ТОМ 9, №2, 2025 eISSN 2587-8999
РЕЦЕНЗИРУЕМЫЙ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Computational Mathematics and Information Technologies

Вычислительная математика / Computational Mathematics

Математическое моделирование / Mathematical Modelling

Информационные технологии / Information Technologies

www.cmit-journal.ru
DOI 10.23947/2587-8999

Computational Mathematics and Information Technologies

Рецензируемый научно-теоретический журнал

eISSN 2587–8999

Издается с 2017 года

Периодичность — 4 выпуска в год

DOI: 10.23947/2587–8999

Учредитель и издатель — Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ), г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Журнал «Computational Mathematics and Information Technologies» публикует обзоры, оригинальные статьи и краткие сообщения, посвященные математическому моделированию, численным методам и информационным технологиям для решения сложных и актуальных проблем науки и современной технологии. Область применения исследований — это механика сплошных сред, гидроаэродинамика, науки о Земле, химия, биология, обработка изображений и распознавание образов, теория параллельных вычислений и ее приложения, технологии больших баз данных и искусственного интеллекта и т. д.

Журнал «Computational Mathematics and Information Technologies» принимает к публикации научные и обзорные статьи в соответствии с разделами:

1. Вычислительная математика
2. Математическое моделирование
3. Информационные технологии

Регистрация:	Свидетельство о регистрации средства массовой информации ЭЛ № ФС 77 – 66529 от 21 июля 2016 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций
Индексация и архивация:	РИНЦ, CrossRef, CyberLeninka
Сайт:	https://cmit-journal.ru
Адрес редакции:	344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1
E-mail:	CMIT-EJ@yandex.ru
Телефон:	+7 (863) 273–85–14
Дата выхода № 2, 2025 в свет:	30.06.2025

© Донской государственный технический университет, 2025

Computational Mathematics and Information Technologies

Peer-reviewed scientific and theoretical journal

eISSN 2587–8999

Published since 2017

Periodicity — 4 issues per year

DOI: 10.23947/2587–8999

Founder and Publisher — Don State Technical University (DSTU), Rostov-on-Don, Russian Federation

The journal "Computational Mathematics and Information Technologies" publishes reviews, original articles and short reports on mathematical modeling, numerical methods and information technologies for solving complex and topical problems of science and modern technology. Research areas include continuum mechanics, fluid dynamics, Earth sciences, chemistry, biology, image processing and pattern recognition, parallel computing theory and its applications, big database and artificial intelligence technologies, etc.

The journal "Computational Mathematics and Information Technologies" accepts scientific and review articles for publication in accordance with the sections:

1. Computational Mathematics
2. Mathematical Modelling
3. Information Technologies

Registration:	Mass media registration certificate ЭЛ № ФС 77–66529 dated July 21, 2016 issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media
Indexing and Archiving:	RISC, Crossref, Cyberleninka
Website:	https://cmit-journal.ru
Address of the Editorial Office:	1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation
E-mail:	CMIT-EJ@yandex.ru
Telephone:	+7 (863) 273–85–14
Date of publication No. 2, 2025:	30.06.2025

© Don State Technical University, 2025

Редакционная коллегия

Главный редактор, Сухинов Александр Иванович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация), Scopus, ResearcherID, MathSciNet, SPIN-код, ORCID, sukhinov@gmail.com, spu-40.4@donstu.ru

Заместитель главного редактора, Якобовский Михаил Владимирович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), Scopus, SPIN-код, ORCID

Ответственный секретарь, Петров Александр Пхоун Чжо, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (Москва, Российская Федерация), Scopus, ResearcherID, SPIN-код, ORCID, ИСТИНА

Алексеенко Елена В., кандидат физико-математических наук, PhD, профессор, Университет Литораль Кот д'Опаль, (Булонь-сюр-Мер, Франция), Scopus, ResearcherID, ORCID

Воеводин Владимир Валентинович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Москва, Российская Федерация), Scopus, ResearcherID, SPIN-код, ORCID

Гасилов Владимир Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), Scopus, ResearcherID, SPIN-код, ORCID

Гущин Валентин Анатольевич, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт автоматизации проектирования РАН (Москва, Российская Федерация), Scopus, SPIN-код, ORCID

Лазарева Галина Геннадьевна, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор РАН, Российский университет дружбы народов (Москва, Российская Федерация), Scopus, SPIN-код, ORCID

Петров Игорь Борисович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Московский физико-технический институт (государственный университет) (Москва, Российская Федерация), Scopus, SPIN-код

Поляков Сергей Владимирович, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), Scopus, SPIN-код, ORCID

Семенов Алексей Львович, доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН, академик РАО, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Москва, Российская Федерация), Scopus, ResearcherID, SPIN-код, ORCID

Тишкин Владимир Федорович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), Scopus, ResearcherID, SPIN-код

Четверушкин Борис Николаевич, академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор, научный руководитель Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), Scopus, ResearcherID, SPIN-код, ORCID

Чехонин Константин Александрович, доктор физико-математических наук, доцент, зам. директора Института прикладной математики ДВО РАН, руководитель (директор) Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН (Хабаровск, Российская Федерация), Scopus, ResearcherID, SPIN-код, ORCID

Чистяков Александр Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация), Scopus, ResearcherID, SPIN-код, ORCID

Шамолин Максим Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Москва, Российская Федерация), Scopus, ResearcherID, SPIN-код, ORCID

Editorial Board

Editor-in-Chief, Alexander I. Sukhinov, Corresponding member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation), Scopus, ResearcherID, MathSciNet, SPIN-code, ORCID, sukhinov@gmail.com, spu-40.4@donstu.ru

Deputy Chief Editor, Mikhail V. Yakobovski, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), Scopus, SPIN-code, ORCID

Executive Secretary, Alexander P. Petrov Dr.Sci. (Phys.-Math.), Leading Research Fellow, Institute of Control Sciences RAS (Moscow, Russian Federation), Scopus, ResearcherID, SPIN-code, ORCID, Istina

Elena V. Aleksenko, Ph.D., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, University of Littoral Opal Coast (Boulogne-sur-Mer, France), Scopus, ResearcherID, ORCID

Vladimir V. Voevodin, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russian Federation), Scopus, ResearcherID, ORCID

Vladimir A. Gasilov, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), Scopus, ResearcherID, SPIN-code, ORCID

Valentin A. Gushchin, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Institute of Computer Aided Design, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), Scopus, SPIN-code, ORCID

Galina G. Lazareva, Corresponding member of RAS, Dr. Sci. (Phys.-Math), Professor of RAS, RUDN University, (Moscow, Russian Federation), Scopus, SPIN-code, ORCID

Igor B. Petrov, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Moscow Institute of Physics and Technology (State University) (Moscow, Russian Federation), Scopus, SPIN-code

Sergey V. Polyakov, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), Scopus, SPIN-code, ORCID

Alexey L. Semenov, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Academician of the Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russian Federation), Scopus, ResearcherID, SPIN-code, ORCID

Vladimir F. Tishkin, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), Scopus, ResearcherID, SPIN-code

Boris N. Chetverushkin, Academician of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), Scopus, ResearcherID, SPIN-code, ORCID

Konstantin A. Chekhonin, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Deputy Director of the Institute for Applied Mathematics, Director of the Khabarovsk Branch of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences (Khabarovsk, Russian Federation), Scopus, ResearcherID, SPIN-code, ORCID

Alexander E. Chistyakov, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation), Scopus, ResearcherID, SPIN-code, ORCID

Maxim V. Shamolin, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russian Federation), Scopus, ResearcherID, SPIN-code, ORCID

Содержание

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Разностная схема с улучшенной аппроксимацией на границе для уравнения теплопроводности с граничными условиями третьего рода 7
А.Е. Чистяков, И.Ю. Кузнецова

Сравнение решений гидродинамической задачи в прямоугольной каверне методами торможения и разгона начального поля скорости 22
Н.К. Волосова, К.А. Волосов, А.К. Волосова, М.И. Карлов, Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Исследование влияния движения границ на колебательные и резонансные свойства механических систем переменной длины 34
А.Л. Семенов, В.Л. Литвинов, М.В. Шамолин

Применение нейронных сетей при решении эллиптических уравнений для областей сложной формы 44
А.В. Галабурдин

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Автоматическая обработка первичных данных натурных исследований поведения природно-технических систем при изменении климата и антропогенных воздействиях в условиях Крайнего Севера 52
С.В. Кушуков, К.Н. Иванов, С.П. Левашкин, М.В. Якобовский

Contents

COMPUTATIONAL MATHEMATICS

A Finite Difference Scheme with Improved Boundary Approximation for the Heat Conduction Equation with Third-Type Boundary Conditions 7
Alexander E. Chistyakov, Inna Yu. Kuznetsova

Comparison of Solutions to a Hydrodynamic Problem in a Rectangular Cavity Using Initial Velocity Field Damping and Acceleration Methods 22
Natalya K. Volosova, Konstantin A. Volosov, Aleksandra K. Volosova, Mikhail I. Karlov, Dmitriy F. Pastukhov, Yuriy F. Pastukhov

MATHEMATICAL MODELLING

Study of the Influence of Boundary Motion on the Oscillatory and Resonance Properties of Mechanical Systems with Variable Length 34
Alexey L. Semenov, Vladimir L. Litvinov, Maxim V. Shamolin

Application of Neural Networks for Solving Elliptic Equations in Domains with Complex Geometries 44
Alexander V. Galaburdin

INFORMATION TECHNOLOGIES

Automated Processing of Primary Field Data on the Behavior of Natural-Technological Systems under Climate Change and Anthropogenic Impacts in the Far North 52
Sergey V. Kushukov, Konstantin N. Ivanov, Sergey P. Levashkin, Mikhail V. Yakobovskiy

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
COMPUTATIONAL MATHEMATICS

CC BY

Check for updates

Оригинальное теоретическое исследование

УДК 519.63

https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-7-21

Разностная схема с улучшенной аппроксимацией на границе для уравнения теплопроводности с граничными условиями третьего рода

А.Е. Чистяков, И.Ю. Кузнецова ✉

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

✉ ikuznecova@donstu.ru

Аннотация

Введение. Построение разностных схем, их исследование и модификация с учетом специфики рассматриваемой задачи позволяет повысить точность моделирования сложных систем. При моделировании различных процессов, включая гидродинамические процессы в мелководных водоемах, было отмечено, что при решении задач с граничными условиями третьего рода теоретическая оценка порядка погрешности аппроксимации падает со второго порядка погрешности относительно пространственных шагов расчетной сетки до первого порядка, а, следовательно, падает и точность численного решения задачи. Настоящая работа посвящена актуальной проблеме исследования влияния аппроксимации граничных условий третьего рода на точность численного решения задачи теплопроводности, а также построению разностной схемы с улучшенной аппроксимацией граничных условий для уравнения теплопроводности с граничными условиями третьего рода и сравнению точности численных решений, полученных авторами, с известными решениями.

Материалы и методы. Рассматривается уравнение теплопроводности с граничными условиями третьего рода, для которого получено аналитическое решение. Проведена аппроксимация рассмотренной задачи и показано, что при стандартной аппроксимации задачи на границе расчетной области теоретическая оценка порядка погрешности аппроксимации дифференциального оператора второго порядка в уравнении диффузии составляет $O(h)$. Для повышения точности численного решения в случае граничных условий третьего рода специального вида предложена разностная схема, имеющая погрешность аппроксимации дифференциального оператора второго порядка $O(h^2)$, как во внутренних, так и в граничных узлах расчетной области.

Результаты исследования. На тестовых задачах проведено сравнение точности численных решений, полученных на основе предлагаемой схемы и схемы со стандартной аппроксимацией границы.

Обсуждение и заключение. Из проведенных численных экспериментов видно, что предложенная схема с улучшенной аппроксимацией на границе расчетной области для уравнения теплопроводности при граничных условиях третьего рода специального вида имеет эффективный порядок точности около 2, что соответствует полученной теоретической оценке. При этом стоит отметить, что разностная схема со стандартной аппроксимацией на границе расчетной области также имеет эффективный порядок точности, близкий к 2, несмотря на полученную теоретическую оценку порядка погрешности аппроксимации для граничных узлов. Важно отметить, что для предложенной схемы расчетная погрешность численного решения падает существенно быстрее, чем для решения на основе схемы со стандартной аппроксимацией на границе.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, граничные условия третьего рода, численное решение, погрешность аппроксимации

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–71–10102, https://rscf.ru/project/22-71-10102/

Для цитирования. Чистяков А.Е., Кузнецова И.Ю. Разностная схема с улучшенной аппроксимацией на границе для уравнения теплопроводности с граничными условиями третьего рода. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):7–21. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-7-21

© *Чистяков А.Е., Кузнецова И.Ю., 2025*

Original Theoretical Research

A Finite Difference Scheme with Improved Boundary Approximation for the Heat Conduction Equation with Third-Type Boundary Conditions

Alexander E. Chistyakov, Inna Yu. Kuznetsova
Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation
ikuznecova@donstu.ru

Abstract

Introduction. The development, analysis, and modification of finite difference schemes tailored to the specific features of the considered problem can significantly enhance the accuracy of modeling complex systems. In simulations of various processes, including hydrodynamic phenomena in shallow water bodies, it has been observed that for problems with third-type (Robin) boundary conditions, the theoretical error order of spatial discretization drops from second-order to first-order accuracy, which in turn decreases the overall accuracy of the numerical solution. The present study addresses the relevant issue of how the approximation of third-type boundary conditions affects the accuracy of the numerical solution to the heat conduction problem. It also proposes a finite difference scheme with improved boundary approximation for the heat conduction equation with third-type boundary conditions and compares the accuracy of the numerical solutions obtained by the authors with known benchmark solutions.

Materials and Methods. The paper considers the one-dimensional heat conduction equation with third-type boundary conditions, for which an analytical solution is available. The problem is discretized, and it is shown that under standard boundary approximation, the theoretical order of approximation error for the second-order differential operator in the diffusion equation is $O(h)$. To improve the accuracy of the numerical solution under specific third-type boundary conditions, a finite difference scheme is proposed. This scheme achieves second-order accuracy $O(h^2)$, for the differential operator not only at interior nodes but also at the boundary nodes of the computational domain.

Results. Test problems were used to compare the accuracy of numerical solutions obtained using the proposed scheme and those based on the standard boundary approximation.

Discussion and Conclusion. Numerical experiments demonstrate that the proposed scheme with enhanced boundary approximation for the heat conduction equation under specific third-type boundary conditions exhibits an effective accuracy order close to 2, which corresponds to the theoretical prediction. It is noteworthy that the scheme with standard boundary approximation also demonstrates an effective accuracy order close to 2, despite the lower theoretical order of boundary approximation. Importantly, the numerical error of the proposed scheme decreases significantly faster compared to the scheme with standard boundary treatment.

Keywords: heat conduction equation, third-type boundary conditions, numerical solution, approximation error

Funding. This research was supported by the Russian Science Foundation, grant no. 22–71–10102, https://rscf.ru/project/22-71-10102/

For Citation. Chistyakov A.E., Kuznetsova I.Yu. A Finite Difference Scheme with Improved Boundary Approximation for the Heat Conduction Equation with Third-Type Boundary Conditions. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):7–21. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-7-21

Введение. При описании широкого класса задач, связанных с моделированием пространственно-трехмерных диффузионных процессов, используется уравнение теплопроводности [1]. Уравнение диффузии представлено во многих работах, а его решение широко применяется на практике для описания многих физических процессов. В работах [2, 3] представлены подходы к получению аналитического решения. В работах [4, 5] рассмотрены подходы к численному решению уравнения теплопроводности в случае граничных условий первого и второго родов.

В случае проектирования сложных инженерных конструкций необходимо учитывать влияние температурных режимов окружающей среды. Зачастую при исследовании процессов распространения тепла в таких инженерных конструкциях рассматривается уравнение теплопроводности с граничными условиями третьего рода [6]. Поэтому целью данной работы является построение разностной схемы с улучшенной аппроксимацией граничных условий с экспериментальной оценкой предлагаемой схемы на тестовых задачах. Стоит отметить, что такой подход позволяет провести сравнение точности численных решений, полученных на основе различных разностных схем и при различных начальных или граничных условиях. В работах [7, 8] в качестве тестовой задачи использовалось уравнение Бюргерса, в работах [9, 10] — уравнение переноса, в работах [11, 12] — уравнение диффузии-конвекции.

Задачей повышения точности численного решения занимались многие выдающиеся российские и мировые ученые, среди которых прежде всего хочется выделить работы П.Н. Вабищевича [13, 14], в которых исследуются разностные схемы для численного решения уравнения параболического типа второго порядка со специальной формой несамосопряженного оператора задачи. Многие работы Б.Н. Четверушкина посвящены разработке, исследованию и подбору параметров разностных схем для решения прикладных задач с учетом архитектуры высокопроизводительных вычислительных систем [15, 16]. В работах В.Ф. Тишкина рассматриваются подходы

модификации разрывного метода Галеркина при моделировании процессов газо- и гидродинамики [17, 18]. В работе [19] для решения задачи гидродинамики рассмотрено использование регуляризированной разностной схемы, точность которой исследована в работе [20]. В работе [21] исследованы подходы к повышению порядка точности сеточно-характеристического метода для задач двумерной линейной упругости, а в [22] — в трехмерном случае. В работе [23] представлен подход к получению численного решения задачи тепломассопереноса двухфазных жидкостей. В работе [24] рассматривается подход к построению разностной схемы для задачи однофазной фильтрации с учетом наличия трещин в среде, в работе [25] рассмотрена двухфазная фильтрация в сложных средах.

Построение разностных схем, их исследование и модификация существующих схем с учетом специфики рассматриваемой задачи позволяет повысить точность моделирования сложных систем [26]. При моделировании различных процессов, включая гидродинамические процессы в мелководных водоемах, было отмечено, что при решении задач с граничными условиями третьего рода теоретическая оценка порядка погрешности аппроксимации падает со второго порядка погрешности относительно пространственных шагов расчетной сетки до первого порядка, а, следовательно, падает и точность численного решения задачи. А.И. Сухинов [27] предложил подробнее исследовать аппроксимацию задачи с граничными условиями третьего рода. Таким образом, настоящая работа посвящена исследованию влияния аппроксимации граничных условий третьего рода на точность численного решения задачи теплопроводности, а также построению разностной схемы с улучшенной аппроксимацией граничных условий для уравнения теплопроводности с граничными условиями третьего рода и сравнению точности численных решений, полученных на основе предлагаемой схемы и схемы со стандартной аппроксимацией границы, на тестовых задачах.

Материалы и методы

1. Аналитическое решение уравнения теплопроводности

Рассмотрим однородное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < l,\ 0 < t < T, \tag{1}$$

со следующим начальным

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_0(x) \tag{2}$$

и с граничными условиями третьего рода

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) - \alpha u(x,t)\right)\Big|_{x=0} = \beta,\ \left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) + \alpha u(x,t)\right)\Big|_{x=l} = -\beta. \tag{3}$$

Для нахождения аналитического решения поставленной задачи (1)–(3) введем замену $u(x,t) = v(x,t) - \beta/\alpha$, которая приводит к начально-краевой задаче с однородными граничными условиями третьего рода:

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial t} = a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\ 0 < x < l,\ 0 < t < T,\ v(x,t)\big|_{t=0} = u_0(x) + \frac{\beta}{\alpha},\\ \left(\frac{\partial}{\partial x}v(x,t) - \alpha v(x,t)\right)\Big|_{x=0} = 0,\ \left(\frac{\partial}{\partial x}v(x,t) + \alpha v(x,t)\right)\Big|_{x=l} = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Решение задачи (4) будем искать в виде:

$$v(x,t) = X(x)T(t). \tag{5}$$

Тогда после подстановки (5) в дифференциальное уравнение (4) и разделения переменных получим:

$$\frac{1}{a}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2. \tag{6}$$

При этом граничные условия в (4) запишутся в виде:

$$(X'(0) - \alpha X(0))T(t) = 0,\ (X'(l) + \alpha X(l))T(t) = 0. \tag{7}$$

Таким образом, с учетом (7) и из условия того, что $v(x,t) \neq 0$ приходим к задаче Штурма-Лиувилля для функции $X(x)$:

$$\begin{gathered}X'' + \lambda^2 X = 0,\ 0 < x < l,\\ X'(0) - \alpha X(0) = 0,\ X'(l) + \alpha X(l) = 0.\end{gathered} \tag{8}$$

Общее решение задачи (8) имеет вид:

$$X(x) = C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x. \tag{9}$$

С учетом граничных условий в (8) и вида общего решения (9) собственные функции $X_k(x)$ запишутся в виде:

$$X_k(x) = \lambda_k\cos\lambda_k x + \alpha\sin\lambda_k x,\ k = 1,\ 2,\ldots, \tag{10}$$

где λ_k, $k = 1, 2,\ldots$ — собственные значения задачи (8), являющиеся положительными корнями уравнения

$$2\ \mathrm{ctg}\ \lambda l = \frac{\lambda}{\alpha} - \frac{\alpha}{\lambda}. \tag{11}$$

Для функции $T(t)$ на основании (6) и при $\lambda = \lambda_k$ приходим к задаче:

$$T'(t) + a\lambda_k T(t) = 0,$$

общее решение которой запишется в виде:

$$T_k(t) = C_k \exp\left(-a\lambda_k^2 t\right),\ k = 1,\ 2,\ldots\ . \tag{12}$$

Тогда с учетом (5), (10) и (12) решение задачи (4) запишется в виде:

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left(\lambda_k \cos\lambda_k x + \alpha \sin\lambda_k x\right)\exp\left(-a\lambda_k^2 t\right), \tag{13}$$

где λ_k, $k = 1, 2,\ldots$ — положительные корни уравнения (11).

Для нахождения коэффициентов C_k воспользуемся начальным условием задачи (4):

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \left(\lambda_k \cos\lambda_k x + \alpha \sin\lambda_k x\right) = u_0(x) + \beta/\alpha,$$

то есть имеем разложение некоторой функции $f(x) = u_0(x) + \beta/\alpha$ для $0 \le x \le l$ в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля (8). Тогда при условии ортогональности собственных функций $X_k(x)$, $k = 1, 2,\ldots$ на рассматриваемом отрезке $0 \le x \le l$ имеем следующее выражение для коэффициентов C_k:

$$C_k = \frac{1}{\|X_k\|^2}\int_0^l f(x)\left(\lambda_k \cos\lambda_k x + \alpha \sin\lambda_k x\right)dx, \tag{14}$$

где $f(x) = u_0(x) + \beta/\alpha$,

$$\|X_k\|^2 = \int_0^l \left(\lambda_k \cos\lambda_k x + \alpha \sin\lambda_k x\right)^2 dx = \frac{\lambda_k^2 + \alpha^2}{2} + \frac{\lambda_k^2 - \alpha^2}{4\lambda_k}\sin 2\lambda_k l - \frac{\alpha}{2}\cos 2\lambda_k l + \frac{\alpha}{2}. \tag{15}$$

С учетом выполнения равенства (11) для $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2,\ldots$ и формул

$$\sin 2x = \frac{2\ \mathrm{tg}\ x}{1 + \mathrm{tg}^2 x},\ \cos 2x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2 x}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$$

выражение для квадрата нормы собственных функций $X_k(x)$ (15) запишется в виде:

$$\|X_k\|^2 = \frac{\left(\lambda_k^2 + \alpha^2\right)l + 2\alpha}{2}. \tag{16}$$

Таким образом, выражение (14) для коэффициентов C_k, $k = 1, 2,\ldots$ может быть переписано в виде:

$$C_k = \frac{2}{\left(\lambda_k^2 + \alpha^2\right)l + 2\alpha}\int_0^l \left(u_0(x) - \frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\lambda_k \cos\lambda_k x + \alpha \sin\lambda_k x\right)dx = C_k^{(1)} + C_k^{(2)}, \tag{17}$$

где

$$C_k^{(1)} = \frac{2}{\left(\lambda_k^2 + \alpha^2\right)l + 2\alpha}\int_0^l u_0(x)\left(\lambda_k \cos\lambda_k x + \alpha \sin\lambda_k x\right)dx,$$

$$C_k^{(2)} = \frac{2\beta}{\left(\lambda_k^2 + \alpha^2\right)\alpha l + 2\alpha^2}\int_0^l \left(\lambda_k \cos\lambda_k x + \alpha \sin\lambda_k x\right)dx = \frac{2\beta}{\left(\lambda_k^2 + \alpha^2\right)\alpha l + 2\alpha^2}\left(\sin\lambda_k l - \frac{\alpha}{\lambda_k}\left(\cos\lambda_k l - 1\right)\right) =$$

$$= \frac{2\beta}{\left(\lambda_k^2 + \alpha^2\right)\alpha l + 2\alpha^2}\left(\frac{\alpha}{\lambda_k} + \sin\lambda_k l\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_k}\mathrm{ctg}\lambda_k l\right)\right) = \frac{2\beta}{\left(\lambda_k^2 + \alpha^2\right)\alpha l + 2\alpha^2}\left(\frac{\alpha}{\lambda_k} + \frac{\lambda_k^2 + \alpha^2}{2\lambda_k^2}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{1 + \mathrm{ctg}^2\lambda_k l}}\right) = \tag{18}$$

$$= \frac{2\beta}{\lambda_k\left(\lambda_k^2 + \alpha^2\right)l + 2\lambda_k\alpha}\left(1 + (-1)^{k+1}\right),$$

следовательно, при $k = 2n$ коэффициенты $C_k^{(2)} = 0$. Тогда выражение для коэффициентов $C_k^{(2)}$ запишется в виде:

$$C_{2n}^{(2)} = 0,\ C_{2n+1}^{(2)} = \frac{4\beta}{\lambda_{2n+1}\left(\lambda_{2n+1}^2 + \alpha^2\right)l + 2\lambda_{2n+1}\alpha},\ n = 1,\ 2,\ldots\ . \tag{19}$$

Тогда аналитическое решение исходной задачи (1)–(3) с учетом введенной замены и выражений (13), (18) и (19) можно записать в виде:

$$u(x,t) = -\frac{\beta}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left(\lambda_k \cos\lambda_k x + \alpha \sin\lambda_k x\right) \exp\left(-a\lambda_k^2 t\right), \tag{20}$$

где $C_k = C_k^{(1)} + C_k^{(2)}$, коэффициенты $C_k^{(1)}$ и $C_k^{(2)}$ определяются выражениями (18) и (19), соответственно, λ_k, $k = 1, 2,...$ — положительные корни уравнения (11).

В случае решения неоднородного аналога уравнения теплопроводности (1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),\ 0 < x < l,\ 0 < t < T \tag{21}$$

с начальными и граничными условиями (2)–(3) решение будем искать в виде $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) - \beta/\alpha$, где $v(x,t)$ — решение задачи (4), определяемое формулой (13) с коэффициентами (18)–(19), а $w(x,t)$ — решение следующей задачи:

$$\begin{gathered} \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f,\ 0 < x < l,\ 0 < t < T,\ w(x,t)\big|_{t=0} = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} w(x,t) - \alpha w(x,t)\right)\Big|_{x=0} = 0,\ \left(\frac{\partial}{\partial x} w(x,t) + \alpha w(x,t)\right)\Big|_{x=l} = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Функцию $w(x,t)$ ищем в виде разложения по собственным функциям соответствующей однородной задачи Штурма-Лиувилля:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(w)}(t)\left(\lambda_k \cos\lambda_k x + \alpha \sin\lambda_k x\right). \tag{23}$$

Также разложим функцию $f(x,t)$ на рассматриваемом отрезке $0 \le x \le l$:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(f)}(t)\left(\lambda_k \cos\lambda_k x + \alpha \sin\lambda_k x\right), \tag{24}$$

где

$$C_k^{(f)}(t) = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_0^l f(x,t)\left(\lambda_k \cos\lambda_k x + \alpha \sin\lambda_k x\right) dx, \tag{25}$$

где $\|X_k\|^2$ определяется по формуле (16).

При подстановке (23) и (24) в (22) получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(C_k^{(w)}(t)\right)' + a\lambda_k^2 C_k^{(w)}(t)\right)\left(\lambda_k \cos\lambda_k x + \alpha \sin\lambda_k x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(f)}(t)\left(\lambda_k \cos\lambda_k x + \alpha \sin\lambda_k x\right). \tag{26}$$

В силу полноты ортогональной системы собственных функций $X_k(x)$, $k = 1, 2,...$, равенство (26) выполняется в случае:

$$\left(C_k^{(w)}(t)\right)' + a\lambda_k^2 C_k^{(w)}(t) = C_k^{(f)}(t). \tag{27}$$

При этом с учетом (23) и однородности начальных условий в (22) имеем

$$C_k^{(w)}(0) = 0. \tag{28}$$

Таким образом, получили задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (27) с начальным условием (28). Решение данной задачи может быть найдено, например, методом Лагранжа вариации произвольной постоянной:

$$C_k^{(w)}(t) = \int_0^t C_k^{(f)}(\tau) \exp\left(a\lambda_k^2 (\tau - t)\right) d\tau, \tag{29}$$

где $C_k^{(f)}(\tau)$ определяются на основании (25).

Таким образом, решение неоднородного уравнения теплопроводности (21) с граничными условиями третьего рода (3) может быть записано в виде:

$$u(x,t) = -\frac{\beta}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left(\lambda_k \cos\lambda_k x + \alpha \sin\lambda_k x\right) \exp\left(-a\lambda_k^2 t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(w)}(t)\left(\lambda_k \cos\lambda_k x + \alpha \sin\lambda_k x\right), \tag{30}$$

где $C_k = C_k^{(1)} + C_k^{(2)}$, коэффициенты $C_k^{(1)}$, $C_k^{(2)}$ и $C_k^{(w)}(t)$ определяются выражениями (18), (19) и (29), соответственно, а λ_k, $k = 1, 2,...$ — положительные корни уравнения (11).

2. Аппроксимация дифференциального оператора второго порядка в уравнении диффузии

Рассмотрим аппроксимацию неоднородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),\ 0 < x < l,\ 0 < t < T, \tag{31}$$

со следующим начальным

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_0(x) \tag{32}$$

и с граничными условиями третьего рода

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) - \alpha u(x,t)\right)\Big|_{x=0} = 0,\ \left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) + \alpha u(x,t)\right)\Big|_{x=l} = 0. \tag{33}$$

Для нахождения численного решения задачи (31)–(33) покроем расчетную область равномерной расчетной сеткой $\overline{\omega} = \overline{\omega}_t \times \overline{\omega}_h$, где

$$\overline{\omega}_t = \left\{t^n = n\tau,\ n = \overline{0..N_t},\ N_t\tau = T\right\},\ \ \overline{\omega}_h = \left\{x_i = ih,\ i = \overline{0..N_x},\ N_x h = l\right\}, \tag{34}$$

где τ — размер шага по временной переменной; N_t — количество узлов расчетной сетки по временной переменной; h — размер шага по пространственной координате; N_x — количество узлов по пространственной координате.

Аналитическое решение задачи (31)–(33) согласно (30) можно записать в виде:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k^{(1)}\exp\left(-a\lambda_k^2 t\right) + C_k^{(w)}(t)\right)\left(\lambda_k\cos\lambda_k x + \alpha\sin\lambda_k x\right), \tag{35}$$

где коэффициенты $C_k^{(1)}$ и $C_k^{(w)}(t)$ определяются выражениями (18) и (29), соответственно, а λ_k, $k = 1, 2,...$ — положительные корни уравнения (11).

Для упрощения дальнейших выкладок введем следующее обозначение:

$$C_k^{(u)}(t) = C_k^{(1)}\exp\left(-a\lambda_k^2 t\right) + C_k^{(w)}(t). \tag{36}$$

Запишем аппроксимацию уравнения (31) во внутренних узлах расчетной сетки (34):

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = a\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + f_i^n, \tag{37}$$

где $u_{i\pm1}^n = u(t^n, x_{i\pm1}),\ u_i^n = u(t^n, x_i)$.

