

Computational Mathematics and Information Technologies

Вычислительная
математика /
Computational
Mathematics

Математическое
моделирование /
Mathematical Modelling

Информационные
технологии /
Information Technologies





Computational Mathematics and Information Technologies

Рецензируемый научно-теоретический журнал

eISSN 2587–8999

Издается с 2017 года

Периодичность — 4 выпуска в год

DOI: 10.23947/2587–8999

Учредитель и издатель — Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ), г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Журнал «Computational Mathematics and Information Technologies» публикует обзоры, оригинальные статьи и краткие сообщения, посвященные математическому моделированию, численным методам и информационным технологиям для решения сложных и актуальных проблем науки и современной технологии. Область применения исследований — это механика сплошных сред, гидроаэродинамика, науки о Земле, химия, биология, обработка изображений и распознавание образов, теория параллельных вычислений и ее приложения, технологии больших баз данных и искусственного интеллекта и т. д.

Журнал «Computational Mathematics and Information Technologies» принимает к публикации научные и обзорные статьи в соответствии с разделами:

1. Вычислительная математика
2. Математическое моделирование
3. Информационные технологии

<i>Регистрация:</i>	Свидетельство о регистрации средства массовой информации ЭЛ № ФС 77 – 66529 от 21 июля 2016 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций
<i>Индексация и архивация:</i>	РИНЦ, CrossRef, CyberLeninka
<i>Сайт:</i>	https://cmit-journal.ru
<i>Адрес редакции:</i>	344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1
<i>E-mail:</i>	CMIT-EJ@yandex.ru
<i>Телефон:</i>	+7 (863) 273–85–14
<i>Дата выхода</i> <i>№ 3, 2025 в свет:</i>	30.09.2025





Computational Mathematics and Information Technologies

Peer-reviewed scientific and theoretical journal

eISSN 2587–8999

Published since 2017

Periodicity — 4 issues per year

DOI: 10.23947/2587–8999

Founder and Publisher — Don State Technical University (DSTU), Rostov-on-Don, Russian Federation

The journal “Computational Mathematics and Information Technologies” publishes reviews, original articles and short reports on mathematical modeling, numerical methods and information technologies for solving complex and topical problems of science and modern technology. Research areas include continuum mechanics, fluid dynamics, Earth sciences, chemistry, biology, image processing and pattern recognition, parallel computing theory and its applications, big database and artificial intelligence technologies, etc.

The journal “Computational Mathematics and Information Technologies” accepts scientific and review articles for publication in accordance with the sections:

1. Computational Mathematics
2. Mathematical Modelling
3. Information Technologies

Registration: Mass media registration certificate ЭЛ № ФС 77–66529 dated July 21, 2016 issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media

Indexing and Archiving: RISC, Crossref, Cyberleninka

Website: <https://cmit-journal.ru>

Address of the Editorial Office: 1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation

E-mail: CMIT-EJ@yandex.ru

Telephone: +7 (863) 273–85–14

Date of publication 30.09.2025

No. 3, 2025:



Редакционная коллегия

Главный редактор, Сухинов Александр Иванович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [MathSciNet](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#), sukhinov@gmail.com, spu-40.4@donstu.ru

Заместитель главного редактора, Якобовский Михаил Владимирович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), [ScopusID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Ответственный секретарь, Петров Александр Пхоун Чжо, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (Москва, Российская Федерация), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#), [ИСТИНА](#)

Алексеевко Елена В., кандидат физико-математических наук, PhD, профессор, Университет Литораль Кот д'Опаль, (Булонь-сюр-Мер, Франция), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [ORCID](#)

Воеводин Владимир Валентинович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Москва, Российская Федерация), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Гасилов Владимир Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Гущин Валентин Анатольевич, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт автоматизации проектирования РАН (Москва, Российская Федерация), [ScopusID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Зиканов Олег Юрьевич, кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Университет штата Мичиган-Дирборн (Дирборн, Соединенные Штаты Америки), [ORCID](#), [SPIN-код](#)

Лазарева Галина Геннадьевна, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор РАН, Российский университет дружбы народов (Москва, Российская Федерация), [ScopusID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Петров Игорь Борисович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Московский физико-технический институт (государственный университет) (Москва, Российская Федерация), [ScopusID](#), [SPIN-код](#)

