right)^{-1} \right\| \|G^s\| \leq \left\| \left(A^* \right)^{-1} \right\| \|G^*\|. \quad (11)$$

В полных метрических пространствах [12], если параметр сжатия меньше единицы

$$q_s = \left\| \left(A^s \right)^{-1} \right\| \|G^s\| \leq q = \left\| \left(A^* \right)^{-1} \right\| \|G^*\| < 1, s = 0, 1, 2, \dots$$

для отображения $\delta D^s \rightarrow \delta D^{s+1} = \left(A^s \right)^{-1} G^s \delta D^s$, то решение краевой задачи (1)–(2) существует и единственно.

Согласно работе А.Н. Колмогорова, С.В. Фомина [12, с. 87] норма невязки убывает по формуле

$$\|\delta D^s\| \leq \|\delta D^0\| q^s / (1 - q), \quad \|\delta D^s\| = \|D^s - D^*\| = \rho(D^s, D^*).$$

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим три примера решения нелинейной краевой задачи с уравнением второго порядка и один пример с уравнением третьего порядка.

Пример 1.

$$\begin{cases} u \cdot u''(x) - u' \cdot u'(x) = u^2(x) = f(x, u), \\ u(0) = 1, u(1) = e^{1/2}, x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (12)$$

Точное решение задачи получим, учитывая преобразования

$$\begin{aligned} u \cdot u''(x) - u' \cdot u'(x) = u^2(x) &\Leftrightarrow \left(\frac{u'}{u} \right)' = (\ln(u(x)))' = \frac{uu'' - (u')^2}{u^2} = 1 \Leftrightarrow \\ \ln(u(x)) &= \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \Leftrightarrow u(x) = \overline{C_2} e^{\frac{x^2}{2} + C_1 x}, u(0) = 1 \Leftrightarrow \overline{C_2} = 1, u(1) = e^{1/2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + C_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow C_1 = 0. \end{aligned}$$

В итоге точное решение примера (1) имеет вид $u(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$.

Приведем условие примера к численному алгоритму (5)–(6). Требуется также указать начальную функцию — решение, удовлетворяющее краевым условиям Дирихле, то есть заданным значениям функции на краях отрезка.

Получаем, что

$$u^0(x) = \frac{u_0 + u_n}{2} + \phi_1(x) D_1^0 = \frac{u_0 + u_n}{2} + \phi_1(x) \left(\frac{u_n - u_0}{2} \right), D_2^0 = \dots = D_n^0 = 0, \quad (13)$$

поскольку

$$\phi_1(a) = -1, \phi_1(b) = 1, u^0(a) = \frac{u_0 + u_n}{2} - \left(\frac{u_n - u_0}{2} \right) = u_0, u^0(b) = \frac{u_0 + u_n}{2} + \left(\frac{u_n - u_0}{2} \right) = u_n$$

и краевые условия для начальной функции $u^0(x)$ выполнены. Коэффициенты и правая часть в примере 1 имеют вид:

$$g_2(x, u, u', u'') = u, g_1(x, u, u') = -u', g_0(x, u) = 0, f(x, u) = u^2(x).$$

В численном алгоритме кроме формул (5)–(6) используем подробные формулы из работы [5], учитывающие краевые условия Дирихле для линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\sum_{j=1}^m a_{i,j}^s D_j^{s+1} = \overline{f_i^s}, i = \overline{0, m-1}. \quad (14)$$

Здесь элементы матрицы $a_{i,j}, i = \overline{0, m-1}, j = \overline{1, m}$ и коэффициенты правой части $\overline{f_i^s}$ системы уравнений (14) равны:

$$\begin{aligned} a_{i,j}^s &= \begin{cases} \langle L^s \phi_j, \phi_i \rangle, j \equiv 1 \pmod{2}, i = \overline{0, m-2}, \\ \langle L^s (\phi_j - 1), \phi_i \rangle, j \equiv 0 \pmod{2}, i = \overline{0, m-2}, \\ 1, i = m-1, j \equiv 1 \pmod{2}, \\ 0, i = m-1, j \equiv 0 \pmod{2}, \end{cases} \\ \overline{f_i^s} &= \begin{cases} \left\langle f(x, u^s) - L^s \left(\frac{u_a + u_b}{2} \right), \phi_i(x) \right\rangle, i = \overline{0, m-2}, \\ \frac{u_b - u_a}{2}, i = m-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Однако оператор $L^s \phi_j$ для матричных коэффициентов $a_{i,j}^s$ в (14) является нелинейным и вычисляется по формуле (1), в отличие от работы [5]. Абсолютная и относительная векторная норма Чебышева невязки задачи:

$$\|u^{num} - u^{exact}\|_c = 1,072313895664201E - 013, \frac{\|u^{num} - u^{exact}\|_c}{\|u^{exact}\|_c} = 6,503912545562317E - 014.$$

Число интервалов для вычисления скалярного произведения двух функций в (14) равно $n_1=20$, число координатных функций $m=15$, число итераций $n_1=30$.

Скалярное произведение функций вычислялось по формулам из работы [5]:

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \int_a^b y_1(x) y_2(x) dx = 10h \sum_{i=0}^{n_1} y_1(x_i) y_2(x_i) C_i + O(h^{22}), n_1 = 20s, h = \frac{b-a}{n_1}, s \in N, \quad (15)$$

$$C_i = \begin{cases} \frac{1145302367137}{48426042384720}, & \text{если } i = 0 \text{ или } i = n_1, \\ \frac{1145302367137}{24213021192360}, & \text{если } (i \equiv 0 \bmod 20) \text{ и } (0 < i < n_1), \\ \frac{335582304250}{1470076286679}, & \text{если } (i \equiv 1 \bmod 20) \text{ или } (i \equiv 19 \bmod 20), \\ \frac{-19467909708875}{41162136027012}, & \text{если } (i \equiv 2 \bmod 20) \text{ или } (i \equiv 18 \bmod 20), \\ \frac{8274871497250}{3430178002251}, & \text{если } (i \equiv 3 \bmod 20) \text{ или } (i \equiv 17 \bmod 20), \\ \frac{-413929922392625}{54882848036016}, & \text{если } (i \equiv 4 \bmod 20) \text{ или } (i \equiv 16 \bmod 20), \\ \frac{50652939811064}{2450127144465}, & \text{если } (i \equiv 5 \bmod 20) \text{ или } (i \equiv 15 \bmod 20), \\ \frac{155790561130375}{3430178002251}, & \text{если } (i \equiv 6 \bmod 20) \text{ или } (i \equiv 14 \bmod 20), \\ \frac{286955364893000}{3430178002251}, & \text{если } (i \equiv 7 \bmod 20) \text{ или } (i \equiv 13 \bmod 20), \\ \frac{-502376261017625}{3920203431144}, & \text{если } (i \equiv 8 \bmod 20) \text{ или } (i \equiv 12 \bmod 20), \\ \frac{1704056522480500}{10290534006753}, & \text{если } (i \equiv 9 \bmod 20) \text{ или } (i \equiv 11 \bmod 20), \\ \frac{-1684005984173647}{9355030915230}, & \text{если } i \equiv 10 \bmod 20. \end{cases} \quad (16)$$

Результаты работы программы (пример 1) приведены в таблице 1.

Таблица 1

Численное $u_i^{numerical}$ и точное u_i^{exact} решения задачи (12)

x_i	$u_i^{numerical}$	u_i^{exact}	$u_i^{numerical} - u_i^{exact}$
0,0000000000000E+000	1,000000000000000	1,000000000000000	0,00000E+000
5,0000000000000E-002	1,00125078157569	1,00125078157562	6,533608E-014
0,100000000000000	1,00501252085944	1,00501252085940	3,497831E-014
0,150000000000000	1,01131351922362	1,01131351922361	5,002183E-015
0,200000000000000	1,02020134002678	1,02020134002676	2,150048E-014
0,250000000000000	1,03174340749917	1,03174340749910	7,15878E-014
0,300000000000000	1,04602785990882	1,04602785990872	1,072313E-013
0,350000000000000	1,06316467213420	1,06316467213410	9,834472E-014
0,400000000000000	1,08328706767501	1,08328706767496	5,269027E-014
0,450000000000000	1,10655324549790	1,10655324549789	4,473201E-015
0,500000000000000	1,13314845306681	1,13314845306683	-1,17629E-014
0,550000000000000	1,16328744359303	1,16328744359302	1,449849E-014
0,600000000000000	1,19721736312188	1,19721736312181	6,498762E-014

Окончание таблицы 1

x_i	$u_i^{numerical}$	u_i^{exact}	$u_i^{numerical} - u_i^{exact}$
0,6500000000000000	1,23522112174449	1,23522112174439	1,029619E-013
0,7000000000000000	1,27762131320499	1,27762131320489	1,004986E-013
0,7500000000000000	1,32478475872893	1,32478475872887	6,074600E-014
0,8000000000000000	1,37712776433597	1,37712776433596	1,600000E-014
0,8500000000000000	1,43512219658388	1,43512219658387	5,959208E-015
0,9000000000000000	1,49930250005679	1,49930250005677	2,719775E-014
0,9500000000000000	1,57027380147662	1,57027380147660	1,296022E-014
1,0000000000000000	1,64872127070013	1,64872127070013	4,737963E-017

Численное решение задачи (1)–(2) можно привести к виду (17), преобразуя формулу (4) с краевыми условиями Дирихле [4]:

$$u(x) = \left(\frac{u_a + u_b}{2} \right) + \sum_{j=1}^m \left[\left(\frac{(2x-a-b)}{b-a} \right)^j + \left(\frac{-1+(-1)^{j+1}}{2} \right) \right] D_j^*. \quad (17)$$

В (17) используются предельные значения D_j^* вектора разложения решения по базисным функциям, D_j^* — решение СЛАУ (14) на последней итерации.

Пример 2.

$$\begin{cases} 2u \cdot u''(x) + 2u' \cdot u'(x) = x = f(x, u), \\ u(1) = 1, u(2) = 2, x \in [1, 2]. \end{cases} \quad (18)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} (u^2(x))' &= 2uu', \quad (u^2(x))'' = 2(u')^2 + 2uu'' = x \Rightarrow u^2(x) = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2 \Leftrightarrow \\ u(x) &= \pm \sqrt{\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2}, \quad \begin{cases} u(1) = 1 \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{6} + C_1 + C_2 \\ u(2) = 2 \Leftrightarrow 4 = \frac{8}{3} + 2C_1 + C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{5}{6} \\ 2C_1 + C_2 = \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow C_1 = \frac{11}{6}, C_2 = -1. \end{aligned}$$

то $u(x) = \sqrt{\frac{x^3 + 11x - 6}{6}}$ — точное решение краевой задачи (18).

Отметим, что в данном случае краевые условия (18) однозначно выбирают одну ветвь решения, в противном случае можно задать дополнительные условия для выбора одной ветви.

Число интервалов для вычисления скалярного произведения двух функций в (18) равно $n_1=100$, число координатных функций $m=18$, число итераций $n_i=30$, $g_2(x, u, u', u'') = 2u$, $g_1(x, u, u') = 2u'$, $g_0(x, u) = 0$, $f(x, u) = x$.

Таблица 2

Численное $u_i^{numerical}$ и точное u_i^{exact} решения задачи (18)

x_i	$u_i^{numerical}$	u_i^{exact}	$u_i^{numerical} - u_i^{exact}$
1,0000000000000000	1,0000000000000000	1,0000000000000000	0,0000000000E+000
1,0500000000000000	1,05732563573	1,05732563574331	-9,187983707E-012
1,1000000000000000	1,11287914887	1,1128791488746	3,6390890301E-012
1,1500000000000000	1,16696722317	1,16696722319009	-1,377342684E-011
1,2000000000000000	1,21983605454	1,21983605455815	-1,174038644E-011
1,2500000000000000	1,27168687184	1,27168687183599	4,801492536E-012
1,3000000000000000	1,32268665978	1,32268665979513	-8,256284544E-012
1,3500000000000000	1,37297578272	1,37297578274345	-2,059930004E-011
1,4000000000000000	1,42267353949	1,42267353950230	-5,676792369E-012
1,4500000000000000	1,47188229828	1,47188229828339	5,4383164638E-012
1,5000000000000000	1,52069063256	1,52069063257455	-8,254952277E-012
1,5500000000000000	1,56917573902	1,56917573904264	-1,900479773E-011

x_i	$u_i^{numerical}$	u_i^{exact}	$u_i^{numerical} - u_i^{exact}$
1,6000000000000000	1,61740532952	1,61740532953246	-6,780798145E-012
1,6500000000000000	1,66543913128	1,66543913128040	3,2989166953E-012
1,7000000000000000	1,71333009078	1,71333009078811	-7,917888567E-012
1,7500000000000000	1,76112535043	1,76112535045067	-1,482725053E-011
1,8000000000000000	1,80886704873	1,80886704873520	-2,779998453E-012
1,8500000000000000	1,85659298177	1,85659298178141	-1,615374500E-012
1,9000000000000000	1,90433715501	1,90433715502271	-6,362910198E-012
1,9500000000000000	1,95213024668	1,95213024667925	6,6588956570E-012
2,0000000000000000	2,0000000000000000	2,0000000000000000	0,0000000000E+000

Векторная норма Чебышева (абсолютная и относительная нормы) невязки задачи в примере (18) равны:

$$\|u^{num} - u^{exact}\|_c = 2,059930004350008E - 011, \frac{\|u^{num} - u^{exact}\|_c}{\|u^{exact}\|_c} = 1,029965002175004E - 011.$$

Замечание 1. Если краевые условия в примере (18) выбрать $u(1) = -1$, $u(2) = -2$, а точное решение задачи $u(x) = -\sqrt{\frac{x^3 + 11x - 6}{6}}$, то программа дает прежнюю векторную норму Чебышева невязки из-за симметрии примера (18) относительно преобразования $(x, u) \rightarrow (x, -u)$.

Поэтому алгоритм, использующий формулы (1), (5), (6), (13), (15), (16), (17) для нелинейной краевой задачи Дирихле с уравнением второго порядка, находит решение для каждой ветви многозначной функции-решения. Если краевые условия для ветвей совпадают, то можно выбрать дополнительное условие, например, значение

функции в середине отрезка $u(c) = u\left(\frac{a+b}{2}\right)$ и включить данное условие в СЛАУ (14), уменьшая при этом на 1 число условий ортогональности невязки ОДУ базисным функциями.

Пример 3.

$$\begin{cases} \cos(u) \cdot u''(x) - \sin(u) u' \cdot u'(x) = 2 = f(x, u), \\ u(0) = 0, u(1) = \pi/6, x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (19)$$

Так как

$$\begin{aligned} (\sin(u))' &= \cos(u)u', (\sin(u))'' = \cos(u)u'' - \sin(u)(u')^2 = 2 \Leftrightarrow \sin(u(x)) = x^2 + C_1x + C_2 \Rightarrow \\ u(x) &= \arcsin(x^2 + C_1x + C_2), \begin{cases} u(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = \arcsin(C_2) \\ u(1) = \pi/6 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 1 + C_1 + C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow C_1 = -\frac{1}{2}, C_2 = 0. \end{aligned}$$

Функция $u(x) = \arcsin\left(x^2 - \frac{x}{2}\right)$ является точным решением задачи (19).

В примере (19) $g_2(x, u, u', u'') = \cos(u)$, $g_1(x, u, u') = -\sin(u)u'$, $g_0(x, u) = 0$, $f(x, u) = 2$. Число интервалов для скалярного произведения двух функций $n_1=120$, число координатных функций $m=17$, число итераций $n_1=30$.

Таблица 3

Численное $u_i^{numerical}$ и точное u_i^{exact} решения задачи (19)

x_i	$u_i^{numerical}$	u_i^{exact}	$u_i^{numerical} - u_i^{exact}$
0,0000000E+000	0,0000000000E+000	0,00000000000E+000	0,00000E+000
4,1666666E-002	-1,90983832E-002	-1,9098383217E-002	-3,18418E-013
8,3333333E-002	-3,47292032E-002	-3,47292030514E-002	-2,030325E-010
0,125000000000	-4,68921831E-002	-4,68921831332E-002	-1,491510E-011
0,166666666666	-5,55841730E-002	-5,5584173280E-002	2,1348351E-010
0,208333333333	-6,08013439E-002	-6,08013437340E-002	-2,052915E-010
0,250000000000	-6,25407621E-002	-6,25407617964E-002	-3,182648E-010

Окончание таблицы 3

x_i	$u_i^{numerical}$	u_i^{exact}	$u_i^{numerical} - u_i^{exact}$
0,291666666666	-6,08013435E-002	-6,0801343734E-002	1,7451315E-010
0,333333333333	-5,55841729E-002	-5,5584173280E-002	3,3926163E-010
0,375000000000	-4,68921832E-002	-4,6892183133E-002	-1,666960E-010
0,416666666666	-3,47292035E-002	-3,47292030514E-002	-5,013826E-010
0,458333333333	-1,90983833E-002	-1,90983832179E-002	-8,629465E-011
0,500000000000	4,30824846E-010	0,00000000000E+000	4,3082484E-010
0,541666666666	2,25713611E-002	2,25713609537E-002	2,0268367E-010
0,583333333333	4,86302760E-002	4,86302764989E-002	-4,379981E-010
0,625000000000	7,82046914E-002	7,82046919347E-002	-4,480854E-010
0,666666666666	0,1113410145	0,111341014340964	2,1420220E-010
0,708333333333	0,1481103594	0,148110359030227	3,9991367E-010
0,750000000000	0,1886163853	0,188616386175404	-2,500614E-010
0,791666666666	0,2330054316	0,233005432127055	-4,563276E-010
0,833333333333	0,2814800734	0,281480073230845	2,1672891E-010
0,875000000000	0,3343179941	0,334317994036368	1,4096033E-010
0,916666666666	0,3918993389	0,391899339315036	-3,222679E-010
0,958333333333	0,4547481928	0,454748192610442	2,4028019E-010
1,000000000000	0,523598775598299	0,523598775598299	2,8514517E-017

Векторная норма Чебышева невязки задачи в примере (19) равна

$$\|u^{num} - u^{exact}\|_c = 5,602360454820782E - 010.$$

Пример 4 (с нелинейным дифференциальным уравнением 3-го порядка).

$$\begin{cases} -\sin(u) \cdot u''(x) - 3 \cos(u) \cdot u' \cdot u''(x) + \sin(u) \cdot (u')^2 \cdot u' = 6 = f(x, u), \\ u(0) = \pi/3, u(1) = \pi/2, u'(1) = 0, x \in [0, 1] \rightarrow u \in [\pi/3, \pi/2]. \end{cases} \quad (20)$$

Так как

$$(\cos(u))' = -\sin(u)u', (\cos(u))'' = -\sin(u)u'' - \cos(u)(u')^2, (\cos(u))''' = -\sin(u)u''' - 3\cos(u)u'u'' + \sin(u)(u')^3,$$

$$\cos(u) = x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3, u(x) = \arccos(x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3),$$

$$(\cos(u))' = -\sin(u)u' = 3x^2 + 2C_1x + C_2, u(0) = \pi/3 \Leftrightarrow \cos(\pi/3) = 1/2 = C_3,$$

$$\begin{cases} u(1) = \pi/2 \Leftrightarrow \cos(\pi/2) = 0 = 1 + C_1 + C_2 + 1/2 \\ u'(1) = 0 = \frac{(3x^2 + 2C_1x + C_2)_{x=1}}{-\sin(u = \pi/2)} \Leftrightarrow 3 + 2C_1 + C_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = -3/2 \\ 2C_1 + C_2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow C_1 = -\frac{3}{2}, C_2 = 0. \end{cases}$$

Функция $u(x) = \arccos\left(x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{2}\right) = \arccos\left(\frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{2}\right)$ является точным решением задачи (20).

Коэффициенты дифференциального уравнения в примере (20) равны $g_3(x, u, u', u'') = -\sin(u)$, $g_2(x, u, u', u'') = -3\cos(u)u'$, $g_1(x, u, u') = \sin(u)(u')^2$, $g_0(x, u) = 0$, $f(x, u) = 6$.

Для уравнения третьего порядка нужно модифицировать формулы алгоритма из работы [5] с учетом индекса итерации:

$$\sum_{j=1}^m a_{i,j}^s D_j^{s+1} = \overline{f_i^s}, i = \overline{0, m-1}. \quad (21)$$

где элементы матрицы $a_{i,j}^s, i = \overline{0, m-1}, j = \overline{1, m}, s = 0, 1, 2, \dots$ и коэффициенты правой части $\overline{f_i^s}$ системы уравнений (21) с учетом нелинейного вида дифференциального оператора L^s , вычисляемого по формуле (1), равны:

$$L^s[u^s(x)] \equiv \left(\sum_{i=0}^n g_i(x, u^s(x), (u'(x))^s, \dots, (u^{(i)}(x))^s) \frac{d^i}{dx^i} \right) u^s(x),$$

$$L^s[\phi_j] = \left(\sum_{i=0}^n g_i(x, u^s(x), (u'(x))^s, \dots, (u^{(i)}(x))^s) \frac{d^i}{dx^i} \right) \phi_j,$$

$$a_{i,j}^s = \begin{cases} \langle L^s \phi_j, \phi_i \rangle, & \text{если } j \equiv 1(\text{mod } 2), i = \overline{0, m-3}, \\ \langle L^s(\phi_j - 1), \phi_i \rangle, & \text{если } j \equiv 0(\text{mod } 2), i = \overline{0, m-3}, \\ 1, & \text{если } i = m-2, j \equiv 1(\text{mod } 2), \\ 0, & \text{если } i = m-2, j \equiv 0(\text{mod } 2), \\ j, & \text{если } i = m-1, \end{cases}$$

$$\overline{f_i^s} = \begin{cases} \left\langle f(x) - L^s\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right), \phi_i(x) \right\rangle, & \text{если } i = \overline{0, m-3}, L^s\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right) = \left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right) g_0(x), \\ \frac{u_n - u_0}{2}, & \text{если } i = m-2, \\ 0, & \text{если } i = m-1. \end{cases}$$

Последняя строка коэффициентов для a_{ij}^s в (21) получена дифференцированием формулы (4), поскольку на правом конце отрезка в примере (20) $u'(b=1) = 0$:

$$(u'(x))^s = \sum_{j=1}^m \phi_j'(x) D_j^s = \sum_{j=1}^m \frac{2j}{(b-a)} \left(\frac{(2x-a-b)}{b-a} \right)^{j-1} D_j^s = 0 \Leftrightarrow D_1^s + 2D_2^s + 3D_3^s + \dots + mD_m^s = 0.$$

Число интервалов для скалярного произведения двух функций в (20) равно $n_1 = 100$, число координатных функций $m = 17$, число итераций $n_1 = 30$.

Таблица 4

Численное $u_i^{numerical}$ и точное u_i^{exact} решения задачи (20)

x_i	$u_i^{numerical}$	u_i^{exact}	$u_i^{numerical} - u_i^{exact}$
0,00000000E+000	1,047197551196	1,047197551196	-3,118165448E-016
5,00000000E-002	1,05137830714	1,051378307162	-1,8182033E-011
0,1000000000000	1,06328930398	1,063289303975	8,411912659E-012
0,1500000000000	1,08193034985	1,081930349812	4,527497062E-011
0,2000000000000	1,10626929727	1,106269297375	-1,03325620E-010
0,2500000000000	1,13528395573	1,135283955730	3,742097994E-012
0,3000000000000	1,16799174328	1,167991743151	1,319257321E-010
0,3500000000000	1,20346614669	1,203466146733	-3,93724372E-011
0,4000000000000	1,24084180881	1,240841808965	-1,47600610E-010
0,4500000000000	1,27931122393	1,279311223897	3,508758333E-011
0,5000000000000	1,31811607179	1,318116071652	1,431814589E-010
0,5500000000000	1,35653572032	1,356535720348	-2,54165034E-011
0,6000000000000	1,39387479319	1,393874793328	-1,33199911E-010
0,6500000000000	1,42945115362	1,429451153606	1,359530738E-011
0,7000000000000	1,46258526518	1,462585265086	1,018387917E-010
0,7500000000000	1,49259163483	1,492591634860	-2,76735182E-011
0,8000000000000	1,51877286350	1,518772863566	-6,40170944E-011
0,8500000000000	1,54041665402	1,540416653986	3,963527726E-011
0,9000000000000	1,55679586942	1,556795869421	-1,078461321E-013
0,9500000000000	1,56717131885	1,567171318855	-3,809447874E-012
1,0000000000000	1,570796326794	1,570796326794	-6,125742274E-017

Векторная норма Чебышева (абсолютная и относительная нормы) невязки задачи в примере (20) равны

$$\|u^{num} - u^{exact}\|_c = 1,522944525480727E - 010, \quad \frac{\|u^{num} - u^{exact}\|_c}{\|u^{exact}\|_c} = 1,454304895709992E - 010.$$

Замечание 2. Отметим, что в системах линейных алгебраических уравнений (14) и (21) для 4-х примеров при вычислении D_f^{s+1} использовалась библиотека линейной алгебры msimsl на языке FORTRAN.

Замечание 3. Сравнение результатов численного решения примеров в данной работе с решениями примеров [4], [5] показывает, что точность решения краевых задач достигается больше 10^{-13} – 10^{-14} , если в формуле скалярного произведения было использовано небольшое число интервалов ($n_1 = 20, 50$ в первом примере данной работы $n_1 = 20$) и ошибка округления не успевала вырасти из-за меньшего числа вычислений. Если число интервалов большое ($n_1 = 100$) во втором, третьем и в четвертом примерах данной работы, то точность вычислений невысокая 10^{-10} из-за роста ошибки округления и влияния ее на общую ошибку.