Тогда с учетом (24), (35) и (36) аппроксимация (37) может быть записана виде:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{N-1}\left(C_k^{(u)}(t^{n+1}) - C_k^{(u)}(t^n)\right)\left(\lambda_k\cos\lambda_k x + \alpha\sin\lambda_k x\right) = \\ &= \frac{a}{h^2}\sum_{k=1}^{N-1}C_k^{(u)}(t^n)\left(\lambda_k\cos\left(\lambda_k\left(x_i + h\right)\right) + \alpha\sin\left(\lambda_k\left(x_i + h\right)\right) - 2\lambda_k\cos\lambda_k x_i - 2\alpha\sin\lambda_k x_i + \right. \\ &\left. + \lambda_k\cos\left(\lambda_k\left(x_i - h\right)\right) + \alpha\sin\left(\lambda_k\left(x_i - h\right)\right)\right) + \sum_{k=1}^{N-1}C_k^{(f)}(t^n)\left(\lambda_k\cos\lambda_k x_i + \alpha\sin\lambda_k x_i\right).\end{aligned} \tag{38}$$

С учетом преобразований

$$\lambda_k\cos\left(\lambda_k\left(x_i + h\right)\right) + \lambda_k\cos\left(\lambda_k\left(x_i - h\right)\right) = 2\lambda_k\cos\lambda_k x_i\cos\lambda_k h,$$

$$\alpha\sin\left(\lambda_k\left(x_i + h\right)\right) + \alpha\sin\left(\lambda_k\left(x_i - h\right)\right) = 2\alpha\sin\lambda_k x_i\cos\lambda_k h,$$

выражение (38) запишется в виде:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{N-1}\left(C_k^{(u)}(t^{n+1}) - C_k^{(u)}(t^n)\right)\left(\lambda_k\cos\lambda_k x + \alpha\sin\lambda_k x\right) = a\frac{2}{h^2}\sum_{k=1}^{N-1}C_k^{(u)}(t^n)\left(\cos\lambda_k h - 1\right)\left(\lambda_k\cos\lambda_k x_i + \alpha\sin\lambda_k x_i\right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{N-1}C_k^{(f)}(t^n)\left(\lambda_k\cos\lambda_k x_i + \alpha\sin\lambda_k x_i\right).\end{aligned}$$

С учетом ортогональности базисных функций $X_k(x)$, $k = 1, 2,...$, определяемых (10), последнее выражение может быть записано в виде:

$$\frac{C_k^{(u)}(t^{n+1}) - C_k^{(u)}(t^n)}{\tau} = a\frac{2\left(\cos\lambda_k h - 1\right)}{h^2}C_k^{(u)}(t^n) + C_k^{(f)}(t^n). \tag{39}$$

Найдем вторую производную по пространственной переменной функции $u(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(u)}(t)\left(\lambda_k \cos\lambda_k x + \alpha \sin\lambda_k x\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(u)}(t)\left(-\lambda_k^2 \sin\lambda_k x + \alpha\lambda_k \cos\lambda_k x\right)\right) = \\ = -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 C_k^{(u)}(t)\left(\lambda_k \cos\lambda_k x + \alpha \sin\lambda_k x\right). \tag{40}$$

Из формул (39) и (40) следует, что при аппроксимации задачи (31)–(33) на расчетной сетке (34) схемой (37) полученное решение для каждой гармоники отличается от реальных значений на величину $\alpha^* = 1 - 2\left(1 - \cos\lambda_k h\right)\big/\left(\lambda_k h\right)^2$.

Рассмотрим отдельно полученную величину α^*:

$$\alpha^* = 1 - \frac{2\left(1 - \cos\lambda_k h\right)}{\left(\lambda_k h\right)^2} = 1 - \frac{2\left(\frac{\left(\lambda_k h\right)^2}{2} - \frac{\left(\lambda_k h\right)^4}{24} + O\left(h^6\right)\right)}{\left(\lambda_k h\right)^2} = \frac{\left(\lambda_k h\right)^2}{12} + O\left(h^4\right). \tag{41}$$

Из (41) можно сделать вывод, что при аппроксимации по пространственной переменной на основе схемы (37) численное решение во внутренних узлах сетки (34) отличается от реальных значений на $O(h^2)$.

Рассмотрим аппроксимацию функции $u(x,t)$ по пространственной переменной в граничных узлах пространственной сетки (34). Аппроксимацию выполним на основе интегро-интерполяционного метода (метода баланса). Не теряя общности, рассмотрим аппроксимацию функции $u(x,t)$ по пространственной переменной на левой границе расчетной сетки ($x = 0$):

$$2\frac{u_1^n - u_0^n}{h^2} - 2\frac{\alpha u_0^n}{h} = 2\sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n)\frac{\lambda_k \cos\lambda_k h + \alpha \sin\lambda_k h - \lambda_k}{h^2} - 2\sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n)\frac{\alpha\lambda_k}{h} = \\ = 2\sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n)\frac{\lambda_k\left(\cos\lambda_k h - 1\right) + \alpha\left(\sin\lambda_k h - \lambda_k h\right)}{h^2} = \frac{2\lambda_k}{h^2}\sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n)\left(1 - \frac{\left(\lambda_k h\right)^2}{2} + \frac{\left(\lambda_k h\right)^4}{24} + O\left(h^6\right) - 1\right) + \\ + \frac{2\alpha}{h^2}\sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n)\left(\lambda_k h - \frac{\left(\lambda_k h\right)^3}{6} + \frac{\left(\lambda_k h\right)^5}{120} + O\left(h^7\right) - \lambda_k h\right) = \sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n)\left(-\lambda_k^3 - \lambda_k^3\frac{\alpha h}{3} + O\left(h^2\right)\right). \tag{42}$$

Для повышения порядка погрешности аппроксимации функции $u(x,t)$ по пространственной переменной в граничных узлах сетки (34) рассмотрим следующую аппроксимацию:

$$2\frac{u_1^n - u_0^n}{h^2} - 2\alpha\frac{\gamma_1 u_0^n + \gamma_2 u_1^n}{h} = 2\sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n)\frac{\lambda_k \cos\lambda_k h + \alpha \sin\lambda_k h - \lambda_k}{h^2} - 2\alpha\sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n)\frac{\gamma_1\lambda_k + \gamma_2\lambda_k \cos\lambda_k h + \gamma_2\alpha \sin\lambda_k h}{h} = \\ = \frac{2}{h^2}\sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n)\left(1 - \gamma_2\alpha h\right)\left(\lambda_k \cos\lambda_k h + \alpha \sin\lambda_k h\right) - \frac{2}{h^2}\sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n)\lambda_k\left(1 + \gamma_1\alpha h\right) = \\ = \frac{2}{h^2}\left(1 - \gamma_2\alpha h\right)\sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n)\left(\lambda_k - \frac{\lambda_k^3 h^2}{2} + \frac{\lambda_k^5 h^4}{24} + \alpha\lambda_k h - \alpha\frac{\lambda_k^3 h^3}{6} + \alpha\frac{\lambda_k^5 h^5}{120} + O\left(h^6\right)\right) - \\ - \frac{2}{h^2}\left(1 + \gamma_1\alpha h\right)\sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n)\lambda_k = \frac{2\alpha}{h}\left(\gamma_2 + 1 - \gamma_2\alpha h - \gamma_1\right)\sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n)\lambda_k - \sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n)\lambda_k^3 + \\ + \frac{2}{h^2}\left(\gamma_2\alpha\frac{h^3}{2} - \alpha\frac{h^3}{6} + \gamma_2\alpha^2\frac{h^4}{6}\right)\sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n)\lambda_k^3 + \frac{h^2}{12}\sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n)\lambda_k^5 + O\left(h^3\right). \tag{43}$$

Коэффициенты γ_1 и γ_2 в (43) найдем как решение системы

$$\begin{cases} \gamma_2 + 1 - \gamma_2\alpha h - \gamma_1 = 0, \\ \gamma_2 - \frac{1}{3} + \gamma_2\alpha\frac{h}{3} = 0, \end{cases}$$

из которой получим значения коэффициентов $\gamma_1 = 2/(3 + \alpha h)$ и $\gamma_2 = 1/(3 + \alpha h)$.

Таким образом, получаем следующую аппроксимацию функции $u(x,t)$ по пространственной переменной в граничных узлах сетки (34):

$$2\frac{u_1^n - u_0^n}{h^2} - \frac{4\alpha}{h\left(3 + \alpha h\right)}u_0^n - \frac{2\alpha}{h\left(3 + \alpha h\right)}u_1^n = \sum_{k=1}^{N-1} C_k^{(u)}(t^n)\left(-\lambda_k^3 + \frac{\lambda_k^5 h^2}{12} + O\left(h^3\right)\right). \tag{44}$$

Результаты исследования. Сравним вычислительную точность аппроксимаций (42) и (44) по пространственной переменной при решении тестовых задач. Рассмотрим три тестовые задачи, первая из которых представляет собой задачу на установление с постоянной правой частью. Вторая задача также является задачей на установление

с правой частью, представляющей собой гармоническую функцию, соответствующую собственному значению λ_k. В третьей задаче решается уравнение теплопроводности, правая часть которого задается ступенчатой функцией.

Тестовая задача 1. Найдем решение следующей задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2,\ 0 < x < 2, \tag{45}$$

со следующим начальным

$$u(x,t)\big|_{t=0} = 0 \tag{46}$$

и с граничными условиями третьего рода

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) - 2u(x,t)\right)\Big|_{x=0} = 0,\ \left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) + 2u(x,t)\right)\Big|_{x=2} = 0. \tag{47}$$

Задача (45)–(47) решается на установление.

Аналитическое решение задачи (45)–(47) на установление может быть записано в следующем виде: $u(x,t) = -x^2 + 2x + 1$.

На рис. 1 представлено аналитическое решение задачи (45)–(47), а также численные решения тестовой задачи 1, полученные на основе разностной схемы первого порядка аппроксимации по пространству (42) и на основе разностной схемы второго порядка аппроксимации по пространству (44) для различных размеров шага по пространственной переменной.

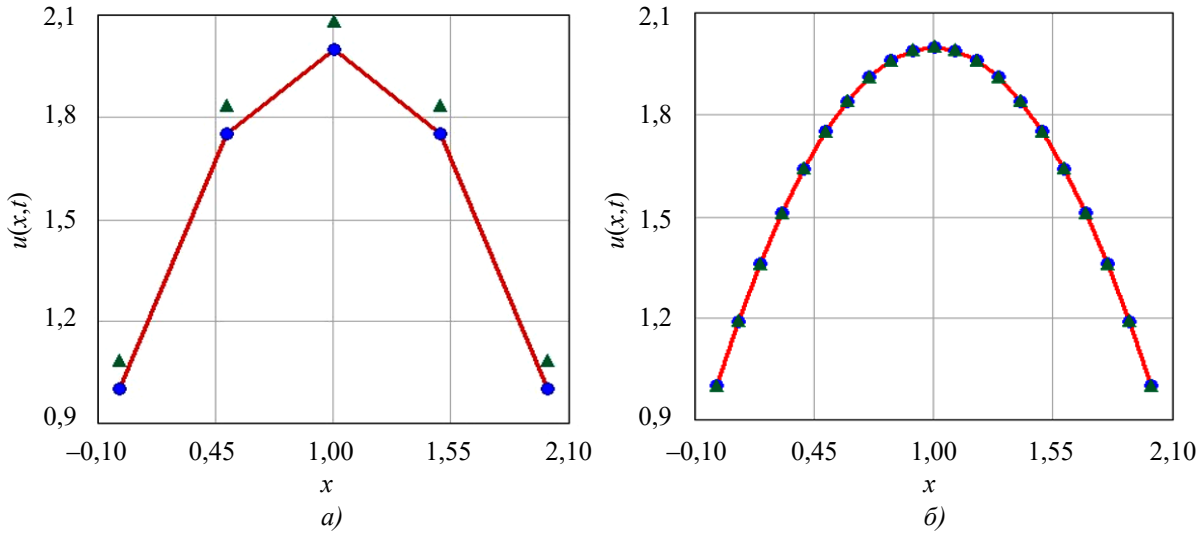


Рис. 1. Результаты решения тестовой задачи 1:
красная линия — точное решение; синие точки — численное решение на основе схемы первого порядка аппроксимации по пространству (42); зеленые треугольники — численное решение на основе схемы второго порядка аппроксимации по пространству (44);
а — шаг по пространству $h = 0{,}5$; *б* — шаг по пространству $h = 0{,}1$

Помимо погрешности аппроксимации рассчитаем эффективный порядок точности схемы [28]:

$$p^{eff} = \log_r \left|\frac{R_N}{R_{rN}}\right|, \tag{48}$$

где R_N — погрешность численного решения на сетке с шагом h, R_{rN} — погрешность численного решения на сетке с шагом h/r.

В таблице 1 представлены сведения о расчетной погрешности численного решения тестовой задачи 1 на основе схем (42) и (44) для различных размеров шага по пространству. Значение погрешности измерялось в норме сеточного пространства $\Psi^n = \sum_{i=1}^{N} \left|u(x_i,t^n) - u_i^n\right| \cdot h$, где $u(x_i,t^n)$ — аналитическое решение, u_i^n — численное решение.

На основании данных таблицы 1 можно заключить, что предложенная схема (44) с улучшенной аппроксимацией на границе расчетной области для уравнения теплопроводности при граничных условиях третьего рода (33) имеет эффективный порядок точности, равный 2, что соответствует полученной теоретической оценке.

Таблица 1

Расчетные значения погрешности численного решения тестовой задачи 1 для различных размеров шага по пространственной переменной

	Значение погрешности численного решения			
	$h = 1{,}00$	$h = 0{,}50$	$h = 0{,}25$	$h = 0{,}10$
Разностная схема со стандартной аппроксимацией границ (42)	0,000	0,000	0,000	$3{,}286\times10^{-15}$
Разностная схема с улучшенной аппроксимацией границ (44)	1,000	0,208	0,047	0,007
Эффективный порядок точности схемы (44)	–	2,263	2,152	2,075

Тестовая задача 2. Найдем решение следующей задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + X_k,\ 0 < x < 5, \tag{49}$$

со следующим начальным

$$u(x,t)\big|_{t=0} = 0 \tag{50}$$

и с граничными условиями третьего рода

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) - 0{,}1u(x,t)\right)\Big|_{x=0} = 0,\ \left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) + 0{,}1u(x,t)\right)\Big|_{x=5} = 0, \tag{51}$$

где X_k — собственная функция, соответствующая собственному значению λ_k, которое находится из уравнения (11). Задача (49)–(51) решается на установление.

Аналитическое решение задачи (49)–(51) на установление может быть записано в следующем виде:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \lambda_k^2}}\sin\left(\lambda_k x + \arccos\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \lambda_k^2}}\right)\right).$$

По условию задачи (49)–(51) $\alpha = 0{,}1$. Найдем λ_k.

Рассмотрим алгоритм численного решения уравнения (11) для определения собственных значений λ_k. Пусть нам требуется найти корни нелинейного уравнения $f(\lambda) = 0$, где $f(\lambda) = 2\ \mathrm{ctg}\ \lambda l - \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\alpha}{\lambda}$.

Шаг 1. Введем две вспомогательные функции: $f_1(\lambda) = 2\ \mathrm{ctg}\ \lambda l$ и $f_2(\lambda) = \frac{\lambda}{\alpha} - \frac{\alpha}{\lambda}$.

Шаг 2. Зададим количество итераций K, оно же количество собственный значений, которое мы хотим найти.

Шаг 3. Для каждого собственного значения λ_k определим нулевое приближение как значение следующего выражения:

$$w_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l} - \frac{1}{l}\cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2}\cdot f_2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}\right)\right),$$

где k — номер итерации или индекс соответствующего собственного значения λ_k.

Шаг 4. На каждой итерации воспользуемся методом Ньютона для нахождения решения нелинейного уравнения $f(\lambda) = 0$. Для этого определим функцию

$$g(\lambda) = f'(\lambda) = -\frac{2l}{\sin^2(\lambda l)} - \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Шаг 5. В качестве начального приближения x_0 возьмем соответствующий номеру итерации w_k.

Шаг 6. Находим значение $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/g(x_i)$.

Шаг 7. Если $|x_{i+1} - x_i| > \varepsilon$, где ε — наперед заданное малое значение погрешности, возвращаемся на Шаг 6.

Шаг 8. Найденное значение λ_k определяем равным x_{i+1}.

Шаг 9. Если $k < K$, то переходим на Шаг 4. Иначе завершаем алгоритм расчета собственных значений λ_k.

На рис. 2 приведены результаты работы описанного выше алгоритма. Точками на рисунке отмечены λ_k, соответствующие решению уравнения $f(\lambda) = 0$.

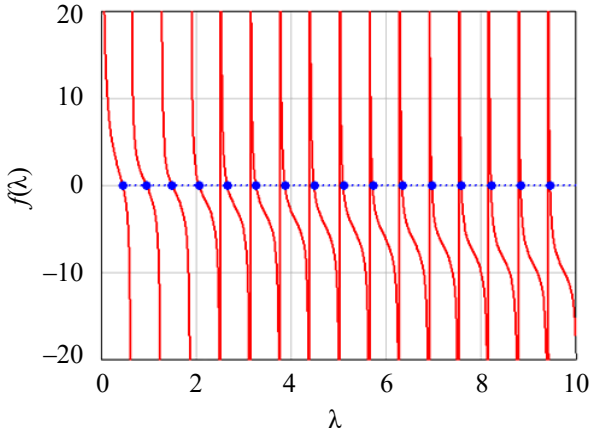


Рис. 2. Результаты работы алгоритма нахождения собственных значений λ_k: красная линия — график функции $f(\lambda)$; синие точки — найденные значения λ_k, соответствующие решению уравнения $f(\lambda) = 0$

На рис. 3 представлено аналитическое решение задачи (49)–(51), а также численные решения тестовой задачи 2, полученные на основе разностной схемы первого порядка аппроксимации по пространству (42) и на основе разностной схемы второго порядка аппроксимации по пространству (44) для различных размеров шага по пространственной переменной. Собственное значение взято для $k = 4$ и равно $\lambda_4 \approx 2{,}529$.

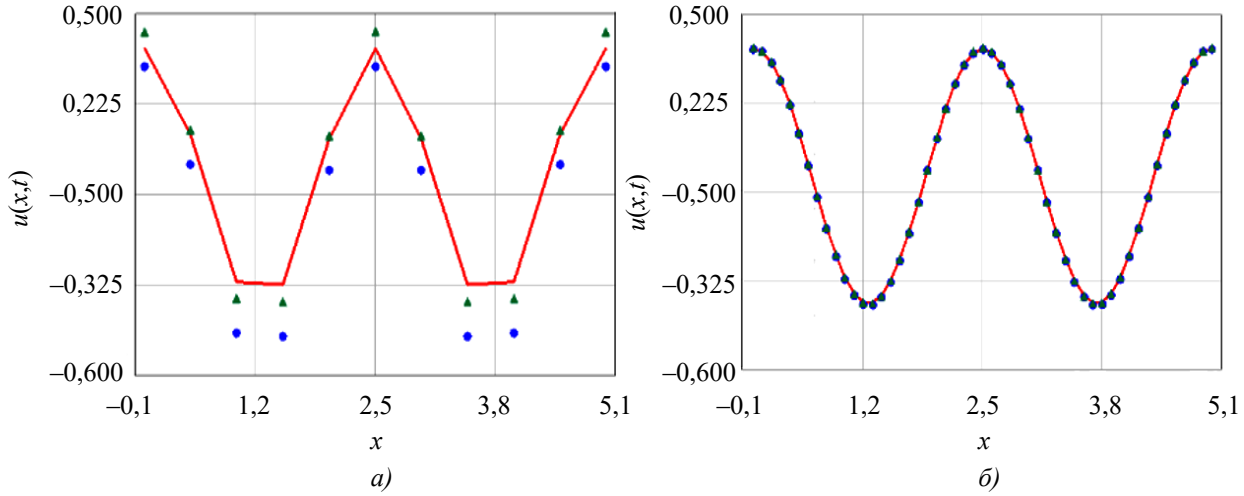


Рис. 3. Результаты решения тестовой задачи 2 при $k = 4$:
красная линия — точное решение; синие точки — численное решение на основе схемы первого порядка аппроксимации по пространству (42); зеленые треугольники — численное решение на основе схемы второго порядка аппроксимации по пространству (44); *а* — шаг по пространству $h = 0{,}5$; *б* — шаг по пространству $h = 0{,}1$

В таблице 2 представлены сведения о расчетной погрешности численного решения тестовой задачи 2 на основе схем (42) и (44) для различных размеров шага по пространству.

Таблица 2

Расчетные значения погрешности численного решения тестовой
задачи 2 для различных размеров шага по пространственной переменной

	Значение погрешности численного решения			
	$h = 1{,}00$	$h = 0{,}50$	$h = 0{,}25$	$h = 0{,}10$
Разностная схема (42)	2,916	0,581	0,136	0,021
Эффективный порядок точности схемы (42)	–	2,327	2,094	2,028
Разностная схема с улучшенной аппроксимацией границ (44)	1,126	0,206	0,047	$6{,}964\times10^{-3}$
Эффективный порядок точности схемы (44)	–	2,455	2,133	2,080

Из данных табл. 2 видно, что предложенная схема (44) с улучшенной аппроксимацией на границе расчетной области для уравнения теплопроводности при граничных условиях третьего рода (33) имеет эффективный порядок точности, равный 2, что соответствует полученной теоретической оценке. Разностная схема (42) со стандартной аппроксимацией на границе расчетной области также имеет эффективный порядок точности, близкий к 2, несмотря на полученную теоретическую оценку порядка погрешности аппроксимации для граничных узлов. При этом стоит отметить, что предложенная схема (44) позволяет уменьшить погрешность численного решения примерно в 2,5–3 раза в зависимости от размера шага по пространству: с уменьшением размера шага разница между схемой (42) и (44) возрастает.

Тестовая задача 3. Найдем решение следующей задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \theta(x-1) + \theta(x-3),\ 0 < x < 5,\ 0 < T < 10 \tag{52}$$

со следующим начальным

$$u(x,t)\big|_{t=0} = 0 \tag{53}$$

и с граничными условиями третьего рода

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) - u(x,t)\right)\Big|_{x=0} = 0,\ \left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) + u(x,t)\right)\Big|_{x=5} = 0, \tag{54}$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда.

Согласно (30) аналитическое решение задачи (52)–(54) может быть записано в следующем виде:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(w)}(t)\left(\lambda_k \cos\lambda_k x + \alpha \sin\lambda_k x\right),$$

где $C_k^{(w)}(t)$ определяется на основании (29), при этом с учетом вида правой части (52)

$$C_k^{(f)}(t) = C_k^{(f)} = -\frac{2}{5\left(\lambda_k^2+1\right)+2}\int_1^3 \left(\lambda_k \cos\lambda_k x + \alpha \sin\lambda_k x\right)dx = \frac{2}{5\left(\lambda_k^2+1\right)+2}\left(\frac{1}{\lambda_k}\left(\cos 3\lambda_k - \cos\lambda_k\right) + \sin\lambda_k - \sin 3\lambda_k\right). \tag{55}$$

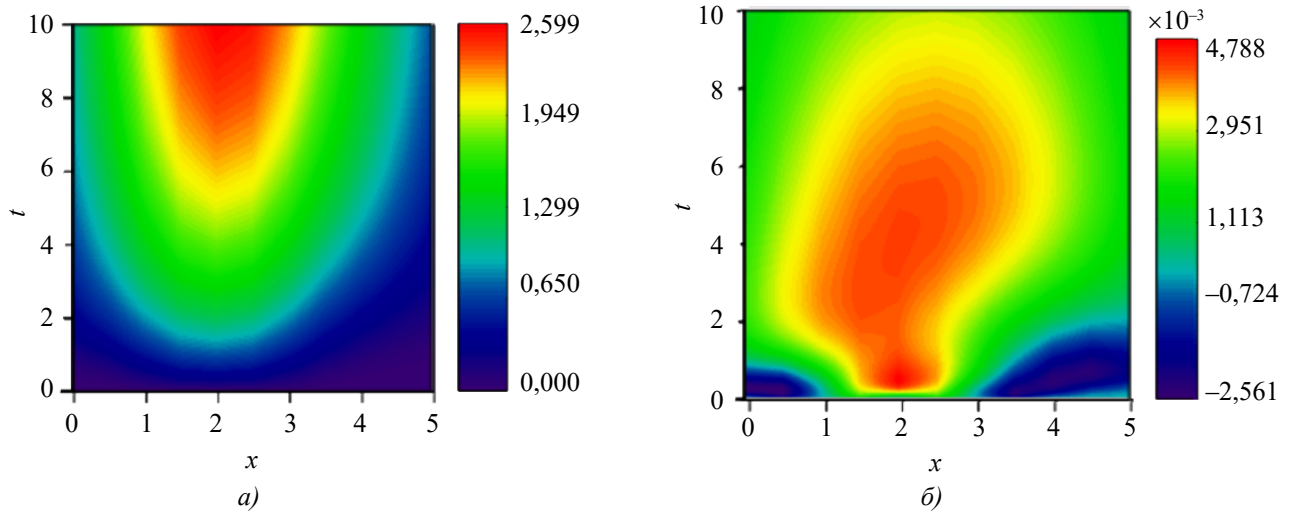
С учетом (29) и (55) получаем следующий вид точного решения задачи (52)–(54):

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-\lambda_k^2 t\right)-1}{\lambda_k^2} C_k^{(f)}\left(\lambda_k \cos\lambda_k x + \alpha \sin\lambda_k x\right).$$

Собственные значения λ_k находятся на основе описанного в тестовой задаче 2 алгоритма.

На рис. 4 *а* представлено численное решение тестовой задачи 3, полученное на основе разностной схемы с улучшенной аппроксимацией на границе (44) для размера шага по пространству $h = 0{,}5$. При расчетах бралось 1000 собственных значений λ_k. При этом визуально разницы между численными решениями на основе разностных схем (42) и (44) не наблюдалось.

На рис. 4 *б* представлена разность численного решения и аналитического решения, рассчитанного на основании формулы (56) при k от 1 до 1000.



а) *б)*

Рис. 4. Результаты решения тестовой задачи 3 при учете 1000 и шагах расчетной сетки по времени $\tau = 0{,}001$ и по пространству $h = 0{,}5$: *а* — численное решение на основе схемы второго порядка аппроксимации по пространству (42); *б* — разность аналитического решения и численного решения на основе (44)

На рис. 5 представлено аналитическое решение задачи (52)–(54) в фиксированный момент времени $t = 2$, а также численные решения тестовой задачи 3, полученные на основе разностной схемы первого порядка аппроксимации по пространству (42) и на основе разностной схемы второго порядка аппроксимации по пространству (44) для различных размеров шага по пространственной переменной. При расчетах учитывалась сумма первых 1000 собственных значений λ_k.

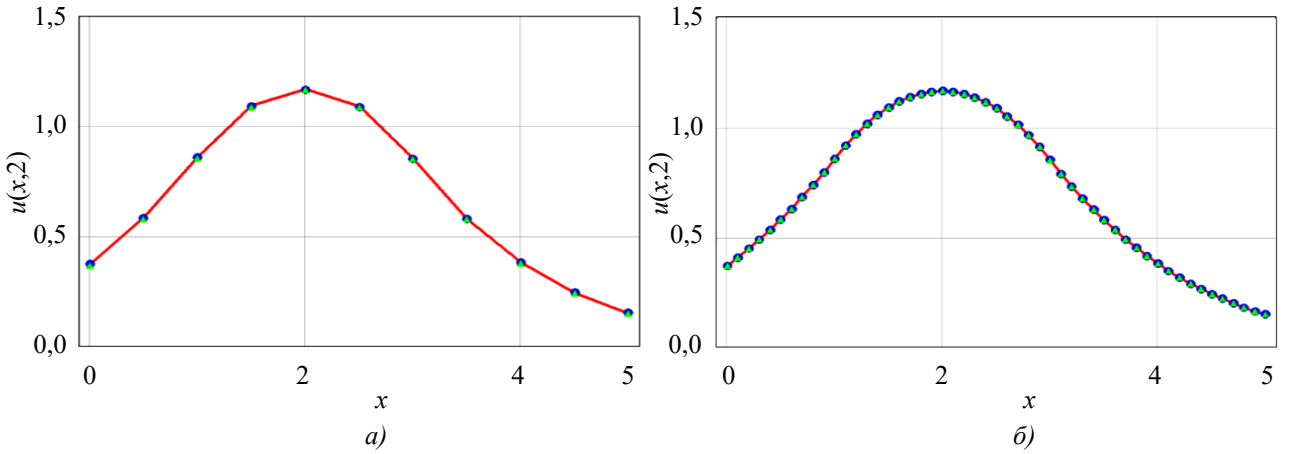


Рис. 5. Результаты решения тестовой задачи 3 при $t = 2$:
красная линия — аналитическое решение; синие точки — численное решение на основе схемы первого порядка аппроксимации по пространству (42); зеленые треугольники — численное решение на основе схемы второго порядка аппроксимации по пространству (44); *а* — шаг по пространству $h = 0{,}5$; *б* — шаг по пространству $h = 0{,}1$

В таблице 3 представлены сведения о расчетной погрешности численного решения тестовой задачи 3 на основе схем (42) и (44) для различных размеров шага по пространству.

Таблица 3

Расчетные значения погрешности численного решения тестовой
задачи 3 при $t = 2$ для различных размеров шага по пространственной переменной

	Значение погрешности численного решения			
	$h = 1{,}00$	$h = 0{,}50$	$h = 0{,}25$	$h = 0{,}10$
Решение на основе схемы первого порядка аппроксимации по пространству (42)	0,0503	0,0102	0,002	$2{,}6797\times10^{-4}$
Эффективный порядок точности схемы (42)	–	2,3010	2,231	2,2860
Решение на основе схемы второго порядка аппроксимации по пространству (44)	0,0530	0,0130	$2{,}914\times10^{-3}$	$2{,}0397\times10^{-4}$
Эффективный порядок точности схемы (44)	–	2,0570	2,132	2,9020

Из данных таблицы 3 (по аналогии с тестовой задачей 2) видно, что предложенная схема (44) с улучшенной аппроксимацией на границе расчетной области для уравнения теплопроводности при граничных условиях третьего рода (33) имеет эффективный порядок точности, равный 2, что соответствует полученной теоретической оценке. Разностная схема (42) со стандартной аппроксимацией на границе расчетной области также имеет эффективный порядок точности, близкий к 2, несмотря на полученную теоретическую оценку порядка погрешности аппроксимации для граничных узлов. При этом для предложенной схемы (44) погрешность численно решения падает существенно быстрее, чем для решения на основе схемы (42).

Обсуждение и заключение. В работе рассмотрено уравнение теплопроводности с граничными условиями третьего рода, для которого получен вид точного решения. Проведена аппроксимация рассмотренной задачи и показано, что при стандартной аппроксимации задачи на границе расчетной области теоретическая оценка порядка погрешности аппроксимации дифференциального оператора второго порядка в уравнении диффузии составляет $O(h)$. Таким образом, на основании полученной оценки можно говорить о том, что для рассмотренного уравнения теплопроводности в случае граничных условий третьего рода задача аппроксимируется с первым порядком. Для повышения точности численного решения предложена разностная схема, имеющая погрешность аппроксимации дифференциального оператора второго порядка $O(h^2)$, как во внутренних, так и в граничных узлах расчетной области. Данная схема применима в случае граничных условий третьего рода специального вида.

Из численных экспериментов видно, что предложенная схема с улучшенной аппроксимацией на границе расчетной области для уравнения теплопроводности при граничных условиях третьего рода специального вида имеет эффективный порядок точности около 2, что соответствует полученной теоретической оценке. При этом стоит отметить, что разностная схема со стандартной аппроксимацией на границе расчетной области также имеет эффективный порядок точности, близкий к 2, несмотря на полученную теоретическую оценку порядка погрешности аппроксимации для граничных узлов. Обнаруженная разница между теоретический оценкой погрешности аппроксимации и полученной вычислительной точностью требует дальнейшего исследования. Важно отметить, что для предложенной схемы расчетная погрешность численного решения падает существенно быстрее, чем для решения на основе схемы со стандартной аппроксимацией на границе.

Список литературы / References

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. 7-е изд. Москва: Наука; 2004. 798 с.

Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Equations of mathematical physics*. 7th ed. Moscow: Nauka; 2004. 798 p. (In Russ.)

2. Cannon J.R. *The one-dimensional heat equation (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*, vol. 23). Cambridge: Addison-Wesley Publishing Company/Cambridge University Press; 1984. XXV + 483 p.

3. Evans L.C. *Partial differential equations*. American Mathematical Society; 1998. 662 p.

4. Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы*. Москва: Наука; 1989. 432 с.

Samarskii A.A., Gulin A.V. *Numerical methods*. Moscow: Nauka; 1989. 432 p. (In Russ.)

5. Crank J., Nicolson P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1947;43(1):50–67. https://doi.org/10.1017/S0305004100023197

6. Сметанников О.Ю. Оптимизация остаточного прогиба круглой пластинки из стеклующегося полимера при неравномерном охлаждении. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2010;3(1):81–92. https://doi.org/10.7242/1999-6691/2010.3.1.9

Smetannikov O.Y. (2010). Optimization of the residual bending flexure of round polymer plate with glass transition at non-uniform cooling. *Computational Continuum Mechanics*. 2010;3(1):81–92. https://doi.org/10.7242/1999-6691/2010.3.1.9 (In Russ.)

7. Гужев Д.С., Калиткин Н.Н. Уравнение Бюргерса — тест для численных методов. *Математическое моделирование.* 1995;7(4):99–127.