Поляков Сергей Владимирович, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), [ScopusID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Семенов Алексей Львович, доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН, академик РАО, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Москва, Российская Федерация), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Тишкин Владимир Федорович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-код](#)

Четверушкин Борис Николаевич, академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор, научный руководитель Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Чехонин Константин Александрович, доктор физико-математических наук, доцент, зам. директора Института прикладной математики ДВО РАН, руководитель (директор) Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН (Хабаровск, Российская Федерация), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Чистяков Александр Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Шамолин Максим Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Москва, Российская Федерация), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-код](#), [ORCID](#)

Эфендиев Ялчин, PhD, профессор, Техасский университет А&М (Колледж-Стейшен, Соединенные Штаты Америки), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#)

Editorial Board

Editor-in-Chief, Alexander I. Sukhinov, Corresponding member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [MathSciNet](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#), sukhinov@gmail.com, spu-40.4@donstu.ru

Deputy Chief Editor, Mikhail V. Yakobovskii, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), [ScopusID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Executive Secretary, Alexander P. Petrov, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Leading Research Fellow, Institute of Control Sciences RAS (Moscow, Russian Federation), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#), [Istina](#)

Elena V. Aleksenko, Cand.Sci. (Phys.-Math.), Ph.D., Professor, University of Littoral Opal Coast (Boulogne-sur-Mer, France), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [ORCID](#)

Vladimir V. Voevodin, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russian Federation), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [ORCID](#)

Vladimir A. Gasilov, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Valentin A. Gushchin, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Institute of Computer Aided Design, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), [ScopusID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Oleg Yu. Zikanov, Cand.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Head of Department, University of Michigan-Dearborn (Dearborn, United States of America), [ORCID](#), [SPIN-code](#)

Galina G. Lazareva, Corresponding member of RAS, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of RAS, RUDN University, (Moscow, Russian Federation), [ScopusID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Igor B. Petrov, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Moscow Institute of Physics and Technology (State University) (Moscow, Russian Federation), [ScopusID](#), [SPIN-code](#)

Sergey V. Polyakov, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), [ScopusID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Alexey L. Semenov, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Academician of the Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russian Federation), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Vladimir F. Tishkin, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-code](#)

Boris N. Chetverushkin, Academician of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Konstantin A. Chekhonin, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Deputy Director of the Institute for Applied Mathematics, Director of the Khabarovsk Branch of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences (Khabarovsk, Russian Federation), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Alexander E. Chistyakov, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Maxim V. Shamolin, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russian Federation), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [SPIN-code](#), [ORCID](#)

Yalchin Efendiev, PhD, Professor of Mathematics, Texas A&M University (College Station, United States of America), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#)

Содержание

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

- Многостадийный сеточно-характеристический метод
повышенного порядка точности для задач акустики 7**
С. Ми, В.И. Голубев
- Аппроксимация граничных условий второго и третьего рода
в краевых задачах для уравнений конвекции-диффузии
с приложением к экологической гидрофизике 16**
А.И. Сухинов, В.В. Сидорякина
- Моделирование циркуляции в аневризмах кровеносных сосудов 30**
*Н.К. Волосова, К.А. Волосов, А.К. Волосова, М.И. Карлов, Д.Ф. Пастухов,
Ю.Ф. Пастухов*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

- Адаптивные сеточные методы для эффективного моделирования
динамики мелководных прибрежных систем 44**
А.И. Сухинов, С.В. Проценко, Е.А. Проценко
- Применение нейронных сетей для решения задачи
об установившихся колебаниях 56**
А.В. Галабурдин

Contents

COMPUTATIONAL MATHEMATICS

- Multistage Grid-Characteristic Method of Increased Order of Accuracy for Acoustic Problems** 7
Xin Mi, Vasily I. Golubev
- Approximation of Boundary Conditions of the Second and Third Types in Convection–Diffusion Equations with Applications to Environmental Hydrophysics** 16
Alexander I. Sukhinov, Valentina V. Sidoryakina
- Modelling Circulation in Blood Vessel Aneurysms** 30
Natalya K. Volosova, Konstantin A. Volosov, Aleksandra K. Volosova, Mikhail I. Karlov, Dmitriy F. Pastukhov, Yuriy F. Pastukhov

MATHEMATICAL MODELLING

- Adaptive Grid Techniques for the Efficient Simulation of Shallow Coastal Systems** 44
Alexander I. Sukhinov, Sofia V. Protsenko, Elena A. Protsenko
- Application of Neural Networks to Steady-State Oscillations** 56
Alexander V. Galaburdin