Обсуждение и заключение. Предложен алгоритм численного решения краевой задачи на отрезке с нелинейным дифференциальным уравнением порядка n модифицированным методом Бубнова-Галеркина. Предположена возможность разложения гладкого решения нелинейной задачи по системе линейно независимых на отрезке $[-1, 1]$ базисных функций с единичной нормой Чебышева. Число базисных функций m больше порядка дифференциального уравнения n . Получены формулы для элементов матрицы и коэффициентов правой части в системе линейных алгебраических уравнений второго и третьего порядков. СЛАУ (14) или (21) решаются последовательно методом простой итерации, число итераций $n_1 = 30$. Доказана теорема — достаточные условия существования и единственности решения краевой задачи с нелинейным ОДУ методом простой итерации.

Аналитически решены четыре нелинейных краевых задачи. Норма Чебышева разности точного и численного решений в решенных примерах имеет порядок 10^{-13} , 10^{-11} , 10^{-10} , 10^{-10} соответственно. Такая точность решения является промежуточной между одинарной 10^{-8} и двойной точностью 10^{-15} , а также сравнима с точностью 10^{-11} решения линейной краевой задачи в работе [4].

Список литературы / References

- Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы: учебное пособие для студентов физико-математических специальностей высших учебных заведений*. Москва: Бином. Лаборатория знаний; 2011. 636 с.
Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Numerical methods: a textbook for students of physics and mathematics specialties of higher educational institutions*. Binom. lab. Knowledge; 2011. 636 p. (In Russ.)
- Ершова Т.Я. Краевая задача для дифференциального уравнения третьего порядка с сильным пограничным слоем. *Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика*. 2020;1:30–39. <https://doi.org/10.3103/S0278641920010057>
- Ershova T.Ya. Boundary value problem for a third-order differential equation with a strong boundary layer. *Bulletin of Moscow University. Episode 15: Computational mathematics and cybernetics*. 2020;1:30–39. (In Russ.) <https://doi.org/10.3103/S0278641920010057>
- Морозова Е.А. Разрешимость краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2010;3(3):46–50.
Morozova E.A. Solvability of a boundary value problem for a system of ordinary differential equations. *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*. 2010;3(3):46–50. (In Russ.)
- Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированный метод Бубнова-Галеркина для решения краевых задач с линейным обыкновенным дифференциальным уравнением. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(3):23–33. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-3-23-33>
- Volosova N.K. et al. Modified Bubnov-Galerkin method for solving boundary value problems with a linear ordinary differential equation. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(3):23–33. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-3-23-33>
- Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Увеличение точности решения краевых задач с линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями методом Бубнова-Галеркина. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):7–18. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-7-18>
- Volosova N.K. et al. Increasing the accuracy of solving boundary value problems with a linear ordinary differential equation using the Bubnov-Galerkin method. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4): 7–18. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-7-18>
- Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. *Численные методы в задачах и упражнениях*. Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний; 2010. 240 с.
Bahvalov N.S., Lapin A.V., Chizhonkov E.V. *Numerical methods in problems and exercises*. M.: BINOM. Knowledge laboratory; 2010. 240 p. (in Russ.)
- Петров А.Г. Высокоточные численные схемы решения плоских краевых задач для полигармонического уравнения и их применение к задачам гидродинамики. *Прикладная математика и механика*. 2023;87(3):343–368. <https://doi.org/10.31857/S0032823523030128>
- Petrov A.G. High-precision numerical schemes for solving plane boundary value problems for a polyharmonic equation and their application to problems of hydrodynamics. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2023;87(3):343–368 (In Russ.) <https://doi.org/10.31857/S0032823523030128>

8. Сухинов А.И., Колгунова О.В., Гирмай М.З., Нахом О.С. Двумерная гидродинамическая модель прибрежных систем, учитывающая испарение. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):9–21. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-9-21>

Sukhinov A.I. et al. A two-dimensional hydrodynamic model of coastal systems, taking into account evaporation. *Computation Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):9–21. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-9-21>

9. Галабурдин А.В. Применение нейронных сетей для решения задач Дирихле для областей сложной формы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):68–79. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-9-21>

Galaburdin A.V. The application of neural networks to solve the problems of a conductor for regions of regional form. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):68–79. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-9-21>

10. Сидорякина В.В., Соломаха Д.А. Симметризованные варианты методов Зейделя и верхней релаксации решения двумерных разностных задач эллиптического типа. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):12–19. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-12-19>

Sidoryakina V.V., Solomaha D.A. Symmetrized versions of the Seidel and upper relaxation methods for solving two-dimensional difference problems of elliptic. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):12–19. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-12-19>

11. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. *Сборник задач по оптимизации: Теория. Примеры. Задачи*. Москва: Физматлит; 2008. 256 с.

Alekseev V.M., Galeev E.M., Tikhomirov V.M. *Collection of optimization problems: Theory. Examples. Problems*. Moscow: Fizmatlit; 2008. 256 p. (In Russ.)

12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. Москва: Физматлит; 2012. 572 с.

Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis. Textbook*. Moscow: Fizmatlit, 2012. 572 p. (In Russ.)

Об авторах:

Наталья Константиновна Волосова, аспирант Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана (105005, Российская Федерация, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, стр. 1), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9151-1111), navalossova@yandex.ru

Константин Александрович Волосов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Российская Федерация, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9151-1111), [SPIN-код](https://spiner.ru/0000-0001-9151-1111), konstantinvolosov@yandex.ru

Александра Константиновна Волосова, кандидат физико-математических наук, начальник аналитического отдела ООО «Трамплин» Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Российская Федерация, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9151-1111), [SPIN-код](https://spiner.ru/0000-0001-9151-1111), alya01@yandex.ru

Михаил Иванович Карлов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Московского физико-технического института (141701, ГСП-4, Российская Федерация, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9), [SPIN-код](https://spiner.ru/0000-0001-9151-1111), karlov.mipt@gmail.com

Дмитрий Феликсович Пастухов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9151-1111), [SPIN-код](https://spiner.ru/0000-0001-9151-1111), dmitrij.pastuhov@mail.ru

Юрий Феликсович Пастухов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9151-1111), [SPIN-код](https://spiner.ru/0000-0001-9151-1111), pulsar1900@mail.ru

Заявленный вклад авторов:

Н.К. Волосова: постановка задачи; формулировка идей исследования, целей и задач.

К.А. Волосов: научное руководство; разработка методологии.

А.К. Волосова: перевод; изучение истории задачи; поиск литературы.

М.И. Карлов: формальный анализ.

Д.Ф. Пастухов: написание черновика рукописи; визуализация; валидация.

Ю.Ф. Пастухов: разработка программного обеспечения; тестирование существующих компонентов кода.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Natalya K. Volosova, Post-graduate Student of Bauman Moscow State Technical University (2nd Baumanskaya St. 5–1, Moscow, 105005, Russian Federation), [ORCID](#), navalosova@yandex.ru

Konstantin A. Volosov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics of the Russian University of Transport (Obraztsova St. 9–9, Moscow, GSP-4, 127994, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), konstantinvolosov@yandex.ru

Aleksandra K. Volosova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Chief Analytical Department “Tramplin” LLC, Russian University of Transport (Obraztsova St. 9–9, Moscow, GSP-4, 127994, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), alya01@yandex.ru

Mikhail I. Karlov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (9, Institutsky Lane, GSP-4, Dolgoprudny, 141701, Russian Federation), [SPIN-code](#), karlov.mipt@gmail.com

Dmitriy F. Pastukhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (Blokhin St. 29, Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), [ORCID](#), [SPIN-code](#), dmitrij.pastuhov@mail.ru

Yuriy F. Pastukhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (Blokhin St. 29, Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), [ORCID](#), [SPIN-code](#), pulsar1900@mail.ru

Contributions of the authors:

N.K. Volosova: ideas; formulation or evolution of overarching research goals and aims.

K.A. Volosov: supervision; methodology.

A.K. Volosova: translation; study of the history of the task; literature.

M.I. Karlov: formal analysis.

D.F. Pastukhov: writing original draft preparation; visualization; validation.

Yu.F. Pastukhov: software; testing of existing code components.

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 17.01.2025

Поступила после рецензирования / Revised 14.02.2025

Принята к публикации / Accepted 04.03.2025

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 519.6

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-20-30>


Достаточные условия сходимости решений линеаризованной задачи к решению исходной нелинейной задачи транспорта многофракционных наносов в зоне мелководья

В.В. Сидорякина

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

✉ cvv9@mail.ru

Аннотация

Введение. Рассматривается пространственно-двумерная модель транспорта наносов многофракционного состава, ориентированная на зоны мелководья. Для описания этого процесса может быть использована начально-краевая задача для параболического уравнения с нелинейными коэффициентами. Ее исследование проводится с помощью линеаризации на временной сетке с шагом τ , при которой нелинейные коэффициенты рассчитываются «с запаздыванием» на предыдущем временном слое. Для линеаризованной задачи транспорта многофракционных наносов ранее были определены условия корректности, построена и исследована консервативная устойчивая разностная схема, численно реализованная для модельных и реальных задач (Азовское море и Таганрогский залив, Цимлянское водохранилище). Однако вопросы сходимости решений линеаризованной задачи к решению исходной нелинейной начально-краевой задачи транспорта многофракционных наносов пока оставались не рассмотренными. Результаты исследований, представленные в данной работе, восполняют этот пробел. Ранее автором совместно с А.И. Сухиновым удалось провести аналогичные исследования для случая, когда фракционный состав наносов не учитывается. Эти исследования легли в основу для получения нового результата.

Материалы и методы. Получение неравенств, гарантирующих сходимость решений цепочки линеаризованных задач к решению исходных нелинейных задач, проводится методом математической индукции с привлечением теории дифференциальных уравнений.

Результаты исследования. Определены условия сходимости решений линеаризованной задачи транспорта наносов многофракционного состава к решению нелинейной задачи в норме банахового пространства L_1 со скоростью $O(\tau)$.

Обсуждение и заключение. Полученные результаты исследования могут быть использованы при прогнозировании нелинейных гидрофизических процессов, повышения их точности и надежности в силу наличия новых функциональных возможностей учета физически важных факторов.

Ключевые слова: пространственно-двумерная модель транспорта наносов, многофракционный состав наносов, зона мелководья, нелинейная задача, линеаризованная задача

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25–11–68060, <https://rscf.ru/project/25-11-68060>

Для цитирования. Сидорякина В.В. Достаточные условия сходимости решений линеаризованной задачи к решению исходной нелинейной задачи транспорта многофракционных наносов в зоне мелководья. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(1):20–30. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-20-30>

Sufficient Conditions for the Convergence of Solutions of the Linearized Problem to the Solution of the Original Nonlinear Problem of Multifractional Sediment Transport in Shallow Water

Valentina V. Sidoryakina 

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

✉ cvv9@mail.ru

Abstract

Introduction. This paper examines a two-dimensional spatial model of multifractional sediment transport, specifically focusing on shallow water zones. This process can be described using an initial-boundary value problem for a parabolic equation with nonlinear coefficients. The study employs a temporal grid linearization method with a step size τ , where nonlinear coefficients are calculated with a “lag” at the previous time layer. Previously, the well-posedness conditions for the linearized sediment transport problem were established, and a conservative and stable finite-difference scheme was developed and analyzed, with numerical implementations for both model and real-world problems (the Sea of Azov, the Taganrog Bay, and the Tsimlyansk Reservoir). However, the convergence of solutions of the linearized problem to the solution of the original nonlinear initial-boundary value problem for multifractional sediment transport had not yet been explored. The research results presented in this paper fill this gap. Earlier, the author, together with A.I. Sukhinov, conducted similar studies in the case where sediment fraction composition was not considered. These studies formed the basis for obtaining new results.

Materials and Methods. The derivation of inequalities guaranteeing the convergence of the solutions of a sequence of linearized problems to the solution of the original nonlinear problem is carried out using the method of mathematical induction, with the application of differential equation theory.

Results. The conditions for the convergence of solutions of the linearized multifractional sediment transport problem to the solution of the nonlinear problem in the Banach space L_1 norm at a rate $O(\tau)$ of are determined.

Discussion and Conclusion. The obtained research results can be used for forecasting nonlinear hydrophysical processes, improving their accuracy and reliability due to the new functional capabilities that account for physically significant factors.

Keywords: two-dimensional spatial sediment transport model, multifractional sediment composition, shallow water zone, nonlinear problem, linearized problem

Funding. This research was supported by a grant from the Russian Science Foundation No. 25–11–68060, <https://rscf.ru/project/25-11-68060>

For Citation. Sidoryakina V.V. Sufficient conditions for the convergence of solutions of the linearized problem to the solution of the original nonlinear problem of transport of multifractional sediments in the shallow water zone. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(1):20–30. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-20-30>

Введение. Одна из важных и сложных проблем в исследовании транспорта донных отложений в зонах мелководья — учет его фракционного состава. Фракционный состав наносов существенно изменяется в зависимости от уклона и морфологического строения дна, глубины, скорости потока, шероховатости донной поверхности и др. Различия фракционного состава определяют характер движения наносов и процессы осадконакопления. Принятие во внимание показателя крупности частиц при математическом моделировании процесса транспортировки наносов дает возможности для построения более точных и определенных прогнозов морфодинамики поверхности дна. В настоящей работе рассматривается нелинейная 2D модель транспорта наносов, учитывающая их фракционный состав [1–4]. Для ее исследования выполнена линеаризация на временной сетке с шагом τ , при которой нелинейные коэффициенты рассчитываются «с запаздыванием» на предыдущем временном слое. Методом математической индукции с привлечением теории дифференциальных уравнений определены достаточные условия сходимости решений линеаризованной задачи к решению исходной нелинейной начально-краевой задачи. Отметим, что проведенные ранее исследования гарантируют корректность ее постановки. Исследование вопросов существования и единственности решений линеаризованной задачи транспорта многофракционных наносов были представлены в работе [3]. В работе [4] показана непрерывная зависимость решений линеаризованной задачи транспорта многофракционных наносов от входных данных задачи. Результаты исследования корректности линеаризованной задачи транспорта наносов, не учитывающей их разнородный фракционный состав, представлены в работах [5–8].

Материалы и методы. Уравнение транспорта наносов, включающих R фракций, запишем в виде:

$$(1 - \tilde{\varepsilon}) \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{r=1}^R \operatorname{div}(V_r k_r \vec{\tau}_b) = \sum_{r=1}^R \operatorname{div} \left(V_r k_r \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H \right) - \sum_{r=1}^R \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r, \quad r = \overline{1, R}, \quad (1)$$

где $H = H(x, y, t)$ — глубина водоема; $\tilde{\varepsilon}$ — усредненная по всем компонентам пористость донных отложений; t — временная переменная, $t \in [0, T]$; V_r — объемная доля r -ой компоненты; $\vec{\tau}_b$ — вектор касательного тангенциально-

го напряжения на дне водоема; $\tau_{bc,r}$ — критическое значение тангенциального напряжения для r -ой компоненты наносов, $\tau_{bc,r} = a_r \sin \varphi_0$, где a_r — некоторый коэффициент для r -ой компоненты наносов, φ_0 — угол естественного откоса грунта в водоеме; w — компонента по вертикали вектора $\vec{U}$ скорости движения водной среды; $w_{g,r}$ — гидравлическая крупность или скорость осаждения r -ой компоненты; ρ_r — плотность r -ой компоненты донного материала; c_r — концентрация r -ой фракции взвеси; k_r — коэффициент, определяемый соотношением:

$$k_r = k_r(H, x, y, t) = \frac{A \tilde{\omega} d_r}{((\rho_r - \rho_0) g d_r)^\beta} \left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \text{grad} H \right|^{\beta-1},$$

($\tilde{\omega}$ — усредненная частота волн; d_r — характерный размер r -ой компоненты; g — ускорение силы тяжести; ρ_0 — плотность водной среды; A и β — безразмерные постоянные),

$$k_r \geq k_{0,r} = \text{const} > 0, \forall (x, y) \in \bar{G}, r = \overline{1, R}, 0 < t \leq T.$$

Считаем, что $\Pi_T = G \times (0, T)$ есть область задания уравнения (1). Пусть процесс транспорта наносов происходит в области с границей Γ , представляющей кусочно-гладкую линию. Граница этого цилиндра состоит из боковой поверхности $\Gamma \times [0, T]$ и двух оснований — $\bar{G} \times \{0\}$ и $\bar{G} \times \{T\}$.

Уравнение (1) рассматривается в области $G(x, y) = \{0 < x < L_x, 0 < y < L_y\}$ (рис. 1).

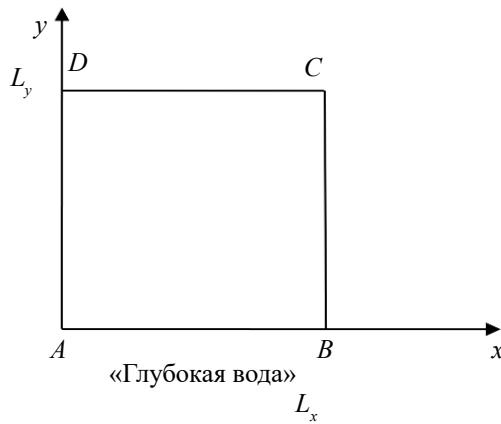


Рис. 1. Расчетная область

Дополним уравнение (1) начальными и граничными условиями:

$$H(x, y, 0) = H_0(x, y), \quad H_0(x, y) \in C^2(G) \cap C(\bar{G}), \quad (2)$$

$$AD: H(0, y, t) = H_1(y, t), \quad (3)$$

$$BC: H(L_x, y, t) = H_2(y, t), \quad (4)$$

$$AB: H(x, 0, t) = H_3(x), \quad (5)$$

$$CD: H(x, L'_y, t) = H_4(x, t) \geq c_0 \equiv \text{const} > 0, \quad L'_y < L_y. \quad (6)$$

Дополнительно предполагаем:

$$AB: |\vec{\tau}_b| = 0, \quad (7)$$

$$\text{grad}_{(x,y)} H \in C(\bar{\Pi}_T) \cap C^1(\Pi_T), \quad \text{grad}_{(x,y)} H_0 \in C(\bar{G}), \quad (8)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = 0, \quad (9)$$

$$k_r \geq k_{0,r} = \text{const} > 0, \quad \forall (x, y) \in \bar{G}. \quad (10)$$

$$\vec{\tau}_b = \tau_{bx} \vec{i} + \tau_{by} \vec{j}, \quad |\tau_{bx}| \leq c_1, \quad |\tau_{by}| \leq c_2, \quad c_1 = \text{const}, \quad c_2 = \text{const}. \quad (11)$$

Условие

$$H(x, y, t) \geq c_0 \equiv \text{const} > 0, \quad 0 \leq x \leq L_x, \quad 0 \leq y \leq L'_y, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (12)$$

гарантирует, что не возникает осушения области рассмотрения задачи.

Линеаризация задачи (1)–(6) выполнена на временной сетке:

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N_t, \quad N_t \tau = T\},$$

методами, изложенными в работах [5–10].

После линеаризации уравнение (1) и начальные условия (2) записываются в виде:

$$(1-\tilde{\varepsilon})\frac{\partial H^{(n)}}{\partial t} = \sum_{r=1}^R \operatorname{div} \left(V_r k_r^{(n-1)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H^{(n)} \right) - \sum_{r=1}^R \operatorname{div} (V_r k_r^{(n-1)} \vec{\tau}_b) - \sum_{r=1}^R \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r, \quad (13)$$

$$r = \overline{1, R}, \quad t_{n-1} < t \leq t_n, \quad n = 1, 2, \dots, N_t,$$

$$H^{(1)}(x, y, t_0) = H_0(x, y), \quad H^{(n)}(x, y, t_{n-1}) = H^{(n-1)}(x, y, t_{n-1}), \quad (x, y) \in \bar{G}, \quad n = 2, \dots, N. \quad (14)$$

Коэффициент $k_r^{(n-1)}$ в уравнении (14) определяется равенством:

$$k_r^{(n-1)} = k_r^{(n-1)}(H^{(n-1)}, x, y, t) = \frac{A\tilde{\omega}d_r}{((\rho_r - \rho_0)gd_r)^\beta} \left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H^{(n-1)}(x, y, t_{n-1}) \right|^{\beta-1}.$$

Результаты исследования. Покажем, что решение задачи (13), (14), (3)–(6) стремится к решению нелинейной задачи (1)–(6) в норме пространства $L_1(G \times [0, T])$ при $\tau \rightarrow 0$, $N\tau = T$.

Обозначим решение нелинейной задачи $H_{np}(x, y, t)$, $(x, y) \in \bar{G}$, а решение линеаризованной задачи — $H_{lp}(x, y, t)$, $(x, y) \in \bar{G}$. Отметим, что для каждого временного слоя определяется своя функция решения $H_{lp} = (x, y, t)$ и в целом для линеаризованной задачи строится семейство решений — $\{H_{lp}^{(n)}(x, y, t)\}$, $n = 1, 2, \dots, N$, зависящее от параметра τ .

Предполагаем, что:

1. функция $H_{np} = (x, y, t)$ ограничена на промежутке $0 < t \leq T$;
2. существуют и ограничены производные:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\operatorname{grad} \left(\frac{\partial H_{np}}{\partial t} \right) \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\operatorname{grad} \left(\frac{\partial H_{np}}{\partial t} \right) \right), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\operatorname{grad} \left(\frac{\partial H_{lp}}{\partial t} \right) \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\operatorname{grad} \left(\frac{\partial H_{lp}}{\partial t} \right) \right);$$

3. ограничено выражение $\frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r$.

Подставим функцию $H_{np} = (x, y, t)$ в уравнение (1), а функцию $H_{lp} = (x, y, t)$ — в уравнение (12). Получим:

$$(1-\tilde{\varepsilon})\frac{\partial H_{np}}{\partial t} = \sum_{r=1}^R \operatorname{div} \left(V_r k_{np,r} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{np} \right) - \sum_{r=1}^R \operatorname{div} (V_r k_{np,r} \vec{\tau}_b) - \sum_{r=1}^R \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r, \quad r = \overline{1, R}, \quad (15)$$

$$(1-\tilde{\varepsilon})\frac{\partial H_{lp}^{(n)}}{\partial t} = \sum_{r=1}^R \operatorname{div} \left(V_r k_{lp,r}^{(n-1)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{lp}^{(n)} \right) - \sum_{r=1}^R \operatorname{div} (V_r k_{lp,r}^{(n-1)} \vec{\tau}_b) - \sum_{r=1}^R \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r, \quad (16)$$

$$r = \overline{1, R}, \quad t_{n-1} < t \leq t_n, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

где

$$k_{np,r} = k_{np,r}(H_{np}, x, y, t) = \frac{A\tilde{\omega}d_r}{((\rho_r - \rho_0)gd_r)^\beta} \left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{np}(x, y, t) \right|^{\beta-1},$$

$$k_{lp,r}^{(n-1)} = k_{lp,r}^{(n-1)}(H_{lp}^{(n-1)}, x, y, t) = \frac{A\tilde{\omega}d_r}{((\rho_r - \rho_0)gd_r)^\beta} \left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{lp}^{(n-1)}(x, y, t) \right|^{\beta-1}.$$

Умножим обе части уравнения (15) и (16) на функции $H_{np}(x, y, t)$, $H_{lp}^{(n)} = H_{lp}^{(n)}(x, y, t)$, $(x, y) \in \bar{G}$, соответственно. После интегрирования полученных выражений по переменным t , $0 < t \leq T$ и (x, y) в области G и выполнения несложных преобразований можем записать:

$$\frac{1}{2}(1-\tilde{\varepsilon}) \iint_G (H_{np}^2(x, y, T) - H_{np}^2(x, y, 0)) dx dy = \sum_{r=1}^R \int_0^T \left(\iint_G H_{np} \operatorname{div} \left(V_r k_{np,r} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{np} \right) dx dy \right) dt - \sum_{r=1}^R \int_0^T \left(\iint_G H_{np} \operatorname{div} (V_r k_{np,r} \vec{\tau}_b) dx dy \right) dt - \sum_{r=1}^R \int_0^T \left(\iint_G H_{np} \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r dx dy \right) dt, \quad (17)$$

$$(1-\tilde{\varepsilon}) \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \frac{\partial H_{lp}^{(n)}}{\partial t} dx dy \right) dt = \sum_{r=1}^R \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} \left(V_r k_{lp,r}^{(n-1)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{lp}^{(n)} \right) dx dy \right) dt - \sum_{r=1}^R \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} (V_r k_{lp,r}^{(n-1)} \vec{\tau}_b) dx dy \right) dt - \sum_{r=1}^R \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r dx dy \right) dt, \quad r = \overline{1, R}. \quad (18)$$

Просуммировав обе части соотношения (18) по n , $n = 1, \dots, N$, находим

$$(1 - \tilde{\varepsilon}) \iint_G \left(\sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}}^{t_n} H_{lp}^{(n)} \frac{\partial H_{lp}}{\partial t} dt \right) dx dy = \sum_{r=1}^R \sum_{n=1}^N \left[\int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} \left(V_r k_{lp,r}^{(n-1)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{lp}^{(n)} \right) dx dy \right) dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} \left(V_r k_{lp,r}^{(n-1)} \vec{\tau}_b \right) dx dy \right) dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r dx dy \right) dt \right]. \quad (19)$$

Преобразуя левую часть равенства (19), запишем

$$\frac{1}{2} (1 - \tilde{\varepsilon}) \iint_G \left(H_{lp}^2(x, y, T) - H_{lp}^2(x, y, 0) \right) dx dy = \sum_{r=1}^R \sum_{n=1}^N \left[\int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} \left(V_r k_{lp,r}^{(n-1)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{lp}^{(n)} \right) dx dy \right) dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} \left(V_r k_{lp,r}^{(n-1)} \vec{\tau}_b \right) dx dy \right) dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r dx dy \right) dt \right]. \quad (20)$$

Вычитая из равенства (17) выражение (20) и учитывая, что $H_{np} = (x, y, t) = H_{lp} = (x, y, t)$, $H_{lp} = (x, y, t) = H_{lp}^{(0)}$ получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (1 - \tilde{\varepsilon}) \iint_G \left(H_{np}^2(x, y, T) - H_{lp}^2(x, y, T) \right) dx dy = \\ & = \sum_{r=1}^R \int_0^T \left(\iint_G H_{np} \operatorname{div} \left(V_r k_{np,r} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{np} \right) dx dy \right) dt - \sum_{r=1}^R \int_0^T \left(\iint_G H_{np} \operatorname{div} \left(V_r k_{np,r} \vec{\tau}_b \right) dx dy \right) dt - \\ & - \sum_{r=1}^R \int_0^T \left(\iint_G H_{np} \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r dx dy \right) dt - \sum_{r=1}^R \sum_{n=1}^N \left[\int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} \left(V_r k_{lp,r}^{(n-1)} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{lp}^{(n)} \right) dx dy \right) dt + \right. \\ & \left. + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} \left(V_r k_{lp,r}^{(n-1)} \vec{\tau}_b \right) dx dy \right) dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r dx dy \right) dt \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Выполним преобразования правой части равенства (21). С этой целью добавим, а затем вычтем выражения

$H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} \left(V_r k_{np,r} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{np} \right)$, $H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} \left(V_r k_{np,r} \vec{\tau}_b \right)$ под знаком интеграла соответственно в четвертом и пятом слагаемом правой части равенства (21).