Guzhev D.S., Kalitkin N.N. Burgers equation as a test for numerical methods. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 1995;7(4):99–127. (In Russ.)

8. Марков В.В., Утесинов В.Н. Разностная схема численного решения уравнения Бюргерса. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2020;60(12):2050–2054. https://doi.org/10.31857/S0044466920120108

Markov V.V., Utesinov V.N. Difference scheme for the numerical solution of the Burgers equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2020;60(12):1985–1989. https://doi.org/10.1134/S0965542520120106 (In Russ.)

9. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О точности разностных схем при расчете центрированных волн разрежения. *Математическое моделирование*. 2023;35(7):83–96. https://doi.org/10.20948/mm-2023-07-06

Kovyrkina O.A., Ostapenko V.V. On the accuracy of finite-difference schemes in calculations of centered rarefaction waves. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2023;15(Suppl. 1):S54–S63. https://doi.org/10.1134/S2070048223070104

10. Аристова Е.Н., Рогов Б.В., Чикиткин А.В. Оптимальная монотонизация высокоточной бикомпактной схемы для нестационарного многомерного уравнения переноса. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2016;56(6):973–988. https://doi.org/10.7868/S004446691606003X

Aristova E.N., Rogov B.V., Chikitkin A.V. Optimal monotonization of a high-order accurate bicompact scheme for the nonstationary multidimensional transport equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2016;56(6):962–976. https://doi.org/10.1134/S0965542516060038 (In Russ.)

11. Сухинов А.И., Кузнецова И.Ю., Чистяков А.Е., Проценко Е.А., Белова Ю.В. Исследование точности и применимости разностной схемы для решения задачи диффузии-конвекции при больших сеточных числах Пекле. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2020;13(4):437–448. https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.4.34

Sukhinov A.I., Kuznetsova I.Yu., Chistyakov A.E., Protsenko E.A., Belova Yu.V. Studying the accuracy and applicability of the finite difference scheme for solving the diffusion–convection problem at large grid Péclet numbers. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2021;62:1255–1266. https://doi.org/10.1134/S002189442107018X (In Russ.)

12. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Сидорякина В.В., Кузнецова И.Ю., Атаян А.М. Использование параллельных вычислений для оценки процесса переноса загрязняющих веществ в мелководных водоемах. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатик*а. 2024;24(2):298–315. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-298-315

Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Sidoryakina V.V., Kuznetsova I.Yu., Atayan A.M. Using parallel computing to evaluate the transport of pollutants in shallow waters. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2024;24(2):298–315. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-298-315 (In Russ.)

13. Афанасьева Н.М., Вабищевич П.Н. Устойчивые разностные схемы для некоторых параболических уравнений. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2014;54(7):1186–1193. https://doi.org/10.7868/S0044466914040036

Afanas'eva N.M., Vabishchevich P.N. Stable difference schemes for certain parabolic equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2014;54:1159–1166. https://doi.org/10.1134/S0965542514040034 (In Russ.)

14. Вабищевич П.Н. Монотонные схемы для задач конвекции-диффузии с конвективным переносом в различной форме. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2021;61(1):95–107. https://doi.org/10.31857/S0044466920120157

Vabishchevich P.N. Monotone schemes for convection–diffusion problems with convective transport in different forms. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2021;61(1):90–102. https://doi.org/10.1134/S0965542520120155 (In Russ.)

15. Chetverushkin B.N., Gulin A.V. Explicit schemes and numerical simulation using ultrahigh-performance computer systems. *Doklady Mathematics*. 2012;86(2):681–683. https://doi.org/10.1134/S1064562412050213

16. Четверушкин Б.Н., Ольховская О.Г., Гасилов В.А. Явная схема для решения нелинейного уравнения теплопроводности. *Математическое моделирование*. 2022;34(12):3–19. https://doi.org/10.20948/mm-2022-12-01

Chetverushkin B.N., Olkhovskaya O.G., Gasilov V.A. An explicit difference scheme for a nonlinear heat conduction equation. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2023;15(3):529–538. https://doi.org/10.1134/S2070048223030031 (In Russ.)

17. Криксин Ю.А., Тишкин В.Ф. Энтропийная регуляризация разрывного метода Галеркина для двумерных уравнений Эйлера в триангулированных областях. *Математическое моделирование*. 2023;35(3):3–19. https://doi.org/10.20948/mm-2024-04-05

Kriksin Y.A., Tishkin V.F. Entropic regularization of the discontinuous Galerkin method for two-dimensional euler equations in triangulated domains. *Mathematical Models and Computer Simulations.* 2023;15(5):781–791. https://doi.org/10.1134/S2070048223050058 (In Russ.)

18. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф. О точности разрывного метода Галеркина при расчете газодинамических ударных волн. *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления.* 2023;510(1):43–51. https://doi.org/10.31857/S268695432360009X

Ladonkina M.E., Neklyudova O.A., Ostapenko V.V., Tishkin V.F. On the accuracy of discontinuous Galerkin method calculating gas-dynamic shock waves. *Doklady Mathematics*. 2023;107(2):120–125. https://doi.org/10.1134/S1064562423700746 (In Russ.)

19. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Кузнецова И.Ю., Атаян А.М., Никитина А.В. Регуляризованная разностная схема для решения задач гидродинамики. *Математическое моделирование*. 2022;34(2):85–100. https://doi.org/10.20948/mm-2022-02-07

Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Kuznetsova I.Yu., Atayan A.M., Nikitina A.V. Regularized difference scheme for solving hydrodynamic problems. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2022;14:745–754. https://doi.org/10.1134/S2070048222050155 (In Russ.)

20. Chistyakov A.E., Nikitina, A.V., Kuznetsova I.Yu., Rakhimbaeva E.O., Porksheyan M.V. Investigation of the approximation error of the difference scheme for the mathematical model of hydrodynamics. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023;44(5):1839–1846. https://doi.org/10.1134/S1995080223050128

21. Голубев В.И., Шевченко А.В., Петров И.Б. Повышение порядка точности сеточно-характеристического метода для задач двумерной линейной упругости с помощью схем операторного расщепления. *Компьютерные исследования и моделирование*. 2022;14(4):899–910. https://doi.org/10.20537/2076-7633-2022-14-4-899-910

Golubev V.I., Shevchenko A.V., Petrov I.B. Raising convergence order of grid-characteristic schemes for 2D linear elasticity problems using operator splitting. *Computer Research and Modeling*. 2022;14(4):899–910. https://doi.org/10.20537/2076-7633-2022-14-4-899-910 (In Russ.)

22. Васюков А.В., Петров И.Б. Повышение порядка аппроксимации расчетов волновых процессов в композитном образце при использовании неструктурированной расчетной сетки. *Прикладная механика и техническая физика*. 2024;65(3):152–160. https://doi.org/10.15372/PMTF202315400

Vasyukov A.V., Petrov I.B. Increase in approximation order of calculations of wave processes in a composite sample when using an unstructured computational grid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2024;65(3):528–535. https://doi.org/10.1134/S0021894424030143 (In Russ.)

23. Bobreneva Yu.O., Poveshchenko Yu., PodrygaV.O., Polyakov S.V., Uzyunbaev R.M., Rahimly P.I. et al. One approach to numerical modeling of the heat and mass transfers of two-phase fluids in fractured-porous reservoirs. *Mathematics*. 2023;11(18):3991. https://doi.org/10.3390/math11183991

24. Васильев В.И., Васильева М.В., Гладких В.С., Ильин В.П., Никифоров Д.Я., Перевозкин Д.В. и др. Численное решение задачи фильтрации в трещиноватой среде с использованием декомпозиции областей. *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2018;21(4):15–27. https://doi.org/10.17377/sibjim.2018.21.402

Vasil'ev V.I., Vasil'eva M.V., Gladkikh V.S., Il'in V.P., Nikiforov D.Ya., Perevozkin D.V. et al. Numerical solution of a fluid filtration problem in a fractured medium by using the domain decomposition method. *Journal of Applied and Industrial Mathematics.* 2018;12(4):785–796. https://doi.org/10.1134/S199047891804018X (In Russ.)

25. Узянбаев Р.М., Бобренева Ю.О., Повещенко Ю.А., Подрыга В.О., Поляков С.В., Губайдуллин И.М. Численное моделирование пьезопроводных процессов в двумерной постановке для коллектора трещиновато-порового типа. *Препринты Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН*. 2024;35:1–17. https://doi.org/10.20948/prepr-2024-35

Uzyanbaev R.M., Bobreneva Yu.O., Poveshchenko Yu.A., Podryga V.O., Polyakov S.V., Gubaydullin I.M. Numerical modeling of piezoconductive processes in a two-dimensional formulation for a fractured-pore type reservoir. *Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Science*s. 2024;035:1–17. https://doi.org/10.20948/prepr-2024-35 (In Russ.)

26. Литвинов В.Н., Чистяков А.Е., Никитина А.В., Атаян А.М., Кузнецова И.Ю. Математическое моделирование гидродинамических процессов Азовского моря на многопроцессорной вычислительной системе. *Компьютерные исследования и моделирование*. 2024;16(3):647–672. https://doi.org/10.20537/2076-7633-2024-16-3-647-672

Litvinov V.N., Chistyakov A.E., Nikitina A.V., Atayan A.M., Kuznetsova I.Yu. Mathematical modeling of hydrodynamics problems of the Azov Sea on a multiprocessor computer system. *Computer Research and Modeling*. 2024;16(3):647–672. https://doi.org/10.20537/2076-7633-2024-16-3-647-672 (In Russ.)

27. Сухинов А.И., Кузнецова И.Ю. Математическая модель транспорта трехкомпонентной взвеси. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):39–48. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-39-48

Sukhinov A.I., Kuznetsova I.Yu. Mathematical model of three-component suspension transport. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):39–48. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-39-48 (In Russ.)

28. Попов И.В. Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для нелинейного уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости. *Препринты Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН.* 2017;68:1–22. https://doi.org/10.20948/prepr-2017-68

Popov I.V. Construction of a difference scheme of increased order of approximation for a nonlinear transport equation using adaptive artificial viscosity. *Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences*. 2017;68:1–22. https://doi.org/10.20948/prepr-2017-68 (In Russ.)

Об авторах:

Александр Евгеньевич Чистяков, профессор кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), ORCID, ScopusID, SPIN-код, cheese_05@mail.ru

Инна Юрьевна Кузнецова, старший преподаватель кафедры математики и информатики Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), ORCID, ScopusID, SPIN-код, ikuznecova@donstu.ru

Заявленный вклад авторов:

А.Е. Чистяков: постановка задачи; алгоритм определения собственных значений; численные эксперименты.

И.Ю. Кузнецова: получение аналитического решения задачи; получение разностной схемы с улучшенной аппроксимацией на границе для уравнения теплопроводности с граничными условиями третьего рода, численные эксперименты.

Конфликт интересов: ***авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.***

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Alexander E. Chistyakov, Professor at the Department of Software for Computer Engineering and Automated Systems, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, Russian Federation, 344003), ORCID, ScopusID, SPIN-code, cheese_05@mail.ru

Inna Yu. Kuznetsova, Senior Lecturer at the Department of Mathematics and Informatics, Don State Technical University (344003, Russian Federation, Rostov-on-Don, Gagarin Square, 1), ORCID, ScopusID, SPIN-code, ikuznecova@donstu.ru

Contributions of the authors:

A.E. Chistyakov: problem statement; eigenvalue determination algorithm; numerical experiments.

I.Yu. Kuznetsova: derivation of the analytical solution; development of the difference scheme with improved boundary approximation for the heat conduction equation with third-kind boundary conditions; numerical experiments.

Conflict of Interest Statement: **the authors declare no conflict of interest.**

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 27.02.2025
Поступила после рецензирования / Revised 19.03.2025
Принята к публикации / Accepted 22.04.2025

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
COMPUTATIONAL MATHEMATICS

CC BY

Check for updates

Оригинальное эмпирическое исследование

УДК 519.6

https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-22-33

Сравнение решений гидродинамической задачи в прямоугольной каверне методами торможения и разгона начального поля скорости

Н.К. Волосова[1], К.А. Волосов[2], А.К. Волосова[2], М.И. Карлов[3], Д.Ф. Пастухов[4] ✉, Ю.Ф. Пастухов[4]

[1] Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Российская Федерация

[2] Российский университет транспорта, г. Москва, Российская Федерация

[3] Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), г. Долгопрудный, Российская Федерация

[4] Полоцкий государственный университет им. Евфросинии Полоцкой, г. Новополоцк, Республика Беларусь

✉ dmitrij.pastuhov@mail.ru

Аннотация

Введение. Исследуется численное решение двумерной гидродинамической задачи в прямоугольной каверне методом торможения и методом разгона начальных условий в переменных «функция тока — вихрь». Метод торможения применялся при числах Рейнольдса $Re \le 3000$, а метод разгона при числах $Re = 8000$.

Материалы и методы. Для ускорения численного решения задачи с явной разностной схемой уравнения динамики вихря использовался метод торможения начальных условий и метод n-кратного расщепления явной разностной схемы ($n = 100$). Метод торможения начальных условий поля скорости по сравнению с методом разгона неподвижной жидкости позволил сократить время счета задачи в 57 раз. Метод расщепления использовал максимальный шаг времени, пропорциональный квадрату координатного шага, не нарушая при этом спектральной устойчивости явной схемы в уравнении вихря. Наибольшее время программа затратила на решение уравнения Пуассона с переменными «функция тока — вихрь». Используя замороженное поле скоростей и решая только динамическое уравнение вихря, было сокращено время счета в методе расщепления. Обратная матрица для решения уравнения Пуассона за конечное число элементарных операций вычислялась библиотекой Msimsl.

Результаты исследования. Численное решение задачи показало эквивалентность методов торможения и разгона начального поля скорости при небольших числах Рейнольдса (до 3000). Численно доказана эквивалентность решения гидродинамической задачи алгоритмом в переменных «функция тока — вихрь» и алгоритмом с неявным полилинейным рекуррентным методом в случае разгона начальных условий. Впервые предложено начальное горизонтальное поле скорости, гладкое во внутренних точках и состоящее из двух синусоид с неподвижным центром масс всей жидкости в прямоугольной каверне.

Обсуждение и заключение. Предложен алгоритм численного решения двухмерной гидродинамической задачи в прямоугольной каверне в переменных «функция тока — вихрь». Аппроксимация уравнений в системе (1) имеет шестой порядок погрешности во внутренних узлах и четвертый в граничных узлах. Впервые предложен метод торможения с начальным полем горизонтальной скорости посредством гладкого соединения двух синусоид. Предложенные алгоритмы позволяют более эффективно решать задачи гидродинамики с явной разностной схемой уравнения вихря.

Ключевые слова: гидродинамика, численные методы, уравнения в частных производных, начально-краевая задача, граничные условия, начальные условия

Для цитирования. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Сравнение решений гидродинамической задачи в прямоугольной каверне методами торможения и разгона начального поля скорости. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):22–33. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-22-33

© *Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., 2025*

Original Empirical Research

Comparison of Solutions to a Hydrodynamic Problem in a Rectangular Cavity Using Initial Velocity Field Damping and Acceleration Methods

Natalya K. Volosova[1], Konstantin A. Volosov[2], Aleksandra K. Volosova[2], Mikhail I. Karlov[3], Dmitriy F. Pastukhov[4] ✉, Yuriy F. Pastukhov[4]

[1] MGTU named after. N.E. Bauman, Moscow, Russian Federation

[2] Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation

[3] Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russian Federation

[4] Polotsk State University named after Euphrosyne of Polotsk, Novopolotsk, Republic of Belarus

✉ dmitrij.pastuhov@mail.ru

Abstract

Introduction. This study investigates the numerical solution of a two-dimensional hydrodynamic problem in a rectangular cavity using the method of initial velocity field damping and the method of accelerating the initial conditions in terms of stream function and vorticity variables. The damping method was applied at Reynolds numbers Re ≤ 3000, and the acceleration method was used for Re = 8000.

Materials and Methods. To speed up the numerical solution of the problem using an explicit finite-difference scheme for the vorticity dynamics equation, the method of initial condition damping and the method of *n*-fold splitting of the explicit difference scheme (with *n* = 100) were used. Compared to the traditional method of accelerating from stationary fluid, the initial velocity field damping method reduced the computation time by a factor of 57. The splitting method used a maximum time step proportional to the square of the spatial step, while maintaining spectral stability of the explicit scheme in the vorticity equation. The majority of computation time was spent solving the Poisson equation in the "stream function — vorticity" variables. By freezing the velocity field and solving only the vorticity dynamics equation, computation time was further reduced in the splitting method. The inverse matrix for solving the Poisson equation using a finite number of elementary operations were computed using the Msimsl library.

Results. Numerical solutions demonstrated the equivalence of the damping and acceleration methods for the initial velocity field at low Reynolds numbers (up to 3000). The equivalence of solutions obtained using the "stream function — vorticity" algorithm and the implicit iterated polyneutic recurrent method for accelerated initial conditions was numerically confirmed. For the first time, an initial horizontal velocity field was proposed, smooth at internal points and composed of two sine waves, with a stationary center of mass for the fluid in the rectangular cavity.

Discussion and Conclusion. An algorithm for numerically solving a two-dimensional hydrodynamic problem in a rectangular cavity using "stream function — vorticity" variables is proposed. The approximation of the equations in system (1) has sixth-order accuracy at internal grid points and fourth-order accuracy at boundary points. A novel damping method is introduced using an initial horizontal velocity field formed by smoothly connecting two sine waves. The proposed algorithms enhance the efficiency of solving hydrodynamic problems using an explicit finite-difference scheme for the vorticity equation.

Keywords: hydrodynamics, numerical methods, partial differential equations, initial-boundary value problem, boundary conditions, initial conditions

For Citation. Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Karlov M.I., Pastukhov D.F., Pastukhov Yu.F. Comparison of Solutions to a Hydrodynamic Problem in a Rectangular Cavity Using Initial Velocity Field Damping and Acceleration Methods. *Computation Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):22–33. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-22-33

Введение. В работе рассматривается двухмерная гидродинамическая задача в прямоугольной каверне с подвижной верхней крышкой в переменных «функция тока — вихрь» [1]. Поле скорости имеет две особые точки в верхних углах каверны по величине и по направлению, благодаря чему данная задача является полигоном апробации численных алгоритмов для решения различных задач гидродинамики [2]. Например, работы [3–5] связаны с точными решениями задач гидродинамики или их аппроксимацией с высокой степенью точности. Задачи с большими градиентами поля скорости в особых точках приведены в [6, 7], а задача с течением в вязких жидкостях — в [8, 9]. Некоторые методы постановки начальных и краевых условий рассмотрены в работах гидродинамики [10, 11]. Настоящая работа опирается на метод *n*-кратного расщепления уравнения вихря с явной разностной схемой (*n* = 100), описанный в статье [11] и использующий равномерную сетку $n_1 \times n_2 = 100 \times 100$.

Материалы и методы

Постановка задачи. Рассмотрим классическую гидродинамическую задачу в прямоугольной области (каверне) с системой уравнений в частных производных, начальными и краевыми условиями для физических полей [1] в переменных «функция тока — вихрь». Обозначим через $(u(x,y), v(x,y))$ вектор скорости жидкой частицы, причем на твердой границе, боковых и нижнем отрезках прямоугольной каверны скорость равна нулю (условие прилипания частиц жидкости). Также нормальная компонента скорости равна нулю на всей прямоугольной границе.

Начало системы координат расположим в нижнем левом углу прямоугольника, направим ось y вверх, ось x — вправо. Ширину прямоугольной каверны обозначим L, высоту — буквой H.

В гидродинамической задаче в закрытой каверне подвижная верхняя крышка перемещается вправо с постоянной скоростью $u_{\max}$. Обозначим характерные масштабы: длины L, времени $\frac{L}{u_{\max}}$, скорости $u_{\max}$, функции тока $Lu_{\max}$, вихря $\frac{u_{\max}}{L}$, числа Рейнольдса Re. Введем безразмерные переменные $\bar{x}$ — горизонтальная координата, $\bar{y}$ — вертикальная координата, $\bar{\psi}$, $\bar{w}$ — функции тока и вихря соответственно, $(\bar{u}, \bar{v})$ — вектор скорости, $\bar{t}$ — время, задав их формулами:

$$0 \le \bar{x} = \frac{x}{L} \le 1,\ 0 \le \bar{y} = \frac{y}{L} \le k = \frac{H}{L}, \bar{\psi} = \frac{\psi}{\psi_{\max}}, \psi_{\max} = Lu_{\max},$$

$$\bar{u} = \frac{u}{u_{\max}}, \bar{v} = \frac{v}{u_{\max}} \bar{w} = \frac{w}{w_{\max}}, w_{\max} = \frac{u_{\max}}{L},$$

$$\bar{t} = \frac{t}{T}, T = \frac{L}{u_{\max}}, \mathrm{Re} = \frac{u_{\max} L}{\nu}.$$

Запишем систему уравнений гидродинамики с безразмерными переменными и функциями [1, 5, 11]:

$$\begin{cases} \bar{\psi}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{\psi}_{\bar{y}\bar{y}} = -\bar{w}(\bar{x}, \bar{y}),\ 0 < \bar{x} = \frac{x}{L} < 1,\ 0 < \bar{y} < k_{\max}, \\ \bar{w} = \bar{v}_{\bar{x}} - \bar{u}_{\bar{y}}, \\ \bar{u} = \bar{\psi}_{\bar{y}}; \bar{v} = -\bar{\psi}_{\bar{x}}, \\ \bar{w}_{\bar{t}} + \bar{u} \cdot \bar{w}_{\bar{x}} + \bar{v} \cdot \bar{w}_{\bar{y}} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \left(\bar{w}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{w}_{\bar{y}\bar{y}} \right), 0 < \bar{t} = \frac{t}{T}, \\ \bar{\psi}\big|_{\Gamma} \equiv 0, \bar{v}\big|_{\Gamma} \equiv 0, \bar{u}\big|_{\Gamma_1} = 0, \bar{u}\big|_{\Gamma \setminus \Gamma_1} = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь Γ_1 — объединение боковых сторон и нижнего отрезка, $\Gamma \setminus \Gamma_1$ — верхний отрезок прямоугольника Γ. Первым в системе (1) следует уравнение Пуассона для функции тока и функции вихря. Двумерное уравнение Пуассона на прямоугольнике решается в матричном виде за конечное число арифметических действий с шестым порядком погрешности [5, 12]. Далее по тексту опустим черту сверху над безразмерными функциями, временем и координатами.

Вторая строка системы (1) — функция вихря, вычисляемая через координатные производные поля скорости. Третья строка — компоненты скорости — вычисляются как частные производные от функции тока. Четвертая строка — уравнение динамики вихря, которое в системе уравнений (1) единственное явно зависит от времени. Слева стоит полная (конвективная) производная по времени. На границе прямоугольника отсутствует вертикальная компонента скорости; горизонтальная компонента равна единице на верхнем отрезке и нулю на нижнем отрезке и боковых сторонах.

Кроме двух упомянутых особых точек поля скорости для тестирования алгоритма в методе торможения начального поля скорости использовалось сильно нестационарное и завихренное начальное поле скоростей. Оно по своим параметрам должно быть близко к стационарному полю скоростей, удовлетворять уравнению неразрывности стационарной жидкости и, как показывает численный эксперимент, быть непрерывно дифференцируемым во всех точках поля. Впервые в данной работе предложено начальное поле горизонтальной составляющей скорости на равномерной прямоугольной сетке по формуле (2) (профиль горизонтальной скорости сшит на верхнем отрезке прямоугольной каверны из двух кубических полиномов):

$$u(x_n, y_m) = \begin{cases} u_-(x_n, y_m) = -\frac{u_0(x_n)}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi y_m}{k_1} \right) = -\frac{u_0(x_n)}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\pi y_m}{k\sqrt{2}} \right), 0 \le y_m \le \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} k, \\ u_+(x_n, y_m) = u_0(x_n) \sin\left(\frac{\pi (y_m - k_1)}{2k_2} \right) = u_0(x_n) \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\left(y_m - \frac{\sqrt{2}k}{1+\sqrt{2}} \right)}{\frac{k}{1+\sqrt{2}}} \right), \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} k < y_m \le k, \\ x_n = nh_1, y_m = mh_2, h_1 = \frac{1}{n_1}, h_2 = \frac{k}{n_2}, k_1 = \frac{\sqrt{2}k}{1+\sqrt{2}}, k_2 = \frac{k}{1+\sqrt{2}}, k_1 + k_2 = k, k_1 = \sqrt{2} k_2, \\ n = \overline{0, n_1}, m = \overline{0, n_2}, n_1 = n_2 = 100. \end{cases} \tag{2}$$

В формуле (2) нижняя часть жидкости движется влево, верхняя ее часть — вправо, а горизонтальная компонента скорости ограничена $u_0(x_n)$, то есть единицей, профиль горизонтальной скорости непрерывен по переменной y: $u_-(x_n, 0) = u_-(x_n, k_1) = u_+(x_n, k_1) = 0, u_+(x_n, k) = u_0(x_n)$. В граничной точке графики синусоид касаются друг друга:

$$u_{-y}(x_n,k_1)=u_{+y}(x_n,k_1)\Leftrightarrow-\frac{u_0(x_n)}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{k_1}\cos\left(\frac{\pi k_1}{k_1}\right)=\frac{u_0(x_n)}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{k_1}=u_0(x_n)\frac{\pi}{2k_2}\cos\left(\frac{\pi(k_1-k_1)}{2k_2}\right)=u_0(x_n)\frac{\pi}{2k_2}=u_0(x_n)\frac{\pi}{\sqrt{2}k_1}.$$

Интегрируя профиль (2) по переменной y от 0 до k при постоянной переменной x, получим, обозначая $\overline{y}\Big|_0^1=\frac{y\big|_0^{k_1}}{k_1},\overline{\overline{y}}\Big|_0^1=\frac{(y-k_1)\big|_{k_1}^{k=k_1+k_2}}{k_2}$:

$$\int_0^k u(x,y)dy=\int_0^{k_1}u_-(x,y)dy+\int_{k_1}^{k_1+k_2}u_+(x,y)dy=u_0(x)\left(-\frac{k_1}{\sqrt{2}}\int_0^1\sin(\pi\overline{y})d\overline{y}+k_2\int_0^1\sin\left(\frac{\pi}{2}\overline{\overline{y}}\right)d\overline{\overline{y}}\right)=$$

$$=u_0(x)\left(\frac{k_1}{\sqrt{2}\pi}\cos(\pi\overline{y})\Big|_0^1-\frac{2k_2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\overline{\overline{y}}\right)\Big|_0^1\right)=u_0(x)\left(\frac{-2k_1}{\sqrt{2}\pi}+\frac{2k_2}{\pi}\right)=u_0(x)\left(\frac{-\sqrt{2}k_1}{\pi}+\frac{\sqrt{2}k_1}{\pi}\right)=0.$$

Последний интеграл показывает, что в начальный момент времени центр масс каждого достаточно тонкого элементарного вертикального столба жидкости покоится на оси x. Тогда по закону сохранения импульса центр масс всей жидкости не перемещается по оси x как в начальный, так и во все прочие моменты времени.

Профиль горизонтальной компоненты (3) скорости на верхнем отрезке каверны ($y = k = 1$) имел вид симметричной гладкой и непрерывной равнобочной криволинейной трапеции без особых точек поля скорости:

$$u(x,k)\equiv u_0(x)=\begin{cases}3z^2\text{-}2z^3,z=\dfrac{x}{\tau}\in[0,1],0\le x\le\tau,\tau=\dfrac{n_0}{n_1}=\dfrac{1}{10},\\ 1,\tau\le x\le1-\tau,\\ 3z^2\text{-}2z^3,z=\dfrac{1-x}{\tau}\in[0,1],1-\tau\le x\le1.\end{cases}\tag{3}$$

Отметим, что $u(0)=u'(0)=(6z-6z^2)_{z=0}=0,u(1)=1,u'(1)=(6z-6z^2)_{z=1}=0,$ то есть в 2-х точках сопряжения $x = \tau$, $x = 1 - \tau$ профиль горизонтальной компоненты скорости на верхнем отрезке прямоугольной каверны является гладким.

Вертикальная компонента скорости частиц жидкости в начальный момент согласно уравнению неразрывности вычислялась по формуле трапеций $m=\overline{1,n_2-1},n=\overline{1,n_1-1}$:

$$v(x_n,y_m)=-h_2\left(\frac{u_x(x_n,y_m)}{2}+\sum_{i=1}^{m-1}u_x(x_n,y_i)\right)=-h_2\left(\frac{u(x_{n+1},y_m)-u(x_{n-1},y_m)}{4h_1}+\sum_{i=1}^{m-1}\frac{u(x_{n+1},y_i)-u(x_{n-1},y_i)}{2h_1}\right).\tag{4}$$

Согласно алгоритму [1] первым в системе уравнений (1) решается уравнение Пуассона за конечное число элементарных операций [5], при этом аппроксимируем уравнение Пуассона с шестым порядком погрешности во всех внутренних точках.

Для аппроксимации оператора Лапласа разложим в ряд Тейлора узловые значения функции тока $\psi(x, y)$ в узлах, окружающих центральный узел, на прямоугольном шаблоне из девяти узлов. С учетом симметрии частные производные нечетного порядка функции тока отсутствуют. При разложении в ряд Тейлора учтем также уравнение Пуассона:

$$\Delta\psi=\psi_{xx}+\psi_{yy}=f(x,y)=-w\Leftrightarrow\psi_{xx}\big|_{(x_i,y_j)}+\psi_{yy}\big|_{(x_i,y_j)}=f(x_i,y_j)=f_{i,j},i=\overline{1,n_2-1},\ j=\overline{1,n_1-1},\tag{5}$$

$$\Delta\psi=\frac{1}{h^2}\left(C_0\psi_{0,0}+C_1\left(\psi_{-1,0}+\psi_{0,-1}+\psi_{1,0}+\psi_{0,1}\right)+C_2\left(\psi_{-1,-1}+\psi_{1,-1}+\psi_{-1,1}+\psi_{1,1}\right)\right)=\frac{1}{h^2}\left(\psi_{0,0}\left(C_0+4C_1+4C_2\right)+\right.$$

$$+C_1\left(h^2\left(\psi_{xx}+\psi_{yy}\right)+\frac{h^4}{12}\left(\psi_x^{(4)}+\psi_y^{(4)}\right)+\frac{h^6}{360}\left(\psi_x^{(6)}+\psi_y^{(6)}\right)+O\left(h^8\right)\right)+$$

$$+C_2\left(2h^2\left(\psi_{xx}+\psi_{yy}\right)+\frac{h^4}{6}\left(\psi_x^{(4)}+\psi_y^{(4)}+6\psi_{xxyy}^{(4)}\right)+\frac{h^6}{180}\left(\psi_x^{(6)}+\psi_y^{(6)}+15\left(\psi_{xxxxyy}^{(6)}+\psi_{xxyyyy}^{(6)}\right)\right)+O\left(h^8\right)\right)=\tag{6}$$

$$=\frac{\psi_{0,0}\left(C_0+4C_1+4C_2\right)}{h^2}+\left(C_1+2C_2\right)\left(\psi_{xx}+\psi_{yy}\right)+\frac{h^2}{12}\left(\left(\psi_x^{(4)}+\psi_y^{(4)}\right)C_1+2C_2\left(\psi_x^{(4)}+\psi_y^{(4)}+6\psi_{xxyy}^{(4)}\right)\right)+$$

$$+h^4\left(\left(\psi_x^{(6)}+\psi_y^{(6)}\right)\frac{C_1}{360}+\left(\psi_x^{(6)}+\psi_y^{(6)}+15\left(\psi_{xxxxyy}^{(6)}+\psi_{xxyyyy}^{(6)}\right)\right)\frac{C_2}{180}\right)+O\left(h^6\right)=\Delta\psi=\psi_{xx}+\psi_{yy}.$$

Используя уравнение (5) для уравнения (6), а также ограниченность решения в каждом узле прямоугольной сетки получим, что

$$\begin{cases}C_0+4C_1+4C_2=0,\\ C_1+2C_2=1.\end{cases}$$

Заметим, что

$$\Delta f=\Delta\left(\psi_{xx}+\psi_{yy}\right)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\psi_{xx}+\psi_{yy}\right)=\psi_x^{(4)}+\psi_y^{(4)}+2\psi_{xxyy}^{(4)}=f_{xx}+f_{yy},$$

$$\Delta^2 f = \Delta\left(\psi_x^{(4)} + \psi_y^{(4)} + 2\psi_{xxyy}^{(4)}\right) = \psi_x^{(6)} + \psi_y^{(6)} + 3\left(\psi_{xxxxyy}^{(6)} + \psi_{xxyyyy}^{(6)}\right), f_{xxyy}^{(4)} = \left(\psi_{xx} + \psi_{yy}\right)_{xxyy} = \psi_{xxyyyy}^{(6)} + \psi_{yyxxxx}^{(6)}.$$

С учетом последних преобразований преобразуем формулу (6):

$$\Delta\psi = \psi_{xx} + \psi_{yy} + \frac{h^2}{12}\left(\left(\psi_x^{(4)} + \psi_y^{(4)}\right)\left(C_1 + 2C_2\right) + 12C_2\psi_{xxyy}^{(4)}\right) +$$
$$+h^4\left(\left(\psi_x^{(6)} + \psi_y^{(6)}\right)\frac{C_1}{360} + \left(\psi_x^{(6)} + \psi_y^{(6)} + 15\left(\psi_{xxxxyy}^{(6)} + \psi_{xxyyyy}^{(6)}\right)\right)\frac{C_2}{180}\right) + O\left(h^6\right).$$

Потребуем, чтобы множитель при $\frac{h^2}{12}$ стал оператором Δf от функции f, отсюда имеем:

$$12C_2 = 2,$$

$$\begin{cases} C_0 + 4C_1 + 4C_2 = 0 \\ C_1 + 2C_2 = 1 \\ 12C_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow C_2 = \frac{1}{6}, C_1 = 1 - 2C_2 = \frac{2}{3}, C_0 = -4C_1 - 4C_2 = -\frac{10}{3},$$

$$\Delta\psi = f + \frac{h^2}{12}\Delta f + \frac{h^4}{360}\left(C_1 + 2C_2\right)\left(\psi_x^{(6)} + \psi_y^{(6)}\right) + \frac{h^4\left(\psi_{xxxxyy}^{(6)} + \psi_{xxyyyy}^{(6)}\right)}{72} + O\left(h^6\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{h^2}\left(-\frac{10}{3}\psi_{0,0} + \frac{2}{3}\left(\psi_{-1,0} + \psi_{0,-1} + \psi_{1,0} + \psi_{0,1}\right) + \frac{1}{6}\left(\psi_{-1,-1} + \psi_{1,-1} + \psi_{-1,1} + \psi_{1,1}\right)\right) = \quad (7)$$
$$= f + \frac{h^2}{12}\Delta f + \frac{h^4}{360}\left(\psi_x^{(6)} + \psi_y^{(6)} + 3\left(\psi_{xxxxyy}^{(6)} + \psi_{xxyyyy}^{(6)}\right)\right) + \left(\psi_{xxxxyy}^{(6)} + \psi_{xxyyyy}^{(6)}\right)\left(\frac{5}{360} - \frac{1}{120}\right) + O\left(h^6\right) =$$
$$= f + \frac{h^2}{12}\Delta f + \frac{h^4}{360}\Delta^2 f + \frac{h^4 f_{xxyy}^{(4)}}{180} + O\left(h^6\right) = f + \frac{h^2}{12}\left(f_{xx} + f_{yy}\right) + \frac{h^4}{360}\left(f_x^{(4)} + f_y^{(4)}\right) + \frac{h^4 f_{xxyy}^{(4)}}{90} + O\left(h^6\right).$$

Чтобы использовать уравнение Пуассона (7) для функции тока в системе уравнений (1) с точностью $O(h^6)$ необходимо, чтобы $f = -w$, производные f_{xx}, f_{yy} были представлены с точностью $O(h^4)$, а $f_x^{(4)}, f_y^{(4)}, f_{xxyy}^{(4)}$ — с точностью $O(h^2)$.