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 519.6

Оригинальное эмпирическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-7-15>


Многостадийный сеточно-характеристический метод повышенного порядка точности для задач акустики

С. Ми¹  , В.И. Голубев^{1,2} ¹Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный, Российская Федерация²Федеральное государственное автономное учреждение «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»,

г. Москва, Российская Федерация

✉ xinawafe@gmail.com

Аннотация

Введение. Сейсмическая разведка является широко применяемой технологией поиска месторождений углеводородов. Важным этапом данного процесса является расчёт распространения сейсмических волн в геологической модели среды с заданными физическими характеристиками. Ввиду высокой вычислительной сложности задачи на практике активно используется акустическое приближение, позволяющее корректно описать распространение продольных волн. Наиболее часто для сейсмического моделирования используются конечно-разностные схемы на сдвинутых кубических расчётных сетках. Несмотря на простоту их реализации и высокую вычислительную эффективность, такие подходы демонстрируют недостаточную точность при моделировании сложных геологических структур, включая криволинейные границы раздела геологических слоёв. Перспективным направлением является разработка новых вычислительных методов высокого порядка точности на криволинейных расчётных сетках. В настоящей работе представлен устойчивый сеточно-характеристический метод пятого порядка аппроксимации, успешно применённый для решения задачи о распространении акустических волн в двумерной постановке.

Материалы и методы. Используется сеточно-характеристический метод с интерполяционным полиномом пятой степени, построенном на расширенном пространственном шаблоне. Выделен класс криволинейных сеток, позволяющий сохранить достигнутую при решении одномерной задачи точность расчёта. При этом с помощью метода многошагового расщепления удастся сохранить порядок схемы по времени и по пространству в многомерной постановке.

Результаты исследования. Представлены формулы вычислительного алгоритма, эмпирически подтверждено достижение заявленного порядка сходимости, рассчитаны волновые картины динамического процесса.

Обсуждение. Результаты расчётов демонстрируют меньшую численную диссипацию предложенного вычислительного алгоритма. Платой за это является значимое увеличение времени расчёта.

Заключение. Разработанный расчётный алгоритм обеспечивает высокую точность расчёта сейсмических фронтов, что критически важно в задачах сейсморазведки в слоистых геологических массивах.

Ключевые слова: сейсмическая разведка, сейсмические волны, математическое моделирование, криволинейные сетки, акустическая среда, сеточно-характеристический метод, операторное расщепление

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ по теме № FNEF–2024–0002 «Математическое моделирование многомасштабных динамических процессов и системы виртуального окружения» (1023032900401–5–1.2.1). Исследования Ми Синь были поддержаны Китайским советом по стипендиям.

Для цитирования. Ми С., Голубев В.И. Многостадийный сеточно-характеристический метод повышенного порядка точности для задач акустики. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(3):7–15. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-7-15>

Multistage Grid-Characteristic Method of Increased Order of Accuracy for Acoustic Problems

Xin Mi¹  , Vasily I. Golubev^{1,2} 

¹ Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russian Federation

² Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre “Kurchatov Institute”, Moscow, Russian Federation

 xinawafe@gmail.com

Abstract

Introduction. Seismic exploration is a widely used technology for locating hydrocarbon deposits. An important stage of this process is the simulation of seismic wave propagation in a geological model of the medium with specified physical characteristics. Due to the high computational cost of this problem, the acoustic approximation is widely used in practice, allowing for the correct description of longitudinal wave propagation. The most common approach to seismic modeling is the use of finite-difference schemes on staggered Cartesian computational grids. Despite their simplicity of implementation and high computational efficiency, such methods exhibit insufficient accuracy when modelling complex geological structures, including curvilinear interfaces between geological layers. A promising direction is the development of new high-order computational methods on curvilinear computational grids. This paper presents a stable fifth-order grid-characteristic method successfully applied to solving the problem of acoustic wave propagation in the two-dimensional case.

Materials and Methods. The study employs a grid-characteristic method with a fifth-degree interpolation polynomial constructed on an extended spatial stencil. A class of curvilinear grids is identified that makes it possible to retain the accuracy achieved when solving a one-dimensional problem. Furthermore, the use of a multistage splitting method allows the preservation of the scheme’s order in both time and space for multidimensional formulations.