Комбинируя слагаемые, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (1 - \tilde{\varepsilon}) \iint_G \left(H_{np}^2(x, y, T) - H_{lp}^2(x, y, T) \right) dx dy = \\ & = \sum_{r=1}^R \sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left[\left(\iint_G (H_{np} - H_{lp}^{(n)}) \operatorname{div} \left(V_r k_{np,r} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{np} \right) dx dy \right) + \iint_G H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} \left(V_r \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \cdot \right. \right. \\ & \cdot (k_{np,r} \operatorname{grad} H_{np} - k_{lp,r}^{(n-1)} \operatorname{grad} H_{lp}^{(n)}) dx dy + \iint_G (H_{lp}^{(n)} - H_{np}) \operatorname{div} \left(V_r k_{np,r} \vec{\tau}_b \right) dx dy + \\ & \left. \left. + \iint_G H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} \left(V_r (k_{lp,r}^{(n-1)} - k_{np,r}) \vec{\tau}_b \right) dx dy + \iint_G (H_{lp}^{(n)} - H_{np}) \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r dx dy \right) dt. \right] \end{aligned} \quad (22)$$

Оценим каждый из интегралов, стоящих в правой части равенства (22) под знаком суммы. Для этих целей используем рассуждения, подробно описанные в работе [9].

Введем обозначения:

$$I_{1,r}^n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G (H_{np} - H_{lp}^{(n)}) \operatorname{div} \left(V_r k_{np,r} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{np} \right) dx dy \right) dt, \quad (23)$$

$$I_{2,r}^n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} \left(V_r \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} (k_{np,r} \operatorname{grad} H_{np} - k_{lp,r}^{(n-1)} \operatorname{grad} H_{lp}^{(n)}) \right) dx dy \right) dt, \quad (24)$$

$$I_{3,r}^n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G (H_{lp}^{(n)} - H_{np}) \operatorname{div} \left(V_r k_{np,r} \vec{\tau}_b \right) dx dy \right) dt, \quad (25)$$

$$I_{4,r}^n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G H_{lp}^{(n)} \operatorname{div} \left(V_r (k_{lp,r}^{(n-1)} - k_{np,r}) \vec{\tau}_b \right) dx dy \right) dt, \quad (26)$$

$$I_{5,r}^n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G (H_{lp}^{(n)} - H_{np}) \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r dx dy \right) dt, \quad n = 1, \dots, N. \quad (27)$$

При $n = 1$ для интегралов (23)–(27), находим:

$$\begin{aligned} I_{1,r}^1 &\leq \frac{1}{2} \tau^2 L_x L_y M_{1,r}^1, \quad I_{2,r}^1 \leq \frac{1}{2} \tau^2 M_{2,r}^1 L_x L_y, \quad I_{3,r}^1 \leq \frac{1}{2} \tau^2 L_x L_y M_{3,r}^1, \\ I_{4,r}^1 &\leq \frac{1}{2} \tau^2 M_{4,r}^1 L_x L_y, \quad I_{5,r}^1 \leq \frac{1}{2} \tau^2 L_x L_y M_{5,r}^1, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} M_{1,r}^1 &\equiv \max_{t_0 \leq t \leq t_1} \left\{ \max_{(x,y) \in \bar{G}} \left| \left(\frac{\partial H_{np}}{\partial t}(x,y,\xi_1) - \frac{\partial H_{lp}^{(1)}}{\partial t}(x,y,\xi_2) \right) \operatorname{div} \left(V_r k_{np,r} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{np} \right) \right| \right\}, \\ M_{2,r}^1 &\equiv \max_{t_0 \leq t \leq t_1} \left\{ \max_{(x,y) \in \bar{G}} \left| H_{lp}^{(1)} \operatorname{div} \left(V_r \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \left(\frac{\partial k_{np,r}}{\partial t}(x,y,\xi_3) \operatorname{grad} H_{np} + k_{lp,r}^{(0)} \operatorname{grad} \frac{\partial H_{np}}{\partial t}(x,y,\xi_4) \right) \right) \right| \right\}, \\ M_{3,r}^1 &\equiv \max_{t_0 \leq t \leq t_1} \left\{ \max_{(x,y) \in \bar{G}} \left| \left(\frac{\partial H_{lp}^{(1)}}{\partial t}(x,y,\xi_5) - \frac{\partial H_{np}}{\partial t}(x,y,\xi_6) \right) \operatorname{div} (V_r k_{np,r} \vec{\tau}_b) \right| \right\}, \\ M_{4,r}^1 &\equiv \max_{t_0 \leq t \leq t_1} \left\{ \max_{(x,y) \in \bar{G}} \left| H_{lp}^{(1)} \operatorname{div} \left(V_r \left(-\frac{\partial k_{np,r}}{\partial t}(x,y,\xi_7) \right) \vec{\tau}_b \right) \right| \right\}, \\ M_{5,r}^1 &\equiv \max_{t_0 \leq t \leq t_1} \left\{ \max_{(x,y) \in \bar{G}} \left| \left(\frac{\partial H_{lp}^{(1)}}{\partial t}(x,y,\xi_5) - \frac{\partial H_{np}}{\partial t}(x,y,\xi_6) \right) \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r \right| \right\}, \\ t_0 &< \xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \xi_4, \quad \xi_5, \quad \xi_6, \quad \xi_7 \leq t_1, \quad t_0 < t \leq t_1. \end{aligned}$$

Учитывая полученные оценки (28) и пользуясь неравенством многоугольника для модулей величин, получаем неравенство вида:

$$\iint_G (H_{np}^2(x,y,t_1) - H_{lp}^{(1)2}(x,y,t_1)) dx dy \leq \tau^2 L_x L_y \sum_{r=1}^R M_{1,r}^*, \quad (29)$$

где

$$M_{1,r}^* = \frac{1}{1 - \varepsilon} (M_{1,r}^1 + M_{2,r}^1 + M_{3,r}^1 + M_{4,r}^1 + M_{5,r}^1).$$

Меняя местами функции $H_{np}^2(x,y,t_1)$ и $H_{lp}^{(1)2}(x,y,t_1)$ проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше, можно получить оценку:

$$\iint_G (H_{lp}^{(1)2}(x,y,t_1) - H_{np}^2(x,y,t_1)) dx dy \leq \tau^2 L_x L_y \sum_{r=1}^R M_{1,r}^*. \quad (30)$$

Из неравенств (29) и (30) следует неравенство:

$$\iint_G |H_{lp}^{(1)2}(x,y,t_1) - H_{np}^2(x,y,t_1)| dx dy \leq \tau^2 L_x L_y \sum_{r=1}^R M_{1,r}^*. \quad (31)$$

Преобразуем левую часть неравенства (31):

$$\begin{aligned} \iint_G |H_{lp}^{(1)2}(x,y,t_1) - H_{np}^2(x,y,t_1)| dx dy &= \iint_G |H_{lp}^{(1)}(x,y,t_1) - H_{np}(x,y,t_1)| \cdot \\ &\cdot |H_{lp}^{(1)}(x,y,t_1) + H_{np}(x,y,t_1)| dx dy. \end{aligned} \quad (32)$$

Далее будем предполагать, что неравенство вида (12) выполняется для функций $H_{np} = (x,y,t)$ и $H_{lp}^{(1)}$, т. е.

$$H_{np}(x,y,t) \geq c_0 > 0, \quad (x,y) \in \bar{G}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (33)$$

$$H_{lp}^{(1)}(x,y,t) \geq c_0 > 0, \quad (x,y) \in \bar{G}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (34)$$

С учетом выражений (33)–(34) находим:

$$\iint_G |H_{lp}^{(1)2}(x,y,t_1) - H_{np}^2(x,y,t_1)| dx dy \geq 2c_0 \iint_G |H_{lp}^{(1)}(x,y,t_1) - H_{np}(x,y,t_1)| dx dy. \quad (35)$$

Из соотношений (31), (32) и (35) следует следующая оценка:

$$\iint_G \left| H_{lp}^{(1)}(x, y, t_1) - H_{np}(x, y, t_1) \right| dx dy \leq \frac{1}{2c_0} \tau^2 L_x L_y \sum_{r=1}^R M_{1,r}^*. \quad (36)$$

Требуемая оценка для $n = 1$ получена, т. к. неравенство (36) эквивалентно соотношению вида:

$$\left\| H_{lp}^{(1)}(x, y, t_1) - H_{np}(x, y, t_1) \right\|_{L_1(G \times [t_0, t_1])} \leq \frac{1}{2c_0} \tau^2 L_x L_y \sum_{r=1}^R M_{1,r}^*, \quad (37)$$

где

$$\|Q(x, y, t)\|_{L_1(G \times [t_0, t_1])} \equiv \int_{t_0}^{t_1} \left(\iint_G |Q(x, y, t)| dx dy \right) dt.$$

При $n = 2$ для интегралов (23)–(27), находим:

$$\begin{aligned} I_{1,r}^2 &\leq \frac{1}{2} \tau^2 L_x L_y \left(\frac{1}{c_0} \tau M_{1,r}^* M_{1,r}^2 + M_{2,r}^2 \right), \quad I_{2,r}^2 \leq \frac{1}{2} \tau^2 L_x L_y M_{3,r}^2 M_{4,r}^2, \quad I_{3,r}^2 \leq \frac{1}{2} \tau^2 L_x L_y \left(\frac{1}{c_0} \tau M_{1,r}^* M_{5,r}^2 + M_{6,r}^2 \right), \\ I_{4,r}^2 &\leq \frac{1}{2} \tau^2 L_x L_y M_{3,r}^2 M_{7,r}^2, \quad I_{5,r}^2 \leq \frac{1}{2} \tau^2 L_x L_y \left(\frac{1}{c_0} \tau M_{1,r}^* M_{8,r}^2 + M_{9,r}^2 \right), \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} M_{1,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{(x,y) \in G} \left| \operatorname{div} \left(V_r k_{np,r} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{np} \right) \right| \right\}, \\ M_{2,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{(x,y) \in G} \left| \left(\frac{\partial H_{np}(x, y, \xi_1)}{\partial t} - \frac{\partial H_{lp}^{(2)}(x, y, \xi_2)}{\partial t} \right) \operatorname{div} \left(V_r k_{np,r} \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H_{np} \right) \right| \right\}, \\ M_{3,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{(x,y) \in G} \left| H_{lp}^{(2)} \right| \right\}, \\ M_{4,r}^2 &= M_{21,r}^2 + M_{22,r}^2 + M_{23,r}^2 + M_{24,r}^2 + M_{25,r}^2 + M_{26,r}^2, \\ M_{5,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{(x,y) \in G} \left| \operatorname{div} (V_r k_{np,r} \vec{\tau}_b) \right| \right\}, \\ M_{6,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{(x,y) \in G} \left| \left(\frac{\partial H_{np}(x, y, \xi_1)}{\partial t} - \frac{\partial H_{lp}^{(2)}(x, y, \xi_2)}{\partial t} \right) \operatorname{div} (V_r k_{np,r} \vec{\tau}_b) \right| \right\}, \\ M_{7,r}^2 &= M_{31,r}^2 + M_{32,r}^2 + M_{33,r}^2, \\ M_{8,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{(x,y) \in G} \left| \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r \right| \right\}, \\ M_{9,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{(x,y) \in G} \left| \left(\frac{\partial H_{np}(x, y, \xi_1)}{\partial t} - \frac{\partial H_{lp}^{(2)}(x, y, \xi_2)}{\partial t} \right) \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r} c_r \right| \right\}, \\ M_{7,r}^2 &= M_{31,r}^2 + M_{32,r}^2 + M_{33,r}^2, \\ M_{11,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{x \in BC} \left| \tau_{bx} \frac{\partial H_2(y, t)}{\partial x} + \tau_{bx}^{(1)} \frac{\partial H_2(y, t_1)}{\partial x} \right| \right\}, \quad M_{12,r}^2 \equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{y \in BC} \left| \tau_{by} \frac{\partial H_2(y, t)}{\partial y} + \tau_{by}^{(1)} \frac{\partial H_2(y, t_1)}{\partial y} \right| \right\}, \\ M_{13,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{x \in CD} \left| \frac{\partial H_4(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial H_4(x, t_1)}{\partial x} \right| \right\}, \quad M_{14,r}^2 \equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{x \in CD} \left| \frac{\partial H_4(x, t)}{\partial y} + \frac{\partial H_4(x, t_1)}{\partial y} \right| \right\}, \\ M_{15,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{x \in AD} \left| \frac{\partial H_1(y, t)}{\partial x} + \frac{\partial H_1(y, t_1)}{\partial x} \right| \right\}, \quad M_{16,r}^2 \equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{y \in AD} \left| \frac{\partial H_1(y, t)}{\partial y} + \frac{\partial H_1(y, t_1)}{\partial y} \right| \right\}, \\ M_{21,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{y \in BC} \left| V_r \frac{\tau_{bc,r}^2}{\sin^2 \varphi_0} \frac{A \tilde{\omega} d_r}{((\rho_r - \rho_0) g d_r)^3} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_2(y, \xi_4)}{\partial t} \right) \left(\frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} M_{11,r}^2 - 2 \tau_{bx} \right) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_2(y, \xi_4)}{\partial t} \right) \left(\frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} M_{12,r}^2 - 2 \tau_{by} \right) \right] \frac{\partial H_2(y, t_1)}{\partial x} \right| \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{22,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{y \in BC} \left| k_{np,r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_2(y, \xi_4)}{\partial t} \right) \right| \right\}, \\
 M_{23,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{x \in CD} \left| V_r \frac{\tau_{bc,r}^2}{\sin^2 \varphi_0} \frac{A\tilde{\omega}d_r}{((\rho_r - \rho_0)gd_r)^3} (t - t_1) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_4(x, \xi_5)}{\partial t} \right) \left(\frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} M_{13,r}^2 - 2\tau_{bx} \right) + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_4(x, \xi_5)}{\partial t} \right) \left(\frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} M_{14,r}^2 - 2\tau_{by} \right) \right] \frac{\partial H_4(x, t_1)}{\partial y} \right\}, \\
 M_{24,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{x \in CD} \left| k_{np,r} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_4(x, \xi_5)}{\partial t} \right) \right| \right\}, \\
 M_{25,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{y \in AD} \left| V_r \frac{\tau_{bc,r}^2}{\sin^2 \varphi_0} \frac{A\tilde{\omega}d_r}{((\rho_r - \rho_0)gd_r)^3} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_1(y, \xi_3)}{\partial t} \right) \left(\frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} M_{15,r}^2 - 2\tau_{bx} \right) + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_1(y, \xi_3)}{\partial t} \right) \left(\frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} M_{16,r}^2 - 2\tau_{by} \right) \right] \frac{\partial H_1(y, t_1)}{\partial x} \right\}, \\
 M_{26,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{y \in AD} \left| k_{np,r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_1(y, \xi_3)}{\partial t} \right) \right| \right\}, \\
 M_{31,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{y \in BC} \left| V_r \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \frac{A\tilde{\omega}d_r}{((\rho_r - \rho_0)gd_r)^3} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_2(y, \xi_4)}{\partial t} \right) \left(2\tau_{bx} - \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} M_{11,r}^2 \right) + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_2(y, \xi_4)}{\partial t} \right) \left(2\tau_{by} - \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} M_{12,r}^2 \right) \right] \tau_{bx} \right\}, \\
 M_{32,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{x \in CD} \left| V_r \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \frac{A\tilde{\omega}d_r}{((\rho_r - \rho_0)gd_r)^3} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_4(x, \xi_5)}{\partial t} \right) \left(2\tau_{bx} - \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} M_{13,r}^2 \right) + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_4(x, \xi_5)}{\partial t} \right) \left(2\tau_{by} - \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} M_{14,r}^2 \right) \right] \tau_{by} \right\}, \\
 M_{33,r}^2 &\equiv \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \max_{y \in AD} \left| V_r \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} \frac{A\tilde{\omega}d_r}{((\rho_r - \rho_0)gd_r)^3} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_1(y, \xi_3)}{\partial t} \right) \left(2\tau_{bx} - \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} M_{15,r}^2 \right) + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_1(y, \xi_3)}{\partial t} \right) \left(2\tau_{by} - \frac{\tau_{bc,r}}{\sin \varphi_0} M_{16,r}^2 \right) \right] \tau_{by} \right\}, \\
 &\quad t_1 < \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5 \leq t_2, \quad t_1 < t \leq t_2.
 \end{aligned}$$

Итак, используя оценки (38), получаем:

$$\iint_G \left| H_{np}^2(x, y, t_2) - H_{lp}^{(2)}(x, y, t_2) \right| dx dy \leq \tau^2 L_x L_y \sum_{j=1}^R (M_{01,r}^2 + \tau M_{02,r}^2), \quad (39)$$

где

$$M_{r,01}^2 = \frac{1}{1 - \tilde{\varepsilon}} (M_{r,2}^2 + M_{r,6}^2 + M_{r,9}^2 + M_3^2 (M_{r,4}^2 + M_{r,7}^2)),$$

$$M_{r,02}^2 = \frac{1}{(1 - \tilde{\varepsilon})c_0} M_{r,1}^* (M_{r,1}^2 + M_{r,5}^2 + M_{r,8}^2).$$

Из неравенства (39) можно перейти к следующей оценке:

$$\left\| H_{lp}^{(2)}(x, y, t_2) - H_{np}(x, y, t_2) \right\|_{L_1(G \times [t_1, t_2])} \leq \frac{1}{2c_0} \tau^2 L_x L_y (1 + \tau) \sum_{r=1}^R M_{2,r}^*, \quad (40)$$

где

$$M_{2,r}^* = \max_{(x,y) \in G} \{ M_{01,r}^2; M_{02,r}^2 \},$$

$$\|Q(x, y, t)\|_{L_1(G \times [t_1, t_2])} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left(\iint_G |Q(x, y, t)| dx dy \right) dt.$$

Требуемая оценка для $n = 2$ получена. Выполнен первый шаг индукции.

Далее предполагаем, что при $n = s$ верна оценка:

$$\left\| H_{lp}^{(s)}(x, y, t_s) - H_{np}(x, y, t_s) \right\|_{L_1(G \times [t_{s-1}, t_s])} \leq \frac{1}{2c_0} \tau^2 L_x L_y \frac{1 - \tau^s}{1 - \tau} \sum_{r=1}^R M_{s,r}^*, \quad (41)$$

где $M_{s,r}^*$ — некоторая постоянная функция.

При $n = s + 1$ в (23)–(27) рассматриваются интегралы по временному интервалу $t_s < t \leq t_{s+1}$. Проводя оценки указанных интегралов с учетом (41) на предыдущем временном слое, получаем неравенство:

$$\iint_G |H_{lp}^2(x, y, t_{s+1}) - H_{np}^2(x, y, t_{s+1})| dx dy \leq \tau^2 L_x L_y \sum_{r=1}^R (M_{01,r}^{s+1} + \tau M_{02,r}^{s+1} + \dots + \tau^s M_{0s+1,r}^{s+1}) \quad (42)$$

с постоянными величинами $M_{01,r}^{s+1}, M_{02,r}^{s+1}, \dots, M_{0s+1,r}^{s+1}$, зависящими от модулей производных.

Используя неравенство (42), приходим к оценке

$$\left\| H_{lp}(x, y, t_{s+1}) - H_{np}(x, y, t_{s+1}) \right\|_{L_1(G \times [t_s, t_{s+1}])} \leq \frac{1}{2c_0} \tau^2 L_x L_y \frac{1 - \tau^{s+1}}{1 - \tau} \sum_{r=1}^R M_{s+1,r}^*, \quad (43)$$

где

$$M_{s+1,r}^* = \max_{(x,y) \in G} \{ M_{01,r}^{s+1}; M_{02,r}^{s+1}; \dots; M_{0s+1,r}^{s+1} \},$$

$$\|Q(x, y, t)\|_{L_1(G \times [t_s, t_{s+1}])} \equiv \int_{t_s}^{t_{s+1}} \left(\iint_G |Q(x, y, t)| dx dy \right) dt.$$

Выполнен индукционный переход, позволяющий говорить о верности утверждения для любого s , $1 < s \leq N$.

Используя оценки (37), (40) и (43) из формулы (22), находим:

$$\begin{aligned} \left\| H_{lp}(T) - H_{np}(T) \right\|_{L_1(G \times [0, T])} &\leq \frac{1}{2c_0(1 - \tau)} \tau^2 L_x L_y C ((1 - \tau) + (1 - \tau^2) + \dots + (1 - \tau^{N+1})) \leq \\ &\leq \frac{1}{2c_0(1 - \tau)} \tau^2 L_x L_y C \left[N + 1 - \frac{\tau - \tau^{N+2}}{1 - \tau} \right], \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$C \equiv \max_{(x,y) \in G} \left\{ \sum_{r=1}^R M_{1,r}^*, \sum_{r=1}^R M_{2,r}^*, \dots, \sum_{r=1}^R M_{s+1,r}^* \right\},$$

$$\|Q(x, y, t)\|_{L_1(G \times [0, T])} \equiv \int_0^T \left(\iint_G |Q(x, y, t)| dx dy \right) dt = \sum_{n=1}^N \left[\int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\iint_G |Q(x, y, t)| dx dy \right) dt \right].$$

Поскольку $N\tau \equiv T \equiv const$, то из неравенства (44) получаем

$$\left\| H_{lp}(T) - H_{np}(T) \right\|_{L_1(G \times [0, T])} = O(\tau), \quad (45)$$

что и завершает исследование сходимости линеаризованной задачи к решению исходной нелинейной задачи.

Обсуждение и заключение. Определены условия сходимости решений линеаризованной задачи транспорта наносов многофракционного состава к решению нелинейной задачи в норме банахового пространства L_1 со скоростью $O(\tau)$. Полученные результаты исследования могут быть использованы при прогнозировании нелинейных гидрофизических процессов, повышения их точности и надежности в силу наличия новых функциональных возможностей учета физически важных факторов.

Список литературы / References

1. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Sidoryakina V.V. Parallel Solution of Sediment and Suspension Transportation Problems on the Basis of Explicit Schemes. *Communications in Computer and Information Science*. 2018;910:306–321. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99673-8_22

2. Сухинов А.И., Сидорякина В.В. Математическая нелинейная пространственно-двумерная модель транспорта многокомпонентных наносов в мелководных водоемах и ее линеаризация. *Вестник Таганрогского института имени А.П. Чехова*. 2018;2:242–245.
- Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V. Mathematical nonlinear spatial-two-dimensional model of multicomponent sediment transport in shallow water bodies and its linearization. *Bulletin of the Taganrog Institute named after A.P. Chekhov*. 2018;2:242–245. (In Russ.)
3. Сидорякина В.В. Существование и единственность решения начально-краевой задачи транспорта многокомпонентных наносов прибрежных морских систем. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):73–80. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-73-80>
- Sidoryakina V.V. Existence and uniqueness of the solution of the initial-boundary value problem of transport of multicomponent sediments of coastal marine systems. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):73–80. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-73-80>
4. Сидорякина В.В. Непрерывная зависимость решений линеаризованной начально-краевой задачи транспорта многокомпонентных наносов от входных данных задачи. *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*. 2024;1(221):30–37. <https://doi.org/10.18522/1026-2237-2024-1-30-37>
- Sidoryakina V.V. Continuous dependence of solutions of the linearized initial-boundary value problem of multicomponent sediment transport on the input data of the problem. *News of universities. North Caucasian region. Natural sciences*. 2024;1(221):30–37. (In Russ.) <https://doi.org/10.18522/1026-2237-2024-1-30-37>
5. Сидорякина В.В., Сухинов А.И. Исследование корректности и численная реализация линеаризованной двумерной задачи транспорта наносов. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2017;57(6):985–1002. <https://doi.org/10.7868/S0044466917060138>
- Sidoryakina V.V., Sukhinov A.I. Well-posedness analysis and numerical implementation of a linearized two-dimensional bottom sediment transport problem. *Comput. Math. Math. Phys.* 2017;57(6):978–994. <https://doi.org/10.1134/S0965542517060124>
6. Сухинов А.И., Сидорякина В.В., Сухинов А.А. Достаточные условия сходимости положительных решений линеаризованной двумерной задачи транспорта наносов. *Вестник Донского государственного технического университета*. 2017;17(1):5–17. <https://doi.org/10.23947/1992-5980-2017-17-1-5-17>
- Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V., Sukhinov A.A. Sufficient conditions for the convergence of positive solutions of a linearized two-dimensional sediment transport problem. *Bulletin of the Don State Technical University*. 2017;17(1):5–17. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/1992-5980-2017-17-1-5-17>
7. Сухинов А.И., Сидорякина В.В. О единственности решения линеаризованной двумерной начально-краевой задачи транспорта наносов. *Вестник Таганрогского института имени А.П. Чехова*. 2016;2:270–274.
- Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V. On the uniqueness of the solution of a linearized two-dimensional initial-boundary value problem of sediment transport. *Bulletin of the Taganrog Institute named after A.P. Chekhov*. 2016;2:270–274.
8. Сухинов А.И., Сидорякина В.В., Сухинов А.А. Линеаризация пространственно-двумерной задачи транспорта наносов и ее сходимость к исходной нелинейной задаче. В: *Труды международной конференции «Современные проблемы математической физики и вычислительной математики»*. Москва: МАКС Пресс; 2016. С. 113.
- Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V., Sukhinov A.A. Linearization of a spatially two-dimensional sediment transport problem and its convergence to the original nonlinear problem. In: *Proceedings of the International Conference “Modern Problems of Mathematical Physics and Computational Mathematics”*. Moscow: Publishing Department of the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University; MAKS Press; 2016. P. 113. (In Russ.)
9. Сухинов А.И., Сидорякина В.В. О сходимости решения линеаризованной последовательности задач к решению нелинейной задачи транспорта наносов. *Математическое моделирование*. 2017;29(11):19–39.
- Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V. Convergence of linearized sequence tasks to the nonlinear sediment transport task solution. *Mat. Model.* 2017;29(11):19–39.
10. Сухинов А.И., Проценко Е.А., Чистяков А.Е., Шретер С.А. Сравнение вычислительных эффективностей явной и неявной схем для задачи транспорта наносов в прибрежных водных системах. В: *Труды международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии (PaVT’2015)»*. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ; 2015. С. 297–307.
- Sukhinov A.I., Protsenko E.A., Chistyakov A.E., Shreter S.A. Comparison of computational efficiencies of explicit and implicit schemes for the problem of sediment transport in coastal water systems. In: *Proceedings of the International Scientific Conference “Parallel Computing Technologies (PaVT’2015)”*. Chelyabinsk: Publishing Center of SUSU; 2015. P. 297–307. (In Russ.)
11. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Построение дискретной двумерной математической модели транспорта наносов. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2011;8(121): 32–44.
- Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A. Construction of a discrete two-dimensional mathematical model of sediment transport. *Bulletin of SFedU. Engineering sciences*. 2011;8(121): 32–44. (In Russ.)
12. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Бондаренко Ю.С. Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2011;8(121):6–13.

Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Bondarenko Yu.S. Estimation of the error in solving the diffusion equation based on schemes with weights. *Bulletin of SFedU. Engineering sciences*. 2011;8(121):6–13. (In Russ.)

13. Sidoryakina V.V. Efficient algorithms for the numerical solution of the coupled sediment and suspended matter transport problems in coastal systems. *Atlantis Press. Series: Atlantis Highlights in Computer Sciences*. 2019;3:243–248. <https://doi.org/10.2991/csit-19.2019.42>

14. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko S.V., Sidoryakina, V.V. Coupled 3D wave and 2D bottom deposit transportation models for the prediction of harmful phenomena in coastal zone. *Trends in the Analysis and Design of Marine Structures*. 2019. P. 597–603. <https://doi.org/10.1201/9780429298875>

15. Sukhinov A., Chistyakov A., Sidoryakina V. Investigation of nonlinear 2D bottom transportation dynamics in coastal zone on optimal curvilinear boundary adaptive grids. *MATEC Web of Conferences*. 2017;132:04003. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201713204003>

Об авторе:

Валентина Владимировна Сидорякина, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1); доцент кафедры математики и физики Таганрогского института имени А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ) (347936, Российская Федерация, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), [ORCID](#), [SPIN-код](#), [ResearcherID](#), [MathSciNet](#), [ScopusID](#), cvv9@mail.ru

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

About the Author:

Valentina V. Sidoryakina, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics and Computer Science, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation); Associate Professor of the Department of Mathematics and Physics, Taganrog Institute named after A.P. Chekhov (branch) of RSUE (RINH) (48, Initiativnaya str., Taganrog, 347936, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), [ResearcherID](#), [MathSciNet](#), [ScopusID](#), cvv9@mail.ru

Conflict of Interest Statement: the author do not have any conflict of interest.

Author has read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 31.01.2025

Поступила после рецензирования / Reviewed 21.02.2025

Принята к публикации / Accepted 03.03.2025

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELLING



УДК 519.6

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-31-38>


Оценка точности спутниковой альтиметрии Sentinel-3 в прибрежных районах Азовского моря

С.В. Проценко^{ID}, Е.А. Проценко^{ID}, А.В. Харченко

Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), г. Таганрог, Российская Федерация

✉ rab55555@rambler.ru

Аннотация

Введение. Азовское море является мелководным полузамкнутым морем, где спутниковая альтиметрия (SA) сталкивается с трудностями в обеспечении точности измерений уровня моря. Рассматривается верификация данных альтиметрии спутника Sentinel-3 в прибрежных районах Азовского моря с использованием данных платформ наблюдений и трехмерной гидродинамической модели.

Материалы и методы. Исследование основано на сравнении высот поверхности моря (SSH), полученных с радиовысотомера Sentinel-3, с данными мареографов и результатами моделирования. Использована трехмерная гидродинамическая модель, адаптированная к условиям Азовского моря, а также спутниковые данные, обработанные с учетом атмосферных и приливных поправок.

Результаты исследования. Среднеквадратичная ошибка (RMSE) между спутниковыми и эталонными данными составила 85 мм. Анализ показал, что доплеровская альтиметрия Sentinel-3 в SAR-режиме обеспечивает более высокую точность по сравнению с традиционной альтиметрией, особенно в прибрежной зоне.

Обсуждение и заключение. Оценка данных Sentinel-3 демонстрирует их надежность в моделировании уровня воды в Азовском море. Методика сравнительного анализа, предложенная в работе, позволяет учитывать систематические ошибки спутниковых данных и использовать их в сочетании с моделированием и натурными наблюдениями. Исследование подтверждает эффективность данных Sentinel-3 в определении уровня моря в сложных прибрежных условиях. Разработанная методика может быть применена в других прибрежных районах для оценки характеристик спутниковой альтиметрии.

Ключевые слова: спутниковая альтиметрия, Sentinel-3, Азовское море, колебания уровня моря, гидродинамическое моделирование, трехмерная гидродинамическая модель, верификация спутниковых данных

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25–21–00021, <https://rscf.ru/project/25-21-00021/>.

Для цитирования. Проценко С.В., Проценко Е.А., Харченко А.В. Оценка точности спутниковой альтиметрии Sentinel-3 в прибрежных районах Азовского моря. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(1):31–38. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-31-38>

Original Theoretical Research

Accuracy Assessment of Sentinel-3 Satellite Altimetry in the Coastal Areas of the Azov Sea

Sofya V. Protsenko^{ID}, Elena A. Protsenko^{ID}, Anton V. Kharchenko

Taganrog Institute named after A.P. Chekhov (branch) of RSUE (RINH), Taganrog, Russian Federation

✉ rab55555@rambler.ru

Abstract

Introduction. The Azov Sea is a shallow semi-enclosed sea where satellite altimetry (SA) faces challenges in ensuring accurate sea level measurements. This study focuses on verifying Sentinel-3 altimetry data in the coastal areas of the Azov Sea using observational platform data and a three-dimensional hydrodynamic model.

Materials and Methods. The study is based on a comparison of sea surface heights (SSH) obtained from the Sentinel-3 radar altimeter with tide gauge data and modelling results. A three-dimensional hydrodynamic model, adapted to the conditions of the Azov Sea, was used, along with satellite data processed considering atmospheric and tidal corrections.

Results. The root mean square error (RMSE) between satellite-derived and reference data was found to be 85 mm. The analysis demonstrated that Sentinel-3 Doppler altimetry in SAR mode provides higher accuracy compared to traditional altimetry, particularly in coastal areas.

Discussion and Conclusion. The assessment of Sentinel-3 data confirms their reliability in modeling water levels in the Azov Sea. The comparative analysis methodology proposed in this study enables the identification of systematic errors in satellite data and facilitates their integration with modelling and in situ observations. The study confirms the effectiveness of Sentinel-3 data in determining sea levels in complex coastal conditions. The developed methodology can be applied to other coastal areas to assess satellite altimetry performance.

Keywords: satellite altimetry, Sentinel-3, Azov Sea, sea level variations, hydrodynamic modeling, three-dimensional hydrodynamic model, satellite data verification

Funding. This research was supported by the Russian Science Foundation, grant No. 25–21–00021, <https://rscf.ru/project/25-21-00021/>.

For Citation. Protsenko S.V., Protsenko E.A., Kharchenko A.V. Accuracy Assessment of Sentinel-3 Satellite Altimetry in the Coastal Areas of the Azov Sea. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(1):31–38. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-31-38>

Введение. Азовское море — мелководный полузамкнутый водоем, характеризующийся низкой соленостью, значительными сезонными колебаниями уровня воды и интенсивным речным стоком. Эти факторы существенно влияют на динамику водных масс и требуют точных инструментов для мониторинга изменений уровня моря. В последние десятилетия дистанционное зондирование стало одним из ключевых методов изучения морских и прибрежных процессов. В частности, спутниковая альтиметрия (SA) обеспечивает возможность непрерывного наблюдения за изменениями уровня моря в глобальном масштабе.

Одним из современных инструментов для спутникового мониторинга является спутник Sentinel-3A, запущенный Европейским космическим агентством (ESA) в 2016 году в рамках программы Copernicus. Он оснащен радиолокационным альтиметром с синтезированной апертурой (SAR), что позволяет значительно улучшить пространственное разрешение данных по сравнению с традиционной альтиметрией. Однако при применении методов спутниковой альтиметрии в прибрежных зонах возникают значительные трудности, связанные с влиянием береговой линии, неоднородностью волнения, изменением рельефа дна и помехами от суши. Это делает актуальной задачу верификации данных Sentinel-3 в таких сложных морских районах, как Азовское море.

Ранее проведенные исследования показали, что высокая точность спутниковых альтиметрических данных в открытых водах океанов может снижаться в прибрежных районах из-за эффектов переотражения сигнала, влияния метеорологических условий и динамики водных масс. В связи с этим важно оценить точность данных Sentinel-3 в условиях Азовского моря, где глубины невелики, а влияние речного стока и сезонных изменений существенно сказывается на уровне моря [1].

В данной работе проводится комплексная верификация данных спутниковой альтиметрии Sentinel-3 на основе сравнения с натурными измерениями мареографов, установленными в Азовском море, а также результатами численного моделирования, выполненного с использованием трехмерной гидродинамической модели. Целью исследования является определение точности спутниковых данных и анализ их применимости для мониторинга уровня моря в прибрежных условиях.

Для этого были выполнены следующие задачи:

- сбор и обработка данных спутниковой альтиметрии Sentinel-3;
- адаптация и применение трехмерной гидродинамической модели для расчета высоты поверхности моря;
- анализ расхождений между спутниковыми, модельными и натурными данными;
- определение среднеквадратичной ошибки (RMSE) и оценка надежности спутниковых данных для мониторинга Азовского моря.

Таким образом, настоящее исследование направлено на расширение возможностей спутниковой альтиметрии в прибрежных районах и улучшение методов оценки данных Sentinel-3 в сложных гидродинамических условиях Азовского моря.

Материалы и методы

Данные спутниковой альтиметрии. Спутниковая альтиметрия (SA) представляет собой метод дистанционного измерения уровня моря, основанный на использовании радиолокационного высотомера, который излучает электромагнитный импульс и фиксирует время его возврата после отражения от водной поверхности. Этот метод позволяет проводить глобальные измерения высоты поверхности моря (SSH) и обеспечивает ценные данные для анализа изменений уровня воды в прибрежных и открытых морских районах.

Спутник Sentinel-3 (рис. 1), запущенный Европейским космическим агентством (ESA) в рамках программы Copernicus, оснащен радиовысотомером SRAL (Synthetic Aperture Radar Altimeter), который работает в двух режимах:

- Low Resolution Mode (LRM) — традиционная альтиметрия с относительно низким пространственным разрешением;
- Synthetic Aperture Radar (SAR) Mode — режим синтезированной апертуры, обеспечивающий повышенное разрешение и более точное измерение уровня моря, особенно в прибрежных районах.



Рис. 1. Художественное изображение Sentinel-3 [2]

В данном исследовании анализировались данные, полученные в SAR-режиме, который позволяет минимизировать влияние переотражений сигнала от суши и повысить точность измерений в сложных гидродинамических условиях.

Спутник Sentinel-3 движется по солнечно-синхронной орбите с высотой 814 км и наклоном $98,6^\circ$, обеспечивая покрытие всей земной поверхности с периодом повторного захода над одной и той же областью каждые 27 дней (в сочетании с Sentinel-3B период повторения сокращается до 13,5 дней) (рис. 2). Радиовысотомер SRAL функционирует в диапазоне Ku/C и передает импульсы с частотой 1 кГц, что позволяет получать измерения уровня моря с временным разрешением 20 Гц (т. е. одно измерение примерно каждые 350 м по трассе спутника) (рис. 3) [2].

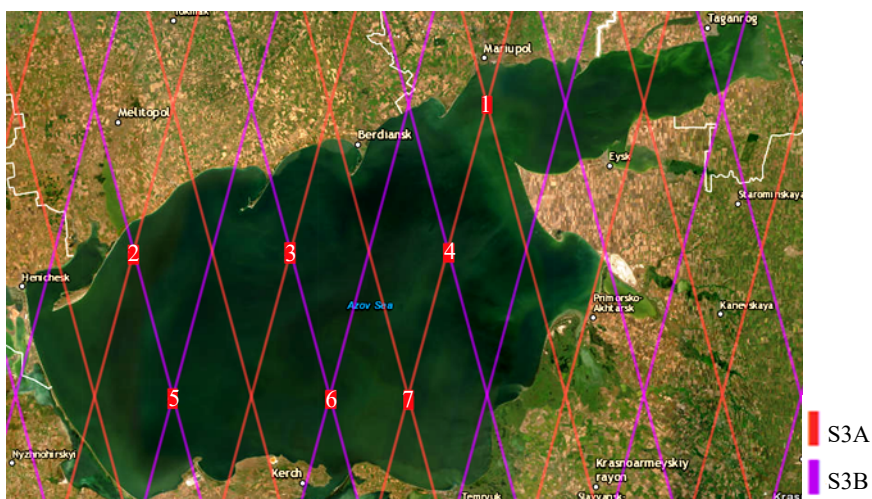


Рис. 2. Расположение района исследования, линии обозначают проходы Sentinel-3

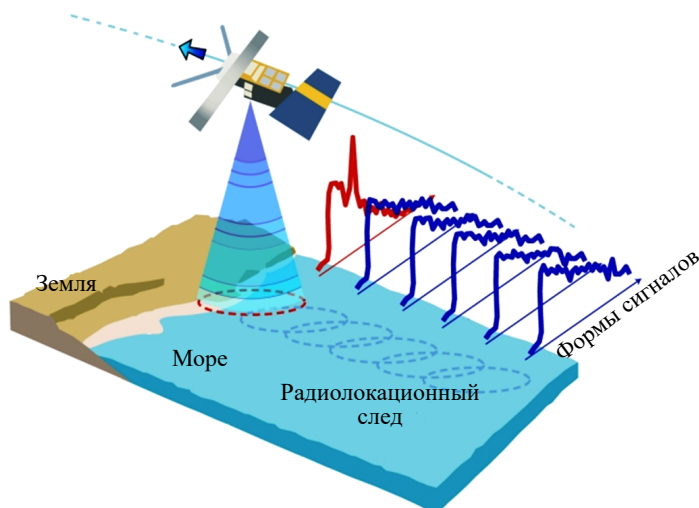


Рис. 3. Изменение формы сигналов (красным цветом) при приближении спутникового высотомера к побережью и входе в зону действия радара [2]

Альтиметр на борту спутника передает микроволновое излучение с двумя частотами в направлении поверхности моря и регистрирует время, необходимое для обратного прохождения сигнала на спутник. Первоначальное расстояние $R(\lambda, \phi, t)$ в точке с определенными координатами и в момент времени t корректируется с учетом влияния атмосферы и инструментальных погрешностей. Скорректированное расстояние R_c вычисляется по формуле [3]:

$$R_{corr}(\lambda, \phi, t) = R(\lambda, \phi, t) - C_r,$$

где поправки C_r , применяемые к спутниковому расстоянию, включают: сдвиг за счет состояния моря, который корректирует влияние волн на отражение радиолокационного сигнала; полярные приливы, вызванные изменением формы Земли из-за движения масс в полярных областях; приливы твердого тела, учитывающие деформацию земной коры под воздействием гравитации Луны и Солнца; ионосферную поправку, учитывающую влияние электронной плотности в ионосфере на распространение радиоволн; сухую и влажную тропосферные поправки, связанные с преломлением радиоволн в атмосфере из-за наличия водяного пара и других газов. Эти поправки необходимы для того, чтобы минимизировать систематические ошибки и обеспечить высокую точность спутниковых измерений уровня моря.

После учета всех поправок высота поверхности моря, определенная по данным спутника, рассчитывается следующим образом:

$$SSH_{SA}(\lambda, \phi, t) = h_{sat}(\lambda, \phi, t) - R_{corr}(\lambda, \phi, t),$$

где $SSH_{SA}(\lambda, \phi, t)$ — высота поверхности моря, определенная по данным спутниковой альтиметрии; $h_{sat}(\lambda, \phi, t)$ — высота спутника над референц-эллипсоидом; $R_{corr}(\lambda, \phi, t)$ — скорректированное расстояние от спутника до поверхности воды [4–5].

Проверка данных спутниковой альтиметрии Sentinel-3 проводится путем сравнения высот поверхности моря, полученных с альтиметра SSH_{SA} , с эталонными данными, которые включают измерения с платформ наблюдений в Азовском море SSH_{TG} и результаты моделирования на основе трехмерной гидродинамической модели SSH_{HDM} .

В исследовании использовались SSH-продукты Sentinel-3, полученные из официального центра данных Copernicus Data Hub [6]. Данные загружались в формате NetCDF и подвергались предварительной обработке, включающей:

- выбор участков орбиты Sentinel-3, проходящих над Азовским морем;
- фильтрацию и исключение шумовых данных с аномальными значениями;
- интерполяцию для согласования с координатами мареографов и гидродинамической модели.

Для проверки точности измерений Sentinel-3 данные SSH сравнивались с эталонными измерениями:

1. Наземные платформы наблюдений (мареографы) — данные о высоте уровня моря из баз Единой межведомственной федеральной информационной системы (ЕСИМО);
2. Численное моделирование — данные о высоте поверхности моря, полученные с помощью трехмерной гидродинамической модели (описание модели приводится в следующем разделе).

Оценка точности данных проводилась на основе расчета среднеквадратичной ошибки (RMSE) между значениями SSH из спутниковых данных и наблюдениями мареографов, а также анализом стандартного отклонения (STD) между данными Sentinel-3 и результатами моделирования.

Платформы наблюдений в Азовском море. Для верификации данных спутниковой альтиметрии Sentinel-3 в условиях прибрежной зоны Азовского моря использовались данные с семи платформ наблюдений (рис. 4), зарегистрированных в Единой межведомственной федеральной информационной системе (ЕСИМО). Эти платформы представляют собой мареографические станции, оборудованные высокоточным измерительным оборудованием, которое позволяет фиксировать уровни моря в реальном времени и обеспечивать долгосрочные ряды наблюдений [7].



Рис. 4. Платформы наблюдений в Азовском море

Мареографы, установленные в различных частях Азовского моря, выполняют непрерывную регистрацию колебаний уровня моря. Мареографические станции установлены вблизи ключевых гидродинамических узлов, где влияние волнения, ветровых нагонов и речного стока наиболее выражено. Это позволяет получить репрезентативные данные о динамике уровня моря в разных частях Азовского моря.

Прибрежные мареографы используются для измерения и непрерывной автоматической регистрации колебаний уровня Азовского моря. Высота морской поверхности $SSH_{TG}(\lambda_{TG}, \phi_{TG}, t)$ на основании данных мареографов может быть получена следующим образом:

$$SSH_{TG}(\lambda_{TG}, \phi_{TG}, t) = H_{TG}(t) + N_{TG}(\lambda, \phi),$$

где $H_{TG}(t)$ — уровень моря, измеренный мареографом относительно нулевого уровня национальной вертикальной системы отсчета.

Для корректного сравнения со спутниковыми данными использовались мареографы, расположенные на различном удалении от берега: от глубоководных участков до мелководных зон, подверженных влиянию береговой линии. Такое распределение позволяет оценить точность альтиметрических данных Sentinel-3 в зависимости от расстояния до берега, определить влияние береговых эффектов на спутниковые измерения, учесть локальные особенности гидродинамики Азовского моря при анализе расхождений в данных. Расположение мареографических станций представлено на рис. 2, где отмечены координаты каждой платформы наблюдений.

Данные мареографических наблюдений были приведены к единой системе отсчета для корректного сравнения с данными спутниковой альтиметрии и гидродинамического моделирования. Обработка включала:

- гармонический анализ приливных и нагонных колебаний уровня моря;
- фильтрацию высокочастотных флуктуаций, вызванных локальными гидродинамическими процессами (например, кратковременными ветровыми эффектами);
- приведение данных к референц-уровню, согласованному с геоидом, используемым в спутниковых измерениях;
- интерполяцию временных рядов для сопоставления с проходами спутника Sentinel-3.

Дополнительно проведен анализ статистических характеристик измеренных данных, включая среднее значение, стандартное отклонение (STD) и размах колебаний уровня моря для каждой станции.

Пространственно-неоднородная трехмерная математическая модель волновой гидродинамики мелководного водоема. Исходными уравнениями модели волновой гидродинамики являются [8–12]:

- уравнение движения (Навье-Стокса):

$$\begin{aligned} u'_t + uu'_x + vv'_y + ww'_z &= -\frac{1}{\rho} P'_x + (\mu u'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (\mu w'_z)'_z, \\ v'_t + uv'_x + vv'_y + ww'_z &= -\frac{1}{\rho} P'_y + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (\mu v'_z)'_z, \\ w'_t + uw'_x + vw'_y + ww'_z &= -\frac{1}{\rho} P'_z + (\mu w'_x)'_x + (\mu w'_y)'_y + (\mu w'_z)'_z + g; \end{aligned} \quad (1)$$

- уравнение неразрывности в случае переменной плотности:

$$\rho'_t + (\rho u)'_x + (\rho v)'_y + (\rho w)'_z = 0, \quad (2)$$

где $V=\{u,v,w\}$ — компоненты вектора скорости; P — давление; ρ — плотность; μ, ν — горизонтальная и вертикальная составляющие коэффициента турбулентного обмена; g — ускорение свободного падения.

Система уравнений (1)–(2) рассматривается при следующих граничных условиях:

- на входе

$$u(x, y, z, t) = u(t), \quad v(x, y, z, t) = v(t), \quad P'_n(x, y, z, t) = 0, \quad V'_n(x, y, z, t) = 0,$$

- боковая граница (берег и дно)

$$\begin{aligned} \rho \mu (u')_n(x, y, z, t) &= -\tau_x(t), \quad \rho \mu (v')_n(x, y, z, t) = -\tau_y(t), \\ V'_n(x, y, z, t) &= 0, \quad P'_n(x, y, z, t) = 0, \end{aligned}$$

- верхняя граница

$$\begin{aligned} \rho \mu (u')_n(x, y, z, t) &= -\tau_x(t), \quad \rho \mu (v')_n(x, y, z, t) = -\tau_y(t), \\ w(x, y, t) &= -\omega - P'_t / \rho g, \quad P'_n(x, y, t) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где ω — интенсивность испарения жидкости; τ_x, τ_y — составляющие тангенциального напряжения.

Составляющие тангенциального напряжения для свободной поверхности $\{\tau_x, \tau_y\} = \rho_a C_d_s |\vec{w}| \{w_x, w_y\}$, $C_d_s = 0,0026$, где $\vec{w}$ — вектор скорости ветра относительно воды, ρ_a — плотность атмосферы, C_d_s — безразмерный коэффициент поверхностного сопротивления, который зависит от скорости ветра, рассматривается в диапазоне 0,0016–0,0032.

Составляющие тангенциального напряжения для дна с учетом движения воды можно записать следующим образом $\{\tau_x, \tau_y\} = \rho C_d_b |V| \{u, v\}$, $C_d_b = gn^2 / h^{1/3}$, где $n = 0,04$ групповой коэффициент шероховатости в формуле Мэннинга (0,025–0,2); $h = H + \eta$ — глубина акватории, м; H — глубина до невозмущенной поверхности, м; η — высота свободной поверхности относительно геоида (уровень моря), м.

Данные гидродинамической модели об уровне моря $H_{HDM}(\lambda, \phi, t)$ относительно геоида будем использовать в виде:

$$SSH_{HDM}(\lambda, \phi, t) = H_{HDM}(\lambda, \phi, t) + N(\lambda, \phi).$$

Смещение между данными мареографов и трехмерной модели волновой гидродинамики может быть установлено в близлежащем местоположении мареографа в момент времени t :

$$B_{TG/HDM}(t) = SSH_{TG}(\lambda_{TG}, \phi_{TG}, t) - SSH_{HDM}(\lambda_{TG}, \phi_{TG}, t).$$

Смещение введено для каждого соответствующего узла ячейки сетки дискретной гидродинамической модели при вычислении SSH_{HD}

$$SSH_{HDMcorr}(\lambda, \phi, t) = SSH_{HDM}(\lambda, \phi, t) \cdot B_{TG/HDM}(t).$$

Для учета систематической погрешности $SSH_{diff}(\lambda, \phi, t)$ между данными спутника и гидродинамической модели вводится:

$$SSH_{diff}(\lambda, \phi, t) = SSH_{SA}(\lambda, \phi, t) - SSH_{HDMcorr}(\lambda, \phi, t).$$

Эффективность работы высотомера Sentinel-3 SRAL была оценена в прибрежной зоне Азовского моря. Данные дистанционного зондирования были получены из официального центра данных Copernicus в стандартном формате NetCDF [1]. На основе этих данных были рассчитаны SSH_{HDM} . Ряды наблюдений на 7 прибрежных мареографах были использованы для расчета $SSH_{TG}(\lambda_{TG}, \phi_{TG}, t)$ [2]. Трехмерная пространственно-неоднородная модель волновой гидродинамики мелководного водоема, включающая три уравнения движения, была использована для получения $SSH_{HDM}(\lambda, \phi, t)$ [3].