Методом неопределенных коэффициентов [12] были получены формулы для внутренних узлов функции f с индексами $n = \overline{2, n_1 - 2}, m = \overline{2, n_2 - 2}$:

$$\begin{cases} f_{xx} + f_{yy} = \frac{1}{h^2}\left(-5f_{0,0} + \frac{4}{3}\left(f_{-1,0} + f_{0,-1} + f_{1,0} + f_{0,1}\right) - \frac{1}{12}\left(f_{-2,0} + f_{0,-2} + f_{2,0} + f_{0,2}\right)\right) + O\left(h^4\right), \\ f_x^{(4)} + f_y^{(4)} = \frac{1}{h^4}\left(12f_{0,0} - 4\left(f_{-1,0} + f_{0,-1} + f_{1,0} + f_{0,1}\right) + f_{-2,0} + f_{0,-2} + f_{2,0} + f_{0,2}\right) + O\left(h^2\right), \\ f_{xxyy}^{(4)} = \frac{1}{h^4}\left(4f_{0,0} - 2\left(f_{-1,0} + f_{0,-1} + f_{1,0} + f_{0,1}\right) + f_{-1,-1} + f_{-1,1} + f_{1,-1} + f_{1,1}\right) + O\left(h^2\right). \end{cases} \quad (8)$$

Таким образом, формулы (7), (8) совместно аппроксимируют уравнение Пуассона для функции тока и функции вихря в (1) с шестым порядком погрешности во внутренних узлах прямоугольника.

В работе [5] описан алгоритм для матричного метода решения разностного уравнения Пуассона (7) за конечное число элементарных арифметических операций методом векторной прогонки.

Рассмотрим разностное уравнение (9):

$$\frac{1}{h^2}\left(\frac{-10}{3}\psi_{m,n} + \frac{2}{3}\left(\psi_{m-1,n} + \psi_{m+1,n} + \psi_{m,n-1} + \psi_{m,n+1}\right) + \frac{1}{6}\left(\psi_{m-1,n-1} + \psi_{m+1,n-1} + \psi_{m-1,n+1} + \psi_{m+1,n+1}\right)\right) = f_{m,n} + \frac{h^2}{12}\left(f_{xx} + f_{yy}\right) +$$
$$+h^4\left(\frac{1}{360}\left(f_x^{(4)} + f_y^{(4)}\right) + \frac{1}{90}f_{xxyy}^{(4)}\right) + O\left(h^6\right) \equiv F_{m,n}, \quad n = \overline{1, n_1 - 1}, m = \overline{1, n_2 - 1}. \quad (9)$$

Определим квадратные матрицы A, B размерности $(n_1–1)\times(n_1–1)$:

$$a_{m,n} = \begin{cases} -\frac{10}{3}, m = n; m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1}, \\ \frac{2}{3}, m = n + 1 \vee m = n - 1, \\ 0, m \geq n + 2 \vee m \leq n - 2, \end{cases} \quad b_{m,n} = \begin{cases} \frac{2}{3}, m = n; m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1}, \\ \frac{1}{6}, m = n + 1 \vee m = n - 1, \\ 0, m \geq n + 2 \vee m \leq n - 2. \end{cases} \quad (10)$$

Запишем кратко [5] матричный алгоритм решения разностного уравнения (9):

1. По формуле

$$F^T{}_{m,n} = f_{m,n}h^2 + \frac{h^4}{12}\left(f_{xx} + f_{yy}\right) + h^6\left(\frac{1}{360}\left(f_x^{(4)} + f_y^{(4)}\right) + \frac{1}{90}f_{xxyy}^{(4)}\right) + O\left(h^8\right)\Big|_{x=x_n, y=y_m}$$

вычислить правую часть уравнения Пуассона во всех внутренних узлах равномерной сетки прямоугольника ($m = 1, \ldots, n_2 - 1; n = 1, \ldots, n_1 - 1$).

2. Модифицировать правые части системы уравнений (11) по формулам (12), (13) в узлах прямоугольного контура, соседнего с граничным контуром, то есть найти $\overline{F_{m,n}}$ по величинам $F_{m,n}$ пункта 1:

$$\begin{cases} A\psi_1^T + B\psi_2^T = \overline{F_1^T}, \\ B\psi_{m-1}^T + A\psi_m^T + B\psi_{m+1}^T = \overline{F_m^T}, m = \overline{2, n_2 - 2}, \\ B\psi_{n_2-2}^T + A\psi_{n_2-1}^T = \overline{F_{n_2-1}^T}. \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} \frac{-10}{3}\psi_{1,n_1-1} + \frac{2}{3}\left(\psi_{2,n_1-1} + \psi_{1,n_1-2} + \psi_{1,n_1} + \psi_{0,n_1-1}\right) + \frac{1}{6}\left(\psi_{2,n_1-2} + \psi_{0,n_1-2} + \psi_{2,n_1} + \psi_{0,n_1}\right) = F_{1,n_1-1}, \\ \overline{F_{1,n_1-1}} \equiv F_{1,n_1-1} - \frac{2}{3}\left(\psi_{1,n_1} + \psi_{0,n_1-1}\right) - \frac{1}{6}\left(\psi_{0,n_1-2} + \psi_{2,n_1} + \psi_{0,n_1}\right), \\ \frac{-10}{3}\psi_{n_2-1,1} + \frac{2}{3}\left(\psi_{n_2-2,1} + \psi_{n_2-1,2} + \psi_{n_2-1,0} + \psi_{n_2,1}\right) + \frac{1}{6}\left(\psi_{n_2-2,2} + \psi_{n_2,2} + \psi_{n_2-2,0} + \psi_{n_2,0}\right) = F_{n_2-1,1}, \\ \overline{F_{n_2-1,1}} \equiv F_{n_2-1,1} - \frac{2}{3}\left(\psi_{n_2-1,0} + \psi_{n_2,1}\right) - \frac{1}{6}\left(\psi_{n_2,2} + \psi_{n_2-2,0} + \psi_{n_2,0}\right), \\ \frac{-10}{3}\psi_{n_2-1,n_1-1} + \frac{2}{3}\left(\psi_{n_2-2,n_1-1} + \psi_{n_2-1,n_1-2} + \psi_{n_2-1,n_1} + \psi_{n_2,n_1-1}\right) + \frac{1}{6}\left(\psi_{n_2-2,n_1-2} + \psi_{n_2,n_1-2} + \psi_{n_2-2,n_1} + \psi_{n_2,n_1}\right) = F_{n_2-1,n_1-1}, \\ \overline{F_{n_2-1,n_1-1}} \equiv F_{n_2-1,n_1-1} - \frac{2}{3}\left(\psi_{n_2-1,n_1} + \psi_{n_2,n_1-1}\right) - \frac{1}{6}\left(\psi_{n_2,n_1-2} + \psi_{n_2-2,n_1} + \psi_{n_2,n_1}\right), \\ \frac{-10}{3}\psi_{1,1} + \frac{2}{3}\left(\psi_{2,1} + \psi_{1,2} + \psi_{1,0} + \psi_{0,1}\right) + \frac{1}{6}\left(\psi_{2,2} + \psi_{0,2} + \psi_{2,0} + \psi_{0,0}\right) = F_{1,1}, \\ \overline{F_{1,1}} \equiv F_{1,1} - \frac{2}{3}\left(\psi_{1,0} + \psi_{0,1}\right) - \frac{1}{6}\left(\psi_{0,2} + \psi_{2,0} + \psi_{0,0}\right). \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} -\frac{10}{3}\psi_{1,n} + \frac{2}{3}\left(\psi_{1,n-1} + \psi_{2,n} + \psi_{1,n+1} + \psi_{0,n}\right) + \frac{1}{6}\left(\psi_{2,n-1} + \psi_{2,n+1} + \psi_{0,n-1} + \psi_{0,n+1}\right) = F_{1,n}, n = \overline{2, n_1 - 2}, \\ \overline{F_{1,n}} = F_{1,n} - \frac{2}{3}\psi_{0,n} - \frac{1}{6}\left(\psi_{0,n-1} + \psi_{0,n+1}\right), n = \overline{2, n_1 - 2}, \\ -\frac{10}{3}\psi_{n_2-1,n} + \frac{2}{3}\left(\psi_{n_2-1,n-1} + \psi_{n_2-2,n} + \psi_{n_2-1,n+1} + \psi_{n_2,n}\right) + \frac{1}{6}\left(\psi_{n_2-2,n-1} + \psi_{n_2-2,n+1} + \psi_{n_2,n-1} + \psi_{n_2,n+1}\right) = F_{n_2-1,n}, n = \overline{2, n_1 - 2}, \\ \overline{F_{n_2-1,n}} = F_{n_2-1,n} - \frac{2}{3}\psi_{n_2,n} - \frac{1}{6}\left(\psi_{n_2,n-1} + \psi_{n_2,n+1}\right), n = \overline{2, n_1 - 2}, \\ -\frac{10}{3}\psi_{m,1} + \frac{2}{3}\left(\psi_{m-1,1} + \psi_{m,2} + \psi_{m+1,1} + \psi_{m,0}\right) + \frac{1}{6}\left(\psi_{m-1,2} + \psi_{m+1,2} + \psi_{m-1,0} + \psi_{m+1,0}\right) = F_{m,1}, m = \overline{2, n_2 - 2}, \\ \overline{F_{m,1}} = F_{m,1} - \frac{2}{3}\psi_{m,0} - \frac{1}{6}\left(\psi_{m-1,0} + \psi_{m+1,0}\right), m = \overline{2, n_2 - 2}, \\ -\frac{10}{3}\psi_{m,n_1-1} + \frac{2}{3}\left(\psi_{m-1,n_1-1} + \psi_{m,n_1-2} + \psi_{m+1,n_1-1} + \psi_{m,n_1}\right) + \frac{1}{6}\left(\psi_{m-1,n_1-2} + \psi_{m+1,n_1-2} + \psi_{m-1,n_1} + \psi_{m+1,n_1}\right) = F_{m,n_1-1}, m = \overline{2, n_2 - 2}, \\ \overline{F_{m,n_1-1}} = F_{m,n_1-1} - \frac{2}{3}\psi_{m,n_1} - \frac{1}{6}\left(\psi_{m-1,n_1} + \psi_{m+1,n_1}\right), m = \overline{2, n_2 - 2}, \\ \overline{F_{m,n}} = F_{m,n}, \ \forall m \in \overline{2, n_2 - 2}, n \in \overline{2, n_1 - 2}. \end{cases} \tag{13}$$

3. Найти матричные коэффициенты прогонки вперед по формулам (14), (15) $m = \overline{1, n_2 - 2}$:

$$\lambda_1 = -A^{-1}B, \nu_1 = A^{-1}\overline{F_1^T}, \tag{14}$$

$$\lambda_m = -\left(B\lambda_{m-1} + A\right)^{-1}B, \nu_m = \left(B\lambda_{m-1} + A\right)^{-1}\left(\overline{F_m^T} - B\nu_{m-1}\right), m = \overline{2, n_2 - 2}. \tag{15}$$

4. Найти вектор-строку $\psi_{n_2-1}^T$ по формуле (16):

$$\psi_{n_2-1}^T = \left(B\lambda_{n_2-2} + A\right)^{-1}\left(\overline{F_{n_2-1}^T} - B\nu_{n_2-2}\right). \tag{16}$$

5. Найти остальные строки матрицы-решения $\psi^T{}_m$ по формулам (17):

$$m = \overline{n_2 - 2, 1} \ \psi_m^T = \lambda_m\psi_{m+1}^T + \nu_m, m = \overline{n_2 - 2, 1}, \nu_{n_2-1} = \psi_{n_2-1}^T. \tag{17}$$

Матричный алгоритм прогонки (9)–(17) сохраняет шестой порядок погрешности согласно формулам (7), (8) для уравнения Пуассона.

Второе и третье уравнения системы (1) $\overline{w} = \overline{v}_{\overline{x}} - \overline{u}_{\overline{y}}, \overline{u} = \overline{\psi}_{\overline{y}}, \overline{v} = -\overline{\psi}_{\overline{x}}$ линейны относительно первых частных производных, которые можно вычислять независимо. Приведем квадратурные формулы первой производной с различными центрами шаблона.

Например, для уравнения $\overline{u} = \overline{\psi}_{\overline{y}}$ получим:

$$\begin{cases} u_{(i,j)} = \frac{1}{h}\left(\frac{3}{4}\left(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}\right) - \frac{3}{20}\left(\psi_{i+2,j} - u_{i-2,j}\right) + \frac{1}{60}\left(\psi_{i+3,j} - \psi_{i-3,j}\right)\right) + O\left(h^6\right), i = \overline{3, n_2 - 3}, j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ u_{(1,j)} = \frac{1}{h}\left(-\frac{\psi_{0,j}}{5} - \frac{13}{12}\psi_{1,j} + 2\psi_{2,j} - \psi_{3,j} + \frac{\psi_{4,j}}{3} - \frac{\psi_{5,j}}{20}\right) + O\left(h^4\right), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ u_{(2,j)} = \frac{1}{12h}\left(8\left(\psi_{3,j} - \psi_{1,j}\right) - \left(\psi_{4,j} - \psi_{0,j}\right)\right) + O\left(h^4\right), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ u_{(n_2-1,j)} = -\frac{1}{h}\left(-\frac{\psi_{n_2,j}}{5} - \frac{13}{12}\psi_{n_2-1,j} + 2\psi_{n_2-2,j} - \psi_{n_2-3,j} + \frac{\psi_{n_2-4,j}}{3} - \frac{\psi_{n_2-5,j}}{20}\right) + O\left(h^4\right), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ u_{(n_2-2,j)} = -\frac{1}{12h}\left(8\left(\psi_{n_2-3,j} - \psi_{n_2-1,j}\right) - \left(\psi_{n_2-4,j} - \psi_{n_2,j}\right)\right) + O\left(h^4\right), j = \overline{1, n_1 - 1}. \end{cases} \quad (18)$$

Аналогичные формулы можно записать для уравнений $\overline{v} = -\overline{\psi}_{\overline{x}}, \overline{w} = \overline{v}_{\overline{x}} - \overline{u}_{\overline{y}}$. Рассмотрим уравнение динамики вихря в системе уравнений (1). Для ускорения численного решения задачи (1) использовался метод расщепления [11].

Аналитически метод *n*-кратного расщепления уравнения вихря для временного интервала $\tau_0 \cdot n$ можно записать в виде:

$$\frac{w^{k+i+1} - w^{k+i}}{\tau_0} + u^k \cdot w_x^{k+i} + v^k \cdot w_y^{k+i} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(w_{xx}^{k+i} + w_{yy}^{k+i}\right), i = \overline{0, n-1}. \quad (19)$$

Система рекуррентных уравнений (19) для вихря с замороженным полем скорости $\left(u^k(x,y), v^k(x,y)\right), i = \overline{0, n-1}, k = const, k = 1,2,...$ состоит из *n* промежуточных шагов $i = \overline{0, n-1}$, верхний индекс *i* указывает номер промежуточного слоя времени в уравнении вихря (19), индекс *k* — номер кратного слоя времени в системе (19) (если *k* кратно *n*). Поля скорости и функции тока постоянны в уравнениях (19) при значениях *k* = *const* и изменении индекса $i = \overline{0, n-1}$. В данной системе уравнений изменяется только поле вихря w^{k+i}, $i = \overline{0, n-1}$. Поле скорости скачком изменяется в системах (1), (19), когда временной индекс функции вихря увеличивается на *n* от *k* до *k* + *n* в системе уравнений (19).

Идея расщепления системы уравнений (19) заключается в уменьшении накопления ошибки округления и времени вычислений при ее решении. Дифференциальные операторы по координате в (19) аппроксимированы во внутренних узлах с точностью $O(h^6)$, как и все уравнения системы (1), граничные условия с точностью $O(h^4)$, а по времени с точностью $O(\tau)$.

Таким образом, за время $\tau_0 \cdot n$, решая *n* раз уравнение (19), получим скачок по времени $\tau_0 \cdot n$ (в *n* раз больший, чем последовательное решение системы уравнений(1)) и уменьшим ошибку округления, не решая другие уравнения системы (1) внутри системы (19).

Уравнение (19) линейно относительно координатных производных $w_x^i, w_y^i, w_{xx}^i, w_{yy}^i$. В работе [11] показано, что для спектральной устойчивости уравнения динамики вихря (19) достаточно выбрать соотношение временного и пространственного шагов в виде неравенства $\tau_0 \le \frac{3}{16} h^2 \mathrm{Re}$. Именно такой максимальный временной шаг задавался авторами в программе.

Для первых частных производных уравнения (19) использовались формулы аппроксимации, например, для w_y (формулы для производной w_x аналогичны):

$$\begin{cases} w_{y(i,j)} = \frac{1}{h}\left(\frac{3}{4}\left(w_{i+1,j} - w_{i-1,j}\right) - \frac{3}{20}\left(w_{i+2,j} - w_{i-2,j}\right) + \frac{1}{60}\left(w_{i+3,j} - w_{i-3,j}\right)\right) + O\left(h^6\right), i = \overline{3, n_2 - 3}, j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{y(1,j)} = \frac{1}{h}\left(-\frac{w_{0,j}}{5} - \frac{13}{12}w_{1,j} + 2w_{2,j} - w_{3,j} + \frac{w_{4,j}}{3} - \frac{w_{5,j}}{20}\right) + O\left(h^4\right), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{y(2,j)} = \frac{1}{12h}\left(8\left(w_{3,j} - w_{1,j}\right) - \left(w_{4,j} - w_{0,j}\right)\right) + O\left(h^4\right), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{y(n_2-1,j)} = -\frac{1}{h}\left(-\frac{w_{n_2,j}}{5} - \frac{13}{12}w_{n_2-1,j} + 2w_{n_2-2,j} - w_{n_2-3,j} + \frac{w_{n_2-4,j}}{3} - \frac{w_{n_2-5,j}}{20}\right) + O\left(h^4\right), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{y(n_2-2,j)} = -\frac{1}{12h}\left(8\left(w_{n_2-3,j} - w_{n_2-1,j}\right) - \left(w_{n_2-4,j} - w_{n_2,j}\right)\right) + O\left(h^4\right), j = \overline{1, n_1 - 1}. \end{cases} \quad (20)$$

Вторые частные производные w_{yy} в (19) имеют вид:

$$\begin{cases} w_{yy(i,j)} = \frac{1}{h^2}\left(-\frac{49}{18}w_{i,j} + \frac{3}{2}\left(w_{i+1,j}+w_{i-1,j}\right) - \frac{3}{20}\left(w_{i+2,j}+w_{i-2,j}\right) + \frac{1}{90}\left(w_{i+3,j}+w_{i-3,j}\right)\right) + O\left(h^6\right), i = \overline{3, n_2-3}, j = \overline{1, n_1-1}, \\ w_{yy(1,j)} = \frac{1}{h^2}\left(\frac{137}{180}w_{0,j} - \frac{49}{60}w_{1,j} - \frac{17}{12}w_{2,j} + \frac{47}{18}w_{3,j} - \frac{19}{12}w_{4,j} + \frac{31}{60}w_{5,j} - \frac{13}{180}w_{6,j}\right) + O\left(h^4\right), j = \overline{1, n_1-1}, \\ w_{yy(2,j)} = \frac{1}{h^2}\left(-\frac{5}{2}w_{2,j} + \frac{4}{3}\left(w_{1,j}+w_{3,j}\right) - \frac{1}{12}\left(w_{0,j}+w_{4,j}\right)\right) + O\left(h^4\right), j = \overline{1, n_1-1}, \\ w_{yy(n_2-1,j)} = \frac{1}{h^2}\left(\frac{137}{180}w_{n_2,j} - \frac{49}{60}w_{n_2-1,j} - \frac{17}{12}w_{n_2-2,j} + \frac{47}{18}w_{n_2-3,j} - \frac{19}{12}w_{n_2-4,j} + \frac{31}{60}w_{n_2-5,j} - \frac{13}{180}w_{n_2-6,j}\right) + O\left(h^4\right), j = \overline{1, n_1-1}, \\ w_{yy(n_2-2,j)} = \frac{1}{h^2}\left(-\frac{5}{2}w_{n_2-2,j} + \frac{4}{3}\left(w_{n_2-1,j}+w_{n_2-3,j}\right) - \frac{1}{12}\left(w_{n_2,j}+w_{n_2-4,j}\right)\right) + O\left(h^4\right), j = \overline{1, n_1-1}. \end{cases} \quad (20)$$

Аналогичные формулам (20) записываются формулы для производной w_{xx}.

Согласно алгоритму A. Salih [1] предварительно необходимо обновить значения функции вихря w на границе прямоугольника и только потом решать уравнение вихря (19) во внутренних точках каверны.

Разложим в ряд Тейлора функцию тока в первом координатном узле на расстоянии h от левой стенки вдоль оси x, которая нормальна к левой стенке:

$$\psi_1 = \psi_0 + \psi_x h + \psi_{xx}\frac{h^2}{2} + \psi_{xxx}\frac{h^3}{6} + \psi_{xxxx}\frac{h^4}{24} + \psi_{xxxxx}\frac{h^5}{120} + O\left(h^6\right). \quad (21)$$

Из уравнения $\bar{u} = \overline{\psi_{\bar{y}}} = 0$ следует, что на боковых стенках функция тока не меняется, а из уравнения $\bar{v} = -\overline{\psi_{\bar{x}}} = 0$ следует, что функция тока не меняется на нижнем и верхнем отрезке каверны, поэтому на четырех сторонах прямоугольной каверны положим функцию тока равной нулю.

Учтем, что на левой стенке каверны $\psi_0 = 0, \psi_x = -v, \psi_{xx} = -w$ и перепишем (21):

$$\psi_1 = -vh - w\frac{h^2}{2} + \psi_{xxx}\frac{h^3}{6} + \psi_{xxxx}\frac{h^4}{24} + \psi_{xxxxx}\frac{h^5}{120} + O\left(h^6\right) \Leftrightarrow w = -\frac{2}{h}v - \frac{2\psi_1}{h^2} + \psi_{xxx}\frac{h}{3} + \psi_{xxxx}\frac{h^2}{12} + \psi_{xxxxx}\frac{h^3}{60} + O\left(h^4\right). \quad (22)$$

Из уравнения (22) видно, что достаточно аппроксимировать производные для функции тока ψ_{xxx}, ψ_{xxxx},ψ_{xxxxx}, на левой границе соответственно с 3-м, 2-м, 1-м порядками погрешности. Уравнение (22) имеет инвариантный вид, так как порядок производной и степень шага h имеют одинаковую четность. Например, для ψ_{xxxxx}, h^3 имеем пятый и третий порядок соответственно, поэтому произведение разностного оператора ψ_{xxxxx} на h^3 не изменит знак и имеет одинаковый вид относительно правой и левой стенки.

В программе использовалась следующая аппроксимация производных для формулы (22) (в каждой формуле (23) индекс j меняется в пределах $j = \overline{1, n_1-1}$):

$$\begin{cases} w^{(3)}_{y(0,j)}h = \frac{1}{h^2}\left(-\frac{49}{8}w_{0,j} + 29w_{1,j} - \frac{461}{8}w_{2,j} + 62w_{3,j} - \frac{307}{8}w_{4,j} + 13w_{5,j} - \frac{15}{8}w_{6,j}\right) + O\left(h^4\right), \\ w^{(4)}_{y(0,j)}h^2 = \frac{1}{h^2}\left(\frac{35}{6}w_{0,j} - 31w_{1,j} + \frac{137}{2}w_{2,j} - \frac{242}{3}w_{3,j} + \frac{107}{2}w_{4,j} - 19w_{5,j} + \frac{17}{6}w_{6,j}\right) + O\left(h^4\right), \\ w^{(5)}_{y(0,j)}h^3 = \frac{1}{h^2}\left(-\frac{7}{2}w_{0,j} + 20w_{1,j} - \frac{95}{2}w_{2,j} + 60w_{3,j} - \frac{85}{2}w_{4,j} + 16w_{5,j} - \frac{5}{2}w_{6,j}\right) + O\left(h^4\right), \\ w^{(3)}_{y(n_2,j)}h = \frac{1}{h^2}\left(-\frac{49}{8}w_{n_2,j} + 29w_{n_2-1,j} - \frac{461}{8}w_{n_2-2,j} + 62w_{n_2-3,j} - \frac{307}{8}w_{n_2-4,j} + 13w_{n_2-5,j} - \frac{15}{8}w_{n_2-6,j}\right) + O\left(h^4\right), \\ w^{(4)}_{y(n_2,j)}h^2 = \frac{1}{h^2}\left(\frac{35}{6}w_{n_2,j} - 31w_{n_2-1,j} + \frac{137}{2}w_{n_2-2,j} - \frac{242}{3}w_{n_2-3,j} + \frac{107}{2}w_{n_2-4,j} - 19w_{n_2-5,j} + \frac{17}{6}w_{n_2-6,j}\right) + O\left(h^4\right), \\ w^{(5)}_{y(n_2,j)}h^3 = \frac{1}{h^2}\left(-\frac{7}{2}w_{n_2,j} + 20w_{n_2-1,j} - \frac{95}{2}w_{n_2-2,j} + 60w_{n_2-3,j} - \frac{85}{2}w_{n_2-4,j} + 16w_{n_2-5,j} - \frac{5}{2}w_{n_2-6,j}\right) + O\left(h^4\right). \end{cases} \quad (23)$$

В работе [1] A. Salih указывает, что устойчивость численного решения задачи (1) зависит от порядка аппроксимации краевых значений функции вихря в уравнении, аналогичном уравнению (23). Например, он утверждает, что аппроксимация граничных условий вихря с первым порядком более устойчива, чем аппроксимация со вторым порядком. Используя метод расщепления уравнения вихря (19) явной разностной схемы авторами не было замечено влияния порядка аппроксимации краевых условий вихря на устойчивость задачи даже при аппроксимации с четвертым порядком. Устойчивость решения общей задачи (1) зависела только от числа Рейнольдса Re и от выбора начальных условий.

Аналогично формуле (22) для вихря на нижней (верхней стенке) имеем

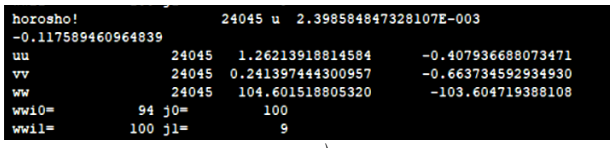
$$w = \frac{2}{h}u - \frac{2\psi_1}{h^2} + \psi_{yyy}\frac{h}{3} + \psi_{yyyy}\frac{h^2}{12} + \psi_{yyyyy}\frac{h^3}{60} + O\left(h^4\right). \quad (24)$$

Профиль начальной горизонтальной компоненты скорости (2), (3) и вертикальной компоненты (4) относится к методу торможения и устойчив при числе Рейнольдса Re ≤ 3000. Метод разгона предполагает неподвижную начальную жидкость в каверне и впервые предложен А.А. Фоминым и Л.Н. Фоминой в работе [2]. Верхняя крышка каверны, медленно разгоняясь из неподвижного состояния, увлекает за собой жидкость в закрытой каверне. В работе [2] Фомины предложили вычислять зависимость скорости верхней крышки от времени согласно формуле

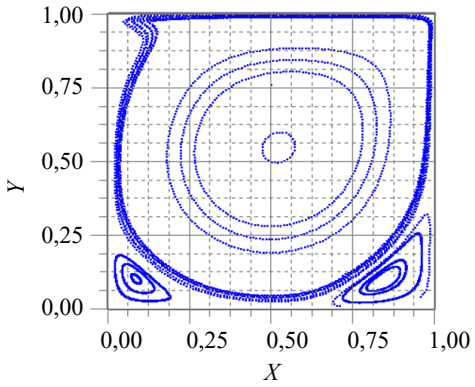
$$v(x,k)=0, u(x,k)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}(2t/t_1-1)\right)+1\right), 0\le t\le t_1,\\ 1, t>t_1.\end{cases}$$

В данной работе с методом разгона использовалась аналогичная формула

$$v(x,k)=0, u(x,k)=\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{t}{t_1}\right), 0\le t\le t_1,\\ 1, t>t_1.\end{cases} \quad (25)$$

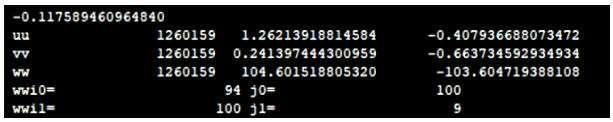


а)

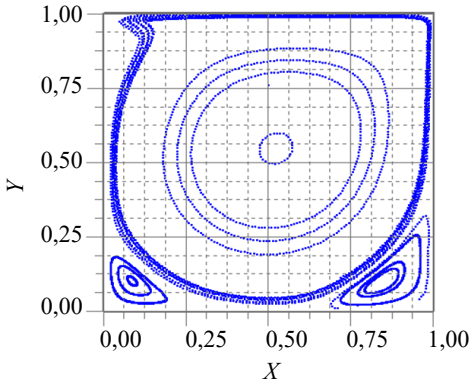


б)

Рис. 1. Результаты решения: *а* — Re = 2000, метод торможения, нижняя граница функции тока (первое число), границы горизонтальной и вертикальной компонент скорости, функции вихря в момент t = 24000; *б* — предельное поле линий тока в методе торможения Re = 2000, $n_1 \times n_2 = 100 \times 100$



а)



б)

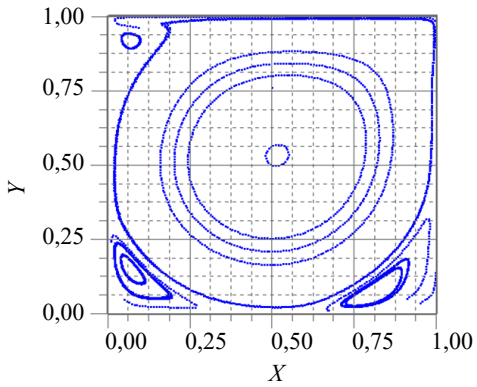
Рис. 2. Результаты решения: *а* — Re = 2000, метод разгона, нижняя граница функции тока (первое число), границы горизонтальной и вертикальной компонент скорости, функции вихря в момент t = 1260000; *б* — предельное поле линий тока в методе разгона Re = 2000, $n_1 \times n_2 = 100 \times 100$

Сравнивая интервалы изменения величин функции тока, поля горизонтальной и вертикальной скорости, функции вихря на рис. 1 и рис. 2 видим, что они совпадают с точностью до 16 значащих цифр. Следовательно, совпадают поля линий тока на рис. 1 и рис. 2.