Results. The formulas of the computational algorithm are presented, the achievement of the declared convergence order is empirically confirmed, and wavefield patterns of the dynamic process are calculated.

Discussion. The results demonstrate lower numerical dissipation of the proposed computational algorithm. The trade-off for this improvement is a significant increase in computation time.

Conclusion. The developed computational algorithm ensures high accuracy in calculating seismic fronts, which is critically important for seismic exploration tasks in layered geological massifs.

Keywords: seismic exploration, seismic waves, mathematical modelling, curvilinear grids, acoustic medium, grid-characteristic method, operator splitting

Funding. The work was carried out within the framework of the state task of the NRC “Kurchatov Institute” — SRISA on the topic No. FNEF–2024–0002 “Mathematical modeling of multi-scale dynamic processes and virtual environment systems” (1023032900401–5–1.2.1). Mi Xin’s research work was supported by a scholarship from the China Scholarship Council.

For Citation. Mi X., Golubev V.I. Multistage Grid-Characteristic Method of High Order of Accuracy for Acoustic Problems. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(3):7–15. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-7-15>

Введение. Компьютерный расчёт волновых полей в неоднородных средах широко применяется при проведении геофизических исследований и играет ключевую роль в решении задач миграции и инверсии данных сейсмической разведки [1, 2]. Множество различных численных методов, применимых для решения динамической задачи деформирования геологических сред, было разработано различными научными группами: метод конечных разностей [3], метод конечных элементов [4], разрывный метод Галёркина [5], метод спектральных элементов [6]. Среди них метод конечных разностей остаётся наиболее часто используемым на практике благодаря простоте реализации и высокой вычислительной эффективности.

В настоящее время активно развивается сеточно-характеристический метод [7], который используется в настоящей работе. В последние годы велась активная разработка модификаций сеточно-характеристического метода на различных типах расчетных сеток: неструктурированных тетраэдральных [8, 9], декартовых [10–13], криволинейных структурированных [14], Химерных наложенных [15–17] для решения практических задач сейсмической разведки [8, 10, 11, 15, 16], сейсмостойкости [12, 14], неразрушающего контроля композиционных материалов [18], расчета вибраций железнодорожных путей [13, 17].

В процессе морской сейморазведки сейсмические волны распространяются как в акустической среде (водный слой), так и в упругой среде (морское дно и подстилающий геологический массив). В случае, если граница раздела сред является криволинейной, метод конечных разностей сталкивается со значительными трудностями при попытке корректного расчёта времени пробега отражённых от дна волн [19]. Одним из возможных способов повышения точности задания геометрии границы является уменьшение шага сетки, однако это приводит к значительному увеличению вычислительной сложности задачи [20]. С целью достижения компромисса между ростом вычислительных затрат и снижением точности моделирования возможно комбинирование метода конечных

разностей с техникой координатных преобразований [21]. Этот подход основан на отображении криволинейной расчётной сетки, совпадающей с границей слоёв, в вычислительно удобную ортогональную сетку с помощью достаточно гладкого преобразования координат.

В данной работе рассматривается задача распространения сейсмических волн в акустической среде, содержащей криволинейные границы раздела слоёв. Использование обратного преобразования из криволинейных в декартовы координаты позволяет для выделенного класса расчётных сеток применить сеточно-характеристический метод повышенного порядка точности на расширенном пространственном шаблоне. Для устранения эффекта снижения порядка аппроксимации двумерной расчётной сетки по времени за счёт использования покоординатного расщепления применяется метод многошагового операторного расщепления [22]. Проведённые вычислительные эксперименты подтверждают высокую точность расчётов и устойчивость схемы при выполнении стандартного условия Куранта.