Результаты исследования

Сравнительный анализ данных спутниковой альтиметрии Sentinel-3, мареографических наблюдений и гидродинамического моделирования. Для оценки точности спутниковых данных Sentinel-3 проведено их сопоставление с натурными измерениями мареографов, расположенных в Азовском море, а также с результатами численного моделирования, выполненного с использованием трехмерной гидродинамической модели. Анализ основан на вычислении статистических характеристик различий между измеренными и расчетными значениями высоты поверхности моря с учетом пространственно-временной привязки данных.

Исследование охватывает 2024 год, в течение которого были проанализированы проходы спутников Sentinel-3A и Sentinel-3B над акваторией Азовского моря. Использовались продукты альтиметрии в SAR-режиме, обеспечивающие более высокую точность по сравнению с традиционными методами. Для каждого прохода спутника выделены точки пересечения с мареографами и сеткой гидродинамической модели.

Для верификации использованы:

- данные мареографов (семь станций), зафиксированные в базе Единой межведомственной федеральной информационной системы (ЕСИМО);
- спутниковые измерения SSH Sentinel-3, полученные из центра данных Copernicus;
- результаты трехмерной гидродинамической модели, адаптированной для условий Азовского моря.

Для количественной оценки расхождений между SSH, полученными различными методами, рассчитаны: среднеквадратичная ошибка (RMSE) — показатель разброса спутниковых данных относительно мареографических и модельных значений; среднее смещение (Bias) — величина систематической ошибки; стандартное отклонение (STD) — оценка степени разброса значений.

По итогам расчетов установлено, что общее среднеквадратичное отклонение RMSE между данными Sentinel-3 и мареографами составило 85 мм. Среднее смещение между спутниковыми данными и мареографами не превышает 2–3 см, что свидетельствует об отсутствии значительного систематического отклонения. STD варьируется от 6 до 9 см в зависимости от конкретного прохода спутника и его расстояния до берега.

В таблице 1 приведены статистические данные о разнице в показателях SSH. Общая величина разницы при всех четырнадцати проходах составляет 85 мм.

Для оценки влияния береговых эффектов на точность альтиметрии Sentinel-3 проведен анализ зависимости расхождений от удаленности точки измерения от побережья. На глубоководных участках (>20 км от берега) точность измерений максимальна: RMSE не превышает 6–7 см, STD — 5–8 см. В зонах 10–20 км от берега ошибки увеличиваются: RMSE достигает 7–9 см, STD — 6–9 см. В мелководных прибрежных зонах (<10 км от берега) отмечается ухудшение точности спутниковых данных, связанное с эффектами переотражения и влиянием динамических процессов в зоне берегового прибоя. В этих районах RMSE достигает 10–12 см, а STD — 9–12 см. Таким образом, данные Sentinel-3 в SAR-режиме демонстрируют высокую точность в открытых водах, но требуют коррекции при анализе прибрежных зон.

Трехмерная гидродинамическая модель, использованная в исследовании, позволила рассчитать SSH с высоким пространственно-временным разрешением, что дало возможность дополнительно оценить точность спутниковой альтиметрии. Анализ показал, что среднее расхождение между модельными и спутниковыми данными SSH составляет 4–6 см и подтверждает высокую точность расчетной модели. В зонах интенсивного речного стока (устья Дона, Кубани) расхождения увеличиваются до 8–10 см, что связано с изменчивостью плотности воды и течений. В глубоководных районах Азовского моря модельные данные совпадают со спутниковыми в пределах ± 5 см, что подтверждает их надежность.

Таблица 1

Данные о разнице в показателях SSH

Точки	Проходы Sentinel-3	RMSE, мм	Расстояние от точки до побережья, км	Расстояние от точки до платформы, км
1	653 S3A	78	16,3	2,3
	270 S3A	106		
2	42 S3A	109	11,6	2,4
	425 S3B	84		
3	539 S3B	43	36,2	2,1
	156 S3A	115		
4	270 S3A	68	48,6	3,2
	653 S3B	102		
5	156 S3B	87	37,8	2,7
	425 S3B	110		
6	270 S3B	63	33,9	3,2
	539 S3B	75		
7	539 S3A	79	28,3	4,4
	270S3A	68		

Обсуждение и заключение. Спутниковая альтиметрия Sentinel-3 в SAR-режиме демонстрирует высокую точность измерений в открытых водах Азовского моря, но подвержена погрешностям в прибрежных зонах (<10 км от берега). Среднеквадратичная ошибка RMSE между спутниковыми и мареографическими данными составляет 85 мм, что соответствует уровню современных альтиметрических методов. Гидродинамическая модель показала хорошее соответствие данным Sentinel-3 (среднее расхождение 4–6 см), что подтверждает возможность совместного использования численного моделирования и спутниковых данных. Для дальнейшего повышения точности спутниковой альтиметрии в прибрежных зонах необходимо применение адаптивных алгоритмов фильтрации и коррекции данных. Таким образом, результаты исследования подтверждают эффективность применения данных Sentinel-3 для мониторинга уровня моря в Азовском море, а также обосновывают необходимость дальнейшего совершенствования методов коррекции спутниковых измерений в прибрежной зоне.

Список литературы / References

1. Arnold D, Montenbruck O, Hackel S, Sosnica K. Satellite laser ranging to low Earth orbiters: orbit and network validation. *J Geodesy*. 2019;93(11):2315–2334. <https://doi.org/10.1007/s00190-018-1140-4>
2. Catalog of spatial and temporal assets of the Copernicus data space ecosystem. URL: <https://dataspace.copernicus.eu/> (дата обращения: 09.01.2025)
3. Cipollini P., Calafat F.M., Jevrejeva S. Monitoring sea level in the coastal zone with satellite altimetry and tide gauges. *Surv Geophys*. 2017;38:33. <https://doi.org/10.1007/s10712-016-9392-0>
4. EUMETSAT. *Sentinel-3 SRAL Marine User Handbook*. 2017;55.
5. Fernandez J., Peter H., Calero E.J., Berzosa J., Gallardo L.J., Femenias P. Sentinel-3A: Validation of orbit products at the Copernicus POD service. *Fiducial Reference Measurements for Altimetry, International Association of Geodesy Symposia*. 2019;150:75–82. https://doi.org/10.1007/1345_2019_64
6. Montenbruck O., Hackel S., Jaggi A. Precise orbit determination of the Sentinel-3A altimetry satellite using ambiguity-fixed GPS carrier phase observations. *J Geodesy*. 2018;92:711–726. <https://doi.org/10.1007/s00190-017-1090-2>
7. Unified State Information System on the Situation in the World Ocean. URL: <http://portal.esimo.ru/> (дата обращения: 09.01.2025)
8. Protsenko S., Sukhinova T. Mathematical modeling of wave processes and transport of bottom materials in coastal water areas taking into account coastal structures. *MATEC Web Conf*. 2017;04002. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201713204002>
9. Проценко С.В., Проценко Е.А., Харченко А.В. Сопоставление результатов численного моделирования процессов гидродинамики в мелководных водоемах с аналитическим решением. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):49–63. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-49-63>
10. Protsenko S.V., Protsenko E.A., Kharchenko A.V. Comparison of hydrodynamic processes modelling results in shallow water bodies based on 3D model and 2D model averaged by depth. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):49–63. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-49-63>
10. Сухинов А.И., Проценко С.В., Панасенко Н.Д. Математическое моделирование и экологическое проектирование состояния морских систем с учетом разномасштабной турбулентности с использованием данных дистанционного зондирования. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2022;6(3):104–113. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2022-1-3-104-113>

Sukhinov A.I., Protsenko S.V., Panasenko N.D. Mathematical modeling and ecological design of the marine systems taking into account multi-scale turbulence using remote sensing data. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2022;6(3):104–113. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2022-1-3-104-113>

11. Сухинов А.И., Проценко Е.А., Чистяков А.Е., Шретер С.А. Сравнение вычислительных эффективностей явной и неявной схем для задачи транспорта наносов в прибрежных водных системах. В: *Труды международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2015)»*. Екатеринбург: издательский центр ЮУрГУ; 2015. С. 297–307.

Sukhinov A.I., Protsenko E.A., Chistyakov A.E., Shreter S.A. Comparison of computational efficiency of explicit and implicit schemes for the problem of sediment transport in coastal water systems. *Parallel Computational Technologies (PaVT'2015). Proceedings of the International Scientific Conference*. 2015. P. 297–307. (In Russ.)

12. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Построение дискретной двумерной математической модели транспорта наносов. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2011;8(121):32–44.

Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A. Construction of a discrete two-dimensional mathematical model of sediment transport. *Izvestiya SFedU. Technical Sciences*. 2011;8(121):32–44. (In Russ.)

Об авторах:

Проценко Софья Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, научный сотрудник, Таганрогский институт им. А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (347936, Российская Федерация, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), [ORCID](#), [SPIN-код](#), rab5555@rambler.ru

Проценко Елена Анатольевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, ведущий научный сотрудник, Таганрогский институт им. А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (347936, Российская Федерация, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), [ORCID](#), [SPIN-код](#), eapros@rambler.ru

Харченко Антон Владимирович, научный сотрудник Таганрогского института им. А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (347936, Российская Федерация, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), kharch_91@rambler.ru

Заявленный вклад авторов:

С.В. Проценко: разработка концепции; научное руководство.

Е.А. Проценко: курирование данных; деятельность по аннотированию, очистке данных и поддержанию их целостности; разработка программного обеспечения; визуализация.

А.В. Харченко: проведение исследования; разработка методологии; валидация результатов.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Sofia V. Protsenko, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Research Fellow, A.P. Chekhov Taganrog Institute (branch) Rostov State University of Economics (48, Initiative St., Taganrog, 347936, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), rab5555@rambler.ru

Elena A. Protsenko, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Leading Research Fellow, A.P. Chekhov Taganrog Institute (branch) Rostov State University of Economics (48, Initiative St., Taganrog, 347936, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), eapros@rambler.ru

Anton V. Kharchenko, Research Fellow at the Taganrog Institute of A.P. Chekhov (branch) of the Rostov State Economic University (48, Initiative St., Taganrog, 347936, Russian Federation), kharch_91@rambler.ru

Contributions of the authors:

S.V. Protsenko: concept development; scientific guidance.

E.A. Protsenko: data management; annotation, data cleaning, and maintaining data integrity; software development; visualization.

A.V. Kharchenko: conducting research; methodology development; result validation.

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 22.01.2025

Поступила после рецензирования / Reviewed 19.02.2025

Принята к публикации / Accepted 28.02.2025

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELLING



УДК 519.6

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-39-51>

Оценка предельной скорости однонаправленного транспортного потока с высокой вычислительной эффективностью



И.А. Кутейников

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), г. Москва, Российская Федерация

✉ ivankuteynikov09@gmail.com

Аннотация

Введение. В современных условиях развития интеллектуальных транспортных систем (ITS) возникает актуальная задача точной оценки предельной скорости транспортного потока на магистрали. Несмотря на существующие решения данной проблемы, основанные на методах статистической механики и стохастических моделях, остаются пробелы в адаптации этих теорий для реальных сегментов дорог с ограниченной протяженностью. Традиционная формула термодинамического предела, используемая для расчета средней скорости транспортного потока, становится некорректной при малых значениях длины дорожной полосы, что ограничивает ее применимость в практических задачах мониторинга транспорта. Целью настоящего исследования является сравнительный анализ различных подходов к оценке средней предельной скорости транспортного потока.

Материалы и методы. Исследование проведено на основе метода статистической механики и стохастической модели на одномерной конечной решетке. Для анализа использовались численные эксперименты с различными значениями параметров (число клеток, плотность потока, вероятность движения).

Результаты исследования. Проведенное исследование показало значительные расхождения между результатами метода статистической механики и другими подходами при малых значениях длины дорожной полосы. Эффективность второго и третьего подходов была подтверждена для ограниченных сегментов дорог, где они демонстрируют большую точность и применимость.

Обсуждение и заключение. Результаты исследования имеют практическое значение для разработки интеллектуальных систем управления транспортными потоками, особенно на коротких участках дорог. Предложенные подходы могут быть успешно интегрированы в современные системы мониторинга для повышения их точности. Теоретическая значимость работы заключается в развитии методологии оценки транспортных потоков с учетом специфики реальных условий.

Ключевые слова: транспортные потоки, термодинамический предел, случайные процессы с запретами, асимптотическое поведение средней скорости, стационарные решения, вероятностная модель трафика, системы массового обслуживания

Для цитирования. Кутейников И.А. Оценка предельной скорости однонаправленного транспортного потока с высокой вычислительной эффективностью. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(1):39–51. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-39-51>

Original Theoretical Research

Estimation of the Unidirectional Traffic Flow Velocity Limit with High Computational Efficiency

Ivan A. Kuteynikov

Moscow Automobile and Road State Technical University (MADI), Moscow, Russian Federation

✉ ivankuteynikov09@gmail.com

Abstract

Introduction. In the modern development of intelligent transportation systems (ITS), an urgent task is the accurate estimation of the velocity limit of traffic flow on a highway. Despite existing solutions to this problem based on statistical

mechanics methods and stochastic models, gaps remain in adapting these theories to real road segments of limited length. The traditional thermodynamic limit formula, used to calculate the average velocity of traffic flow, becomes inaccurate for small road segment lengths, limiting its applicability in practical traffic monitoring tasks. The aim of this study is a comparative analysis of various approaches to estimating the average velocity limit of traffic flow.

Materials and Methods. The study was conducted using the method of statistical mechanics and a stochastic model on a one-dimensional finite lattice. Numerical experiments with various parameter values (number of cells, traffic density, and movement probability) were used for analysis.

Results. The study revealed significant discrepancies between the results obtained using the statistical mechanics method and other approaches when the road segment length was small. The efficiency of the second and third approaches was confirmed for limited road segments, where they demonstrated greater accuracy and applicability.

Discussion and Conclusion. The research results have practical significance for the development of intelligent traffic management systems, especially for short road segments. The proposed approaches can be successfully integrated into modern monitoring systems to improve their accuracy. The theoretical significance of this work lies in advancing the methodology for traffic flow estimation while accounting for the specific conditions of real-world environments.

Keywords: traffic flows, thermodynamic limit, exclusion processes, asymptotic behavior of average velocity, stationary solutions, probabilistic traffic model, queuing systems

For Citation. Kuteynikov I.A. Estimation of the unidirectional traffic flow velocity limit with high computational efficiency. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(1):39–51. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-39-51>

Введение. Сложность задачи моделирования транспортных потоков обусловлена необходимостью учета множества факторов, таких как поведение водителей, погодные условия, технические характеристики транспортных средств и инфраструктуры. Несмотря на значительный прогресс в разработке математических моделей транспортных потоков, существующие подходы часто сталкиваются с рядом ограничений, которые снижают их применимость в реальных условиях.

Математические модели на основе концепций физики традиционно используют описания физических сред с помощью методов механики твердого тела, гидродинамики и газодинамики. Эти подходы сводятся к системам дифференциальных уравнений, которые накладывают требования гладкости на решения. Например, уравнения Навье-Стокса в гидродинамике предполагают, что скорость и давление жидкости изменяются плавно, что позволяет описывать течение жидкости в широком диапазоне условий. Однако такие модели, основанные на дифференциальных уравнениях, часто оказываются недостаточно гибкими для описания сложных и нелинейных процессов, таких как транспортные потоки, где наблюдаются резкие скачки плотности и скорости.

Одним из основных свойств многих управляемых, взаимодействующих систем многих тел является возникновение ударов. Удар в системе классических текучих частиц означает внезапный переход от области низкой плотности к области высокой плотности. Хорошо известным примером шока является начало пробки на автострате (рис. 1), когда прибывающие автомобили (почти свободно текущие частицы в режиме низкой плотности) вынуждены очень быстро замедляться на коротком интервале и затем становятся частью высокоплотной перегруженной области. Примечательной особенностью таких толчков является их стабильность в течение длительных периодов времени, то есть они остаются локализованными на расстояниях, сравнимых с размерами частиц. В некотором смысле можно рассматривать толчки как солитоноподобные коллективные возбуждения системы частиц.



Рис. 1. Иллюстрация негладкости (скачкообразности) плотности транспортного потока

Разница между потоком жидкости (или газа) и транспортным потоком слишком велика, чтобы использовать непрерывный подход и точность описания транспортного потока с помощью макроскопических моделей [1]. Неточности возникают в ситуациях, когда, например, очень мало транспортных средств в области, оказывающей влияние на движение транспортного средства, по сравнению с множеством частиц в задачах термодинамики. В отличие от математической физики, где молекулы подчиняются физическим законам, которые обычно просты и

неизменны, водители ведут себя различным образом и изменяют свое поведение, внося человеческий фактор. В то время как молекулы движутся хаотично, водители имеют сходные цели (одно и то же направление, близкие желаемые скорости) и обычно предпочитают не ускоряться и не замедляться часто, так что их поведение может быть более разнообразным, чем поведение частиц в жидкости или газе.

Для преодоления указанных проблем в настоящей работе предлагается провести оценку предельной скорости однонаправленного транспортного потока на базе разных подходов к моделированию.

Модель Лайтхилла-Уизема-Ричардса (LWR). Одним из популярных подходов к моделированию трафика с середины пятидесятих годов прошлого столетия является сетевая гидродинамическая модель и ее различные модификации, связанные с уподоблением потока автомобилей текущей жидкости. Модели на базе гидродинамической (Пэйна [2], Кернера-Конхойзера [3], Ава-Раскла [4], Занга [5]) учитывают дополнительные факторы, такие как поведение водителей, неоднородность потока, фазовые переходы и другие.

В работе 1955 года Лайтхилла и Уизема [6] и в работе 1956 Ричардса [7] зависимость функции от плотности была уподоблена течению жидкости с плотностью $\rho(x,t)$, равной числу машин на единицу длины дороги, и интенсивностью $q(x,t)$, равной количеству автомобилей, пересекающих сечение x , где $x \in G$. Учитывая закон сохранения массы, имеем сохранение числа машин на участке дороги в замкнутой системе. В случае открытой системы имеем $q_x + \rho_t = 0$ и $q_x + \rho_t = g(x,t)$. Функция $g(x,t)$ отражает интенсивность потока въезжающих/выезжающих транспортных средств. Скорость транспортного потока в точке x в момент времени t обозначается как $v(x,t)$, и в модели LWR предполагается, что скорость зависит только от плотности. Такая модель соответствовала реальным наблюдениям, особенно при низких интенсивностях потоков.

Таким образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v(\rho))}{\partial x} = 0, \\ v(t, \rho) = F(\rho) \end{cases}, \quad (1)$$

где $F(\rho)$ — невозрастающая функция, не обязательно выпуклая.

Эта модель математически аналогична уравнению движения сжимаемой жидкости, где плотность жидкости соответствует плотности транспортного потока, а поток частиц $\rho v(\rho)$ аналогичен потоку массопереноса в гидродинамике. Хотя модели гидродинамического типа широко используются для описания транспортных потоков, у них есть несколько ограничений, которые становятся видны при анализе реальных данных:

1. *Отсутствие учета дискретности транспортных средств.* Модели гидродинамического типа предполагают, что транспортный поток ведет себя как сплошная среда, тогда как в реальности транспортные средства представляют собой дискретные объекты. Это ограничивает модели в описании микроскопических явлений, таких как разрывы или скачки плотности, характерные для реальных дорожных условий.

2. *Неточное описание резких скачков плотности.* Уравнения моделей гидродинамического типа основаны на предположении о гладкости функции плотности, что делает невозможным моделирование дискретных или резких изменений, таких как внезапные пробки.

3. *Ограничения в моделировании сложного взаимодействия транспортных средств.* Модели предполагают, что скорость транспортного средства зависит только от локальной плотности, игнорируя такие факторы как индивидуальные особенности водителей, задержки восприятия и дальнего действия взаимодействия.

4. *Ограниченная адаптивность к реальным условиям.* Модели не учитывают внешние воздействия, такие как погодные условия, аварии или переменные ограничения скорости.

5. *Невозможность описания фазовых переходов.* В реальных транспортных потоках наблюдаются фазовые переходы между разреженным движением, стабильным потоком и пробками. Эти явления трудно корректно описать в рамках моделей гидродинамического типа без дополнительных предположений или модификаций.

Модели газовой динамики. Исследователи в многочисленных работах пытались исправить недостатки гидродинамических моделей за счет введения в правой части дополнительных функций. Среди наиболее удачных моделей стоит отметить квазигазодинамическую модель (КГД модель), разработанную под руководством академика Б.Н. Четверушкина [8].

КГД модель транспортных потоков и ее численная реализация детально рассмотрена в [9]. Она основана на аналогиях между поведением транспортных средств и движением газа, что позволяет использовать подходы и методы газовой динамики. Основное преимущество модели состоит в том, что в транспортных потоках частицы (транспортные средства) обладают конечными размерами и движутся вдоль ограниченных дорожных полос, а в газах молекулы распределены в трёхмерном пространстве. В одномерном случае КГД-система уравнений для описания автотранспортных потоков выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau}{2} \frac{\partial(\rho V^2 + P)}{\partial x} + F_\rho, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho V}{\partial t} + \frac{\partial \rho V^2}{\partial x} = f - \text{grad} P + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau}{2} \frac{\partial(\rho V^3 + PV)}{\partial x} + F_V. \quad (3)$$

В данной модели второго порядка $\rho = \left[\frac{\text{авто}}{\text{км} \times \text{полоса}} \right]$ — плотность потока, $V = \left[\frac{\text{км}}{\text{час}} \right]$ — скорость автотранспорта, причем уравнение (2) определяет плотность потока, а уравнение (3) — его скорость.

Для случая низкой плотности, когда расстояния между транспортными средствами значительны и их взаимодействие минимально, можно использовать упрощенную модель, аналогичную несжимаемой жидкости. В этом случае плотность транспортного потока считается постоянной, а изменения происходят только в скорости и направлении потока. Однако такая постановка редко используется в транспортных моделях, так как плотность играет ключевую роль в формировании пробок и других явлений.

Связь микроскопических и макроскопических моделей. В более сложных микроскопических моделях, где частица соответствует транспортному средству, отношение числа частиц к числу ячеек на участке решетки является переменной величиной. Средняя скорость частиц и интенсивность потока также зависят от местоположения участка решетки. Локальное состояние участка можно охарактеризовать плотностью потока частиц и интенсивностью потока. При задании распределения значений одной из этих характеристик на решетке распределение значений других характеристик обычно исследуют с помощью имитационного моделирования.

В макроскопической модели автотранспортного потока соотношение между плотностью, скоростью и интенсивностью описывают с помощью дифференциальных уравнений в частных производных (уравнениях математической физики). Соотношение распределения этих характеристик и их динамика определяется этими дифференциальными уравнениями, которые при заданных краевых условиях обычно решаются с помощью численных методов.

Как микроскопические, так и макроскопические модели трафика сходны или полностью совпадают с соответствующими моделями статистической физики. В микроскопических моделях статистической физики частицы соответствуют молекулам или элементарным частицам, а в макроскопических моделях задаются распределения таких характеристик как давление, температура, скорость потока, плотность газа или жидкости.

Микроскопические модели транспортных потоков, описываемые случайными процессами разных типов [10], обладают преимуществами по сравнению с макроскопическими, поскольку позволяют учитывать индивидуальное поведение каждого транспортного средства, что особенно важно для анализа сложных ситуаций, таких как пробки, слияние потоков или их пересечение. Эти модели обеспечивают более детальное описание динамики движения на уровне отдельных объектов, что делает их полезными при разработке стратегий управления трафиком в реальном времени и создании интеллектуальных транспортных систем.

Вероятностная модель трафика на одномерной решетке. В настоящей работе рассматривается реализация микроскопической модели на одной полосе движения. Для получения стационарных решений будем исследовать ее на замкнутой кольцевой решетке.

Пусть на кольцевой решетке, содержащей N ячеек, находится $M < N$ частиц (рис. 2). Время дискретно. В каждый момент времени $t = 0, 1, 2, \dots$ каждая из частиц находится в одной из ячеек. В ячейке может одновременно находиться не более одной частицы. Ячейки имеют номера $0, 1, \dots, N-1$ и занумерованы в направлении движения частиц по модулю N .