Таким образом, методы разгона и торможения начального поля скорости (2), (3), (4) эквивалентны для чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} \le 3000$. Однако время установления стационарных полей в методе торможения в десятки раз (в 57 раз) меньше, чем время решения задачи (1) в методе разгона.

```
-9.807891140697904E-002
uu              1044968   1.00000000000000      -0.362267751647030
vv              1044968  0.222611083056212      -0.543539677038107
ww              1044968   120.628076257385       -133.907927009122
ww0=                   89 j0=                    100
ww1=                  100 j1=                      9
```

а)



б)

Рис. 3. Результаты решения: *а* — Re = 8000, метод разгона, нижняя граница функции тока (первое число), границы горизонтальной и вертикальной компонент скорости, функции вихря в момент $t = 1044000$; *б* — предельное поле линий тока в методе разгона Re = 8000, $n_1 \times n_2 = 100 \times 100$

Поле линий тока на рис. 3*б* имеет 3 вихря второго порядка, расположенных в углах каверны и полностью совпадает с полем линий тока в работе [13, с. 22] при Re = 8000. Из рис. 1, 2, 3 видно, что максимальные по модулю значения функции вихря образуются в узлах на верхней и правой стенке каверны недалеко от точек сопряжения профиля скорости, либо вблизи особых точек скорости в верхних углах каверны [14].

Обсуждение и заключение. Предложен алгоритм численного решения двухмерной гидродинамической задачи в прямоугольной каверне в переменных «функция тока — вихрь». Аппроксимация уравнений в системе (1) имеет шестой порядок погрешности во внутренних узлах и четвертый в граничных узлах. Впервые предложен метод торможения с начальным полем горизонтальной скорости посредством гладкого соединения двух синусоид. Начальные условия в методе торможения допускают числа Рейнольдса $\mathrm{Re} \le 3000$. Численно показана эквивалентность решений методом разгона и методом торможения начальных условий с совпадением конечных полей функции тока, поля горизонтальной и вертикальной компонент скорости и поля вихря с точностью до 15 значащих цифр. Численно решена задача в переменных «функция тока — вихрь» с числом Re = 8000. При этом ее решение и структура основного и вторичных вихрей качественно совпадает с работами других авторов.

Список литературы / References

1. Salih A. *Streamfunction — Vorticity Formulation*. Department of Aerospace Engineering Indian Institute of Space Science and Technology, Thiruvananthapuram; 2013:10 p.

2. Фомин А.А., Фомина Л.Н. Неявный итерационный полилинейный рекуррентный метод в применении к решению задач динамики несжимаемой жидкости. *Компьютерные исследования и моделирование*. 2015;7(1):35–50.

Fomin A.A., Fomina L.N. The implisit iterated polynetic recurrent method in application to solving the problems of the dynamics of inconsistent fluid. *Computation research and modelling*. 2015;7(1): 35–50. (In Russ.)

3. Петров А.Г. Высокоточные численные схемы решения плоских краевых задач для полигармонического уравнения и их применение к задачам гидродинамики. *Прикладная математика и механика*. 2023;87(3):343–368. https://doi.org/10.31857/S0032823523030128

Petrov A.G. High-precision numerical schemes for solving plane boundary value problems for a polyharmonic equation and their application to problems of hydrodynamics. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2023;87(3):343–368 (In Russ.) https://doi.org/10.31857/S0032823523030128

4. Сухинов А.И., Колгунова О.В., Гирмай М.З., Нахом О.С. Двумерная гидродинамическая модель прибрежных систем, учитывающая испарение. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):9–21. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-9-21

Sukhinov A.I., Kolgunova O.V., Girmay M.Z., Nakhom O.S. A two-dimensional hydrodynamic model of coastal systems, taking into account evaporation. *Computation Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):9–21. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-9-21

5. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Басараб М.А. *Сборник статей по гидродинамике, 2-е издание.* Москва: Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II; 2023. 231 с.

Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Pastukhov D.F., Pastukhov Yu.F., Basarab M.A. *Collection of articles on hydrodynamics. 2nd edition*. Moscow: Moscow State Transport University of Emperor Nicholas II; 2023. 231 p. (In Russ.)

6. Ершова Т.Я. Краевая задача для дифференциального уравнения третьего порядка с сильным пограничным слоем. *Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика*. 2020;1:30–39. https://doi.org/10.3103/S0278641920010057

Ershova T.Ya. Boundary value problem for a third-order differential equation with a strong boundary layer. *Bulletin of Moscow University. Episode 15: Computational mathematics and cybernetics*. 2020;1:30–39. (In Russ.) https://doi.org/10.3103/S0278641920010057

7. Ситникова М.А., Скульский О.И. Течение моментной анизотропной жидкости в тонких слоях. *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2015;28(1):56–62.

Sitnikova M.A., Skulsky O.I. Flow of momentary anisotropic fluid in thin layers. *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2015;28(1): 56–62. (In Russ.)

8. Волосов К.А., Вдовина Е.К., Пугина Л.В. Моделирование «пульсирубщих» режимов динамики свёртывания крови. *Математическое моделирование*. 2014;26(12):14–32.

Volosov K.A., Vdovina E.K., Pugina L.V. Modeling of “pulsatile” modes of blood coagulation dynamics. *Math modeling*. 2014;26(12):14–32. (In Russ.)

9. Бузмакова, М.М., Гилев В.Г., Русаков С.В. Экспериментальное исследование реокинетики эпоксидного связующего, модифицированного фуллеренами С60. *Вестник Пермского университета. Физика*. 2019;2:35–40. https://doi.org/10.17072/1994-3598-2019-2-35-40

Buzmakova M.M., Gilev V.G., Rusakov S.V. Experimental study of the rheokinetics of an epoxy binder modified with C60 fullerenes. *Bulletin of Perm University. Physics*. 2019;2:35–40. (In Russ.) https://doi.org/10.17072/1994-3598-2019-2-35-40

10. Сидорякина В.В., Соломаха Д.А. Симметризованные варианты методов Зейделя и верхней релаксации решения двумерных разностных задач эллиптического типа. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):12–19. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-12-19

Sidoryakina V.V., Solomaha D.A. Symmetrized versions of the Seidel and upper relaxation methods for solving two-dimensional difference problems of elliptic. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):12–19. (In Russ.) https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-12-19

11. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. N-кратное расщепление явной разностной схемы для уравнения вихря в вязкой несжимаемой жидкости. *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2023;63(4):12–21. https://doi.org/10.17072/1993-0550-2023-4-12-21

Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Karlov M.I., Pastukhov D.F., Pastukhov Yu.F. The N-fold distribution of the obvious variable scheme for the equalization of the vortex in the viscous incompatible fluid. *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2023;63(4):12–21. (In Russ.) https://doi.org/10.17072/1993-0550-2023-4-12-21

12. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы: учебное пособие для студентов физико-математических специальностей высших учебных заведений*. Москва: Бином. Лаборатория знаний; 2011. 636 с.

Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Numerical methods: a textbook for students of physics and mathematics specialties of higher educational institutions.* Moscow: Binom. lab. Knowledge; 2011. 636 p. (In Russ.)

13. Kuhlmann H.C., Romano F. The Lid-Driven cavety. In book: Gelfgat A. (ed.) *Computational Modelling of Bifurcations and Instabilities in Fluid Dynamics. Computational Methods in Applied Sciences*. Springer, Cham. 2018;50:233–309. https://doi.org/10.1007/978-3-319-91494-7_8

14. Сперанская А.А. *Пограничные слои в геофизической гидродинамике:* диссертация доктора физико-математических наук. Москва; 1982. 345 с.

Speranskaya A.A. *Border layers in geophysical hydrodynamics:* dissertation Doctor of Physical and Mathematical Sciences. Moscow; 1982. 345 p. (In Russ.)

Об авторах:

Наталья Константиновна Волосова, аспирант Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана (105005, Российская Федерация, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, стр. 1), ORCID, navalosova@yandex.ru

Константин Александрович Волосов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Российская Федерация, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9), ORCID, SPIN-код, konstantinvolosov@yandex.ru

Александра Константиновна Волосова, кандидат физико-математических наук, начальник аналитического отдела ООО «Трамплин» Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Российская Федерация, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9), ORCID, SPIN-код, alya01@yandex.ru

Михаил Иванович Карлов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Московского физико-технического института (141701, ГСП-4, Российская Федерация, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9), SPIN-код, karlov.mipt@gmail.com

Дмитрий Феликсович Пастухов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), ORCID, SPIN-код, dmitrij.pastuhov@mail.ru

Юрий Феликсович Пастухов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), ORCID, SPIN-код, pulsar1900@mail.ru

Заявленный вклад авторов:

Н.К. Волосова: постановка задачи; написание черновика рукописи; формулировка идей исследования, целей и задач.

К.А. Волосов: научное руководство; разработка методологии.

А.К. Волосова: перевод; изучение истории задачи; поиск литературы.

М.И. Карлов: формальный анализ.

Д.Ф. Пастухов: визуализация; валидация; разработка программного обеспечения.

Ю.Ф. Пастухов: тестирование существующих компонентов кода.

Конфликт интересов: **авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Natalya K. Volosova, Post-graduate Student of Bauman Moscow State Technical University (2nd Baumanskaya St. 5–1, Moscow, 105005, Russian Federation), ORCID, navalosova@yandex.ru

Konstantin A. Volosov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics of the Russian University of Transport (Obraztsova St. 9–9, Moscow, GSP-4, 127994, Russian Federation), ORCID, SPIN-code, konstantinvolosov@yandex.ru

Aleksandra K. Volosova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Chief Analytical Department "Tramplin" LLC, Russian University of Transport (Obraztsova St. 9–9, Moscow, GSP-4, 127994, Russian Federation), ORCID, SPIN-code, alya01@yandex.ru

Mikhail I. Karlov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (9, Institutsky Lane, GSP-4, Dolgoprudny, 141701, Russian Federation), SPIN-code, karlov.mipt@gmail.com

Dmitriy F. Pastukhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (Blokhin St. 29, Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), ORCID, SPIN-code, dmitrij.pastuhov@mail.ru

Yuriy F. Pastukhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences,Associate Professor of Polotsk State University (Blokhin St. 29, Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), ORCID, SPIN-code, pulsar1900@mail.ru

Contributions of the authors:

N.K. Volosova: setting the task; writing a draft of the manuscript; formulation of research ideas, goals and objectives.

K.A. Volosov: scientific guidance; methodology development.

A.K. Volosova: translation; study of the history of the task; literature.

M.I. Karlov: formal analysis.

D.F. Pastukhov: visualization; validation; software.

Yu.F. Pastukhov: testing of existing code components.

Conflict of Interest Statement: **the authors declare no conflict of interest.**

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 12.02.2025
Поступила после рецензирования / Revised 19.03.2025
Принята к публикации / Accepted 28.04.2025

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
MATHEMATICAL MODELLING

CC BY

Check for updates

УДК 534.11

Оригинальное эмпирическое исследование

https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-34-43

Исследование влияния движения границ на колебательные и резонансные свойства механических систем переменной длины

А.Л. Семенов[1], В.Л. Литвинов[2], М.В. Шамолин[3] ✉

[1, 3] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

[2] Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация

✉ shamolin@rambler.ru

Аннотация

Введение. Широкое распространение в технике объектов с движущимися границами обусловливает необходимость развития методов математического моделирования и создания алгоритмического программного обеспечения для соответствующего анализа. Настоящая работа представляет собой систематизированный обзор материалов, в которых исследуются колебательные и резонансные свойства механических систем с движущимися границами, таких как канаты подъемных устройств, гибкие передаточные механизмы, струны, стержни, балки переменной длины и т. д.

Материалы и методы. Сформулирована постановка и разработаны численные методы решения нелинейных задач, описывающих волновые процессы и резонансные свойства объектов с движущимися границами.

Результаты исследования. Проведен анализ отражения волн от движущихся границ, включая изменение их энергии и частоты. Показано, что энергия системы возрастает при движении границы навстречу волнам и убывает при совпадении направлений. Получены критерии, определяющие условия, при которых необходимо учитывать движение границ для корректного расчета амплитуд колебаний. Численные результаты демонстрируют влияние скорости движения границ и демпфирования на динамику системы.

Обсуждение и заключение. Результаты работы имеют практическое значение для проектирования и эксплуатации механических систем с переменной геометрией. Приведенные результаты позволяют на стадии проектирования предотвратить возможность возникновения колебаний большой амплитуды в механических объектах с движущимися границами. Данные задачи мало изучены и требуют дальнейшего исследования.

Ключевые слова: резонансные свойства, колебания систем с движущимися границами, волновые процессы, демпфирование, амплитуда колебаний

Для цитирования. Семенов А.Л., Литвинов В.Л., Шамолин М.В. Исследование влияния движения границ на колебательные и резонансные свойства механических систем переменной длины. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):34–43. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-34-43

Original Empirical Research

Study of the Influence of Boundary Motion on the Oscillatory and Resonance Properties of Mechanical Systems with Variable Length

Alexey L. Semenov[1], Vladimir L. Litvinov[2], Maxim V. Shamolin[3] ✉

[1, 3] Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

[2] Samara State Technical University, Samara, Russian Federation

✉ shamolin@rambler.ru

Abstract

Introduction. The widespread use of technical systems with moving boundaries necessitates the development of mathematical modelling methods and algorithmic software for their analysis. This paper presents a systematic review

© Семенов А.Л., Литвинов В.Л., Шамолин М.В., 2025

of studies examining the oscillatory and resonance properties of mechanical systems with moving boundaries, such as hoisting cables, flexible transmission mechanisms, strings, rods, beams with variable length, and others.
Materials and Methods. A problem statement is formulated, and numerical methods are developed for solving nonlinear problems that describe wave processes and the resonance properties of systems with moving boundaries.
Results. An analysis is conducted on wave reflection from moving boundaries, including changes in their energy and frequency. It is shown that the energy of the system increases when the boundary moves toward the waves and decreases when moving in the same direction as the waves. Criteria are obtained to determine the conditions under which the boundary motion must be considered for accurate calculation of oscillation amplitudes. Numerical results demonstrate the influence of boundary speed and damping on the system dynamics.
Discussion and Conclusion. The findings have practical significance for the design and operation of mechanical systems with variable geometry. The results make it possible to prevent large-amplitude oscillations in mechanical objects with moving boundaries at the design stage. These problems have not been sufficiently studied and require further research.

Keywords: resonance properties, vibrations of systems with moving boundaries, wave processes, damping, vibration amplitude

For Citation. Semenov A.L., Litvinov V.L., Shamolin M.V. Study of the Influence of Boundary Motion on the Oscillatory and Resonance Properties of Mechanical Systems with Variable Length. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):34–43. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-34-43

Введение. В области динамики упругих систем особый практический интерес представляют задачи, связанные с колебаниями конструкций, геометрические параметры которых изменяются во времени. Типичными примерами таких систем служат канаты подъемных устройств [1–8], гибкие элементы передаточных механизмов [4, 6, 9], бурильные установки [10] и т. д. Многочисленные исследования в области динамики подъемных канатов выявили необходимость разработки новых подходов к анализу поведения одномерных объектов с переменными геометрическими характеристиками.

Аналогичные задачи с движущимися границами возникают и при решении уравнений теплопереноса, теплопроводности и диффузии (в частности, задача Стефана). Такие задачи рассмотрены в работах Л.А. Уваровой [11], В.А. Кудинова [12] и других авторов.

Исследованию смежного класса задач, посвященных построению двумерных и трехмерных математических моделей морских и прибрежных систем, мелководных водоемов, процессам волновой гидродинамики, гидрофизики, исследованию корректности постановок задач, описываемых уравнениями эллиптического типа, посвящены работы А.И. Сухинова и его учеников [13, 14]. Авторы рассматривают задачи построения и исследования двумерно-одномерных схем расщепления и методы решения сеточных задач диффузии-конвекции-реакции, а на их основе — экономичных параллельных алгоритмов.

Результаты А.И. Сухинова, А.М. Атаян, А.В. Никитиной, А.Е. Чистякова, В.В. Сидорякиной [15] и других авторов являются основой для исследования задач прогнозирования неблагоприятных и опасных явлений, в т. ч. волновых процессов на границах в природных и техногенных системах; массопереноса вещества через подвижную границу, включая штормовые нагоны, затопление прибрежных территорий, образование зон гипоксии в морских и прибрежных системах на основе прецизионных моделей; дистанционного зондирования и искусственного интеллекта. В работах вышеперечисленных авторов исследованы вопросы существования и единственности решений линеаризованных начально-краевых задач для построенных моделей.

Задача о колебаниях систем с движущимися границами связана с получением решения систем дифференциальных уравнений в частных производных в переменных во времени областях, а также интегро-дифференциальных уравнений с изменяющимися во времени пределами интегрирования и ядрами, введением понятия «собственных чисел» и «собственных функций» для объектов переменной длины, построением общей схемы исследования краевых задач рассматриваемого класса, основанной на синтезе теории интегральных уравнений и асимптотических методов, решением характерных модельных краевых задач в области динамики подъемных канатов, балок, стержней и струн переменной длины, изучением их резонансных свойств. Такие задачи в настоящее время изучены недостаточно. Использование известных методов математической физики ограничено в основном классом задач с фиксированными границами.

Сложности, возникающие при постановке такого рода задач и получении их решений, объясняет тот факт, что до настоящего времени не существует достаточно общего подхода к анализу особенностей динамики таких систем. Полученные результаты ограничены качественным описанием динамических явлений, а вот получению количественных характеристик, которые могли бы иметь практическую ценность, в известных публикациях уделено недостаточное внимание.

Теоретическая значимость результатов настоящей работы заключается в разработке и исследовании новых математических моделей, описывающих колебания объектов с движущимися границами в форме дифференциальных уравнений в частных производных.

Практическая значимость заключается в обобщении методики моделирования и численного исследования резонансных свойств объектов, состояние которых описывается краевыми задачами с движущимися границами.

Возникновение колебаний большой амплитуды в указанных объектах часто бывает недопустимым, поэтому на первом плане здесь стоит анализ резонансных свойств.

С математической точки зрения подобные задачи требуют решения уравнений гиперболического типа в областях с изменяющимися границами. Существенные сложности, возникающие при описании таких систем, обусловливают преимущественное использование приближенных методов анализа. Среди аналитических подходов наибольшую эффективность демонстрируют методы, основанные на специальных преобразованиях переменных [16, 17], а также методы, использующие принцип суперпозиции встречных волновых процессов [18]. Отдельного внимания заслуживает подход [19], предполагающий применение комплекснозначных замен переменных, позволяющих свести исходную задачу к анализу уравнения Лапласа.

Однако возможности точных аналитических методов существенно ограничены [1–3, 20–21]. Среди приближенных методов особого внимания заслуживает метод Канторовича-Галеркина [10, 22], а также подход, основанный на построении решений интегро-дифференциальных уравнений [23]. В системах с движущимися границами наблюдается два вида резонансных явлений [4] — установившийся резонанс и прохождение через резонанс.

Если на систему с переменными во времени размерами действует сила, изменение которой согласовано с изменяющейся частотой собственных колебаний, то явление непрерывного увеличения амплитуды колебаний называется установившимся (обобщенным) резонансом. Прохождение через резонанс — явление резкого увеличения амплитуды в течение конечного промежутка времени, когда мгновенная частота одного из собственных колебаний проходит через значение возмущающей частоты.

Прохождение через резонанс происходит в течение ограниченного временного интервала и амплитуда колебаний в этом случае не достигает значений, характерных для установившегося резонанса. Однако, когда затухание велико, а скорость движения границ мала, указанные выше величины резонанса близки между собой. В такой ситуации для оценки амплитуды колебаний, возникающих при прохождении через резонанс, нет необходимости решать задачу с подвижными границами. Достаточно зафиксировать границы в резонансной точке и вычислить амплитуду установившихся колебаний, которая будет близка к максимальной амплитуде, наблюдаемой при прохождении через резонанс. Амплитуда колебаний при неподвижных границах выступает в качестве верхней границы для искомой величины.

В связи с этим возникает потребность в расширении круга задач, связанных с моделированием колебаний объектов, имеющих подвижные границы, а также разработкой новых методов их решения и создания соответствующих программных средств, которая и формулируется в виде основной цели настоящей работы. В работе исследованы закономерности отражения волн от движущихся границ в системах, колебания которых описываются волновым уравнением, а также особенности взаимодействия продольных волн с движущейся границей. Изучено влияние демпфирующих сил на амплитуду колебаний, возникающих в системах с движущимися границами при прохождении через резонанс. Получены неравенства, определяющие области, где необходимо учитывать движение границ. Данная работа представляет собой систематизированный обзор материалов, изложенных авторами в рамках докладов на научных конференциях [24–26], в которых исследуются колебательные и резонансные свойства механических систем с движущимися границами.

Материалы и методы

Исследование закономерностей отражения волн от движущихся границ. Пусть колебательные процессы системы описываются волновым уравнением:

$$U_{tt}(x,t) - a^2 U_{xx}(x,t) = 0. \tag{1}$$

Здесь $U(x,t)$ — функция продольного или поперечного смещения объекта от положения равновесия; t — время; x — пространственная координата.

Колеблющийся объект (струна, стержень) с одной стороны не ограничен, вторая граница движется по закону $x = l(t)$. На движущуюся границу падает синусоидальная волна $g(x + at)$ где

$$g(z) = A\sin(wz + \gamma), \tag{2}$$

а от границы отражается волна $q(x – at)$.

Ставится задача о нахождении изменения энергии отраженной волны по сравнению с падающей при равномерном и периодическом движении границы. Решение уравнения (1) записывается в виде:

$$U(x,t) = g(x + at) + q(x - at). \tag{3}$$

Энергия участка объекта ($x \in [a;b]$) находится по формуле:

$$W = \frac{1}{2}\rho\int_a^b (a^2 U_x^2(x,t) + U_t^2(x,t))dx, \tag{4}$$

где ρ — линейная плотность массы объекта.

После подстановки в (4) выражения (3) получим:

$$W = \frac{1}{2}\rho a^2\int_a^b ((g'(x + at))^2 + (q'(x - at))^2)dx.$$

Таким образом, энергия системы состоит из двух частей, то есть из энергии падающей волны и энергии отраженной волны:

$$W_{пад.} = \frac{1}{2}\rho a^2 \int_a^b (g'(x+at))^2 dx, \tag{5}$$

$$W_{отр.} = \frac{1}{2}\rho a^2 \int_a^b (q'(x-at))^2 dx. \tag{6}$$

Будем использовать также безразмерную характеристику

$$W_0 = \frac{W_{отр.}}{W_{пад.}} \tag{7}$$

и безразмерные переменные:

$$U(x,t) = AY(\xi,\tau),\ \ \tau = wat,\ \ \xi = wx,\ \ p = wz,\ \ q(z) = AQ(p),\ \ g(z) = AG(p).$$

При этом выражения (1)–(3), (5), (6) примут следующий вид:

$$Y_{\tau\tau}(\xi,\tau) - Y_{\xi\xi}(\xi,\tau) = 0, \tag{8}$$

$$G(p) = \sin(p+\gamma), \tag{9}$$

$$Y(\xi,\tau) = G(\xi+\tau) + Q(\xi-\tau), \tag{10}$$

$$W_{пад.} = C\int_{a_0}^{b_0} (G'(\xi+\tau))^2 d\xi,\ \ W_{отр.} = C\int_{a_0}^{b_0} (Q'(\xi-\tau))^2 d\xi,$$

где $C = \frac{1}{2}\rho a^2 A^2 w,\ \ a_0 = wa,\ \ b_0 = wb.$

Рассмотрим граничное условие на движущейся границе вида

$$U(l(t),t) = 0 \tag{11}$$

при равномерном движении границы $l(t)=Vt$.

В безразмерных переменных граничное условие будет иметь вид:

$$Y(L(\tau),\tau) = 0, \tag{12}$$

где

$$L(\tau) = \alpha\tau,\ \ \alpha = V/a\ \ (\alpha < 1). \tag{13}$$

Подставим решение (10) в граничное условие (12). В результате получим:

$$G(L(\tau)+\tau) + Q(L(\tau)-\tau) = 0. \tag{14}$$

Обозначим $P = (L(\tau) - \tau)$ и найдем отсюда τ: $\tau = \varphi(P)$:

Выразим: $L(\tau) + \tau = P + 2\varphi(P)$. При законе движения границы $\varphi(P) = \frac{z}{\alpha - 1}$ уравнение (14) примет вид: $Q(P) = -G\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}P\right)$.

С учетом того, что падающая волна определяется выражением (9), для отраженной волны получим:

$$Q(P) = -\sin\left(-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}P + \gamma\right). \tag{15}$$

Анализ решения (15) показывает, что амплитуда при отражении от движущейся границы не изменяется, а частота изменяется согласно эффекту Доплера в $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$ раз. При движении границы навстречу волне ($\alpha > 0$) частота увеличивается, а при движении сонаправленно волне ($\alpha < 0$) — уменьшается.

Найдем изменение энергии одной падающей волны при отражении.

Длина падающей волны (9) равна 2π, а длина отраженной — $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}2\pi$, поэтому

$$W_{пад.} = C\int_0^{2\pi} \cos^2(P+\gamma)dP = C\pi, \tag{16}$$

$$W_{отр.} = C\int_0^{2\pi\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \cos^2\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}P + \gamma\right)dP = C\pi\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right),$$

$$W_0 = \frac{W_{отр.}}{W_{пад.}} = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}.$$

Энергия системы увеличивается при движении границы навстречу волнам и убывает при сонаправленном движении.

Рассмотрим периодическое движение границы

$$l(t) = B\sin(\omega t). \tag{17}$$

Согласуем движение границы с набегающими волнами таким образом, чтобы за время набегания одной волны ($T = 2\pi/wa$) граница совершала целое число колебаний n. При этом

$$\omega = wan. \tag{18}$$

Выражение (17) в безразмерных переменных $L(\tau) = wl(t), \tau = wat,\ \xi = wx$ с учетом (18) будет иметь вид:

$$L(\tau) = \beta\sin(n\tau), \tag{19}$$

где $\beta = Bw$.

При дозвуковом движении границы $(|L'(\tau)| < 1)$ должно выполняться условие $\beta n < 1$. Подставив (19) в граничное условие (15) для отраженной волны, получим:

$$Q(P) = -\sin(P + 2\varphi(P) + \gamma). \tag{20}$$

Функция $\varphi(P)$ задается неявно и определяется из уравнения:

$$\beta\sin(n\varphi(P)) - \varphi(P) = P. \tag{21}$$

Для нахождения энергии отраженной волны найдем из (21) $\varphi'(P)$ и из (20) $Q'(P)$:

$$\varphi'(P) = 1/(\beta n\cos(\varphi(P)) - 1), \tag{22}$$

$$Q'(P) = -(1 + 2\varphi'(P))\cos(P + 2\varphi(P) + \gamma). \tag{23}$$

Энергия падающей волны определяется выражением (16).

С учетом (22), (23) для энергии отраженной волны получим:

$$W_{отр.} = C\int_0^{2\pi}\left(\frac{\beta n\cos\varphi + 1}{\beta n\cos\varphi - 1}\cos(P + 2\varphi(P) + \gamma)\right)^2 dP. \tag{24}$$

Результаты исследования. Проанализируем с помощью разработанного программного комплекса [27] выражение (24) на максимум в зависимости от β и γ при различных значениях n.

В результате численного решения установлено, что при любых значениях β максимум энергии отраженной волны достигается при $n = 2$ при $\gamma = \pi/2$. Для других значениях n максимум достигается при $\gamma = 0$. Причем также установлено, что функция $W_0(\gamma)$ периодическая с периодом π при любых значениях n.

Зависимость W_0 от β и γ при $n = 2$, приведена в таблице 1.

Таблица 1

Зависимость W_0 от β и γ при $n = 2$

γ \ β	0,000	0,045	0,090	0,135	0,180	0,225	0,270	0,315	0,360	0,405
0,00	1,000	0,955	0,989	1,096	1,280	1,559	1,973	2,608	3,658	5,661
0,31	1,000	0,969	1,015	1,132	1,325	1,615	2,043	2,695	3,764	5,773
0,63	1,000	1,008	1,082	1,224	1,443	1,762	2,226	2,924	4,047	6,089
0,94	1,000	1,055	1,165	1,338	1,588	1,943	2,453	3,208	4,398	6,488
1,26	1,000	1,093	1,232	1,430	1,706	2,090	2,636	3,438	4,683	6,818
1,57	1,000	1,108	1,258	1,465	1,750	2,146	2,706	3,526	4,794	6,952
1,88	1,000	1,093	1,232	1,430	1,706	2,090	2,637	3,439	4,688	6,840
2,20	1,000	1,055	1,165	1,338	1,588	1,944	2,453	3,210	4,405	6,524
2,51	1,000	1,008	1,082	1,224	1,443	1,762	2,227	2,926	4,054	6,125
2,83	1,000	0,969	1,015	1,132	1,325	1,616	2,044	2,696	3,769	5,795
3,13	1,000	0,955	0,989	1,096	1,280	1,559	1,973	2,608	3,658	5,661

Особенности взаимодействия продольных волн с движущейся границей. Рассмотрим процесс распространения продольных волн в полуограниченном стержне, левая граница которого продвигается между двумя роликами, вращающимися с окружной скоростью v и движущимися вдоль оси x с той же скоростью.

До настоящего времени при постановке подобных задач тем фактом, что сквозь границу проходят деформированные участки стержня, пренебрегалось и граничное условие при отсутствии проскальзывания записывалось в виде

$$U_t(l(t), t) = 0;\ l(t) = \nu t.$$

В случаях, если деформации велики, это может привести к существенным погрешностям.

Пусть $U(x,t)$ — продольное смещение сечения стержня с координатой x в момент времени t удовлетворяет волновому уравнению (1). Если учесть деформации, то граничное условие останется тем же

$$U_t(l(t),t) = 0, \tag{25}$$

но закон движения границы будет взаимосвязан с $U(x,t)$ соотношением

$$l'(t) = \nu / (1 + U_x(l(t),t)). \tag{26}$$

Зависимость закона движения границ от колебательного процесса делает задачу нелинейной. Задачи такого типа в настоящее время мало исследованы. Впервые подобная задача была рассмотрена в работе [21].

Исследуем влияние величины деформации и скорости движения границы на процесс отражения гармонической волны

$$\varphi(x + at) = A\sin\omega(x + at) \tag{27}$$

от движущейся границы.

Введем в задачу (1), (25)–(27) безразмерные переменные:

$$U(x,t) = AV(\xi,\tau),\ l(t) = L(\tau)/\omega,$$

$$\xi = \omega x,\ \tau = a\omega t,\ \varphi(x + at) = Ag(\xi + \tau).$$

В результате получим:

$$V_{\tau\tau}(\xi,\tau) - V_{\xi\xi}(\xi,\tau) = 0,\ V_\tau(L(\tau),\tau) = 0,$$

$$L'(\tau) = \varepsilon / (1 + \alpha V_\xi(L(\tau),\tau)),\ g(\xi + \tau) = \sin(\xi + \tau),\ \varepsilon = \nu / a,\ \alpha = A\omega.$$

Решение будем искать в виде:

$$V(\xi,\tau) = \sin(\xi + \tau) + G(\xi - \tau).$$

В результате, для нахождения функций G и L получим систему:

$$L'(\tau) = \varepsilon / (1 + 2\alpha\cos(L(\tau) + \tau)),\ G'(L(\tau) - \tau) = \cos(L(\tau) + \tau).$$

Из второго уравнения системы следует, что амплитуда волн деформации не изменяется. Сравнение решения системы (система решалась численно с помощью разработанного программного комплекса [27]) с решением, не учитывающим изменения $L(\tau)$ за счет деформации, а именно:

$$L(\tau) = \varepsilon\tau,\ G'(z) = \cos((\varepsilon + 1)z / (\varepsilon - 1)),\ z = \tau(\varepsilon - 1),$$

показывает, что между решениями происходит постоянный по времени сдвиг фаз. Длина волн в первом случае меньше. Сдвиг фаз в единицу времени в зависимости от ε и α приведен в таблице 2.