Материалы и методы. Динамическое поведение однородной акустической среды при малых деформациях и в отсутствии действия внешних объёмных сил описывается гиперболической системой уравнений вида:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla p = \vec{0}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \nabla \cdot \vec{v} = 0. \end{cases}$$

Здесь используются следующие обозначения: ρ — плотность среды; c — скорость распространения акустических волн; $p(x, y, z, t)$ — акустическое давление; $\vec{v}(x, y, z, t) = (u, v, w)^T$ — вектор скорости в рассматриваемой точке акустической среды. В двумерной постановке задачи все искомые функции не зависят от третьей пространственной переменной: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \vec{0}, \frac{\partial p}{\partial z} = 0$. Пусть исходно область интегрирования покрыта некоторой криволинейной структурной расчётной сеткой так, что возможно достаточно гладкое её отображение на равномерную квадратную расчётную область (рис. 1). Пусть связь между исходными декартовыми координатами x и y и трансформированными координатами ξ и η задаётся аналитически в явном виде:

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta), \\ y = y(\xi, \eta). \end{cases}$$

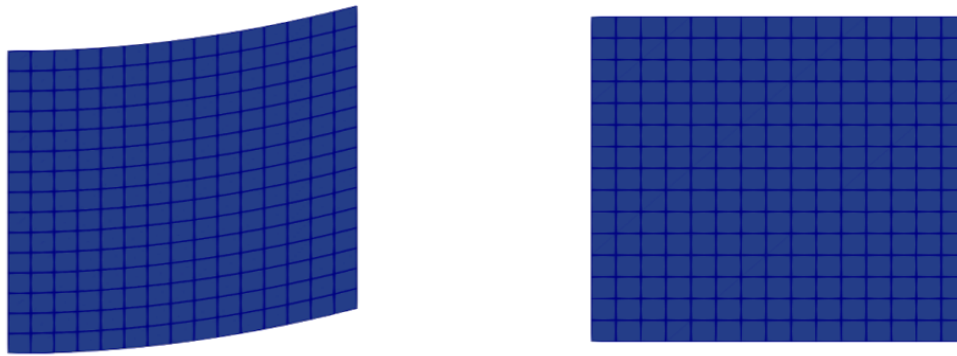


Рис. 1. Исходная криволинейная расчётная сетка (x, y) (слева) и трансформированная квадратная сетка (ξ, η) (справа)

Путём перехода в исходной системе уравнений к новым координатам получим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \frac{1}{|J|} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right] + \rho c^2 \frac{1}{|J|} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right] &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho |J|} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho |J|} \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) &= 0, \end{aligned}$$

где введено новое обозначение $|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}$ — Якобиан перехода.

Данная система уравнений может быть переписана в канонической форме:

$$\vec{q}_t + A_\xi \vec{q}_\xi + A_\eta \vec{q}_\eta = 0.$$

Здесь введены следующие дополнительные обозначения:

$$\vec{q} = (p, u, v)^T,$$

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & \rho c^2 \frac{1}{|J|} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\rho c^2 \frac{1}{|J|} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{1}{\rho} \frac{1}{|J|} \frac{\partial y}{\partial \eta} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{1}{|J|} \frac{\partial x}{\partial \eta} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_\eta = \begin{pmatrix} 0 & -\rho c^2 \frac{1}{|J|} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \rho c^2 \frac{1}{|J|} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{1}{|J|} \frac{\partial y}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{1}{|J|} \frac{\partial x}{\partial \xi} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для построения численного решения данной двумерной системы уравнений можно применить метод расщепления по пространственным направлениям, тем самым сводя задачу к последовательному решению двух одномерных задач:

$$\vec{q}_t + A_\xi \vec{q}_\xi = 0,$$

$$\vec{q}_t + A_\eta \vec{q}_\eta = 0.$$

При этом решение первой системы уравнений является начальным условием для решения второй системы уравнений. Отметим, что данная процедура позволяет построить сходящийся вычислительный алгоритм, обладающий, однако, в общем случае лишь первым порядком аппроксимации по времени. Это обусловлено непостоянностью операторов, связанных с матрицами A_ξ и A_η .

Отметим, что каждая из одномерных систем с матрицей A_j ($j = \xi, \eta$) является гиперболической и может быть представлена в следующем виде:

$$A_j = \Omega_j^{-1} \Lambda_j \Omega_j,$$

$$\Lambda_\xi = \frac{1}{|J|} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2} (c, -c, 0),$$

$$\Lambda_\eta = \frac{1}{|J|} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} (c, -c, 0).$$