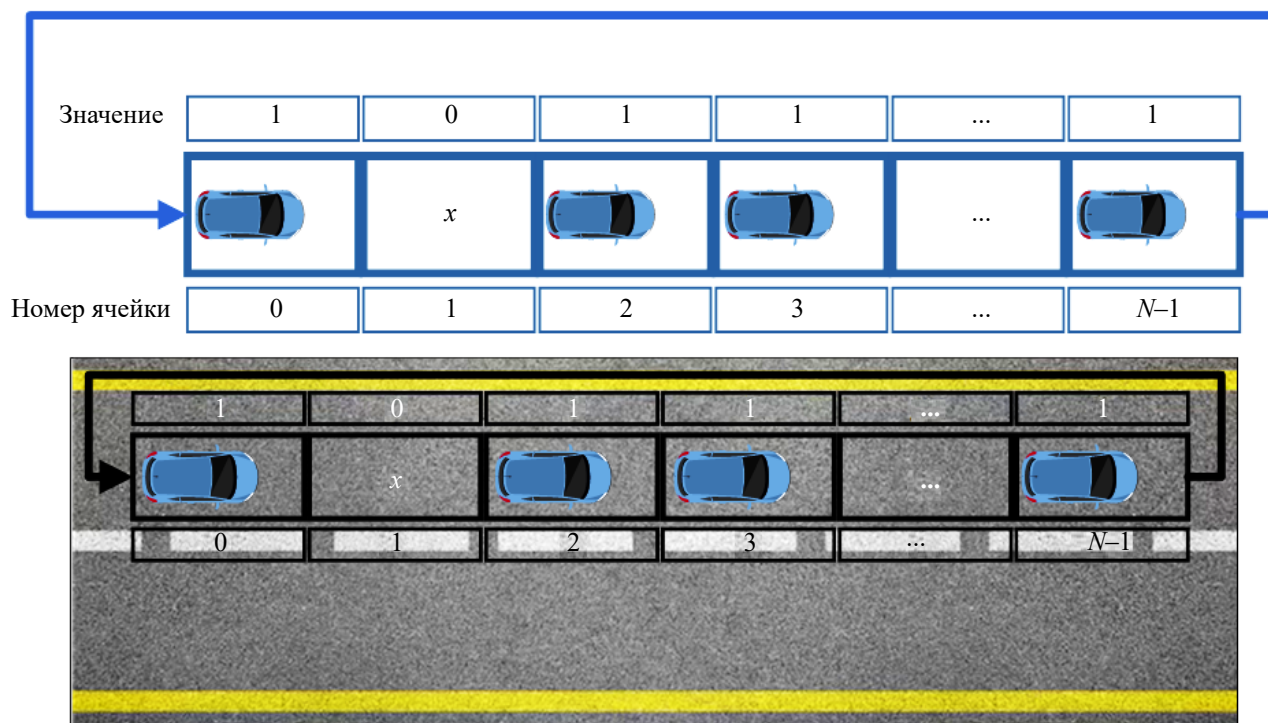


Рис. 2. Визуализация размещения ячеек на кольце

Если в момент времени $t = 0, 1, 2, \dots$ частица находится в ячейке i и ячейка $i + 1$ (сложение по модулю N) свободна, то в момент $t + 1$ частица будет с вероятностью $0 < p < 1$ находиться в ячейке $i + 1$ и с вероятностью $1 - p$ частица остается на месте. Если ячейка $i + 1$ занята, то частица не может переместиться.

Введем понятие пространства состояний кольцевой решетки $S = \{s_0, s_1, \dots, s_{C_N^M - 1}\}$, где общее количество возможных состояний C_N^M — число сочетаний из N элементов по M . Каждое состояние s_j , $j = 0, 1, \dots, C_N^M - 1$ можно представить вектором длины N ($x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{N-1}$), где элемент $x_i = 1$ если ячейка i занята и $x_i = 0$, если

ячейка i свободна. При этом $\sum_{i=0}^{N-1} x_i = M$.

Матрица переходов P имеет размер $C_N^M \times C_N^M$.

Рассмотрим пример для $N = 4$, $M = 2$.

Состояния системы:

$$S = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}.$$

Рассмотрим начальное состояние $s_0 = (1, 1, 0, 0)$. Возможные переходы:

- $(1, 1, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 0, 0)$ с вероятностью $1 - p$;
- $(1, 1, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 1, 0)$ с вероятностью p .

Рассмотрим начальное состояние $s_1 = (1, 0, 1, 0)$. Возможные переходы:

- $(1, 0, 1, 0) \rightarrow (1, 0, 1, 0)$ с вероятностью $(1 - p)^2$;
- $(1, 0, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 1, 0)$ с вероятностью $p(1 - p)$;
- $(1, 0, 1, 0) \rightarrow (1, 0, 0, 1)$ с вероятностью $(1 - p)p$;
- $(1, 0, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 0, 1)$ с вероятностью p^2 .

Рассмотрим начальное состояние $s_2 = (1, 0, 0, 1)$. Возможные переходы:

- $(1, 0, 0, 1) \rightarrow (1, 0, 0, 1)$ с вероятностью $1 - p$;
- $(1, 0, 0, 1) \rightarrow (0, 1, 0, 1)$ с вероятностью p .

Рассмотрим начальное состояние $s_3 = (0, 1, 1, 0)$. Возможные переходы:

- $(0, 1, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 1, 0)$ с вероятностью $1 - p$;
- $(0, 1, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 0, 1)$ с вероятностью p .

Рассмотрим начальное состояние $s_4 = (0, 1, 0, 1)$. Возможные переходы:

- $(0, 1, 0, 1) \rightarrow (0, 1, 0, 1)$ с вероятностью $(1 - p)^2$;
- $(0, 1, 0, 1) \rightarrow (0, 0, 1, 1)$ с вероятностью $p(1 - p)$;
- $(0, 1, 0, 1) \rightarrow (1, 1, 0, 0)$ с вероятностью $(1 - p)p$;
- $(0, 1, 0, 1) \rightarrow (1, 0, 1, 0)$ с вероятностью p^2 .

Рассмотрим начальное состояние $s_5 = (0, 0, 1, 1)$. Возможные переходы:

- $(0, 0, 1, 1) \rightarrow (0, 0, 1, 1)$ с вероятностью $1 - p$;
- $(0, 0, 1, 1) \rightarrow (1, 0, 1, 0)$ с вероятностью p .

Таким образом, для $N = 4$, $M = 2$ получится матрица $P_{6 \times 6}$:

$$P_{6 \times 6} = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-p)^2 & p(1-p) & (1-p)p & p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & p & 0 \\ (1-p)p & p^2 & 0 & 0 & (1-p)^2 & p(1-p) \\ 0 & p & 0 & 0 & 0 & 1-p \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Пусть π_i — стационарная вероятность состояния s_i ; p_{ij} — вероятность перехода из состояния s_i в состояние s_j , $i, j = 0, 1, \dots, C_N^M - 1$.

Стационарные вероятности состояний удовлетворяют системе уравнений

$$\pi_i \sum_{j=0}^{C_N^M - 1} p_{ij} = \sum_{j=0}^{C_N^M - 1} \pi_j p_{ji}, \quad i, j = 0, \dots, C_N^M - 1, \quad (4)$$

$$\sum_{i=0}^{C_N^M - 1} \pi_i = 1. \quad (5)$$

Пусть $k(s_i)$ — число «кластеров», имеющих в состоянии цепи s_i . Под кластером понимается группа соседних ячеек, занятых частицами, отделенная от других кластеров свободными ячейками. Если цепь находится в состоянии s_i , то число частиц, которые могут переместиться, равно числу кластеров $k(s_i)$, $0 \leq k(s_i) \leq M$. Существует $2^{k(i)}$ состояний, в которые цепь может перейти из состояния s_i . Пусть система из состояния s_i может попасть за один шаг времени в состояние s_j , $1 < j < C_N^M - 1$ путем перемещения $l(s_i, s_j)$ частиц $0 \leq l(s_i, s_j) \leq k(s_i)$.

Тогда

$$p_{ij} = p^{l(s_i, s_j)} (1-p)^{k(s_i)-l(s_i, s_j)}, \quad l(s_i, s_i) = 0. \quad (6)$$

Вероятность того, что на данном шаге система останется в состоянии s_i , равна вероятности того, что из $k(s_i)$ частиц ни одна не переместится, $p_{ii} = (1-p)^{k(s_i)}$, откуда

$$\sum_{j=0, j \neq i}^{C_N^M - 1} p_{ij} = 1 - (1-p)^{k(s_i)}. \quad (7)$$

Обозначим через $S(k, N, M)$ число состояний с $0 \leq k \leq M$ кластерами при числе ячеек N и числе частиц M .

Лемма 1. Имеет место равенство

$$S(k, N, M) = v = \begin{cases} \frac{N}{k} C_{M-1}^{k-1} C_{N-M-1}^{k-1}, & k \leq \min(M, N-M), \\ 0, & k > \min(M, N-M). \end{cases} \quad (8)$$

Доказательство. Пусть $R(k, M)$ — число способов с учетом порядка представления числа M в виде суммы k натуральных слагаемых ($k \leq \min(M, N-M)$). Это число равно числу способов из $M-1$ элементов выбрать $k-1$ элементов:

$$R(k, M) = C_{M-1}^{k-1}. \quad (9)$$

Найдем число $A(k, N, M)$ состояний множества A , которые содержат k кластеров и при которых ячейка 1 свободна, а ячейка 2 занята. Это число равно произведению числа способов распределить M частиц между k кластерами $R(k, M)$, умноженному на число способов выбрать длины $(k-1)$ промежутков (это число равно $R(k, N-M)$). Таким образом, если $k \leq \min(M, N-M)$:

$$A(k, N, M) = R(k, M) R(k, N-M). \quad (10)$$

Из (9)–(10) следует, что

$$A(k, N, M) = C_{M-1}^{k-1} C_{N-M-1}^{k-1}. \quad (11)$$

Пусть $a = (i_1, \dots, i_N)$ — произвольное состояние из множества A . Обозначим через $b(a, d)$ состояние, ставящееся в соответствие состоянию a при повороте на d ячеек, а именно $b(a, d) = (i_{N-d+1}, i_{N-d+2}, \dots, i_N, i_1, \dots, i_{N-d})$. Любое состояние с k кластерами совпадает с $b(a, d)$ при k различных упорядоченных парах (a, d) , где a — некоторый элемент множества A , а d — одно из чисел $0, 1, \dots, N-1$. Всего существует $N \cdot A(k, N, M)$ таких различных пар. Таким образом,

$$S(k, N, M) = \frac{N}{k} A(k, N, M). \quad (12)$$

Из (11), (12) следует (9). Лемма доказана.

Теорема 1. Система (4)–(5) имеет решение

$$\pi_i = \frac{C}{(1-p)^{k(s_i)-1}}, \quad i = 0, \dots, C_N^M - 1, \quad (13)$$

где константа

$$C = \left(\sum_{k=1}^{\min(M, N-M)} \frac{N}{k} \cdot C_{M-1}^{k-1} C_{N-M-1}^{k-1} \frac{1}{(1-p)^{k-1}} \right)^{-1}. \quad (14)$$

Доказательство. Перепишем (4) в виде

$$\sum_{j=0}^{C_N^M - 1} \pi_i p_{ij} = \sum_{j=0}^{C_N^M - 1} \pi_j p_{ji}, \quad i, j = 0, \dots, C_N^M - 1. \quad (15)$$

Пусть $F(s_i)$ — множество состояний, в которые можно попасть из состояния s_i за один шаг; $F(s_i, l)$ — подмножество множества $F(s_i)$ состояний, содержащее состояния, в которые можно попасть из состояния s_i посредством перехода l частиц; $B(s_i)$ — подмножество состояний $B(s_i)$, из которых можно попасть в состояние s_i за один шаг; $B(s_i, l)$ — подмножество $B(s_i)$, содержащее состояния, из которых можно попасть в состояние s_i посредством перехода l частиц.

Имеем

$$p_{ij} = \begin{cases} 0, & j \notin F(s_i), i, j = 0, \dots, C_N^M - 1, \\ p^l (1-p)^{k(s_i)-l}, & j \in F(s_i, l), i, j = 0, \dots, C_N^M - 1, l = 1, \dots, k(s_i), \end{cases} \quad (16)$$

$$p_{ji} = \begin{cases} 0, & j \notin B(s_i), i, j = 0, \dots, C_N^M - 1, \\ p^l (1-p)^{k(s_i)-l}, & j \in B(s_i, l), i, j = 0, \dots, C_N^M - 1, l = 1, \dots, k(s_i). \end{cases} \quad (17)$$

Учитывая (16), (17), перепишем (15) в виде:

$$\sum_{l=1}^{k(s_i)} \text{card} F(s_i, l) \pi_i p^l (1-p)^{k(s_i)-l} = \sum_{l=1}^{k(s_i)} \sum_{j \in B(s_i, l)} \text{card} B(s_i, l) \pi_j p^l (1-p)^{k(s_i)-l}, i = 0, \dots, C_N^M - 1, \quad (18)$$

где через card обозначается число элементов множества A .

Подставляя (13) в (18), перепишем (18) в виде

$$\sum_{l=1}^{k(s_i)} \text{card} F(s_i, l) p^l (1-p)^{1-l} = \sum_{l=1}^{k(s_i)} \text{card} B(s_i, l) p^l (1-p)^{1-l}. \quad (19)$$

В силу симметрии $\text{card} B(s_i, l) = \text{card} F(s_i, l), l = 1, \dots, k(s_i), i = 0, \dots, C_N^M - 1$.

Таким образом, решение (13) удовлетворяет системе (19), а, следовательно, и системе (4)–(5). Формула (14) для вычисления константы C следует из (6), (13) и леммы 1. Теорема 1 доказана.

Оценка средней скорости на базе статистической механики. В [11] выдвинута гипотеза, что для средней скорости частиц верна формула

$$v = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\rho p(1-\rho)}}{2\rho}, \quad (20)$$

где $\rho = M/N$ — плотность потока частиц.

В работе [12] показано, что для конечных систем (конечное N) корреляции между машинами и их взаимное влияние на движение не могут быть полностью учтены в формуле (20). Это связано с тем, что в конечных системах существует ограниченное количество машин и их движение может быть более сложным из-за взаимодействий.

В пределе при $N \rightarrow \infty$ (термодинамический предел) система становится бесконечно большой и корреляции между машинами становятся локальными. В этом случае формула (20) становится точной, так как влияние граничных условий и конечности системы исчезает.

В [13] представлено строгое доказательство формулы для средней скорости v в модели на основе асимметричных процессов с запретами (Asymmetric Simple Exclusion Process — ASEP) на кольце. Это доказательство основано на использовании рекурсивных формул для функции распределения и гипергеометрических функций, что позволяет получить точное выражение для средней скорости v в зависимости от плотности ρ и вероятности p .

Отметим, что для создания интеллектуальных транспортных систем (ИТС) важны именно короткие участки магистрали, так как мониторинг транспортных потоков с помощью камер, размещаемых на мачтах освещения или светофорах, имеет ограниченную область захвата полосы.

Оценка средней скорости на базе стохастической модели. Так как в реальных условиях задача анализа трафика осуществляется на конечных участках магистрали для оценки средней скорости можно применять формулы на основе теории вероятностей.

Пусть $H(t)$ — среднее суммарное число перемещений частиц на отрезке времени $(0, t)$. Как следует из эргодической теоремы теории марковских процессов, предел

$$v = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{Mt} \quad (21)$$

существует и не зависит от начальной конфигурации частиц. Значение v называется скоростью частицы.

Тогда количество движения рассматриваемой системы за один шаг равно:

$$Q = \sum_{i=0}^{C_N^M - 1} \pi_i k(s_i) p. \quad (22)$$

В [14] для оценки средней скорости частиц получена следующая явная формула:

$$v = \frac{N}{M} \sum_{k=1}^{\min(M, N-M)} \frac{C}{(1-p)^{k-1}} \cdot C_{M-1}^{k-1} C_{N-M-1}^{k-1} \cdot p, \quad (23)$$

$$C = \left(\sum_{k=1}^{\min(M, N-M)} \frac{N}{k} \cdot C_{M-1}^{k-1} C_{N-M-1}^{k-1} \frac{1}{(1-p)^{k-1}} \right)^{-1},$$

где C_N^M — число сочетаний из N элементов по M .

Формула следует из утверждения Теоремы 1, Леммы 1 и формулы (22). В [15] дан другой вывод формулы (23).

Оценка средней скорости на базе систем массового обслуживания. Научным коллективом под руководством доктора технических наук Яшиной М.В., куда входит автор статьи, было обнаружено, что для вычисления средней скорости может применяться формула на базе систем массового обслуживания, представленная в [16].

Средняя скорость равна пределу отношения рекурсивных процедур

$$v = \frac{r_2(N-M, M)}{r_1(N-M, M)}, \quad (24)$$

где $q = 1 - p$, а $r_1(N-M, M)$ и $r_2(N-M, M)$ рекурсивные процедуры:

$$r_1(1, M) = \frac{M}{p}, \quad M \geq 1, \quad (25)$$

$$r_1(N-M, 1) = \left(\frac{q}{p}\right)^{N-M} \frac{1}{q}, \quad N-M \geq 1, \quad (26)$$

$$r_2(2, M) = \frac{q+M-1}{p}, \quad M \geq 1, \quad (27)$$

$$r_1(N-M, M) = r_1(N-M, M-1) + \frac{q}{p} r_2(N-M-1, M) + r_1(N-M-1, M-1), \quad N-M \geq 2, \quad M \geq 2, \quad (28)$$

$$r_2(N-M, M) = r_1(N-M-1, M-1) + \frac{q}{p} r_2(N-M-1, M), \quad N-M \geq 3, \quad M \geq 1. \quad (29)$$

Сравнение оценок средней скорости предложенных методов. Сравним зависимости оценки средней скорости от плотности для разных значениях вероятности для формул (20), (23) и (24) (рис. 3).

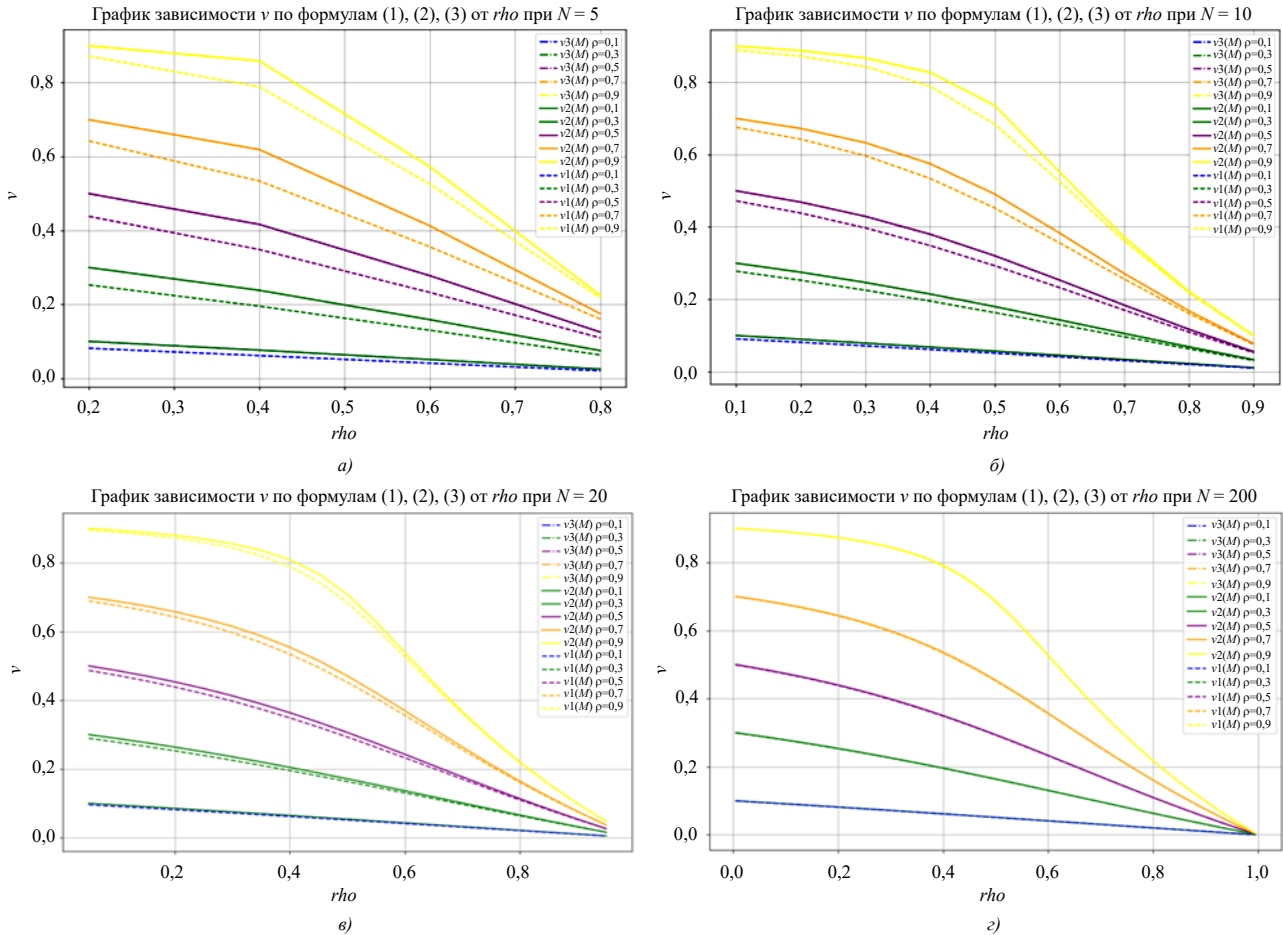


Рис. 3. Оценка средней скорости по формулам (20), (23) и (24) для a — $N = 5$; b — $N = 10$; v — $N = 20$; z — $N = 200$

Оценка средней скорости v по формулам (23) и (24) дает одинаковое значение, поэтому графики накладываются друг на друга. Из графиков видно, что для небольших N значения средней скорости v по формуле (20) отличаются от значений по формулам (23), (24). При росте N разница между значениями уменьшается.

На рис. 4 представлена зависимость средней скорости v , вычисляемой по формулам (20), (23) и (24) от вероятности $p \in [0,01, 0,99]$ и количества частиц $M \in [1, N-1]$.

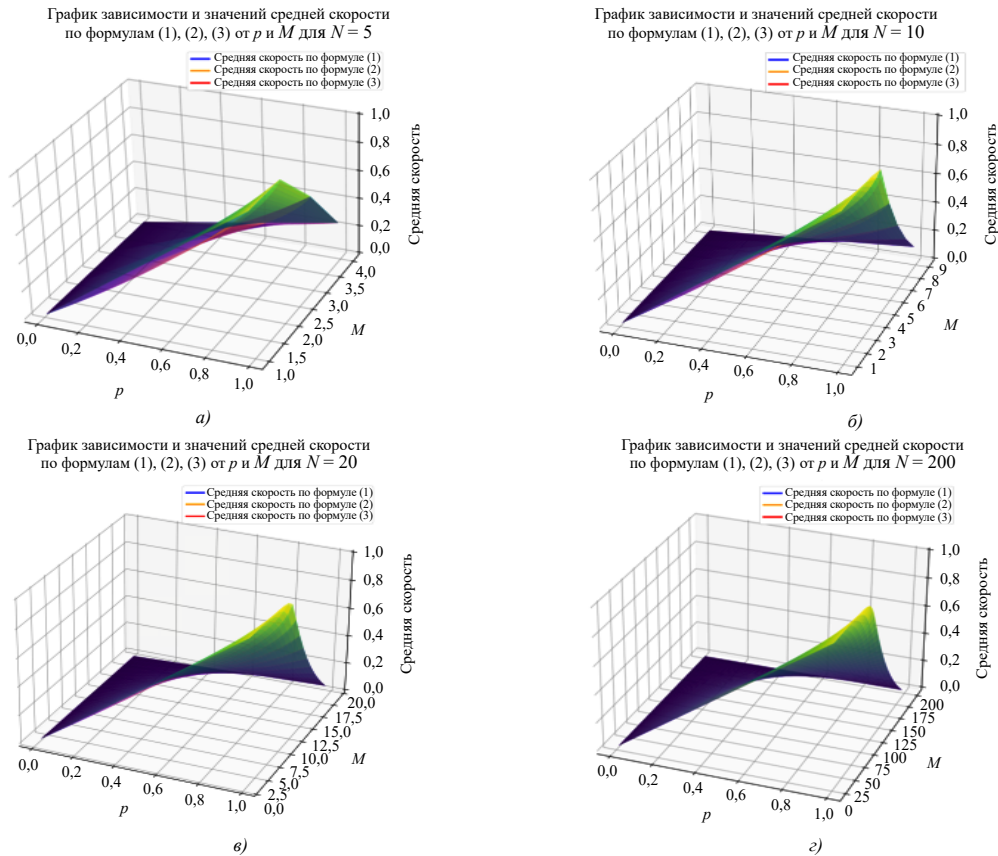


Рис. 4. Зависимость средней скорости v , вычисляемой по формулам (20), (23) и (24), от вероятности $p \in [0,01, 0,99]$ и количества частиц $M \in [1, N-1]$ для а — $N = 5$; б — $N = 10$; в — $N = 20$; г — $N = 200$

Из графиков можно оценить характер изменения средней скорости v , вычисляемой по формулам (20), (23) и (24) от вероятности $p \in [0,01, 0,99]$ и количества частиц $M \in [1, N-1]$.

На рис. 5. представлена разница значений средней скорости v , вычисляемой по формулам (20) и (23) от вероятности $p \in [0,01, 0,99]$ и количества частиц $M \in [1, N-1]$. Формула (24) не рассматривается, так как ее значения совпадают со значениями средней скорости, вычисляемой по формуле (23).

Из графиков виден характер роста погрешности в двух направлениях — при вероятности p приближающейся к 0,5, и низкой плотности частиц p , а также при плотности частиц p приближающейся к 1, и плотности частиц p , приближающейся к 0,5. При небольших N погрешность находится в пределах сотых долей, в то время как при увеличении N падает до тысячных.

Сравнение оценки средней скорости с компьютерной симуляцией. Для численной оценки значений средней скорости, вычисляемых по формулам (20), (23), (24), была реализована компьютерная симуляция, моделирующая движения частиц по замкнутой решетке. Пользователем задается число ячеек N число частиц M , которое равномерно распределяется по всем ячейкам, вероятность перемещения частицы p на следующей итерации при условии, что следующая ячейка пуста и количество итераций t , а также количество запусков симуляции T .