Таблица 2

Сдвиг фаз в единицу времени в зависимости от ε и α

ε \ α	0,1	0,2	0,3	0,4
0,1	0,004	0,008	0,034	0,109
0,3	0,019	0,045	0,120	–
0,5	0,032	0,077	–	–
0,7	0,057	–	–	–

В некоторые моменты времени граница может двигаться быстрее скорости звука $(L'(\tau) > 1)$. При этом поставленная задача некорректна. Неравенство $\varepsilon + 2\alpha < 1$ задает допустимую область. В ячейках таблицы, где неравенство не выполняется, сделан прочерк.

Анализ влияния движения границ при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием. Для ответа на вопрос о том, в каких случаях необходимо учитывать движение границ, рассмотрим прохождение через резонанс в системе с демпфированием.

В работах [10, 28] рассмотрены резонансные свойства двух систем переменной длины с учётом действия демпфирующих сил. Выражения для амплитуды колебаний, полученные там, имеют вид:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\varepsilon\tau)e^{-2\alpha_0(\varepsilon_1\tau)\tau}\{[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta)e^{\alpha_0(\varepsilon_1\zeta)\zeta}\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta]^2 + [\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta)e^{\alpha_0(\varepsilon_1\zeta)\zeta}\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta]^2\}, \tag{28}$$

где $\alpha_0(\varepsilon_1\tau), E_n(\varepsilon\tau), F_n(\varepsilon\zeta), \Phi_n(\zeta)$ — некоторые функции.

Опуская некоторые математические выкладки, получим выражение для (28) в виде:

$$A_{0n}^2(\tau_1,\tau_2) = A^2\frac{2}{|\nu|}A_n^2(z_1,z_2),$$

где

$$A_n^2(z_1,z_2) = e^{-2\alpha Z_2}[I_s^2(z_1,z_2) + I_c^2(z_1,z_2)], \tag{29}$$

$$I_s(z_1,z_2) = \int_{z_1}^{z_2} e^{\alpha z}\sin(\pm z^2)dz,\ \ I_c(z_1,z_2) = \int_{z_1}^{z_2} e^{\alpha z}\cos(\pm z^2)dz, \tag{30}$$

$$\alpha = \alpha_0\sqrt{2/|\nu|},\ z_i = (\nu\tau_i + \omega_0)/\sqrt{2|\nu|},\ i = \overline{1,2}.$$

Здесь v — параметр, характеризующий скорость прохождения через резонанс; α_0 — коэффициент, характеризующий затухание в системе; A — постоянная величина; τ_1,τ_2 — границы резонансной области.

Исследуем выражение (29) на максимум в окрестности точки $z_0 = 0$.

В результате численного решения (29) с помощью разработанного программного комплекса [27], была получена таблица 3.

Таблица 3

Результаты численного решения выражения (29) на максимум

α	0,00	0,10	0,30	0,50	0,70	1,00	1,30	2,00	3,00	7,00
z_1	–1,56	–1,54	–1,49	–1,49	–1,48	–1,48	–1,47	–1,46	–1,35	–1,29
z_2	1,56	1,45	1,30	1,25	1,20	1,15	1,10	1,00	0,70	0,40
$A_n(\alpha)$	2,37	2,06	1,60	1,29	1,07	0,84	0,68	0,47	0,33	0,144

Максимальная амплитуда колебаний, возникающих при остановке границ в резонансной точке, определяется выражением (28) при $v = 0$. Производя вычисления, получим:

$$A_{0n}^{\max} = A/\alpha_0. \tag{31}$$

При $v \neq 0$ амплитуда определяется выражением:

$$A_{0n} = A\sqrt{\frac{2}{|\nu|}}A_n(\alpha_0\sqrt{\frac{2}{|\nu|}}), \tag{32}$$

где A_n находится из таблицы 3.

Учёт движения границ следует производить, если относительная погрешность амплитуды

$$\Delta = \frac{A_{0n}^{\max} - A_{0n}}{A_{0n}} \tag{33}$$

велика.

Используя данные таблицы, нетрудно установить, что погрешность Δ превышает значение 0,05 при

$$\alpha_0\sqrt{\frac{2}{|\nu|}} < 2{,}164. \tag{34}$$

Неравенство (34) определяет область в пространстве параметров α_0, v, где необходимо учитывать движение границ. Подставляя v в (34) и произведя преобразования, получим следующее неравенство, ограничивающее область, где необходимо учитывать движение границ:

$$\Delta_A > 3{,}8\sqrt{\gamma\Delta_\ell},$$

где $\Delta_A = 2\pi\alpha_0/\omega_0$ — относительное изменение амплитуды за одно свободное колебание; $\Delta_\ell = 2\pi|\upsilon|/\omega_0\ell_0$ — относительное изменение длины за одно свободное колебание.

Обсуждение и заключение. Исследованы закономерности отражения волн от движущихся границ в системах, колебания которых описываются волновым уравнением. Получено выражение изменения энергии отраженной волны по сравнению с падающей при равномерном и периодическом движении границы. Установлено, что энергия системы увеличивается при движении границы навстречу волнам и убывает при сонаправленном движении.

Проанализировано распространение продольных волн в стержне с движущейся границей. При этом учёт деформаций делает задачу нелинейной. Показано, что амплитуда волн деформации остаётся неизменной, несмотря на влияние скорости движения границы и величины деформации. Исследовано воздействие демпфирующих сил на амплитуду колебаний, возникающих при прохождении через резонанс. Получены критерии в виде неравенств, которые определяют области, где требуется учитывать движение границ.

Прикладная ценность результатов работы заключается в возможности использования их для решения широкого круга технических проблем [29–33]: анализе продольных и изгибных колебаний валов, балок и стержней с подвижными закреплениями; оценке надежности работы канатов в грузоподъемных установках и динамической устойчивости нитей, волокон и тесемочных передач; анализе колебаний лент в лентопротяжных механизмах, ленточных пилах, гибких звеньях передач с гибкой связью; исследовании колебаний проволоки при изготовлении

оболочек вращения намоткой; управлении технологией изготовления кабелей, проката; оценке надежности работы железнодорожной контактной сети и т. д.

Данные задачи мало изучены и требуют дальнейшего исследования. Приведенные результаты позволяют на стадии проектирования предотвратить возможность возникновения колебаний большой амплитуды в механических объектах с движущимися границами [34–37].

Список литературы / References

1. Колосов Л.В., Жигула Т.И. Продольно-поперечные колебания струны каната подъемной установки. *Известия вузов. Горный журнал*. 1981;3:83–86.

Kolosov L.V., Zhygula T.I. Longitudinal and transverse vibrations of the rope string of the lifting installation. *Minerals and Mining Engineering*. 1981;3:83–86. (In Russ.)

2. Zhu W.D., Chen Y. Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control. *J. Vibr. Acoust.* 2006;1:66–78.

3. Shi Y., Wu L., Wang Y. Nonlinear analysis of natural frequencies of a cable system. *J. Vibr. Eng.* 2006;2:173–178.

4. Горошко О.А., Савин Г.Н. *Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины*. Киев: Наукова думка; 1971. 290 с.

Goroshko O.A., Savin G.N. *Introduction to the mechanics of deformable one-dimensional bodies of variable length*. Kiev, Nauk. dumka; 1971. 290 p. (In Russ.)

5. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении. *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*. 2017;19(4):161–165.

Anisimov V.N., Litvinov V.L. Transverse vibrations of a rope moving longitudinally. *Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*. 2017;19(4):161–165. (In Russ.)

6. Савин Г.Н., Горошко О.А. *Динамика нити переменной длины*. Киев: Наукова думка; 1962. 332 с.

Savin G.N., Goroshko O.A. *The dynamics of the thread of variable length*. Kiev, Nauk. dumka; 1962. 332 p. (In Russ.)

7. Liu Z., Chen G. Analysis of plane nonlinear free vibrations of a load-bearing rope taking into account the influence of bending stiffness. *J. Vibr. Eng*. 2007;1:57–60.

8. Palm J., Paredes G.M., Eskilsson C., Pinto F. Simulation of mooring cable dynamics using a discontinuous Galerkin method. In *International Conference on Computational Methods in Marine Engineering*, 2013.

9. Литвинов В.Л. Исследование свободных колебаний механических объектов с движущимися границами при помощи асимптотического метода. *Журнал Средневолжского математического общества*. 2014;16(1):83–88.

Litvinov V.L. Investigation of free oscillations of mechanical objects with moving boundaries using the asymptotic method. *Middle Volga Mathematical Society Journal*. 2014;16(1):83–88. (In Russ.)

10. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. *Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами*. Самара: Самарский государственный технический университет; 2017. 149 с.

Anisimov V.N., Litvinov V.L. *Mathematical modeling and investigation of vibrations of one-dimensional mechanical systems with moving boundaries*. Samara, Samar. gos. tekhn. univ., 2017; 149 p. (In Russ.)

11. Уварова Л.А., Федянин В.К. Математическая модель теплопереноса в существенно нелинейных сопряженных средах. *Математическое моделирование*. 1990;2(6):40–54.

Uvarova L.A., Fedyanin V.K. Mathematical model of heat transfer in substantially nonlinear coupled media. *Matem. modelirovanie*. 1990;2(6):40–54. (In Russ.)

12. Кудинов В.А., Кудинов И.В. *Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности.* Москва: Книжный дом «Либроком»; 2012. 280 с.

Kudinov V.A., Kudinov I.V. *Methods for solving parabolic and hyperbolic heat conduction equations.* Moscow, Knizhniy dom “Librokom”, 2012; 280 p. (In Russ.)

13. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Никитина А.В., Атаян А.М., Литвинов В.Н. Метод решения сеточных уравнений для задач гидродинамики в плоских областях. *Математическое моделирование*. 2023;35(3):35–58. https://doi.org/10.20948/mm-2023-03-03

Sikhinov A.I., Chistyakov A.E., Nikitina A.V., Atayan A.M., Litvinov V.N. A Method for Solving Grid Equations for Hydrodynamic Problems in Flat Areas. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2023;15(5):35–58. https://doi.org/10.20948/mm-2023-03-03

14. Sukhinov A., Sidoryakina V. Two-dimensional-one-dimensional alternating direction schemes for coastal systems convection-diffusion problems. *Mathematics*. 2021;9(24):3267. https://doi.org/10.3390/math9243267

15. Атаян А.М., Никитина А.В., Сухинов А.И., Чистяков А.Е. Математическое моделирование опасных явлений природного характера в мелководном водоеме. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2022;62(2):269–286. https://doi.org/10.31857/S0044466921120048

Atayan A.M., Nikitina A.V., Sukhinov A.I., Chistyakov A.E. Mathematical Modeling of Hazardous Natural Phenomena in a Shallow Basin. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2022;61(2):269–286. https://doi.org/10.1134/S0965542521120034

16. Весницкий А.И. *Волны в системах с движущимися границами и нагрузками*. Москва: Физматлит; 2001. 320 с.

Vesnitskii A.I. *Waves in systems with moving boundaries and loads*. Moscow, Fizmatlit, 2001; 320 p. (In Russ.)

17. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В. Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки»*. 2012;3(28):145–151.

Anisimov V.N., Litvinov V.L., Korpen I.V. A method for obtaining an analytical solution to the wave equation describing the oscillations of systems with moving boundaries. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2012;3(28):145–151. (In Russ.)

18. Весницкий А.И. Обратная задача для одномерного резонатора, изменяющего во времени свои размеры. *Известия вузов. Радиофизика*. 1971;10:1538–1542.

Vesnitskii A.I. The inverse problem is for a one-dimensional resonator that changes its size over time. *Izvestiya vuzov. Radiophysics*. 1971;10:1538–1542. (In Russ.)

19. Барсуков К.А., Григорян Г.А. К теории волновода с подвижными границами. *Известия вузов. Радиофизика*. 1976;2:280–285.

Barsukov K.A., Grigorian G.A. Towards the theory of a waveguide with movable boundaries. *Izvestiya vuzov. Radiophysics*. 1976;2:280–285. (In Russ.)

20. Wang L., Zhao Y. Multiple internal resonances and non-planar dynamics of shallow suspended cables to the harmonic excitations. *Journal of Sound and Vibration*. 2009;1–2:1–14.

21. Самарин Ю.П. Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в одномерном пространстве. *Прикладная математика и механика*. 1964;26(3):77–80.

Samarin Yu.P. On a nonlinear problem for the wave equation in one-dimensional space. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1964;26(3):77–80. (In Russ.)

22. Анисимов В.Н., Корпен И.В., Литвинов В.Л. Применение метода Канторовича-Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2018;2:70–77.

Anisimov V.N., Korpen I.V., Litvinov V.L. Application of the Kantorovich-Galerkin Method for Solving Boundary Value Problems with Conditions on Moving Borders. *Mechanics of Solids*. 2018;53(2):177–183.

23. Литвинов В.Л., Литвинова К.В. Приближенный метод решения краевых задач с подвижными границами путем сведения к интегро-дифференциальным уравнениям. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2022;62(6):977–986.

Litvinov V.L., Litvinova K.V. An Approximate Method for Solving Boundary Value Problems with Moving Boundaries by Reduction to Integro-Differential Equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2022;62(6):945–954.

24. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Исследование закономерностей отражения волн от движущихся границ. В: *Труды шестой Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи»*. Самара: издательство СамГТУ; 2009. С. 39–43.

Litvinov V.L., Anisimov V.N. Investigation of patterns of reflection of waves from moving boundaries. *Proceedings of the Sixth All-Russian Scientific Conference (June 1–4, 2009). Math. modeling and boundary value problems*. Samara, SamGTU, 2009; 39–43. (In Russ.)

25. Литвинов В.Л. Исследование взаимодействия продольных волн с движущейся границей. В: *Сборник статей III Всероссийской конференции-семинара «Научно-техническое творчество: проблемы и перспективы»*. Самара: издательство СамГТУ; 2008. С. 31–36.

Litvinov V.L. Investigation of the interaction of longitudinal waves with a moving boundary. *Scientific and technical creativity: problems and prospects. Collection of articles of the III All-Russian conference-seminar*. Samara, 2008; 31–36. (In Russ.)

26. Литвинов В.Л. Учет влияния демпфирующих сил на резонансные свойства струны с движущейся границей. В: *Сборник статей V Юбилейной Всероссийской конференции-семинара «Научно-техническое творчество: проблемы и перспективы»*. Самара: издательство СамГТУ; 2010. С. 79–80.

27. Литвинов В.Л. *Автоматизированный программный комплекс для исследования колебаний и резонансных явлений в механических системах с движущимися границами «ТВ-Analysis-7»*. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ, № 2025613649. 2025. 17 с.

Litvinov V.L. Certificate of state registration of a computer program. *Automated software package for the study of vibrations and resonant phenomena in mechanical systems with moving boundaries* "*TB-Analysis-7*" No. 2025613649, published on Feb. 13, 2025 (In Russ.)

28. Литвинов В.Л. Вариационная постановка задачи о колебаниях балки с подвижной подпружиненной опорой. *Теоретическая и математическая физика.* 2023;215(2):709–715. https://doi.org/10.1134/S0040577923050094

Litvinov V.L. Variational formulation of the problem on vibrations of a beam with a moving spring-loaded support. *Theoretical and Mathematical Physics*. 2023; 215(2):709–715. https://doi.org/10.1134/S0040577923050094

29. Литвинов В.Л., Литвинова К.В. Об одном обратном методе решения задач о колебаниях механических систем с движущимися границами. *Вестник Московского Университета. Серия 1: Математика. Механика*. 2024;3:53–59. https://doi.org/10.3103/S0027133024700122

Litvinov V.L., Litvinova K.V. An Inverse Method for Solving Problems about Oscillations of Mechanical Systems with Moving Boundaries. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2024;3:53–59. https://doi.org/10.3103/S0027133024700122

30. Sandilo S.H., Horssen W.T. van. On variable length induced vibrations of a vertical string. *Journal of Sound and Vibration*. 2014;333:2432–2449.

31. Zhang W., Tang Y. Global dynamics of the cable under combined parametrical and external excitations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2002;37:505–526.

32. Faravelli L., Fuggini C., Ubertini F. Toward a hybrid control solution for cable dynamics: Theoretical prediction and experimental validation. *Struct. Control Health Monit*. 2010;17:386–403.

33. Лежнева А.А. Свободные изгибные колебания балки переменной длины. *Ученые записки*. 1966;156:143–150.
Lezhneva A.A. Free bending vibrations of a beam of variable length. *Scientific notes*. Perm, Perm. Univ., 1966; 156:143–150. (In Russ.)

34. Selivanova N.Yu., Shamolin M.V. Local solvability of a one-phase problem with free boundary. *Journal of Mathematical Sciences*. 2013;189(2):274–283.

35. Selivanova N.Yu., Shamolin M.V. Studying the interphase zone in a certain singular-limit problem. *Journal of Mathematical Sciences*. 2013;189(2):284–293.

36. Selivanova N.Yu., Shamolin M.V. Local solvability of the Capillary problem. *Journal of Mathematical Sciences*. 2013;189(2):294–300.

37. Selivanova N.Yu., Shamolin M.V. Quasi-stationary Stefan problem with values on the front depending on its geometry. *Journal of Mathematical Sciences*. 2013;189(2):301–310.

Об авторах:

Алексей Львович Семенов, академик РАН, академик РАО, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (119991, Российская Федерация, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы), ORCID, SPIN-код, alsemno@ya.ru

Владислав Львович Литвинов, кандидат технических наук, заведующий кафедрой общетеоретических дисциплин (высшей математики) Самарского государственного технического университета (443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244), ORCID, SPIN-код, vladlitvinov@rambler.ru

Максим Владимирович Шамолин, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории общей механики НИИ механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (119991, Российская Федерация, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы), ORCID, SPIN-код, shamolin@rambler.ru

Заявленный вклад авторов:

А.Л. Семенов: общее научное руководство; разработка методологии; визуализация; валидация.

В.Л. Литвинов: постановка задачи; формулировка идей исследования, целей и задач; разработка программного обеспечения.

М.В. Шамолин: разработка методологии; перевод; изучение истории задачи; поиск литературы; визуализация; валидация.

Конфликт интересов: ***авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.***

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Aleksey L. Semenov, Academician of the Russian Academy of Sciences, Academician of the Russian Academy of Education, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Mathematical Logic and Theory of Algorithms, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University (119991, Russian Federation, GSP-1, Moscow, Leninskie Gory), ORCID, SPIN-code, alsemno@ya.ru

Vladislav L. Litvinov, Candidate of Technical Sciences, Head of the Department of General Theoretical Disciplines (Higher Mathematics), Samara State Technical University (443100, Russian Federation, Samara, Molodogvardeyskaya St., 244), ORCID, SPIN-code, vladlitvinov@rambler.ru

Maksim V. Shamolin, Corresponding Member of RAS, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Leading Researcher at the Laboratory of General Mechanics, Research Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University (119991, Russian Federation, GSP-1, Moscow, Leninskie Gory), ORCID, SPIN-code, shamolin@rambler.ru

Contributions of the authors:

A. L. Semenov: General scientific supervision; methodology development; visualization; validation.

V. L. Litvinov: Problem statement; formulation of research ideas, aims and objectives; software development.

M.V. Shamolin: Methodology development; translation; study of the problem's history; literature review; visualization; validation.

Conflict of Interest Statement: **the authors declare no conflict of interest.**

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 30.03.2025
Поступила после рецензирования / Revised 25.04.2025
Принята к публикации / Accepted 20.05.2025

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
MATHEMATICAL MODELLING

CC BY

Check for updates

УДК 004.032.26

Оригинальное эмпирическое исследование

https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-44-51

Применение нейронных сетей при решении эллиптических уравнений для областей сложной формы

А.В. Галабурдин

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

✉ Galaburdin@mail.ru

Аннотация

Введение. При построении моделей в различных областях науки и техники часто используют дифференциальные уравнения. В настоящее время при решении дифференциальных уравнений все чаще применяются нейронные сети. В данной работе предложен оригинальный метод построения нейронной сети для решения эллиптических дифференциальных уравнений. Этот метод применяется при решении краевых задач для областей сложной геометрической формы.

Материалы и методы. Предлагается метод построения нейронной сети, предназначенной для решения дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. Используя замену неизвестной функции, исходная задача сводится к уравнению Лапласа. Таким образом, рассматривались нелинейные дифференциальные уравнения. При построении нейронной сети в качестве активационных функций принимаются производные от сингулярных решений уравнения Лапласа. Сингулярные точки этих решений распределены по замкнутым кривым, охватывающим границу области. При настройке весов сети минимизировалась среднеквадратическая ошибка обучения.

Результаты исследования. Представлены результаты решения первой краевой задачи для различных областей сложной геометрической формы. Результаты представлены в виде таблиц, содержащих точные решения задачи и решения, полученные с помощью нейронной сети. Дано графическое представление точного решения и решение, полученное предложенным методом.

Обсуждение и заключение. Полученные результаты доказали эффективность предложенного метода построения нейронной сети при решении различных видов дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. Данный метод может эффективно применяться при решении других типов дифференциальных уравнений с частными производными.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных эллиптического типа, область сложной геометрической формы, нейронные сети

Для цитирования. Галабурдин А.В. Применение нейронных сетей при решении эллиптических уравнений для областей сложной формы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):44–51. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-44-51

Original Empirical Research

Application of Neural Networks for Solving Elliptic Equations in Domains with Complex Geometries

Alexander V. Galaburdin

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

✉ Galaburdin@mail.ru

Abstract

Introduction. Differential equations are often used in modelling across various fields of science and engineering. Recently, neural networks have been increasingly applied to solve differential equations. This paper proposes an original method

© *Галабурдин А.В., 2025*

for constructing a neural network to solve elliptic differential equations. The method is used for solving boundary value problems in domains with complex geometric shapes.

Materials and Methods. A method is proposed for constructing a neural network designed to solve partial differential equations of the elliptic type. By applying a transformation of the unknown function, the original problem is reduced to Laplace's equation. Thus, nonlinear differential equations were considered. In building the neural network, the activation functions are chosen as derivatives of singular solutions to Laplace's equation. The singular points of these solutions are distributed along closed curves encompassing the boundary of the domain. During the training process, the weights of the network are adjusted by minimizing the mean squared error.

Results. The paper presents the results of solving the first boundary value problem for various domains with complex geometries. The results are shown in tables containing both the exact solutions and the solutions obtained using the neural network. Graphical representations of the exact and the neural network-based solutions are also provided.

Discussion and Conclusion. The obtained results demonstrate the effectiveness of the proposed neural network construction method in solving various types of elliptic partial differential equations. The method can also be effectively applied to other types of partial differential equations.

Keywords: elliptic partial differential equations, domain with complex geometry, neural networks

For Citation. Galaburdin A.V. Application of Neural Networks for Solving Elliptic Equations in Domains with Complex Geometries. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):44–51. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-44-51

Введение. Дифференциальные уравнения играют важную роль при построении моделей в различных областях науки и техники. Традиционные аналитические и численные методы решения дифференциальных уравнений не всегда позволяют получить нужный результат. Поэтому в настоящее время при решении дифференциальных уравнений все чаще стали применять различные методы машинного обучения. Особенно часто исследователи применяют для этого искусственные нейронные сети.

Теоретическими основами метода нейронных сетей безусловно следует считать работы А.Н. Колмогорова [1]. Сейчас нейронные сети применяются при решении различных дифференциальных уравнений. В работе [2] представлен переход от нейросетевой архитектуры к обыкновенным дифференциальным уравнениям и задаче Коши.

Работы [3, 4] посвящены применению нейронных сетей к решению уравнения Лапласа. В статье [5] представлено применение методов глубокого обучения для решения уравнения Пуассона в двухмерной области. Широкое распространение при решении дифференциальных уравнений в частных производных получили радиально-базисные нейронные сети [6].

В работах [7, 8] в качестве активационных используются радиально-базисные функции, параметры которых предлагается варьировать. В работах [9–11] нейронные сети с успехом применяются при решении краевых задач для уравнений Навье-Стокса. Хорошо зарекомендовали себя при решении уравнений частных производных физико-информированные нейронные сети [12], в частности, при решении задач классической механики [13]. В статье [14] для решения задачи тепломассопереноса применяется нейронная сеть персептронного типа.

Вышеупомянутые работы свидетельствуют о растущей популярности нейронных сетей при решении дифференциальных уравнений. Настоящее исследование посвящено рассмотрению краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных для областей сложной формы и является развитием подхода, изложенного в работах [15, 16].

Материалы и методы. Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения

$$U + b_1 \partial_1 U + b_2 \partial_2 U + cU = 0.$$

Представляя решение в виде $U=Ve^{(\lambda x+\alpha y)}$ и подбирая соответственно параметры λ и α, можно получить более простое уравнение

$$V + aV = 0.$$

Полученное уравнение решалось с помощью нейронной сети относительно функции V. Построенные нейронные сети для решения уравнения Лапласа можно применять при решении нелинейных эллиптических уравнений, после их соответствующего преобразования.

Рассмотрим, например, дифференциальное уравнение

$$U - 2((\partial_1 U)^2 + (\partial_2 U)^2)/(3V) = 0.$$

Исходное дифференциальное уравнение сводится к уравнению Лапласа введением новой неизвестной функции $V = U^{1/3}$.

При построении нейронной сети применялся метод, изложенный в работах [15, 16]. В основу этого метода положена формула, похожая на формулу Грина, в которой интегралы заменяются суммами:

$$V(x)=\sum_{k=1}^{N} w_k f(s_k)U(x,\sigma_k)+\sum_{k=1}^{N} v_k f(s_k)G(x,\tau_k),$$

где $f(s_k)$ — значение неизвестной функции u на границе области; $U(x, \sigma_k)$ и $G(x, \tau_k)$ — активационные функции; σ_k и τ_k — точки замкнутых кривых γ_1 и γ_2, охватывающих границу области γ; x — точка области G.

Требуя выполнения этого соотношения в каждой точке границы для всех функций обучающего множества и используя метод наименьших квадратов, можно получить систему уравнений для определения весов w_k и v_k.

Для того, чтобы улучшить обусловленность матрицы полученной системы уравнений, в качестве активационных функций брались функции

$$U(x,y,t,s)=\frac{\beta^5-10\beta^3\delta^2+5\beta\delta^4+\delta^5-10\delta^3\beta^2+5\delta\beta^4}{R^{10}},$$

$$G(x,y,t,s)=\frac{\beta^7-21\beta^5\delta^2+35\beta^3\delta^4-7\beta\delta^6}{R^{14}}n_x,$$

$$+\frac{\delta^7-21\beta^2\delta^5+35\delta^3\beta^4-7\beta^6\delta}{R^{14}}n_y,$$

$$\delta=x-t,\beta=y-s,R=\sqrt{\delta^2+\beta^2},$$

которые представляют собой производные от фундаментального решения уравнения Лапласа.

Это увеличивало сингулярность активационных функций. При этом точки σ_k и τ_k брались на контурах γ_1 и γ_2, которые получаются из граничного контура γ смещением каждой точки в направлении внешней нормали к границе области на расстояния ρ_1 и ρ_2 соответственно. В процессе обучения сети определяются веса и величины ρ_1 и ρ_2. При этом величины ρ_1 и ρ_2 определялись простым перебором.

В качестве обучающего множества применялось множество функций, являющихся решением уравнения Лапласа в полярной системе координат

$$r^k cos(karccos(\frac{x}{r}))+r^k sin(karccos(\frac{x}{r})),\ r=\sqrt{(x^2+y^2)},$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, M$.

Указанные функции задавались в различных системах координат, повернутых друг относительно друга на угол, кратный $2\pi/5$.

Результаты исследования. Предложенный метод применялся при решении задач для областей, граница γ которых задавалась в виде

$$\begin{cases} x=a\cos(t)+g\cos(\omega t), \\ y=a_1\sin(t)+g_1\sin(\omega t), \end{cases} \quad t\in[0,2\pi],$$

где $t\in[0,2\pi]$; a, a_1, g, g_1, ω — изменяемые параметры.

Во всех случаях количество функций в обучающем множестве принималось равным $M = 75$, количество нейронов сети $N = 100$.

Задача 1. В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\Delta U-\partial_1 U+\ 5\partial_2 U+6{,}5U=0.$$

Вводится новая неизвестная функция V, удовлетворяющая уравнению Лапласа:

$$U=Ve^{(0{,}5x-2{,}5y)}.$$

Рассматривалась первая краевая задача. На рис. 1 представлена область, граница которой соответствует $a = 1{,}15$, $g = 1{,}15$, $a_1 = 0{,}07$, $g_1 = -0{,}03$, $\omega = 9$.

Точки области, в которых вычисляются точные значения решения задачи и значения, полученные при помощи нейронной сети, обозначены на чертеже звездочками.

Точки области, в которых вычисляются точные значения решения задачи и значения, полученные при помощи нейронной сети, обозначены на чертеже звездочками. В таблице 1 представлены результаты расчетов, соответствующие решению

$$U=xye^{(0{,}5x-2{,}5y)}.$$

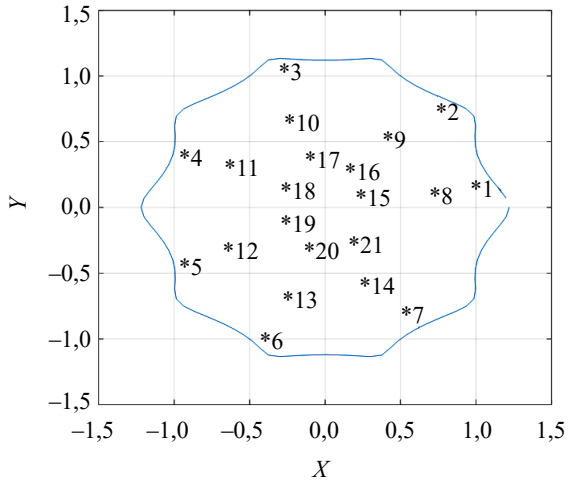


Рис. 1. Форма области задачи 1

Таблица 1

Результаты расчетов для задачи 1

Номер точки	1	2	3	4	5	6	7
Точное решение	0,1158	0,2214	0,1055	0,0241	–0,0142	–0,0473	–0,0835
Решение НС	0,1148	0,2216	0,1054	0,0240	–0,0142	–0,0473	–0,0838
Номер точки	8	9	10	11	12	13	14
Точное решение	0,0385	0,1092	0,0769	0,0244	–0,0157	0,0457	–0,0629
Решение НС	0,0382	0,1090	0,0768	0,0243	–0,0158	0,0458	–0,0630
Номер точки	15	16	17	18	19	20	21
Точное решение	0,0051	0,0213	0,0222	0,0098	–0,0069	–0,0175	–0,0188
Решение НС	0,0047	0,0210	0,0220	0,0096	–0,0071	–0,0177	–0,0190

Задача 2. Рассматривалось дифференциальное уравнение

$$\Delta U + 5\partial_1 U + 3\partial_2 U + 8{,}5U = 0.$$

Введение неизвестной функции V:

$$U = Ve^{-(2{,}5x+1{,}5y)}$$

позволяет свести исходное дифференциальное уравнение к уравнению Лапласа относительно функции V. Форма рассматриваемой при этом области определялась значениями параметров a = 1,1, g = 1,1, $a1$ = 0,05, $g1$ = 0,1, ω = 4 (рис. 2). Рассматривалась первая краевая задача. В таблице 2 представлены результаты расчетов и точное решение дифференциального уравнения

$$U = e^{-x}chye^{-(2{,}5x+1{,}5y)}.$$

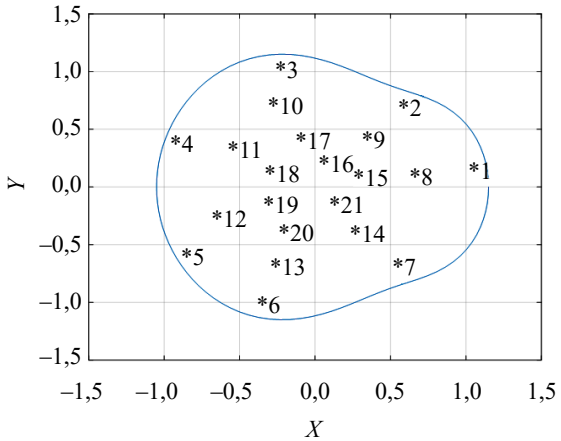


Рис. 2. Форма области задачи 2

Таблица 2

Результаты расчетов для задачи 2

Номер точки	1	2	3	4	5	6	7
Точное решение	0,0198	0,0143	0,0245	0,0622	0,1929	1,4682	9,0855
Решение НС	0,0198	0,0143	0,0245	0,0622	0,1928	1,4640	9,0885
Номер точки	8	9	10	11	12	13	14
Точное решение	0,0818	0,0700	0,1163	0,2289	0,4502	1,4325	3,9076
Решение НС	0,0817	0,0700	0,1162	0,2288	0,4499	1,4320	3,9104
Номер точки	15	16	17	18	19	20	21
Точное решение	0,3377	0,3321	0,4896	0,6716	0,7856	1,1957	1,6099
Решение НС	0,3377	0,3320	0,4896	0,6716	0,7857	1,1959	1,6104

Задача 3. Рассматривалось дифференциальное уравнение

$$\Delta U - \frac{2((\partial_1 U)^2 + (\partial_1 U)^2)}{3V} = 0,$$

которое введением новой неизвестной функции $V = U^{1/3}$ сводилось к уравнению Лапласа. Рассматривалась первая краевая задача. Форма рассматриваемой при этом области определялась значениями параметров a = 1,1, g = 1,1, a_1 = 0,07, g_1 = 0,07, ω = 9 (рис. 3).

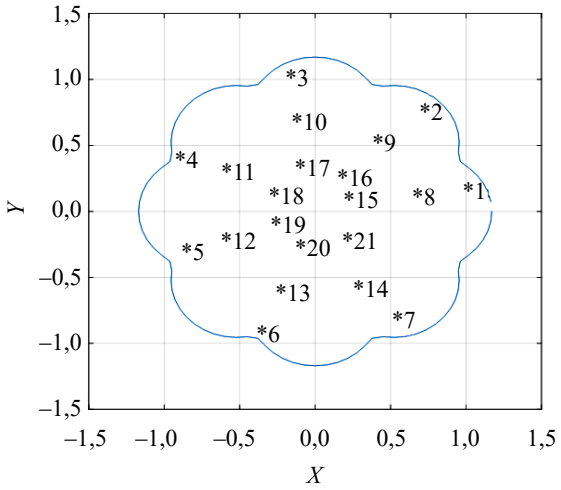


Рис. 3. Форма области задачи 3

В таблице 3 представлены результаты расчетов и точное решение дифференциального уравнения

$$U = (xy + 2{,}5x + y)^3.$$

Таблица 3

Результаты расчетов для задачи 2

Номер точки	1	2	3	4	5	6	7
Точное решение	24,613	28,736	32,687	7,2807	0,0363	–2,0562	10,894
Решение НС	24,613	28,878	32,610	7,3419	0,0380	–2,0870	10,834
Номер точки	8	9	10	11	12	13	14
Точное решение	5,7339	5,9627	6,3055	1,4899	0,0169	0,2857	–2,0582
Решение НС	5,7405	5,9727	6,3164	1,4937	0,0169	0,2865	–2,0625
Номер точки	15	16	17	18	19	20	21
Точное решение	0,3331	0,3060	0,2982	0,0754	0,0017	–0,0088	–0,0950
Решение НС	0,3328	0,3058	0,2982	0,0753	0,0017	–0,0089	–0,0957

На рис. 4 и рис. 5 представлены графические решения, полученные при помощи нейронной сети, а также точное решение задачи 3.

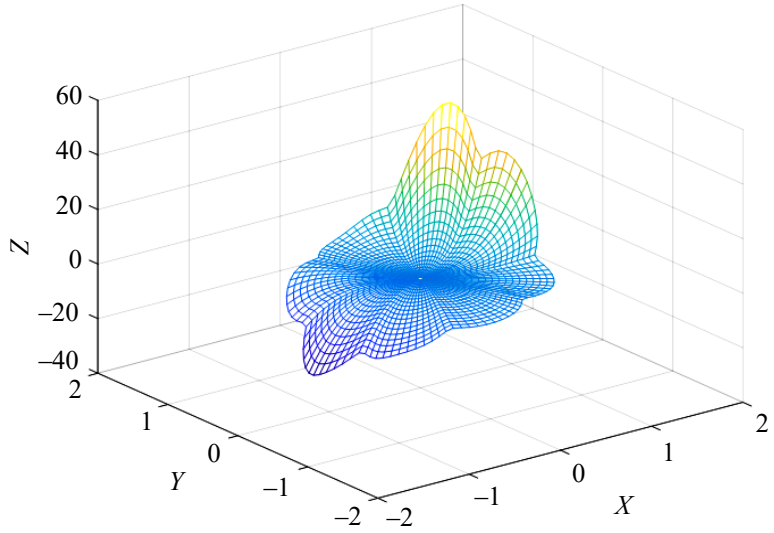


Рис. 4. Решение задачи 3, полученное нейронной сетью

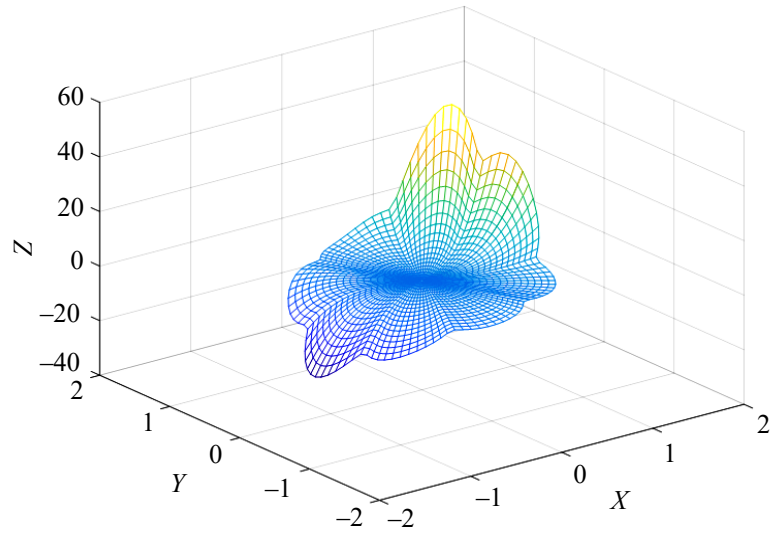


Рис. 5. Точное решение задачи 3

Обсуждение и заключение. Представленные результаты еще раз доказали эффективность метода построения нейронной сети для решения краевых задач для областей сложной формы для различных видов дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. Данный метод может эффективно обрабатывать все типы дифференциальных уравнений с частными производными. Дальнейшие развитие метода будет идти в направлении расширения классов решаемых задач и совершенствования методов обучения.

Список литературы / References

1. Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения. *Доклады Академии наук СССР*. 1957;114(5):953–956.

Kolmogorov A.N. On the representation of continuous functions of several variables in the form of superpositions of continuous functions of one variable and addition. *Reports of the USSR Academy of Sciences*. 1957;114(5):953–956. (In Russ.)

2. Маргасов О.А. О нейронных обыкновенных дифференциальных уравнениях и их вероятностном расширении. *Известия Коми научного центра УрО РАН. Серия «Физико-математические науки»*. 2021;6(52):14–19. https://doi.org/10.19110/1994-5655-2021-6-14-19

Margasov O.A. On neural ordinary differential equations and their probabilistic extension. *Izvestiya of the Komi Science Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences"*. 2021;6(52):14–19. https://doi.org/10.19110/1994-5655-2021-6-14-19 (In Russ.)

3. Варшавчик Е.А., Галяутдинова А.Р., Седова Ю.С., Тархов Д.А. Решение дифференциальных уравнений в частных производных для областей с постоянными границами. В: *Труды 3-й Всероссийской научно-практической конференции «Искусственный интеллект в решении актуальных социальных и экономических проблем XXI века»*. Пермь: издательство Пермского государственного национального исследовательского университета; 2018. С. 294.

Varshavchik E.A., Galyautdinova A.R., Sedova Yu.S., Tarkhov D.A. Solution of partial differential equations for domains with constant boundaries. *Artificial intelligence in solving current social and economic problems of the 21st century: collection of articles. Art. based on materials from the Third All-Russian. scientific-practical conf.* Perm, May 14–18, 2018. Perm. state national research univ.; 2018. 294 p. (In Russ.)

4. Тюрин К.А., Брагунец В.В., Светлов Д.Д. Решение дифференциального уравнения Лапласа с помощью модифицированной нейронной сети. *Молодой ученый*. 2019;27(265):10–12.

Tyurin K.A., Bragunets V.V., Svetlov D.D. Solution of the Laplace differential equation using a modified neural network. *Young Scientist*. 2019;27(265):10–12. (In Russ.)

5. Епифанов А.А. Применение методов глубокого обучения для решения дифференциальных уравнений в частных производных. *Успехи кибернетики*. 2020;1(4):22–28. https://doi.org/10.51790/2712-9942-2020-1-4-3

Epifanov A.A. Application of deep learning methods for solving partial differential equations. *Advances in cybernetics*. 2020;1(4):22–28. https://doi.org/10.51790/2712-9942-2020-1-4-3 (In Russ.)

6. Коваленко А.Н., Черноморец А.А., Петина М.А. О применении нейронных сетей для решения дифференциальных уравнений в частных производных. *Научные ведомости. Серия Экономика. Информатика*. 2017;9(258):103–110.

Kovalenko A.N., Chernomorets A.A., Petina M.A. On the use of neural networks for solving partial differential equations. *Scientific bulletin. The Economics series. Computer science*. 2017;9(258):103–110. (In Russ.)

7. Kansa E.J. *Motivation for using radial basis functions to solve PDEs*. URL: http://uahtitan.uah.edu/kansaweb.html (дата обращения: 13.04.2025)

8. Kansa E.J. Multiquadrics. A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. II. Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Comput. Math. Appl*. 1990;19(89):147–161.

9. Almajid M. Abu-Alsaud M. Prediction of porous media fluid flow using physics informed neural networks. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 2021;208:109205. https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.109205

10. Eivazi H.,Tahani M., Schlatter P., Vinuesa R. Physics-informed neural networks for solving Reynolds-averaged Navier-Stokes equations. *Physics of Fluids*. 2022;34(7):075117. https://doi.org/10.1063/5.0095270

11. Chen J., Viquerat J., Hachem E. *U-net Architectures for Fast Prediction of Incompressible Laminar Flows*. URL: https://arxiv.org/pdf/1910.13532.pdf (дата обращения: 13.04.2025)

12. Raissia M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*. 2019;378:686–707.

13. Зрелова Д.П., Ульянов С.В. Модели физически информированных осведомленных классических Лагранжевых Гамильтоновых нейронных сетей в глубоком обучении. *Современные информационные технологии и ИТ-образование*. 2022;18(2):310–325. https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.310-325

Zrelova D.P., Ulyanov S.V. Models of physically informed aware classical Lagrangian Hamiltonian neural networks in deep learning. *Modern information technologies and IT education*. 2022;18(2):310–325. https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.310-325 (In Russ.)

14. Cai S., Wang Z., Wang S., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks for heat transfer problems. *Journal of Heat Transfer.* 2021;143(6):60–80. https://doi.org/10.1115/1.4050542

15. Галабурдин А.В. Применение нейронных сетей для решения задачи Дирихле для областей сложной формы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):68–79. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-68-79

Galaburdin A.V. Application of neural networks to solve the Dirichlet problem for areas of complex shape. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):68–79. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-68-79 (In Russ.)

16. Галабурдин А.В. Применение нейронных сетей для решения нелинейных краевых задач для областей сложной формы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):35–42. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-35-42

Galaburdin A.V. Application of neural networks to solve nonlinear boundary value problems for areas of complex shape. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):35–42. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-35-42 (In Russ.)

Об авторе:

Александр Васильевич Галабурдин, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), ORCID, SPIN-код, Galaburdin@mail.ru

Конфликт интересов: **автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.**

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

About the Author:

Alexander V. Galaburdin, Cand. Sci. (Phys. – math.), Associate Professor at the Department Mathematics and informatics, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostovon-Don, 344003, Russian Federation), ORCID, SPIN-code, Galaburdin@mail.ru

Conflict of Interest Statement: **the author declares no conflict of interest.**

The author has read and approved the final version of manuscript.

Поступила в редакцию / Received 19.05.2025
Поступила после рецензирования / Reviewed 11.06.2025
Принята к публикации / Accepted 25.06.2025

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
INFORMATION TECHNOLOGY

CC BY

Check for updates

УДК 004

Оригинальное эмпирическое исследование

https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-52-64

Автоматическая обработка первичных данных натурных исследований поведения природно-технических систем при изменении климата и антропогенных воздействиях в условиях Крайнего Севера

С.В. Кушуков[1], **К.Н. Иванов**[1], **С.П. Левашкин**[1]✉, **М.В. Якобовский**[2]

[1] Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Российская Федерация

[2] Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, г. Москва, Российская Федерация

✉ ai_lab@psuti.ru

Аннотация

Введение. Рассматривается научная проблема изучения природно-технических систем (ПТС) Крайнего Севера в условиях изменения климата и антропогенных воздействий. Отмечается актуальность задачи обеспечения их устойчивости, что требует комплексного анализа натурных данных. Выявлены проблемы в методах автоматизированной обработки таких специфических данных. Целью работы является разработка автоматизированных методов обработки натурных данных для выявления закономерностей. В качестве инструментов используются библиотеки Python для анализа, обработки и визуализации данных.

Материалы и методы. Описан объект исследования — Главный корпус Якутской ТЭЦ в условиях вечной мерзлоты. В качестве материалов исследования использованы натурные данные, полученные из инженерно-геологических скважин Якутской ТЭЦ, стационаров Чабыда и Туймаада, а также железнодорожного участка Амуро-Якутской магистрали (АЯМ). Данные включают измерения температуры и влажности грунтов, динамики сезонноталого слоя, характеристик снежного покрова и др. Представлена детальная последовательность автоматизированной обработки первичных данных из XLS-файлов с использованием библиотеки pandas, включая чтение, очистку, преобразование форматов, заполнение или замену значений, удаление дубликатов, а также сохранение обработанных данных в форматах CSV, JSON и XLSX.

Результаты исследования. Представлены конкретные результаты автоматизированной обработки и систематизации первичных натурных данных. Успешно выполнено приведение разнородных измерений к единому формату, обеспечивающему их корректное использование. Сформирован уникальный массив данных на основе эмпирических наблюдений в специфических условиях Крайнего Севера. Продемонстрировано практическое применение библиотек Python для выполнения основных этапов предобработки и подготовки данных.

Обсуждение и заключение. Доказано, что применение системного подхода и автоматизированной обработки данных существенно повышает качество и надежность анализа натурных данных ПТС. Устранение пропусков и нормализация данных улучшают точность, а итоговые форматы данных удобны для дальнейшего использования в моделировании. Подчеркивается универсальность применения Python. Обозначены перспективы исследования — применение методов машинного обучения, кластеризации и моделирования, предназначенных для выявления закономерностей и прогнозирования поведения природно-технических систем в условиях Крайнего Севера под воздействием климатических и антропогенных факторов.

Ключевые слова: анализ данных, библиотеки Python, подготовка данных, предобработка данных, информационные технологии

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 23–61–10032).

Для цитирования. Кушуков С.В., Иванов К.Н., Левашкин С.П., Якобовский М.В. Автоматическая обработка первичных данных натурных исследований поведения природно-технических систем при изменении климата и антропогенных воздействиях в условиях Крайнего Севера. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):52–64. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-52-64

© *Кушуков С.В., Иванов К.Н., Левашкин С.П., Якобовский М.В., 2025*

Original Empirical Research

Automated Processing of Primary Field Data on the Behavior of Natural-Technological Systems under Climate Change and Anthropogenic Impacts in the Far North

Sergey V. Kushukov[1], Konstantin N. Ivanov[1], Sergey P. Levashkin[1] ✉, Mikhail V. Yakobovskiy[2]

[1] Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russian Federation

[2] Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences (IPM RAS), Moscow, Russian Federation

✉ ai_lab@psuti.ru

Abstract

Introduction. This work addresses the scientific problem of studying natural-technological systems (NTS) of the Far North under conditions of climate change and anthropogenic impacts. The relevance of ensuring their stability is emphasized, which requires a comprehensive analysis of field data. Problems in automated processing methods of such specific data have been identified. The aim of the study is to develop automated methods for processing field data to reveal patterns. Python libraries for data analysis, processing, and visualization are used as tools.

Materials and Methods. The research object is described — the Main Building of the Yakutsk Thermal Power Plant (TPP) in permafrost conditions. The study materials include field data obtained from engineering-geological boreholes at the Yakutsk TPP, monitoring stations Chabyda and Tuymaada, as well as a section of the Amur-Yakutsk railway (AYR). The data include measurements of soil temperature and moisture, seasonal thaw layer dynamics, snow cover characteristics, and others. A detailed sequence of automated processing of primary data from XLS files using the pandas library is presented, including reading, cleaning, format conversion, filling or replacing missing values, removing duplicates, and saving processed data in CSV, JSON, and XLSX formats.

Results. Specific results of automated processing and systematization of primary field data are presented. Heterogeneous measurements were successfully unified into a single format, ensuring their proper use. A unique data array was formed based on empirical observations under the specific conditions of the Far North. The practical application of Python libraries for executing key stages of preprocessing and data preparation is demonstrated.

Discussion and Conclusion. It is shown that the application of a systematic approach and automated data processing significantly improves the quality and reliability of natural-technological system data analysis. Handling missing data and normalization enhance accuracy, and the final data formats are convenient for further modeling. The universality of Python is highlighted. Prospects for further research include applying machine learning, clustering, and modeling methods aimed at uncovering patterns and forecasting the behavior of natural-technological systems in the Far North under climate and anthropogenic influences.

Keywords: data analysis, Python libraries, data preparation, data preprocessing, information technologies.

Funding. This work was supported financially by the Russian Science Foundation (grant No. 23–61–10032).

For Citation. Kushukov S.V., Ivanov K.N., Levashkin S.P., Yakobovsky M.V. Automated Processing of Primary Field Data on the Behavior of Natural-Technological Systems under Climate Change and Anthropogenic Impacts in the Far North. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):52–64. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-52-64

Введение. Изучение природно-технических систем (ПТС) в условиях изменения климата и антропогенных воздействий, особенно в сложных условиях Крайнего Севера, представляет собой важную научную задачу. Эти системы формируются в результате взаимодействия природных процессов и технических объектов, а их устойчивость во многом зависит от динамики внешних факторов. Для выявления закономерностей функционирования ПТС и прогнозирования их возможных изменений требуется комплексный анализ данных.

Обработка информации, полученной в ходе натурных исследований, включает несколько этапов: сбор первичных данных, их предварительную обработку, анализ и интерпретацию результатов. Цель данной работы — разработка методов автоматизированной обработки натурных данных, что позволит выявить ключевые тренды и паттерны во взаимодействии природных и техногенных факторов [1–3].

Актуальность исследования обусловлена необходимостью принятия обоснованных решений для обеспечения устойчивого функционирования и управления природно-техническими системами в условиях нарастающего климатического и антропогенного воздействия [2–8].

Вначале представим алгоритмические библиотеки [4], обеспечивающие разнообразные инструменты обработки, анализа и моделирования [5] данных:

• scikit-learn: универсальный инструмент для машинного обучения, охватывающий весь процесс от подготовки данных до оценки моделей. Эта библиотека включает в себя все необходимые функции для решения задач машинного обучения и статистического анализа [9, 10];

• statsmodels: библиотека для оценки статистических моделей, которая предоставляет инструменты для статистических тестов, регрессионного анализа и анализа временных рядов.

Далее перечислим библиотеки визуализации, которые обеспечивают возможности для наглядного представления данных:

• matplotlib: помогает создавать статические, интерактивные и анимационные графики в Python. Обеспечивает обширный арсенал средств для визуализации данных в различных форматах, раскрывая широкий спектр возможностей для наглядного представления информации [11–14];

• seaborn: библиотека визуализации данных, основанная на matplotlib. Предоставляет высокоуровневый интерфейс для создания информативных статистических графиков.

Дополнительно перечислим библиотеки научных вычислений, используемые для математических расчётов и обработки данных:

• pandas: фреймворк, позволяющий обрабатывать и анализировать данные. Предоставляет мощные инструменты, включая структуру данных, например, DataFrame, который упрощает работу с табличными данными. Библиотека находит применение в процессах загрузки, очистки, анализа и подготовки данных перед внедрением их в алгоритмы машинного обучения;

• numpy: библиотека, предназначенная для манипулирования многомерными массивами и матрицами, а также предоставляющая возможность выполнять математические операции над ними. Предлагает разнообразие функций, оптимизированных под эффективную обработку числовых данных.

• scipy: высокоэффективная библиотека для выполнения научных и технических вычислений, которая расширяет функциональность операций оптимизации, интеграции, интерполяции и многих других научных задач.

Материалы и методы

Обзор существующих исследований. В последние годы наблюдается рост интереса к изучению влияния климатических и антропогенных факторов на природно-технические системы. Различные исследования подчеркивают необходимость комплексного подхода к управлению этими системами для обеспечения их устойчивости и функциональности.

Р.С. Рожков и его соавторы в своей работе «Управление природно-техническими системами через концепцию устойчивого развития и приемлемого риска» [15] акцентируют внимание на важности учета экологических, экономических и социальных факторов при управлении ПТС. Авторы предлагают использование системного анализа и оценки рисков для разработки оптимальных стратегий, способствующих снижению антропогенной нагрузки и улучшению экологического состояния окружающей среды.

Н. Дрегуло исследует влияние климатических факторов на эксплуатацию ПТС, связанных с обработкой отходов водоотведения. В работе [16] подчеркивается, что увеличение атмосферных осадков может негативно сказываться на эксплуатационных и природоохранных свойствах таких систем, что требует пересмотра нормативных критериев и адаптации к изменяющимся климатическим условиям.

В статье «Влияние антропогенных факторов на тепловое загрязнение городской среды» [17] рассматривается комплексная оценка воздействия человеческой деятельности на тепловое загрязнение атмосферы. Отмечается, что значительную долю теплового загрязнения вносят теплопотребление и транспорт, что подчеркивает необходимость разработки мер по снижению антропогенного теплового воздействия на урбанизированных территориях.

Исследование, опубликованное на сайте ООО «Биохим-ТЛ», анализирует влияние антропогенных факторов на развитие сельского хозяйства [18]. Особое внимание уделяется изменениям в почвах, вызванным длительным применением удобрений и отходов животноводства, что влияет на экологическое состояние аграрных ландшафтов.

В совокупности эти исследования подчеркивают необходимость комплексного и адаптивного подхода к управлению природно-техническими системами в условиях изменяющегося климата и возрастающего антропогенного воздействия. Учет специфики каждого компонента ПТС и постоянный мониторинг их состояния являются ключевыми элементами для обеспечения их устойчивого функционирования.

Предметная область исследования. Объектом исследования является Главный корпус Якутской ТЭЦ — уникальное инженерное сооружение, построенное в условиях вечной мерзлоты (криолитозоны). Этот объект особенно интересен, потому что он был первым промышленным строением в СССР, возведённым на вечномерзлых грунтах по первому принципу строительства. Это значит, что во время строительства были приняты меры, чтобы сохранить мерзлые грунты в качестве надёжного основания для ТЭЦ. Строительство началось в 1933 году, и в его процессе активно участвовали учёные, специализирующиеся на изучении мерзлоты. В 1937 году ТЭЦ была введена в эксплуатацию и с тех пор обеспечивает Якутск электроэнергией, а с 1961 года — и теплом.

Для того чтобы понять, как ТЭЦ работает в условиях вечной мерзлоты и как на неё влияют различные внешние факторы, была создана расчётная модель. Эта модель охватывает территорию площадью 180×150 метров и глубиной до 30 метров, что позволяет анализировать многолетнемёрзлые породы (ММП), на которых стоит ТЭЦ. Основой для построения модели послужили данные из инженерно-геологических скважин. Эти данные дают возможность определить, как ведут себя грунты при разных температурных и внешних условиях, что крайне важно для обеспечения стабильной работы ТЭЦ.

Особое внимание в исследовании уделено температурному режиму окружающей среды. Были собраны и проанализированы среднемесячные данные о температуре воздуха в районе Якутска за последние 10 лет. Эти данные имеют важное значение для понимания того, как изменяются климатические условия и как эти изменения могут

влиять на состояние мерзлых грунтов и на работу ТЭЦ. Важно отметить, что эти данные отличаются от тех, которые предоставляются управлением гидрометеорологической службы на основе норм с 1966 года. Нормативные данные понимаются как статистические показатели, полученные путём длительного усреднения климатических наблюдений (обычно за 30-летний период). Эти показатели служат эталонными значениями для оценки климатических условий региона. Однако в условиях актуальных климатических изменений такие нормативы, если не обновляются регулярно, могут не отражать современные тенденции и зачастую давать заниженные значения температуры, что ограничивает их применимость при анализе текущего состояния климата.

Для исследования термодинамических процессов в многолетнемёрзлых породах были использованы натурные данные, полученные из инженерно-геологических скважин и стационарных наблюдательных площадок. Эти данные представляют собой детализированные временные ряды, охватывающие многолетние измерения ключевых параметров мерзлотных грунтов в различных районах Якутии.

Данные были собраны с трёх основных источников:

• Якутская ТЭЦ — 8 инженерно-геологических скважин, по которым ведутся систематические измерения температуры и влажности грунтов, а также исследуются литологический состав, физические и теплофизические свойства мерзлых пород;

• Стационары Чабыда и Туймаада — 16 площадок, на которых фиксируются температура и влажность грунтов, сезонная динамика глубины протаивания, межгодовая изменчивость сезонноталого слоя (СТС), высота снежного покрова, плотность снега, а также физико-механические свойства грунтов;

• Железнодорожный участок Амуро-Якутской железнодорожной магистрали — 41 инженерно-геологическая скважина, где собираются данные о температуре и влажности грунтов, изменчивости СТС, высоте снежного покрова и других геокриологических параметрах.

В отличие от обобщённых климатических норм, представленных в официальных источниках, эти данные отражают реальные процессы, происходящие в мерзлотных грунтах, с высокой детализацией по глубине и времени. Это делает их уникальным источником информации для исследования устойчивости природно-технических систем Крайнего Севера в условиях изменения климата и антропогенных воздействий.

Обработка и предварительный анализ данных. Рассмотрим предобработку данных на примере датасета мониторинговых сведений по шестнадцати площадкам Якутии, предоставленных Институтом Мерзлотоведения СО РАН. Каждая площадка содержит свои данные наблюдения. Например, «Площадка 9_Чабыда», содержит сведения о температуре грунтов, влажности, сезонной динамике глубины протаивания, межгодовой изменчивости сезонно-талого слоя, месячной высоты снега, межгодовой динамике плотности снега, сезонной динамике плотности и высоты снежного покрова, литологический разрез, физические и теплофизические свойства напочвенных покровов и грунтов.

Цель исследования — подготовка анализа данных методами машинного обучения и нахождение взаимосвязей между их атрибутами. Следует подчеркнуть, что процессы, которые авторы автоматизируют, обычно выполняются вручную или с использованием интерактивных методов. В результате этого взаимодействия формируются структурированные и подготовленные для анализа наборы данных, преобразованные из исходной информации, предоставленной на начальном этапе.

Структурная схема процесса автоматической обработки данных представлена на рис. 1.

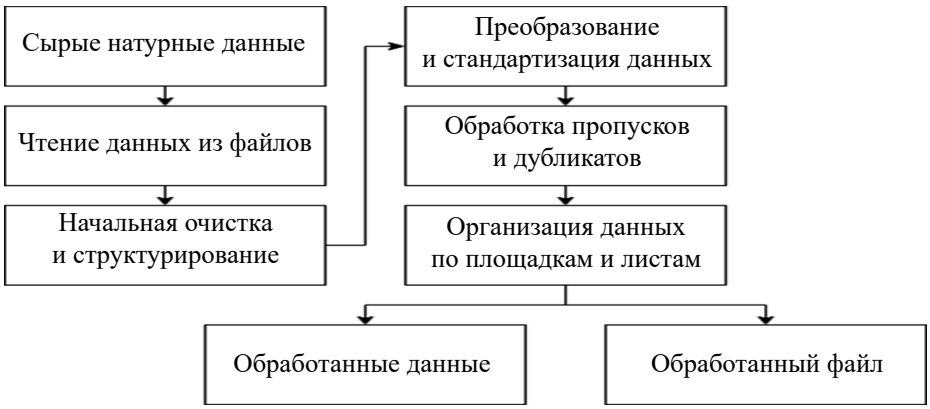


Рис. 1. Структурная схема автоматизированной обработки первичных данных

Для предобработки данных следует выполнить чтение данных из XLS-файла (формат, в котором изначально получены данные мониторинга) и загрузку их в объект DataFrame, используя библиотеку pandas. Этот этап включает в себя обнаружение и обработку пропущенных значений, выбор стратегии заполнения пропусков для столбцов, а также удаление несущественных признаков.

Для анализа датасета следует подготовить все релевантные данные и применить рассмотренные модули Python на практике [7–8]. Первый этап — извлечение данных из XLS-файла. При анализе данных, эффективное хранение и обработка табличных данных являются критическими аспектами.

Получим информацию о количестве файлов по площадкам:

```
def get_excel_files_info(folder_path: str):
""" """
excel_files_info = []
for filename in tqdm(os.listdir(folder_path)):
if filename.endswith('.xls') or filename.endswith('.xlsx'):
file_path = os.path.join(folder_path, filename)
if filename.endswith('.xls'):
xls_workbook = xlrd.open_workbook(file_path)
number_sheets = xls_workbook.nsheets
else:
workbook = load_workbook(file_path)
number_sheets = len(workbook.sheetnames)
name_for_directory, extension = os.path.splitext(filename)
file_info = {
'file_path': file_path,
'name_file': filename,
'type_file': 'xls' if filename.endswith('.xls') else 'xlsx',
'number_sheets': number_sheets,
'name_for_directory': name_for_directory,
}
excel_files_info.append(file_info)
return excel_files_info[::-1]
raw_data = get_excel_files_info(data_cache)
print(f'Number files: {len(raw_data)}\n\nList files:\n')
pprint.pprint(raw_data).
```

После выполнения кода переменная raw_data будет содержать сведения о файлах, которые находятся в директории, что позволяет легко увидеть содержимое этих файлов (рис. 2).

```
Number files: 16

List files:

[{'file_path': '/home/user/data_farm/projects/rnf_yakutia/data_cache/monitoring_data/Площадка '
               'Луг_Туймаада.xlsx',
  'name_file': 'Площадка Луг_Туймаада.xlsx',
  'name_for_directory': 'Площадка Луг_Туймаада',
  'number_sheets': 9,
  'type_file': 'xlsx'},
 {'file_path': '/home/user/data_farm/projects/rnf_yakutia/data_cache/monitoring_data/Площадка '
               'Лес_Туймаада.xlsx',
  'name_file': 'Площадка Лес_Туймаада.xlsx',
  'name_for_directory': 'Площадка Лес_Туймаада',
  'number_sheets': 9,
  'type_file': 'xlsx'},
 {'file_path': '/home/user/data_farm/projects/rnf_yakutia/data_cache/monitoring_data/Площадка '
               '(Скважина) 1_Чабыда.xlsx',
  'name_file': 'Площадка (Скважина) 1_Чабыда.xlsx',
  'name_for_directory': 'Площадка (Скважина) 1_Чабыда',
  'number_sheets': 9,
  'type_file': 'xlsx'},
 {'file_path': '/home/user/data_farm/projects/rnf_yakutia/data_cache/monitoring_data/Площадка '
               '10_Чабыда.xlsx',
  'name_file': 'Площадка 10_Чабыда.xlsx',
  'name_for_directory': 'Площадка 10_Чабыда',
  'number_sheets': 9,
  'type_file': 'xlsx'},
 {'file_path': '/home/user/data_farm/projects/rnf_yakutia/data_cache/monitoring_data/Площадка '
               '11_Чабыда.xlsx',
  'name_file': 'Площадка 11_Чабыда.xlsx',
  'name_for_directory': 'Площадка 11_Чабыда',
  'number_sheets': 9,
  'type_file': 'xlsx'},
 {'file_path': '/home/user/data_farm/projects/rnf_yakutia/data_cache/monitoring_data/Площадка '
```

Рис. 2. Информация о файлах

Проанализируем количество листов данных в каждом датасете:

```
def read_non_empty_excel(file_path, sheet_name):
""" """
df = pd.read_excel(file_path, sheet_name=sheet_name)
return df if not df.empty else None
raw_file = raw_data[15]
state_name = raw_file.get('name_for_directory')
df = pd.ExcelFile(raw_file.get('file_path'))
dfs = {name_sheet: read_non_empty_excel(df, name_sheet) for name_sheet in df.sheet_names
if read_non_empty_excel(df, name_sheet) is not None}
key_list = list(dfs.keys())
print(f'Name file: {state_name}\n\nNumber sheets: {len(key_list)}\n\nNames all sheets in
this file:\n\n{key_list}').
```

После выполнения кода у нас будет информация о количестве листов в датасете, наименование каждого листа, что даст нам возможность обращаться непосредственно к определенному листу по его имени (рис. 3).

```
Name file: Площадка 9_Чабыда

Number sheets: 9

Names all sheets in this file:

['Температура грунтов', 'Влажность грунтов', 'Сезон.дина
м.глубины протаивания', 'Межгодовая изменчивость СТС', 'М
есячная высота снега', 'Межгод.динамика плотн.снега', 'Се
зон.динамика плотн.выс.снега', 'Литологический разрез',
'Физические и теплофизические...']
```

Рис. 3. Вывод информации о листах

Однако следует отметить, что в некоторых датасетах есть ошибки в наименовании листов, которые необходимо исправить, чтобы избежать проблем в дальнейшем анализе:

```
# Ошибки наименований 1
if 'Межгод.динамика плотн.снега' in dfs:
dfs['Межгод.динамика плотн.снега'] = dfs.pop('Межгод.динаика плотн.снега')
if 'Межгод. динамика плотн. снега ' in dfs:
dfs['Межгод.динамика плотн.снега'] = dfs.pop('Межгод. динамика плотн. снега ')
if 'Межгод.динамика плотн. снега' in dfs:
dfs['Межгод.динамика плотн.снега'] = dfs.pop('Межгод.динамика плотн. снега')
# Ошибки наименований 2
if 'Сезон. динам. глубины протаивая' in dfs:
dfs['Сезон.динам.глубины протаивания'] = dfs.pop('Сезон. динам. глубины протаивая')
if 'Сезон.динам глубины протаивания' in dfs:
dfs['Сезон.динам.глубины протаивания'] =  dfs.pop('Сезон.динам глубины протаивания')
if 'Сезон. динам. плот. выс. снега'in dfs:
dfs['Сезон.динамика плотн.выс.снега'] = dfs.pop('Сезон. динам. плот. выс. снега')
if 'Сезон.динамика плотн.выс. снега' in dfs:
dfs['Сезон.динамика плотн.выс.снега'] = dfs.pop('Сезон.динамика плотн.выс. снега')
# Ошибки наименований 3
if 'Физические и теплофизические...' in dfs:
dfs['Физические и теплофизические'] = dfs.pop('Физические и теплофизические...')
if 'Физические и еплофизические...' in dfs:
dfs['Физические и теплофизические'] = dfs.pop('Физические и еплофизические...')
key_list = list(dfs.keys())
print(f'Update sheets names:\n\n{key_list}').
```

После выполнения кода все наименования листов в документе стали корректными (рис. 4).

```
Update sheets names:

['Температура грунтов', 'Влажность грунтов', 'Сезон.дина
м.глубины протаивания', 'Межгодовая изменчивость СТС', 'М
есячная высота снега', 'Межгод.динамика плотн.снега', 'Се
зон.динамика плотн.выс.снега', 'Литологический разрез',
'Физические и теплофизические']
```

Рис. 4. Обновленные наименования листов

Теперь можно приступать к обработке непосредственно самих листов excel-файла.