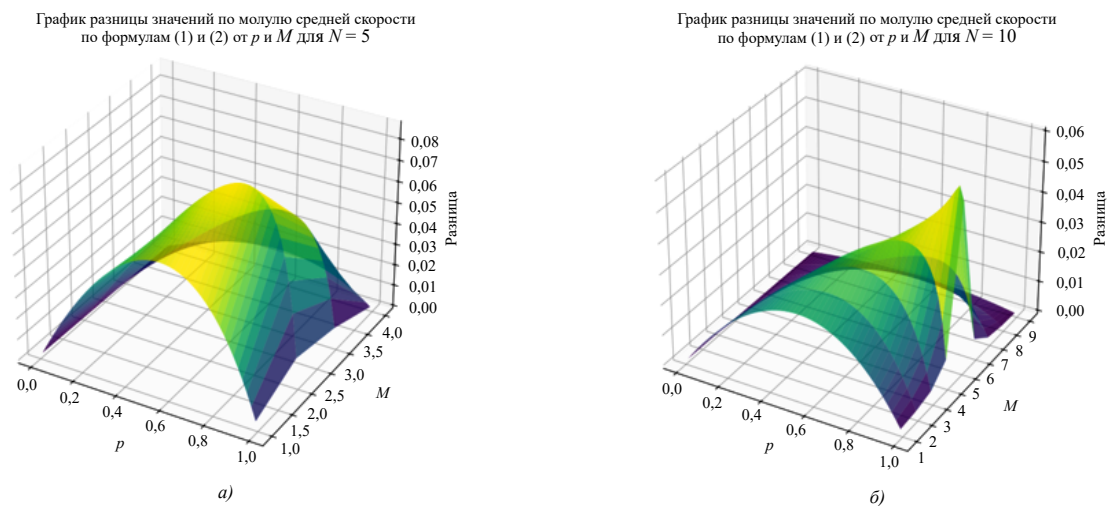


График разницы значений по модулю средней скорости по формулам (1) и (2) от p и M для $N = 20$

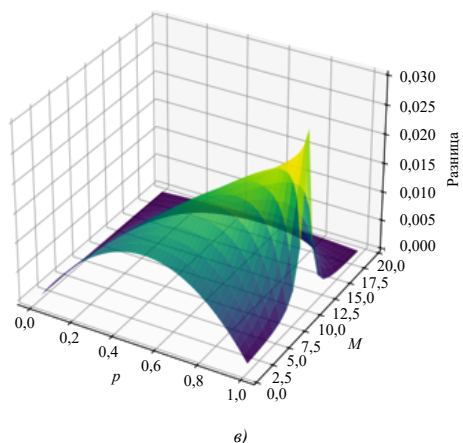


График разницы значений по модулю средней скорости по формулам (1) и (2) от p и M для $N = 200$

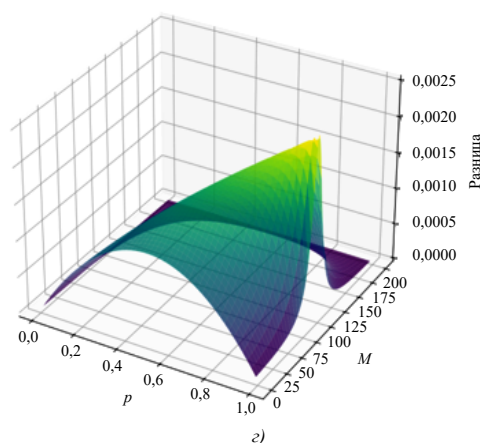


Рис. 5. Разница значений средней скорости v , вычисляемой по формулам (20) и (23), от вероятности $p \in [0,01, 0,99]$ и количества частиц $M \in [1, N-1]$ для a — $N = 10$, b — $N = 10$, c — $N = 20$, d — $N = 200$

На каждой итерации считается мгновенная скорость v_{cur} как количество частиц, совершивших перемещение, к общему числу частиц и средняя скорость v_{avg} как сумма всех мгновенных скоростей на количество итераций.

По завершению всех запусков считается средняя скорость v как сумма всех средних скоростей в конце каждого запуска симуляции к количеству запусков симуляции. Подсчет средних скоростей проводился при $t = 2000$, $T = 10$.

В таблицах 1–4 приводятся результаты вычислений средней скорости по формулам (20) и (23) (формула (24) не указывается, так как значения, вычисляемые с помощью нее идентичны формуле (23)), а также по результатам компьютерной симуляции (sim) для разного числа ячеек N .

Таблица 1

Средняя скорость для $N = 5$

p/ρ	$\rho = 0,3$			$\rho = 0,5$			$\rho = 0,7$			$\rho = 0,9$		
	(20)	(23)	sim	(20)	(23)	sim	(20)	(23)	sim	(20)	(23)	sim
$p = 0,1$	0,081	0,100	0,101	0,062	0,076	0,074	0,041	0,051	0,050	0,020	0,025	0,025
$p = 0,3$	0,253	0,300	0,302	0,195	0,238	0,237	0,130	0,159	0,159	0,063	0,075	0,074
$p = 0,5$	0,438	0,500	0,500	0,349	0,417	0,418	0,232	0,278	0,275	0,110	0,125	0,125
$p = 0,7$	0,643	0,700	0,700	0,534	0,619	0,622	0,356	0,413	0,415	0,161	0,175	0,173
$p = 0,9$	0,872	0,900	0,896	0,789	0,859	0,862	0,526	0,573	0,572	0,218	0,225	0,225

Таблица 2

Средняя скорость для $N = 10$

p/ρ	$\rho = 0,1$			$\rho = 0,3$			$\rho = 0,5$			$\rho = 0,7$			$\rho = 0,9$		
	(20)	(23)	sim	(20)	(23)	sim	(20)	(23)	sim	(20)	(23)	sim	(20)	(23)	sim
$p = 0,1$	0,091	0,100	0,100	0,072	0,079	0,079	0,051	0,057	0,057	0,031	0,034	0,034	0,010	0,011	0,011
$p = 0,3$	0,278	0,300	0,299	0,225	0,247	0,243	0,163	0,180	0,182	0,097	0,106	0,104	0,031	0,033	0,032
$p = 0,5$	0,472	0,500	0,503	0,397	0,429	0,429	0,293	0,320	0,320	0,170	0,184	0,183	0,052	0,056	0,055
$p = 0,7$	0,676	0,700	0,705	0,597	0,633	0,632	0,452	0,491	0,490	0,256	0,271	0,269	0,075	0,078	0,078
$p = 0,9$	0,889	0,900	0,897	0,843	0,867	0,866	0,684	0,736	0,734	0,361	0,372	0,371	0,099	0,100	0,100

Таблица 3

Средняя скорость для $N = 20$

p/ρ	$\rho = 0,1$			$\rho = 0,3$			$\rho = 0,5$			$\rho = 0,7$			$\rho = 0,9$		
	(20)	(23)	sim	(20)	(23)	sim	(20)	(23)	sim	(20)	(23)	sim	(20)	(23)	sim
$p = 0,1$	0,091	0,095	0,093	0,072	0,075	0,075	0,051	0,054	0,053	0,031	0,032	0,031	0,010	0,011	0,010
$p = 0,3$	0,278	0,289	0,285	0,225	0,235	0,232	0,163	0,171	0,171	0,097	0,101	0,101	0,031	0,032	0,031

Окончание таблицы 3

p/ρ	$\rho = 0,1$			$\rho = 0,3$			$\rho = 0,5$			$\rho = 0,7$			$\rho = 0,9$		
	(20)	(23)	sim	(20)	(23)	sim	(20)	(23)	sim	(20)	(23)	sim	(20)	(23)	sim
$p = 0,5$	0,472	0,486	0,478	0,397	0,413	0,411	0,293	0,306	0,305	0,170	0,177	0,179	0,052	0,054	0,054
$p = 0,7$	0,676	0,688	0,691	0,597	0,615	0,615	0,452	0,471	0,472	0,256	0,264	0,263	0,075	0,076	0,076
$p = 0,9$	0,889	0,895	0,892	0,843	0,856	0,855	0,684	0,708	0,706	0,361	0,367	0,366	0,099	0,099	0,099

Таблица 4

Средняя скорость для $N = 200$

p/ρ	$\rho = 0,1$			$\rho = 0,3$			$\rho = 0,5$			$\rho = 0,7$			$\rho = 0,9$		
	(20)	(23)	sim	(20)	(23)	sim	(20)	(23)	sim	(20)	(23)	sim	(20)	(23)	sim
$p = 0,1$	0,091	0,091	0,091	0,072	0,072	0,070	0,051	0,052	0,051	0,031	0,031	0,030	0,010	0,010	0,010
$p = 0,3$	0,278	0,279	0,279	0,225	0,226	0,225	0,163	0,164	0,163	0,097	0,097	0,096	0,031	0,031	0,031
$p = 0,5$	0,472	0,474	0,474	0,397	0,399	0,399	0,293	0,294	0,294	0,170	0,171	0,170	0,052	0,053	0,052
$p = 0,7$	0,676	0,677	0,674	0,597	0,599	0,598	0,452	0,454	0,453	0,256	0,257	0,256	0,075	0,075	0,074
$p = 0,9$	0,889	0,890	0,887	0,843	0,845	0,842	0,684	0,686	0,685	0,361	0,362	0,361	0,099	0,099	0,074

По таблицам видно, что значение средней скорости, вычисляемое по формулам (23), (24), ближе к результатам симуляции для небольших N . В целом погрешность между результатами для формул (20) и (23)–(24) полностью коррелирует с результатами, отображенными на рис. 5. Полученные результаты также совпадают с результатами сравнения формул (20) и (23) в [17, 18]. В том числе можно сделать вывод, что с ростом N результаты вычислений по формуле (20) все больше приближаются к результатам, полученным по формулам (23), (24) и компьютерному моделированию.

Оценка вычислительной сложности формул вычисления средней скорости. Проведем оценку вычислительной сложности формул вычисления средней скорости по формуле (20). Так как формула (20) не содержит циклов или рекурсий, и её вычисление зависит только от базовых операций и констант, то её вычислительная сложность является константной — $O(1)$.

Проведем оценку вычислительной сложности формул вычисления средней скорости по формуле (23). Сумма проходит по всем значениям k от 1 до $\min(M, N - M)$. Пусть $K = \min(M, N - M)$. Тогда сумма имеет K членов.

При вычислении каждого члена суммы нужно вычислить C_{M-1}^{k-1} , что требует $O(k)$ операций, и C_{N-M-1}^{k-1} , что требует также $O(k)$ операций. Вычисление оставшихся значений и умножение всех этих значений друг на друга — $O(1)$ операций. Таким образом, общая вычислительная сложность для одного члена суммы — $O(k)$. Поскольку сумма имеет K членов, общая сложность вычисления всей суммы — $O(\sum_{k=1}^K k) = O(K^2)$.

Общая вычислительная сложность формулы (23) определяется сложностью вычисления нормировочного коэффициента C и выражения для v . Поскольку оба эти вычисления имеют сложность $O(K^2)$, общая сложность также равна $O(K^2)$, где $K = \min(M, N - M)$.

Проведем оценку вычислительной сложности формул вычисления средней скорости по формуле (24). Обе функции r_1 и r_2 зависят от двух параметров: $N - M$ и M . Таким образом, общее количество уникальных состояний (или узлов в дереве рекурсии) равно числу возможных комбинаций $(M, N - M)$, где $N - M$ может принимать значения от 1 до $N - 1$, а M может принимать значения от 1 до $\min(M, N - M)$. Следовательно, общее число состояний — $O(N^2)$.

Глубина рекурсии для каждой функции определяется максимальным значением $N - M$ или M . В худшем случае глубина рекурсии равна $O(N)$. На каждом уровне рекурсии выполняются простые арифметические операции, которые требуют $O(1)$ операций. Таким образом, общее количество операций пропорционально количеству уникальных состояний.

Учитывая вышеуказанные факторы, общая вычислительная сложность формулы (24) составляет $O(N^2)$. Это связано с тем, что каждое состояние $(M, N - M)$ вычисляется ровно один раз, а общее число состояний равно $O(N^2)$. Таким образом, формула (20) — самая оптимальная с точки зрения вычислительной сложности. Формулы (23) и (24) обладают идентичной вычислительной сложностью.

Обсуждение и заключение. В работе представлена оценка предельной скорости однонаправленного транспортного потока с высокой вычислительной эффективностью. В качестве выводов можно выделить следующее:

1. Для небольших значений N , наиболее соответствующим реальным участкам трассы, захватываемым с помощью камер, для оценки средней скорости v наиболее подходят формулы (23) и (24), дающие эквивалентный результат, приближенный к результатам компьютерной симуляции.

2. Для оценки средней скорости v при больших N с помощью компьютерных вычислений для формулы (23) накладывается ограничение на потребляемую память ввиду необходимости подсчета больших факториалов. При $N < 310$ на используемой ЭВМ происходило переполнение памяти для $\rho \approx \frac{1}{2}$. Для таких случаев можно использовать формулу (24).

3. Для оценки средней скорости v при больших N с помощью компьютерных вычислений для формулы (24) накладывается ограничение на максимальную глубину рекурсии для значений r_1 и r_2 , из-за чего даже при вычислении с использованием методов динамического программирования может потребоваться больше времени, чем для вычислений по формуле (23), и может происходить переполнение стека вызовов.

4. Из полученных результатов очевидно, что при росте N оценка средней скорости по формуле (20) будет приближаться к значениям, вычисляемым по формулам (23), (24), требуя при этом существенно меньше вычислительных ресурсов. Таким образом, формула (23), давая эквивалентный формуле (24) результат при $N \rightarrow \infty$, может найти свое применение в задачах, связанных с системами массового обслуживания.

Список литературы / References

1. Femke van Wageningen-Kessels et al. Genealogy of traffic flow models. *EURO Journal on Transportation and Logistics*. 2015;4(4):445–473.
2. Payne H. Models of freeway traffic and control. In: Bekey, G.A. (ed.) *Mathematical Models of Public Systems*. Simulation Council, La Jolla, CA. 1971;1:51–61.
3. Kerner B., Konhäuser P. Structure and parameters of clusters in traffic flow. *Physical Review E*. 1994;50:54–83.
4. Aw A., Rascle M. Resurrection of “second order models” of traffic flow. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2000;60:916–938.
5. Zhang H.M. A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior. *Transportation Research. B*. 2002;36(3):275–290.
6. Lighthill M.J., Whitham G.B. On kinematic waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads. *Proceedings of the royal society of London. series a. mathematical and physical sciences*. 1955; 229(1178):317–345.
7. Richards P.I. Shock waves on the highway. *Operations research*. 1956;4(1):42–51.
8. Четверушкин Б.Н. *Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений*. Москва: МАКС Пресс; 2004. 328 с.
9. Chetverushkin, B.N. *Kinetic schemes and quasi-gasdynamic system of equations*. Moscow: MAKS Press; 2004. 328 p.
9. Трапезникова М.А., Чечина А.А., Чурбанова Н.Г. Моделирование движения автомобильного транспорта с использованием макро- и микроскопических моделей. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):60–72. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-60-72>
- Trapeznikova M.A., Chechina A.A., Churbanova N.G. Simulation of Vehicular Traffic using Macro- and Microscopic Models. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(2):60–72. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-2-60-72>
10. Yashina M, Tatashev A. Traffic model based on synchronous and asynchronous exclusion processes. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2020;43(14):8136–8146.
11. Schadschneider A., Schreckenberg M. Cellular automation models and traffic flow. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 1993;26(15):L679.
12. Schreckenberg M. et al. Discrete stochastic models for traffic flow. *Physical Review E*. 1995;51(4):2939.
13. Kanai M., Nishinari K., Tokihiro T. Exact solution and asymptotic behavior of the asymmetric simple exclusion process on a ring. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 2006;39(29):9071.
14. Buslaev A.P., Tatashev A.G. Particles flow on the regular polygon. *Journal of Concrete and Applicable Mathematics*. 2011;9(4):290–303.
15. Buslaev A.P., Tatashev A.G. Monotonic random walk on a one-dimensional lattice. *Journal of Concrete & Applicable Mathematics*. 2012;10:71–79.
16. Daduna H. *Queueing Networks with Discrete Time Scale: Explicit Expressions for the Steady State Behavior of Discrete Time Stochastic Networks*. Springer. 2003; 2046.
17. Яшина М.В., Таташев А.Г. *Сети Буслаева: динамические системы потоков частиц на регулярных сетях с конфликтными точками*. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований; 2023. 216 с.
- Yashina M.V., Tatashev A.G. *Buslaev networks: dynamical systems of particle flow on regular networks with conflict points*. IKI Publishing House. 2023. (In Russ.)
18. Бугаев А.С., Буслаев А.П., Козлов В.В., Таташев А.Г., Яшина М.В. Моделирование трафика: монотонное случайное блуждание по сети. *Математическое моделирование*. 2013;25(8):3–21.
- Bugaev A.S., Buslaev A.P., Kozlov V.V., Tatashev A.G., Yashina M.V. Modelling of traffic: monotonic random walk through the network. *Mathematical Modelling*. 2013;25(8):3–21. (In Russ.)

Об авторе:

Иван Алексеевич Кутейников, старший преподаватель кафедры инженерии и математики прикладных систем искусственного интеллекта Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета (МАДИ) (125319, Российская Федерация, г. Москва, Ленинградский пр-т, 64), [ORCID](#), [SPIN-код](#), ivankuteynikov09@gmail.com

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

About the Author:

Ivan A. Kuteynikov, Senior Lecturer, Department of Engineering and Mathematics of Applied Systems of Artificial Intelligence, Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI) (64, Leningradsky Ave., Moscow, 125319, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), ivankuteynikov09@gmail.com

Conflict of Interest Statement: the author do not have any conflict of interest.

Author has read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 21.01.2025

Поступила после рецензирования / Reviewed 20.02.2025

Принята к публикации / Accepted 28.02.2025

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

INFORMATION TECHNOLOGY



УДК 519.6

Оригинальное эмпирическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-52-60>


Автоматическое распознавание значений глубины на лоцманских картах с использованием методов глубокого обучения

Е.О. Рахимбаева , Т.А. Алышов , Ю.В. Белова

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

✉ lana_rahimbaeva@mail.ru

Аннотация

Введение. Рассматривается проблема автоматического распознавания текста на изображениях, в частности задача извлечения информации о глубинах с лоцманских карт. Актуальность данной задачи обусловлена необходимостью автоматизации обработки больших объемов картографических данных для построения карты глубин, пригодной для математического моделирования гидродинамических и гидробиологических процессов. Целью работы является разработка программного средства (ПС) LocMap, предназначенного для автоматического обнаружения и распознавания значений глубин, представленных в виде чисел на изображениях лоцманских карт.

Материалы и методы. В работе использованы методы глубокого обучения, а именно сверточные нейронные сети ResNet для извлечения признаков, алгоритм дифференцируемой бинаризации DB для обнаружения текста и архитектура Scene Text Recognition with a Single Visual Model (SVTR) для распознавания текста.

Результаты исследования. Разработанное ПС позволяет загружать изображения лоцманских карт, выполнять предобработку, обнаруживать и распознавать значения глубин, выделять их на изображении и сохранять результаты в текстовый файл. Результаты тестирования показали, что разработанная система обеспечивает высокую точность распознавания значений глубин на лоцманских картах.

Обсуждение и заключение. Полученные результаты демонстрируют практическую значимость разработанного решения для автоматизации обработки лоцманских карт.

Ключевые слова: распознавание текста, лоцманские карты, глубина, глубокое обучение, сверточные нейронные сети, алгоритм дифференцируемой бинаризации, Single Visual Model

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–71–10102, <https://rscf.ru/project/22-71-10102/>

Для цитирования. Рахимбаева Е.О., Алышов Т.А., Белова Ю.В. Автоматическое распознавание значений глубины на лоцманских картах с использованием методов глубокого обучения. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(1):52–60. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-52-60>

Original Empirical Research

Automatic Depth Value Recognition on Pilot Charts Using Deep Learning Methods

Elena O. Rakhimbaeva , Tajaddin A. Alyshov , Yulia V. Belova

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

✉ lana_rahimbaeva@mail.ru

Abstract

Introduction. This study addresses the problem of automatic text recognition in images, specifically the extraction of depth information from pilot charts. The relevance of this task is driven by the need to automate the processing of large volumes of cartographic data to create depth maps suitable for mathematical modelling of hydrodynamic and hydrobiological processes. The objective of this work is to develop the software tool LocMap, designed for the automatic detection and recognition of depth values represented as numbers on pilot chart images.

Materials and Methods. The study employs deep learning methods, including convolutional neural networks (ResNet) for feature extraction, the Differentiable Binarization (DB) algorithm for text detection, and the Scene Text Recognition with a Single Visual Model (SVTR) architecture for text recognition.

Results. The developed software allows users to upload pilot chart images, perform preprocessing, detect and recognize depth values, highlight them in the image, and save the results in a text file. Testing results demonstrated that the system ensures high accuracy in recognizing depth values on pilot charts.

Discussion and Conclusion. The obtained results highlight the practical significance of the developed solution for automating the processing of pilot charts.

Keywords: text recognition, pilot charts, depth, deep learning, convolutional neural networks, differentiable binarization algorithm, Single Visual Model

Funding. This research was supported by the Russian Science Foundation, grant No. 22–71–10102, <https://rscf.ru/project/22-71-10102/>

For Citation. Rakhimbaeva E.O., Alyshov T.A., Belova Yu.V. Automatic Depth Value Recognition on Pilot Charts Using Deep Learning Methods. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(1):52–60. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-52-60>

Введение. В современном мире наблюдается стремительный рост объема информации, представленной в виде изображений. Это обуславливает необходимость разработки эффективных методов автоматизированного извлечения и анализа данных, содержащихся на изображениях. Одной из важных задач в этой области является распознавание текста с изображений (Optical Character Recognition, OCR), которое находит широкое применение в различных сферах, включая оцифровку документов, автоматическое распознавание номерных знаков и анализ картографических данных.

Получение данных на основе обработки изображений, в том числе полученных со спутников, приобретает все большее значение для моделирования процессов, происходящих в сложных природных системах. Остро стоит вопрос получения исходной информации для математических моделей гидродинамики и гидробиологии [1] и уточнения параметров этих моделей [2]. Разработка методов обработки спутниковых снимков Земли позволяет получать исходные данные для прогнозного моделирования процессов, происходящих в водных объектах, в частности, Азовском и Черном морях [3].

Лоцманские карты представляют собой особый вид карт, содержащих подробную информацию о водных бассейнах и предназначенных для обеспечения безопасной навигации судах. Одной из ключевых задач при работе с лоцманскими картами является определение глубин, которые, как правило, представлены на картах в виде обычных чисел и чисел с нижним индексом. Традиционные методы обработки лоцманских карт, основанные на ручном анализе, являются очень трудоемкими, с высокой вероятностью возникновения ошибки. В связи с этим актуальной задачей является разработка автоматизированных методов распознавания значений глубин на лоцманских картах.

Целью данной работы является разработка программного средства для автоматического обнаружения и распознавания значений глубин на лоцманских картах с использованием методов глубокого обучения. Для достижения этой цели были поставлены следующие задачи:

- провести анализ существующих методов распознавания текста на изображениях;
- собрать и подготовить обучающую выборку изображений лоцманских карт;
- разработать алгоритм аугментации данных для повышения устойчивости модели к различным искажениям;
- разработать и обучить модель для обнаружения и распознавания значений глубин;
- разработать программное средство с удобным пользовательским интерфейсом;
- провести тестирование и оценку качества работы разработанного программного средства.

Материалы и методы

Описание набора данных. В настоящей работе использовался набор данных, состоящий из 1590 изображений лоцманских карт Азовского и Черного морей. Изображения были получены из открытых источников в сети Интернет. Изображения имеют разрешение 400×300 пикселей и представляют собой участки морей с указанием глубин, фарватера, береговой линии и других навигационных объектов. На рис. 1 представлен пример изображения лоцманской карты из набора данных.

Для обучения модели были выделены следующие элементы, подлежащие распознаванию: числовые значения глубин, представленные арабскими цифрами, и числовые значения с нижним индексом, обозначающим десятые доли метра. Элементы, не являющиеся значениями глубин, например, обозначения береговой линии, названия объектов, километровые отметки, не подлежали распознаванию.

Разметка данных. Разметка данных выполнялась вручную с использованием программного обеспечения PPOCRLabel. Выделялись элементы, подлежащие распознаванию, и им присваивалась соответствующая метка в виде числа, например, «10» или «12.4». Всего было размечено 1590 изображений, содержащих около 12500 значений глубин. На рис. 2 представлен пример разметки изображения лоцманской карты.

В процессе разметки были выявлены следующие сложности: низкое качество некоторых изображений, плотная компоновка объектов на карте, обрезанные части значений глубин.

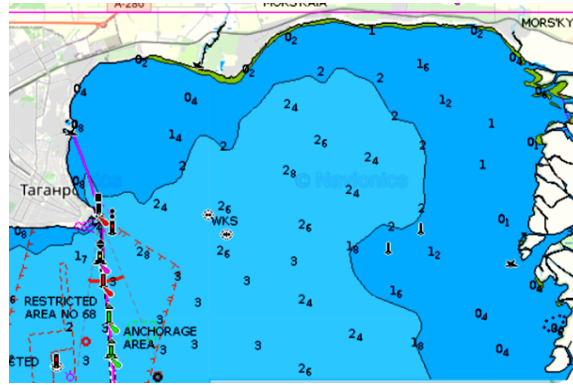


Рис. 1. Лоцманская карта (карта глубин)

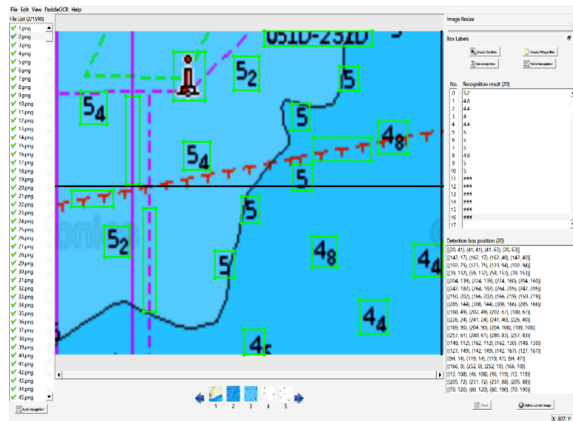


Рис. 2. Разметка данных на изображении

Аугментация данных. Для повышения устойчивости модели к различным искажениям и увеличения объема обучающей выборки был применен алгоритм аугментации данных. Аугментация включала следующие методы [4]:

- масштабирование (размер изображений изменялся в 0,8–1,2 раза с сохранением пропорций);
- сдвиг (изображения сдвигались по горизонтали и вертикали на случайное количество пикселей в диапазоне от –50 до +50 пикселей);
- применение фильтров (использовались фильтры размытия по Гауссу и усиление резкости).