Первым листом является «Температура грунтов», который содержит информацию о дате и глубины замера, а также непосредственно сами значения замеров (рис. 5).

	Температура грунтов, oC	Unnamed: 1	Unnamed: 2	Unnamed: 3	Unnamed: 4	Unnamed: 5	Unnamed: 6	Unnamed: 7	Unnamed: 8	Unnamed: 9	Unnamed: 10	Unnamed: 11	Ur
0	NaN	Глубина, м	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	
1	Дата	0	п/п	0.15	0.3	0.5	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	3.00	
2	1985-06-01 00:00:00	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	-2.1	NaN	NaN	NaN	-2.8	-3.00	
3	1985-06-05 00:00:00	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	-2.2	NaN	NaN	NaN	-2.8	-2.90	
4	1985-06-10 00:00:00	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	-1.5	NaN	NaN	NaN	-2.3	-2.70	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	

Рис. 5. Лист «Температура грунтов»

Для успешной обработки данных необходимо учитывать особенности их представления. В частности, в некоторых записях столбца, содержащего глубину залегания термодатчиков, встречается обозначение «п/п». Оно не является отсутствующим значением NaN (Not a Number), а представляет собой специальную метку, указывающую на размещение датчика непосредственно под снежным покровом. В процессе подготовки данных «п/п» следует заменить на соответствующие числовые значения глубины в соответствии с характеристиками площадок.

Следует также учитывать, что в таблице встречаются пропущенные значения, обозначенные как NaN. В данном контексте NaN означает отсутствие измерения конкретного параметра в заданный момент времени на определенной глубине. Дополнительно требуется привести столбец, содержащий даты, к единому формату, а также проверить данные на наличие дублирующихся записей и удалить их в случае обнаружения. Для этого был написан универсальный код, который выполняет все вышеперечисленное и подходит для всех листов «Температура грунтов» в датасете в целом:

```
   df1 = dfs['Температура грунтов']
   # Словарь для замены значений «п/п» у определенных площадок
   dict_pp_values = {'Площадка 9_Чабыда': 0.08,
                     'Площадка 10_Чабыда': 0.03,
                     'Площадка 11_Чабыда': 0.02}
   if state_name in dict_pp_values:
   df1.replace({'п/п': dict_pp_values[state_name]}, inplace=True)
   dict_pkr_values = {'Площадка 8_Чабыда': 0.06}
   if state_name in dict_pkr_values:
   df1.replace({'под пкр': dict_pkr_values[state_name]}, inplace=True)
   date_indices = df1[df1.apply(lambda row: row.astype(str).str.contains('Дата').any(),
axis=1)].index[1:]
   df1 = df1.drop(date_indices)
   df1 = df1.iloc[1:]
   df1 = df1.reset_index(drop=True)
   df1.columns = df1.iloc[0]
   df1 = df1.iloc[1:]
   df1 = df1.reset_index(drop=True)
   df1 = df1.rename(columns={'Дата ': 'Дата'})
   df1['Дата'] = pd.to_datetime(df1['Дата'])
   for column in df1.columns:
```

```
if column != 'Дата':
df1[column] = df1[column].astype(float)
def drop_duplicate(df, sort_columns):
""" Remove duplicate rows and sort the dataframe. """
duplicate_df = df[df.duplicated()]
if not duplicate_df.empty:
print(f'Duplicate rows :\n{duplicate_df}\n')
df = df.drop_duplicates(keep='last')
else:
print('Duplicate rows if not found')
df = df.sort_values(by=sort_columns)
df = df.reset_index(drop=True)
return df
df1 = drop_duplicate(df1, 'Дата')
df1.
```

После выполнения кода переменная df1 содержит обработанный лист «Температура грунтов», который легко читается и воспринимается человеком (рис. 6).

	Дата	0	0.08	0.15	0.3	0.5	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
0	1985-06-01	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	-2.1	NaN	NaN	NaN	-2.8	-3.00	NaN	-2.8	-1.7	-1.6	-1.4	-1.4	-1.4
1	1985-06-05	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	-2.2	NaN	NaN	NaN	-2.8	-2.90	NaN	-2.8	-1.6	-1.6	-1.4	-1.4	-1.4
2	1985-06-10	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	-1.5	NaN	NaN	NaN	-2.3	-2.70	NaN	-2.8	-1.7	-1.6	-1.5	-1.5	-1.4
3	1985-06-15	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	-1.3	NaN	NaN	NaN	-2.5	-2.70	NaN	-2.7	-1.6	-1.6	-1.5	-1.5	-1.4
4	1985-06-19	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	-1.1	NaN	NaN	NaN	-2.4	-2.70	NaN	-2.7	-1.6	-1.6	-1.5	-1.5	-1.4
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
497	2022-08-19	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	4.1	NaN	NaN	NaN	-1.2	-1.60	-2.1	-2.5	-2.7	-2.5	-2.4	-2.4	NaN
498	2022-09-18	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	1.9	NaN	NaN	NaN	-0.9	-1.30	-1.8	-2.2	-2.4	-2.3	-2.3	-2.5	NaN
499	2022-10-18	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	0.7	NaN	NaN	NaN	0.9	0.60	0.0	-0.2	-0.3	-0.3	-0.4	-0.4	NaN
500	2022-11-16	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	-1.5	NaN	NaN	NaN	-0.1	0.00	0.0	-0.2	-0.3	-0.3	-0.4	-0.4	NaN
501	2022-12-14	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	-5.3	NaN	NaN	NaN	-1.1	-0.04	-0.1	-0.2	-0.3	-0.3	-0.3	-0.4	NaN

502 rows × 19 columns

Рис. 6. Обработанные данные листа «Температура грунтов»

Второй лист «Влажность грунтов» содержит аналогичную информацию, что и в листе «Температура грунтов». Однако, необходимо выполнить большее количество преобразований, таких как удаление пустых строк, переименование столбца «Дата определения» в «Дата» и преобразования их в формат даты, а также заменить буквенные значения «Лед» на числовые, выполнить поиск дубликатов и их удаление (рис. 7).

	Влажность грунтов, %	Unnamed: 1	Unnamed: 2	Unnamed: 3	Unnamed: 4	Unnamed: 5	Unnamed: 6	Unnamed: 7	Unnamed: 8	Unnamed: 9	...	Unnamed: 17	Unnamed: 18	Unnamed: 19	Unnamed: 20
0	NaN	Глубина, м	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	...	NaN	NaN	NaN	NaN
1	Дата определения	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	...	1.6	1.7	1.8	1.9
2	1985-06-09 00:00:00	31.5	22.9	15.6	19.6	20.0	16.0	16.7	17.0	19.6	...	27.4	33.0	30.5	44.2
3	1985-08-30 00:00:00	46.4	17.4	16.0	NaN	12.8	NaN	8.7	NaN	11.2	...	NaN	NaN	NaN	NaN
4	1985-09-16 00:00:00	35	9.7	7.5	NaN	12.6	NaN	13.9	NaN	10.0	...	NaN	NaN	NaN	NaN
5	1986-06-16 00:00:00	21.9	19.4	14.2	15.2	20.9	NaN	19.4	NaN	NaN	...	NaN	NaN	NaN	NaN
6	1986-07-17 00:00:00	12.3	13.8	15.3	18.9	18.6	NaN	15.8	NaN	22.9	...	NaN	NaN	NaN	NaN
7	1986-08-27 00:00:00	7.8	5.8	6.6	12.2	15.2	15.2	11.7	NaN	14.4	...	NaN	NaN	NaN	NaN
8	1986-09-28 00:00:00	23.2	16.1	17.2	13.7	13.4	16.0	17.9	NaN	18.8	...	NaN	NaN	NaN	NaN
9	1990-10-02 00:00:00	16.1	11.2	10.8	NaN	16.3	NaN	20.4	NaN	23.0	...	28.6	NaN	NaN	NaN
10	1991-04-04 00:00:00	48.5	22.5	22.4	NaN	21.5	NaN	26.0	NaN	28.9	...	46.1	NaN	NaN	NaN
11	2002-09-13 00:00:00	NaN	NaN	15.8	NaN	11.5	NaN	12.0	NaN	8.3	...	NaN	NaN	NaN	NaN

12 rows × 27 columns

Рис. 7. Лист «Влажность грунтов»

Для этого был написан код, который выполняет все эти преобразования для листов «Влажность грунтов»:

```
   df2 = dfs['Влажность грунтов']
   df2 = df2.iloc[1:]
   df2 = df2.reset_index(drop=True)
   df2.columns = df2.iloc[0]
   df2 = df2.iloc[1:]
   df2 = df2.reset_index(drop=True)
   df2 = df2.rename(columns={'Дата определения': 'Дата'})
   df2 = df2.dropna(how='all')
   df2 = df2.dropna(thresh=2)
   if state_name == 'Площадка Лес_Туймаада':
   df2['Дата'] = df2['Дата'].astype(str)
   df2['Скважена'] = df2['Дата'].apply(lambda x: 1 if '*' in x else 2)
   df2['Дата'] = df2['Дата'].astype(str).str.replace(' *', '')
   df2['Дата'] = df2['Дата'].astype(str).str.replace('*', '')
   df2['Дата'] = df2['Дата'].apply(lambda x: x + ' 00:00:00' if len(x) == 10 else x)
   for index, row in df2.iterrows():
   try:
   df2.at[index, 'Дата'] = pd.to_datetime(row['Дата'], format='%d.%m.%Y %H:%M:%S').
strftime('%Y-%m-%d %H:%M:%S')
   except ValueError:
   pass
   if state_name == 'Площадка Луг_Туймаада':
   df2['Дата'] = df2['Дата'].astype(str)
   df2 = df2[~df2['Дата'].str.contains('Дата')]
   def fill_skvazhena(row):
   if '*' in row['Дата']:
   return '2'
   elif row['Дата'].count(' ') == 0 and not row['Дата'].isdigit():
   return '3'
   else:
   return '1'
   df2['Скважена'] = df2.apply(fill_skvazhena, axis=1)
   df2['Дата'] = df2['Дата'].astype(str).str.replace(' *', '')
   df2['Дата'] = df2['Дата'].astype(str).str.replace('*', '')
   df2['Дата'] = df2['Дата'].apply(lambda x: x + ' 00:00:00' if len(x) == 10 else x)
   for index, row in df2.iterrows():
   try:
   df2.at[index, 'Дата'] = pd.to_datetime(row['Дата'], format='%d.%m.%Y %H:%M:%S').
strftime('%Y-%m-%d %H:%M:%S')
   except ValueError:
   pass
   months_dict = {'Январь': 'January',
                  'Февраль': 'February',
                  'Март': 'March',
                  'Апрель': 'April',
                  'Май': 'May',
                  'Июнь': 'June',
                  'Июль': 'July',
                  'Август': 'August',
                  'Сентябрь': 'September',
                  'Октябрь': 'October',
                  'Ноябрь': 'November',
                  'Декабрь': 'December'}
   months_dict_number = {'January': '01',
                         'February': '02',
                         'March': '03',
                         'April': '04',
                         'May': '05',
```

```
                    'June': '06',
                    'July': '07',
                    'August': '08',
                    'September': '09',
                    'October': '10',
                    'November': '11',
                    'December': '12'}
df2['Год'] = np.where(df2['Скважена'] == '3', '1979', np.nan)
df2['Дата'].replace(months_dict, inplace=True, regex=True)
df2['Дата'].replace(months_dict_number, inplace=True, regex=True)
df2.loc[df2['Скважена'] == '3', 'Дата'] = df2['Год'] + '-' + df2['Дата'] + '-01 00:00:00'
df2 = df2.drop(['Год'], axis=1)
df2 = df2.sort_values(by='Дата')
df2 = df2.reset_index(drop=True)
df2['Дата'] = pd.to_datetime(df2['Дата'])
# Замена значения «Лед» на «-1.0»
df2.replace('Лед', -1.0, inplace=True)
for column in df2.columns:
if column != 'Дата':
df2[column] = df2[column].astype(float)
if 'Скважена' in df2.columns:
df2['Скважена'] = df2['Скважена'].astype(int)
df2 = drop_duplicate(df2, 'Дата').
```

После выполнения кода переменная df2 хранит обработанный лист «Влажность грунтов», представленный в читаемом для человека виде (рис. 8).

	Дата	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	...	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
0	1985-06-09	31.5	22.9	15.6	19.6	20.0	16.0	16.7	17.0	19.6	...	27.4	33.0	30.5	44.2	71.1	31.4	28.3	18.5	19.2	20.9
1	1985-08-30	46.4	17.4	16.0	NaN	12.8	NaN	8.7	NaN	11.2	...	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
2	1985-09-16	35.0	9.7	7.5	NaN	12.6	NaN	13.9	NaN	10.0	...	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
3	1986-06-16	21.9	19.4	14.2	15.2	20.9	NaN	19.4	NaN	NaN	...	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
4	1986-07-17	12.3	13.8	15.3	18.9	18.6	NaN	15.8	NaN	22.9	...	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
5	1986-08-27	7.8	5.8	6.6	12.2	15.2	15.2	11.7	NaN	14.4	...	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
6	1986-09-28	23.2	16.1	17.2	13.7	13.4	16.0	17.9	NaN	18.8	...	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
7	1990-10-02	16.1	11.2	10.8	NaN	16.3	NaN	20.4	NaN	23.0	...	28.6	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
8	1991-04-04	48.5	22.5	22.4	NaN	21.5	NaN	26.0	NaN	28.9	...	46.1	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
9	2002-09-13	NaN	NaN	15.8	NaN	11.5	NaN	12.0	NaN	8.3	...	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN

10 rows × 27 columns

Рис. 8. Обработанные данные листа «Влажность грунтов»

Подобным образом были обработаны оставшиеся семь листов по «Площадка 9_Чабыда» и остальные пятнадцать площадок по девять листов с данными в каждой из них. Для сохранения результатов проделанной работы была написана функция, которая создает директорию с подкаталогами для хранения обработанных данных по площадкам и соответствующим им листам (рис. 9) в таких форматах как CSV (Comma-Separated Values) — это один из наиболее распространенных форматов для представления табличной информации, простой и универсальный формат, который используется для хранения данных в виде текстовых файлов, основанный на разделении значений запятыми; JSON (JavaScript Object Notation) — стандартный текстовый формат для хранения и передачи структурированных данных; XLSX — это формат файла Microsoft Excel, который используется для хранения электронных таблиц.

```
 11%|███                                          | 1/9 [00:00<00:00,  9.31it/s]
Directory /home/user/data_farm/projects/rnf_yakutia/data/monitoring_data/Площадка 9_Чабыда/csv/ create
Directory /home/user/data_farm/projects/rnf_yakutia/data/monitoring_data/Площадка 9_Чабыда/json/ create
Directory /home/user/data_farm/projects/rnf_yakutia/data/monitoring_data/Площадка 9_Чабыда/xlsx/ create
100%|██████████████████████████████████████████| 9/9 [00:00<00:00, 42.49it/s]
```

Рис. 9. Сохранение обработанных данных в форматах CSV, JSON, XLSX

Также был написан код, который создает XLSX файл с общей информацией по площадкам:

```
xlsx_files = [f for f in os.listdir(f'{folder_path}/xlsx/') if f.endswith(«.xlsx»)]
xlsx_dfs = {}
# Чтение данных из каждого файла и добавление в словарь
for file in xlsx_files:
file_path = os.path.join(f'{folder_path}/xlsx/', file)
xl = pd.ExcelFile(file_path)
for sheet_name in xl.sheet_names:
df = xl.parse(sheet_name)
if sheet_name not in xlsx_dfs:
xlsx_dfs[sheet_name] = []
xlsx_dfs[sheet_name].append(df)
with pd.ExcelWriter(f'{folder_path}/xlsx/{state_name}.xlsx', engine='xlsxwriter') as writer:
for sheet_name, dataframes in xlsx_dfs.items():
for i, df in enumerate(dataframes):
df.to_excel(writer, sheet_name=sheet_name, index=False).
```

После его выполнения, появляется файл с итоговой информацией по каждой из площадок (рис. 10).

Площадка	Широта_дмс	Долгота_дмс	Широта_дд	Долгота_дд	Количество_метрик	Тип_местности	Условия	Первая_дата	Последняя_дата
Площадка Лут_Туйм...	62° 00' 49" с.ш.	129° 39' 24" в.д.	62.0136	129.6567	9		Сливающейся мерзл...	1967-08-14	2022-12-14
Площадка Лес_Туйм...	61° 00' 46" с.ш.	129° 39' 11" в.д.	61.0128	129.6531	8		Сливающейся мерзл...	1967-08-16	2022-12-14
Площадка (Скважин...	61° 57' 27" с.ш.	129° 24' 50" в.д.	61.9575	129.4139	9	Мелкодолинный	Сливающейся и не с...	1980-09-12	2022-12-14
Площадка 10_Чабыда	61° 57' 10" с.ш.	129° 25' 46" в.д.	61.9528	129.4294	9	Склонный	Сливающейся и не с...	1982-11-01	2022-12-14
Площадка 11_Чабыда	61° 57' 00" с.ш.	129° 25' 48" в.д.	61.9500	129.4300	9	Склонный	Сливающейся и не с...	1982-11-01	2022-12-14
Площадка 3_Чабыда	61° 57' 36" с.ш.	129° 24' 53" в.д.	61.9600	129.4147	9	Склонный	Сливающейся и не с...	1981-01-01	1989-01-01
Площадка 3а_Чабыда	61° 57' 26" с.ш.	129° 25' 17" в.д.	61.9572	129.4214	9	Склонный	Сливающейся и не с...	1982-11-01	2022-12-14
Площадка 4_Чабыда	61° 57' 24" с.ш.	129° 25' 27" в.д.	61.9567	129.4242	9	Склонный	Сливающейся и не с...	1980-07-02	1989-01-01
Площадка 5_Чабыда	61° 57' 28" с.ш.	129° 25' 03" в.д.	61.9578	129.4175	9	Склонный	Сливающейся и не с...	1980-07-02	2022-12-14
Площадка 6_Чабыда	61° 57' 36" с.ш.	129° 24' 53" в.д.	61.9600	129.4147	9	Склонный	Сливающейся и не с...	1982-10-01	1992-04-01
Площадка 6б_Чабыда	61° 57' 24" с.ш.	129° 25' 27" в.д.	61.9567	129.4242	9	Склонный	Сливающейся и не с...	1982-11-01	2022-12-14
Площадка 7_Чабыда	61° 57' 36" с.ш.	129° 24' 53" в.д.	61.9600	129.4147	9	Склонный	Сливающейся и не с...	1982-10-01	1991-04-02
Площадка 7б_Чабыда	61° 57' 26" с.ш.	129° 25' 17" в.д.	61.9572	129.4214	9	Склонный	Сливающейся и не с...	1982-11-01	2022-12-14
Площадка 8_Чабыда	61° 57' 17" с.ш.	129° 25' 13" в.д.	61.9547	129.4203	9	Мелкодолинный	Сливающейся и не с...	1982-10-01	2022-12-14
Площадка 8а_Чабыда	61° 57' 14" с.ш.	129° 25' 09" в.д.	61.9540	129.4192	9	Мелкодолинный	Сливающейся и не с...	1982-11-01	2022-12-14
Площадка 9_Чабыда	61° 57' 03" с.ш.	129° 05' 56" в.д.	61.9508	129.0989	9	Склонный	Сливающейся и не с...	1982-11-01	2022-12-14

Рис. 10. Файл с общей информацией по площадкам

Результаты исследования. Обработка и систематизация данных позволили привести разрозненные измерения к единому формату, обеспечивая их корректное использование в дальнейших расчетах. В результате получен уникальный массив данных, не имеющий аналогов, поскольку он основан на непосредственных эмпирических наблюдениях и охватывает специфические условия изучаемой территории.

Анализ данных с Python является востребованным навыком в современном мире. Этот язык отличается относительной простотой в изучении, что обеспечивает его доступность для начинающих. В работе были рассмотрены основные этапы обработки данных с использованием библиотек Python: предобработка и подготовка данных. На примере датасета «Площадка 9_Чабыда» были продемонстрированы основные приемы предобработки данных, такие как обнаружение и обработка пропущенных значений, трансформация данных, оптимизация, а также удаление несущественных атрибутов.

Обсуждение и заключение. Результаты показывают, что использование системного подхода к обработке данных позволяет значительно повысить качество и надежность анализа. Устранение пропусков и нормализация данных улучшает точность самих данных. Итоговая обработка данных предоставляет удобные форматы для последующего использования в моделировании, включая форматы CSV, JSON и XLSX. Это демонстрирует универсальность применения Python в решении задач обработки данных.

В дальнейшем планируется расширить исследования, включив в них методы анализа данных, такие как кластеризация, построение моделей машинного обучения и визуализация результатов [12, 14, 19]. Эти методы позволят не только выявить скрытые закономерности в данных, но и предсказать поведение природно-технических систем при изменении внешних условий. Особое внимание будет уделено моделированию воздействия климатических факторов и антропогенной нагрузки на ПТС, что обеспечит более полное понимание процессов, происходящих в условиях Крайнего Севера.

Список литературы / References

1. Поручиков М.А. *Анализ данных.* Самара: издательство Самарского университета; 2016. 88 с.

Poruchikov M. A. *Data analysis*. Samara: Samara University Press; 2016. 88 p. (In Russ.)

2. *Введение в анализ данных*. URL: https://mipt-stats.gitlab.io/courses/ad_fivt/titanik.html (дата обращения: 08.08.2024).

Introduction to Data Analysis. URL: https://mipt-stats.gitlab.io/courses/ad_fivt/titanik.html (accessed: 08.08.2024)

3. Лесковец Ю. *Анализ больших наборов данных*. Москва: ДМК; 2016. 498 с.

Leskovec Yu. *Analysis of Large Datasets.* Moscow: DMK; 2016. 498 p. (In Russ.)

4. МакКинли У. *Python и анализ данных*. Москва: ДМК; 2015. 482 с.

McKinney W. *Python and Data Analysis*. Moscow: DMK; 2015. 482 p. (In Russ.)

5. Макшанов А.В. *Технологии интеллектуального анализа данных*. Санкт-Петербург: Лань; 2018. 212 с.

Makshanov A.V. *Data Mining Technologies*. Saint Petersburg: Lan; 2018. 212 p. (In Russ.)

6. Миркин Б.Г. *Введение в анализ данных*. Люберцы: Юрайт; 2016. 174 с.

Mirkin B.G. *Introduction to Data Analysis*. Lyubertsy: Yurayt; 2016. 174 p. (In Russ.)

7. Рафалович В. *Data mining, или интеллектуальный анализ данных для занятых. Практический курс*. Москва: SmartBook; 2018. 352 с.

Rafalovich V. *Data Mining, or Data Analysis for the Busy: Practical Course*. Moscow: SmartBook; 2018. 352 p. (In Russ.)

8. Чашкин Ю.Р. *Математическая статистика. Анализ и обработка данных*. Ростов-на-Дону: Феникс; 2017. 236 с.

Chashkin Yu.R. *Mathematical Statistics. Data Analysis and Processing*. Rostov-on-Don: Feniks; 2017. 236 p. (In Russ.)

9. Грон А. *Машинное обучение и анализ данных с помощью Python*. Санкт-Петербург: Питер; 2019. 460 с.

Gron A. *Machine Learning and Data Analysis with Python*. Saint Petersburg: Piter; 2019. 460 p. (In Russ.)

10. Воронцов К.В. *Машинное обучение и интеллектуальный анализ данных*. Москва: издательство МФТИ; 2018. 328 с.

Vorontsov K.V. *Machine Learning and Data Mining*. Moscow: MIPT Publishing; 2018. 328 p. (In Russ.)

11. Алгозина Е.Р. *Обработка и анализ данных с Python и Pandas. Руководство для начинающих*. Москва: ДМК; 2020. 312 с.

Algozina E.R. *Data Processing and Analysis with Python and Pandas: Beginner's Guide*. Moscow: DMK; 2020. 312 p. (In Russ.)

12. Троян И.В. *Анализ данных и машинное обучение на Python*. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург; 2019. 320 с.

Troyan I.V. *Data Analysis and Machine Learning in Python*. Saint Petersburg: BHV-Peterburg; 2019. 320 p. (In Russ.)

13. МакКинли У. *Программирование на Python и анализ данных*. Санкт-Петербург: Питер; 2020. 504 с.

McKinney W. *Python Programming and Data Analysi*s. Saint Petersburg: Piter; 2020. 504 p. (In Russ.)

14. Мюллер А.К., Гвидо С. *Введение в машинное обучение с Python*. Санкт-Петербург: Питер; 2017. 420 с.

Mueller A.C., Guido S. *Introduction to Machine Learning with Python*. Saint Petersburg: Piter; 2017. 420 p. (In Russ.)

15. Рожков Р. С., Молчанова Е. С., Фадеев М. К., Пименов Н. А. Управление природно-техническими системами через концепцию устойчивого развития и приемлемого риска. *Вестник евразийской науки*. 2024;16(5):1–10.

Rozhkov R.S., Molchanova E.S., Fadeev M.K., Pimenov N.A. Managing Natural-Technical Systems through the Concept of Sustainable Development and Acceptable Risk. *Bulletin of Eurasian Science*. 2024;16(5):1–10. (In Russ.)

16. Дрегуло Н. *Влияние климатических факторов на эксплуатацию ПТС, связанных с обработкой отходов водоотведения.* URL: https://pureportal.spbu.ru/ru/publications/---------%28a9c91d8e-c5e0-43d9-98b5-8aac39cc4a61%29.html (дата обращения: 13.01.2025)

Dregulo N. Influence of Climatic Factors on the Operation of Natural-Technical Systems for Wastewater Treatment. URL: https://pureportal.spbu.ru/ru/publications/---------%28a9c91d8e-c5e0-43d9-98b5-8aac39cc4a61%29.html (accessed: 13.01.2025) (In Russ.)

17. Влияние антропогенных факторов на тепловое загрязнение городской среды. URL: https://www.abok.ru/for_spec/articles.php?nid=7635 (дата обращения: 13.01.2025).

Impact of Anthropogenic Factors on Thermal Pollution of the Urban Environment. URL: https://www.abok.ru/for_spec/articles.php?nid=7635 (accessed: 13.01.2025) (In Russ.)

18. Влияние антропогенных факторов на развитие сельского хозяйства. URL: https://biohim.com.ru/articles/page2 (дата обращения: 13.01.2025).

Impact of Anthropogenic Factors on Agricultural Development. URL: https://biohim.com.ru/articles/page2 (accessed: 13.01.2025) (In Russ.)

19. Левашкин С.П., Иванов К.Н., Кушуков С.В. Ферма данных: информационная система сбора, хранения и обработки неструктурированных данных из разнородных источников. *Труды Института системного программирования РАН*. 2023;35(2):57–72. https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2023-35(2)-5

Levashkin S.P., Ivanov K.N., Kushukov S.V. Data Farm: An Information System for Collecting, Storing, and Processing Unstructured Data from Heterogeneous Sources. *Proceedings of the Institute for System Programming of the RAS (Proceedings of ISP RAS)*. 2023;35(2):57–72. https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2023-35(2)-5 (In Russ.)

Об авторах:

Сергей Владимирович Кушуков, инженер Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, Научно-исследовательской лаборатории «Искусственный интеллект» (443090, Российская Федерация, г. Самара, Московское ш., 77), ORCID, SPIN-код, s.kushukov@psuti.ru

Константин Николаевич Иванов, инженер Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, Научно-исследовательской лаборатории «Искусственный интеллект» (443090, Российская Федерация, г. Самара, Московское ш., 77), ORCID, SPIN-код, k.ivanov@psuti.ru

Сергей Павлович Левашкин, кандидат физико-математических наук, доцент Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, заведующий Научно-исследовательской лаборатории «Искусственный интеллект» (443090, Российская Федерация, г. Самара, Московское ш., 77), ORCID, SPIN-код, ai_lab@psuti.ru

Михаил Владимирович Якобовский, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, директор Института прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН (ИПМ РАН), (125047, Российская Федерация, г. Москва, Миусская пл., 4), ORCID, SPIN-код, lira@imamod.ru

Заявленный вклад авторов:

С.В. Кушуков: разработка, тестирование существующих компонентов кода; написание черновика рукописи.
К.Н. Иванов: формальный анализ.
С.П. Левашкин: постановка задачи; формулировка идей исследования, целей и задач.
М.В. Якобовский: рецензирование и редактирование рукописи.

Конфликт интересов: ***авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.***

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Sergey V. Kushukov, Engineer, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Research Laboratory “Artificial Intelligence” (77, Moskovskoe Shosse, Samara, 443090, Russian Federation), ORCID, SPIN-code, s.kushukov@psuti.ru

Konstantin N. Ivanov, Engineer, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Research Laboratory “Artificial Intelligence” (77, Moskovskoe Shosse, Samara, 443090, Russian Federation), ORCID, SPIN-code, k.ivanov@psuti.ru

Sergey P. Levashkin, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Head of Research Laboratory “Artificial Intelligence” (77, Moskovskoe Shosse, Samara, 443090, Russian Federation), ORCID, SPIN-code, ai_lab@psuti.ru

Mikhail V. Yakobovskiy, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Director, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences (IPM RAS), (4, Miusskaya pl., Moscow, 125047, Russian Federation), ORCID, SPIN-code, lira@imamod.ru

Contributions of the authors:

S.V. Kushukov: development, testing of existing code components; writing a draft of a manuscript.
K.N. Ivanov: formal analysis.
S.P. Levashkin: problem statement; formulation of research ideas; goals and objectives.
M.V. Yakobovskiy: review and editing of the manuscript.

Conflict of Interest Statement: **the authors declare no conflict of interest.**

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 15.05.2025
Поступила после рецензирования / Revised 02.06.2025
Принята к публикации / Accepted 18.06.2025