На рис. 3 представлены примеры аугментированных изображений.

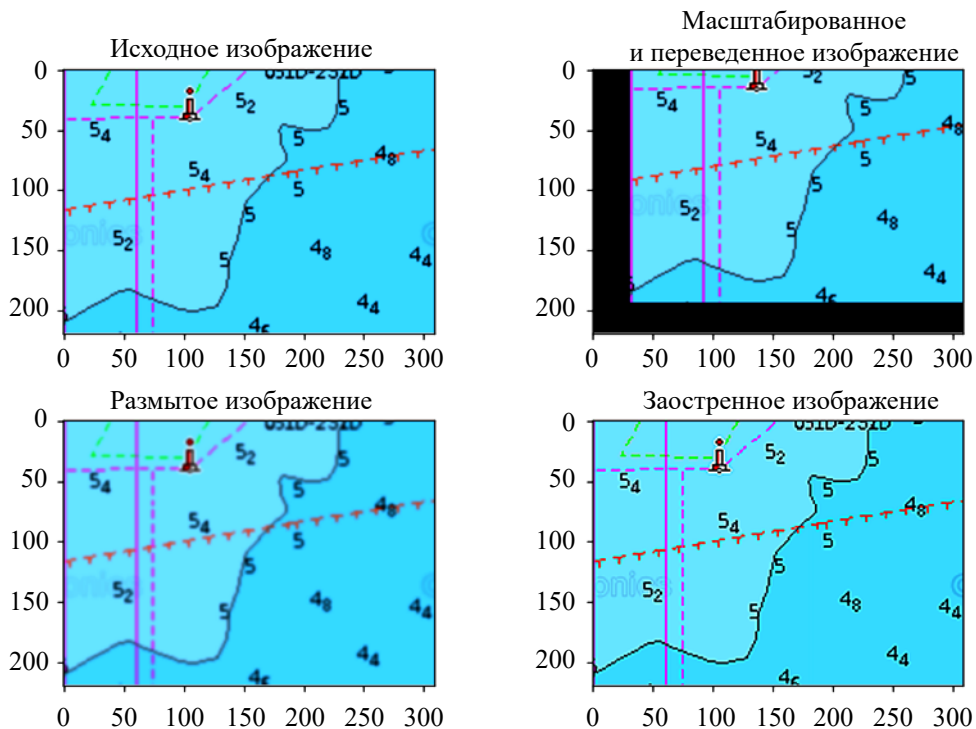


Рис. 3. Примеры аугментации изображений

Архитектура модели обнаружения. Для обнаружения текста на изображениях лоцманских карт был использован алгоритм дифференцируемой бинаризации (DB), представленный на рис. 4. DB является современным методом обнаружения текста, основанным на сегментации и позволяющим эффективно выделять области текста на фоне с динамическим порогом. Преимущество DB заключается в использовании дифференцируемой функции бинаризации, что позволяет обучать сеть end-to-end и получать более точные результаты по сравнению с традиционными методами, основанными на фиксированном пороге бинаризации. Основопологающее различие с другими решениями заключается в том, что у DB есть карта порогов и она предсказывает порог для каждой точки пикселя на изображении с помощью нейронной сети, а не назначает фиксированное значение. Таким образом, DB лучше различает фон и передний план текста.

Алгоритм DB применяет дифференцируемую бинаризацию, которая аппроксимирует ступенчатую функцию обычной бинаризации. Для этого используется следующая формула:

$$\hat{B}_{i,j} = \frac{1}{1 + e^{-k(P_{i,j} - T_{i,j})}}, \quad (1)$$

где $\hat{B}$ — приблизительная бинарная карта; k — коэффициент усиления, равный 50; P — карта вероятностей; T — пороговая карта, полученная из сети.

Эта приблизительная функция бинаризации является дифференцируемой, поэтому может быть оптимизирована вместе с сегментационной сетью в период обучения. Дифференцируемая бинаризация с адаптивными пороговыми значениями может помочь не только отличить текстовые области от фона, но и отделить тесно связанные экземпляры текста [5, 6].

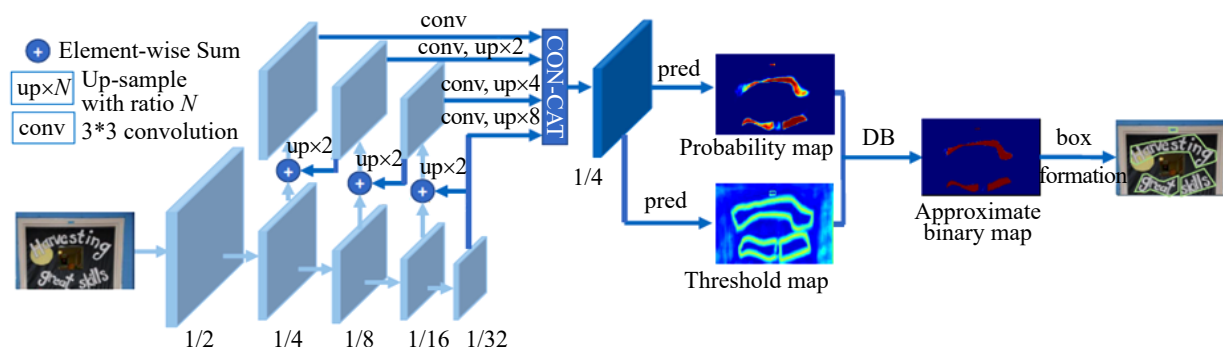


Рис. 4. Архитектура дифференцируемой бинаризации

Сети ResNet и Differentiable Binarization Feature Pyramid Network (DBFPN) извлекают особенности из входного изображения, которые затем объединяются для формирования признака, имеющего четверть размера исходного изображения. Для получения карты вероятностей и пороговой карты применяется сверточный слой. Далее, на основе формулы (1), создается бинарная карта, а затем, с использованием постобработки DB, выделяется контур.

Алгоритм обнаружения текста с помощью дифференцируемой бинаризации можно описать следующим образом:

Шаг 1. Извлечение признаков. Входное изображение подается в сеть, например, ResNet, которая извлекает признаки на разных уровнях пирамиды (1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32) по отношению к масштабу входного изображения.

Шаг 2. Объединение признаков. Извлеченные признаки последовательно увеличиваются до одного масштаба и объединяются. После объединения они проходят через 3×3 сверточных слоя и повторные операции увеличения масштаба для создания единого признака (F).

Шаг 3. Предсказание карт. Признак F используется для предсказания карты вероятностей (P) и карты порогов (T).

Шаг 4. Дифференцируемая бинаризация (DB). Карты вероятностей (P) и порогов (T) используются для вычисления приблизительной бинарной карты ($\hat{B}$) с помощью функции дифференцируемой бинаризации. Это позволяет оптимизировать процесс бинаризации вместе с обучением сети сегментации.

Шаг 5. Формирование ограничительных рамок. В период вывода текстовые ограничительные рамки могут быть легко получены из приблизительной бинарной карты ($\hat{B}$) или карты вероятностей (P) с использованием модуля формирования рамок.

Использование дифференцируемой бинаризации для обнаружения текста на картографических изображениях позволяет создать эффективную и точную систему, способную работать в реальных условиях с разнообразными и искаженными данными. Этот подход обеспечивает высокую гибкость и адаптивность модели, что является ключевым фактором для успешного распознавания текстовых элементов на картографических изображениях [7].

Общая выборка из 1590 изображений была разделена на обучающую (1272 изображения) и валидационную (318 изображений) выборки.

Для архитектуры DB (на базе ResNet-34) в качестве алгоритма обнаружения была использована модель DB++ с модулем DBFPN для извлечения признаков и головной модуль DBHead. Потери рассчитывались с помощью комбинированной функции DBLoss, включающей DiceLoss с весами $\alpha=5$ и $\beta=10$. Также применялся механизм

онлайн-хард-майнинг (Online Hard Example Mining, OHEM) с коэффициентом 3. Он выбирает только сложные примеры из мини-батча для расчёта градиентов, пропуская лёгкие, чтобы модель сосредоточилась на более сложных случаях.

Параметры обучения включали:

- оптимизатор Adam с $\beta_1=0,9$ и $\beta_2=0,999$;
- косинусное снижение скорости обучения (начальное значение 0,0005) с двумя эпохами для разогрева;
- регуляризация L_2 с коэффициентом 0;
- размер батча — 8;
- общее число эпох — 21.

Во время тренировки использовались метрики оценки качества, такие как Hmean, которые вычислялись каждые 7 эпох. Изображения были растянуты до размера 960×960 пикселей, согласно свойству архитектуры DB (разрешения изображений должны быть кратны 32) [8].

Архитектура модели распознавания. Для распознавания обнаруженных значений глубин была выбрана архитектура SVTR (Single Visual Model for Scene Text Recognition), представленная на рис. 5. SVTR представляет собой инновационный подход к распознаванию текста, в котором традиционная последовательная модель заменена на единую визуальную модель, что повышает эффективность и скорость работы [9].

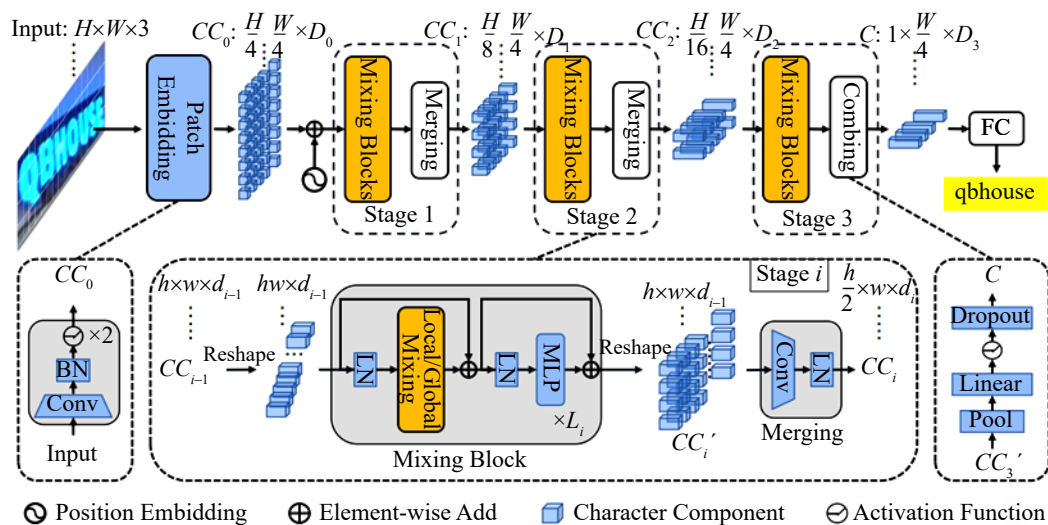


Рис. 5. Архитектура SVTR

Основные компоненты и этапы:

- Input (входное изображение с размерами $H \times W \times 3$);
- Patch Embedding (разделяет входное изображение на небольшие патчи (участки) и преобразует их в векторные представления). К выходу Patch Embedding добавляется Position Embedding, чтобы передать информацию о позиции каждого участка на изображении;
- Stage 1, Stage 2, Stage 3 (три этапа обработки, каждый из которых включает блоки смешивания (Mixing Blocks) и объединения (Merging)). В каждом блоке смешивания происходит объединение локальной и глобальной информации. Это позволяет модели учитывать мелкие детали (например, текстуры, края), а также общую структуру или контекст (глобальные признаки) изображения. Например, для понимания, что изображено на фотографии, важно учитывать расположение объектов относительно друг друга;
- Fully Connected (заключительный полносвязный слой, который выдает предсказание) [10].

Архитектура SVTR основана на принципе токенизации изображений по частям. Изображение значения глубины разбивается на небольшие 2D патчи, называемые «компоненты символов». Далее, иерархические каскады рекуррентно применяют операции смешивания, объединения и комбинирования на уровне этих компонентов [11]. В архитектуре используются блоки глобального и локального смешивания для восприятия как межсимвольных, так и внутрисимвольных паттернов, что позволяет получить многоуровневое восприятие компонентов символов. Распознавание символов происходит с помощью простого линейного предсказания в конце сети. SVTR состоит из трехкаскадной сети, высота которой прогрессивно уменьшается, что способствует эффективному извлечению признаков [12].

Для обучения модели SVTR авторы использовали выборку из 12495 изображений значений глубин. Выборка была разделена на обучающий (8747 изображений) и валидационный (3748 изображений) наборы. Модель обучалась с использованием оптимизатора AdamW с весом распада 0,05. Начальная скорость обучения была установлена на уровне 0.00005 с использованием косинусной стратегии изменения скорости обучения (Cosine Learning Rate Scheduler) и линейной фазой разогрева (warm-up) в течение 2 эпох. Размер пакета (batch size) составлял 256 изображений. Общее количество эпох обучения было установлено равным 50. Размер входного изображения для сети SVTR составлял 48×36 пикселей [13].

В качестве функции потерь использовалась CPPDLoss (Character Position and Pixel Distance Loss). Функция потерь CPPDLoss специально разработана для задач распознавания и учитывает как точность распознавания символов, так и их позиционное соответствие.

Разработанное программное средство LosMar выполняет следующие функции:

- загрузка изображений (пользователь загружает изображение лоцманской карты в форматах png, jpeg, bmp);
- предобработка изображений (преобразование в оттенки серого и бинаризация изображений, применяя метод пороговой обработки);
- обнаружение текста (с помощью алгоритма DB выполняется обнаружение областей текста на изображениях);
- распознавание текста (обнаруженные области текста передаются на вход модели SVTR для распознавания значений глубин);
- вывод результатов (распознанные значения глубин выделяются на исходном изображении и выводятся в отдельном окне);
- сохранение результатов (пользователь может сохранить изображение с выделенными значениями глубин, а также текстовый файл с распознанными значениями и их координатами на изображении).

Результаты исследования

Оценка качества обнаружения и распознавания. Для оценки качества обнаружения использовались следующие метрики:

- точность (precision) — доля правильно распознанных значений глубин среди всех обнаруженных значений;
- полнота (recall) — доля правильно распознанных значений глубин среди всех значений глубин, присутствующих на изображении;
- гармоническое среднее (hmean) — среднее гармоническое точности и полноты, сбалансированная метрика, учитывающая обе характеристики.

В результате обучения модели обнаружения глубин на 18 эпохе были получены лучшие значения метрик, которые представлены в таблице 1.

Таблица 1

Лучшие значения метрик модели обнаружения

Метрика	Значение
precision	90,89 %
recall	82,66 %
hmean	86,58 %

Для оценки качества распознавания использовалась метрика RecMetric, основной показатель которой — точность (accuracy). Также использовалась метрика редактирования (Norm Edit Distance, norm_edit_dis), которая измеряет степень совпадения между предсказанным текстом и эталонным (размеченным) текстом. В процессе обучения сохранялась модель, показавшая наилучшую точность на валидационном наборе данных для дальнейшего использования в задачах инференса.

Модель распознавания на 39-й эпохе показала лучшие результаты, которые представлены в таблице 2.

Таблица 2

Лучшие значения метрик модели распознавания

Метрика	Значение
accuracy	95,03 %
norm_edit_dis	97,60 %

Примеры работы программного средства. Для взаимодействия пользователя с программным средством LosMar было реализовано четыре кнопки, представленные в нижней части окна:

- «Открыть»;
- «Сохранить изображения»;
- «Сохранить значения»;
- «Перераспознать».

После открытия файла с изображением и выполнения распознавания на экране, в соответствующих областях отображается результат работы программного средства, представленный на рис. 6. Это список распознанных значений глубин и координаты точек, в которых определены эти значения. Полученные значения и их координаты сохраняются в файле с расширением .txt.

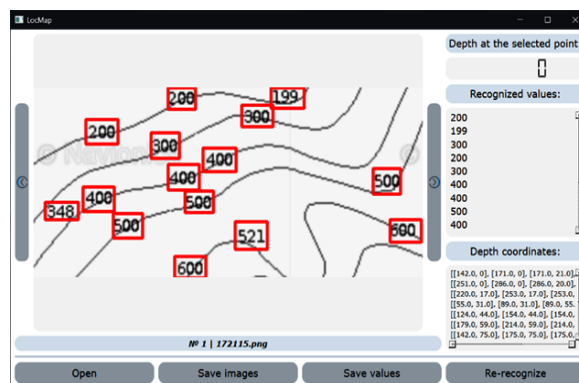


Рис. 6. Результат работы ПС

В программном модуле LocMap есть возможность получить значение глубины в выбранной точке на изображении, что продемонстрировано на рис. 7.

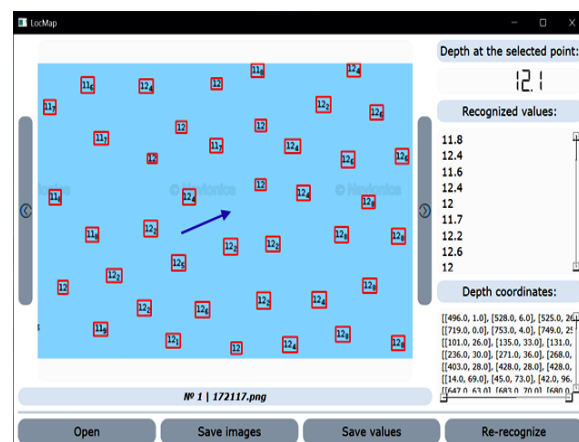


Рис. 7. Глубина в выбранной точке

Обсуждение и заключение. Полученные результаты демонстрируют, что разработанное программное средство LocMap обеспечивает высокую точность распознавания значений глубин на лоцманских картах. Наилучшие результаты достигаются при распознавании значений, расположенных в открытых областях карты с хорошей контрастностью и четкой типографикой. Сложности возникают при распознавании значений, размещенных вблизи сложных графических элементов, таких как изолинии, маркеры или текстовые аннотации.

Преимуществом разработанного метода является использование современных алгоритмов глубокого обучения, таких как DB, ResNet и SVTR, которые позволяют эффективно обнаруживать и распознавать текст на изображениях с различными искажениями. Использование аугментации данных позволило повысить устойчивость модели к различным вариантам написания чисел, изменениям масштаба и ориентации и наличию шумов на изображении.

Несмотря на высокую точность распознавания, разработанное программное средство LocMap имеет ряд ограничений. Одним из основных факторов является зависимость от качества разметки данных. Ошибки или неточности в разметке могут приводить к неправильному обучению модели, что особенно критично для сложных текстовых регионов на лоцманских картах. Ещё одним ограничением является вычислительная сложность метода, связанная с использованием глубоких нейронных сетей. В частности, ресурсоёмкие этапы обработки данных и вычисления затрудняют применение метода в реальном времени на устройствах с ограниченными вычислительными мощностями.

Следующим шагом исследования планируется построение карты глубин Азовского и Черного морей с использованием алгоритма, предложенного в работе [14]. Этот алгоритм использует решение уравнения, используемого для получения схем высокого порядка точности для уравнения Лапласа. Использование данного алгоритма позволит интерполировать поверхность дна с помощью достаточно плавных функций. Это повысит точность моделирования гидродинамических и гидробиологических процессов за счет построения расчетной сетки, соответствующей текущим картографическим данным [15].

Проведенные эксперименты показали, что разработанная система обеспечивает высокую точность распознавания. Полученные результаты демонстрируют практическую значимость разработанного решения для автоматизации обработки лоцманских карт.

В качестве перспектив дальнейших исследований можно рассматривать следующие направления: расширение набора данных, улучшение алгоритмов обнаружения и распознавания текста, интеграция с ГИС-системами, распознавание других элементов лоцманских карт и построение рельефа дна на основе полученных глубин и

их координат. Областью применения разработанного программного обеспечения является математическое моделирование гидродинамических и гидробиологических процессов водных объектов. Применение разработанных методов распознавания поможет строить расчетные сетки на основе актуальной картографической информации.

Список литературы / References

1. Лященко Т.В., Чистяков А.Е., Никитина А.В. Моделирование процесса распространения загрязнения водной экосистемы фосфатами. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;6(4):47–53. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-47-53>
2. Lyashenko T.V., Chistyakov A.E., Nikitina A.V. Modelling the process of phosphate pollution spread in the aquatic ecosystem. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;6(4):47–53. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-47-53>
3. Белова Ю.В., Филина А.А., Чистяков А.Е. Прогнозирование динамики летних видов фитопланктона на основе методов усвоения спутниковых данных. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):27–34. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-27-34>
4. Belova Yu.V., Filina A.A., Chistyakov A.E. Forecasting the dynamics of summer phytoplankton species based on satellite data assimilation methods. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):27–34. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-27-34>
5. Belova Yu.V., Razveeva I.F., Rakhimbaeva E.O. Development of an Algorithm for Semantic Segmentation of Earth Remote Sensing Data to Determine Phytoplankton Populations. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2024;24(3):283–292. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-3-283-292>
6. Cubuk E. D., Zoph B., Mané D., Vasudevan V. and Le Q. V., Autoaugment: Learning augmentation strategies from data[C]. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Long Beach, CA, USA, 2019. P. 113–123. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2019.00020>
7. Minghui Liao, Zhaoyi Wan, Cong Yao, Chen Kai, Xiang Bai. Real-Time Scene Text Detection with Differentiable Binarization. In: *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*. 2020;34(07):11474–11481. <https://doi.org/10.1609/aaai.v34i07.6812>
8. Sheeba M.C., Christopher Ch. S. Adaptive deep residual network for image denoising across multiple noise levels in medical, nature, and satellite images. *Ain Shams Engineering Journal*. 2025;16(1):103188. <https://doi.org/10.1016/j.asej.2024.103188>
9. Bradley D., Roth G. Adaptive thresholding using the integral image. *Journal of graphics tools*. 2007;12(2):13–21. <https://doi.org/10.1080/2151237X.2007.10129236>
10. Tensmeyer C., Martinez T. Document image binarization with fully convolutional neural networks. In: *14th IAPR International Conference on Document Analysis and Recognition (ICDAR)*. 2017;1:99–104. <https://doi.org/10.1109/ICDAR.2017.25>
11. Minghui Liao, Baoguang Shi, Xiang Bai, Xinggang Wang, Wenyu Liu. Textboxes: A fast text detector with a single deep neural network. In: *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*. 2017;31(1). <https://doi.org/10.1609/aaai.v31i1.11196>
12. Yongkun Du, Zhineng Chen, Caiyan Jia, et al. SVTR: Scene Text Recognition with a Single Visual Model. *International Joint Conference on Artificial Intelligence (2022)*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2205.00159>
13. Kaiming He, Xiangyu Zhang, Shaoqing Ren, Jian Sun. Deep Residual Learning for Image Recognition. In: *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2016. P. 770–778. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2016.90>
14. Paschalis Tsirtsakis, Georgios Zacharis, George S. Maraslidis, George F. Fragulis. Deep learning for object recognition: A comprehensive review of models and algorithms. *International Journal of Cognitive Computing in Engineering*. 2025;6:298–312. <https://doi.org/10.1016/j.ijcce.2025.01.004>
15. Miao Tian, Kai Ma, Zhihao Liu, Qinjun Qiu, Yongjian Tan, Zhong Xie. Recognition of geological legends on a geological profile via an improved deep learning method with augmented data using transfer learning strategies. *Ore Geology Reviews*. 2023;153:105270. <https://doi.org/10.1016/j.oregeorev.2022.105270>
16. Sukhinov A.I., Belova Y.V., Filina A.A. Parallel implementation of substance transport problems for restoration the salinity field based on schemes of high order of accuracy. *CEUR Workshop Proceedings (2019)*, 2500.
17. Nikitina A., Belova Y., Atayan A. Mathematical modeling of the distribution of nutrients and the dynamics of phytoplankton populations in the Azov Sea, taking into account the influence of salinity and temperature. *AIP Conference Proceedings*. 2019; 2188(1): 050027. <https://doi.org/10.1063/1.5138454>

Об авторах:

Елена Олеговна Рахимбаева, аспирант, ассистент кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9151-1119), [SPIN-код](https://spina.org.ru/SPIN-код), [lena_rakhimbaeva@mail.ru](mailto:lana_rakhimbaeva@mail.ru)

Таджаддин Аледдин оглы Алышов, магистрант кафедры математики и информатики Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9151-1119), taci2002@mail.ru

Юлия Валериевна Белова, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информа-

тики Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID](#), [SPIN-код](#), yvbelova@yandex.ru

Заявленный вклад авторов:

Е.О. Рахимбаева: разработка концепции; курирование данных; формальный анализ; проведение исследования; визуализация; написание черновика рукописи.

Т.А. Алышов: проведение исследования; разработка программного обеспечения; валидация результатов; написание черновика рукописи.

Ю.В. Белова: научное руководство и написание рукописи — рецензирование и редактирование.

Конфликт интересов: *авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Elena O. Rakhimbaeva, Postgraduate student, Assistant lecturer of the Department of “Computer Engineering and Automated Systems Software”, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), lena_rahimbaeva@mail.ru

Tadjaddin A. Alyshov, Master’s Degree student of the Department of “Mathematics and Computer Science”, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [ORCID](#), taci2002@mail.ru

Yulia V. Belova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of “Mathematics and Computer Science”, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), yvbelova@yandex.ru

Contributions of the authors:

Е.О. Рахимбаева: concept development; data curation; formal analysis; conducting research; visualization; writing a draft manuscript.

Т.А. Алышов: conducting research; software development; validation of results; writing a draft manuscript.

Yu.V. Belova: scientific guidance and writing the manuscript — reviewing and editing.

Conflict of Interest Statement: *the authors declare no conflict of interest.*

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 03.02.2025

Поступила после рецензирования / Revised 24.02.2025

Принята к публикации / Accepted 17.03.2025