Решение одномерной гиперболической системы с постоянными коэффициентами можно свести к решению задачи пространственной интерполяции переходом в инварианты Римана по формуле:

$$\vec{\omega} = \Omega_j \vec{q}.$$

Для наглядности рассмотрим процедуру построения решения задачи вдоль направления ξ . Выполнив левое умножение системы уравнений на матрицу Ω_ξ и подставляя выше полученные выражения в исходную систему уравнений, в условиях независимости Ω_ξ от ξ получаем, что

$$\vec{\omega}_t + \Lambda_\xi \vec{\omega}_\xi = 0.$$

Для каждого уравнения из данной системы одномерных независимых уравнений переноса с постоянными коэффициентами по их характеристическим свойствам значение на следующем временном слое в точности определяется следующим выражением:

$$\vec{\omega}(\xi_m, t^n + \tau) = \vec{\omega}(\xi_m - \Lambda_\xi \tau, t^n).$$

При вычислении правой части данного равенства используется процедура интерполяции многочленами заданной степени на фиксированном пространственном шаблоне. В данной работе используется сеточно-характеристическая схема пятого порядка аппроксимации, построенная на семиточечном шаблоне с использованием ин-

терполяционного многочлена пятого порядка [23]. Далее искомую вектор-функцию $\vec{q} = (p, u, v)^T$, на следующем временном слое можно рассчитать по формуле (в силу невырожденности преобразования):

$$\vec{q} = \Omega_{\xi}^{-1} \vec{\omega}.$$

Отметим, что структура матрицы Ω_j из собственных векторов может быть записана компактно в тензорном виде. Введём следующие обозначения для направлений, соответствующих осям ξ, η :

$$n_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} \end{pmatrix},$$

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix}.$$

Тогда переход в инварианты Римана имеет вид:

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2} n_0 \cdot \vec{v} \pm \frac{p}{2\rho c}, \text{ for } \xi,$$

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2} n_1 \cdot \vec{v} \pm \frac{p}{2\rho c}, \text{ for } \eta.$$

Как было отмечено ранее, использование данного метода расщепления снижает порядок аппроксимации двумерной схемы по времени. Для решения данной проблемы в настоящей работе используется многошаговое операторное расщепление, основанное на применении дробных шагов по времени [24]. В общем виде данный расчётный алгоритм для каждого шага по времени может быть представлен следующим образом:

for i in $1, \dots, s$:

 рассчитываем шаг вдоль ξ : $\text{step } \xi(\alpha_i^{\xi} \tau)$,

 рассчитываем шаг вдоль η : $\text{step } \eta(\alpha_i^{\eta} \tau)$.

Коэффициенты $\alpha_i^j, i \in (1, 2, \dots, s), j \in (\xi, \eta)$, задающие величины дробных шагов по времени, однозначно определяют схему многошагового расщепления. При этом отметим, что возможно построение неединственной схемы заданного порядка аппроксимации с заданным числом стадий. В настоящей работе использовалась схема многошагового расщепления 5-го порядка с 7 стадиями [24]. Её коэффициенты представлены в таблице 1.

Таблица 1

Коэффициенты используемой схемы многошагового расщепления 5-го порядка

i	α_i^{ξ}	α_i^{η}
1	0,475018345144539497	-0,402020995028838599
2	0,021856594741098449	0,345821780864741783
3	-0,334948298035883491	0,400962967485371350
4	0,512638174652696736	0,980926531879316517
5	-0,011978701020553904	-1,362064898669775624
6	-0,032120004263046859	0,923805029000837468
7	0,369533888781149572	0,112569584468347105

Результаты исследования. Построенная двумерная сеточно-характеристическая схема была применена для моделирования процесса распространения плоской P -волны. Рассматривалась постановка задачи, характерная для области сейсмической разведки в субгоризонтальном слоистом геологическом массиве. Расчётная область покрывалась криволинейной расчётной сеткой, задаваемой следующим координатным преобразованием:

$$\begin{cases} x = \xi, \\ y = \eta + \gamma \xi^2, \end{cases}$$

где $\gamma = 5 \cdot 10^{-4}$.

Преимуществом данного способа параметризации является независимость собственных векторов и собственных значений задачи для шагов вдоль (ξ, η) от переменных (ξ, η) соответственно. Это позволяет вносить матрицу Ω_j под

знак дифференцирования по координате и строить точное решение одномерной задачи. Исходная область интереса в декартовых координатах занимала квадрат со стороной 600 м. Акустические характеристики среды: плотность $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, скорость распространения продольной волны $c = 2000 \text{ m/s}$. Начальное возмущение задавалось на расстоянии 400 м от нижней границы направленным вертикально вниз. Рассчитывалось 50 мс физического времени. Шаг по времени выбирался из условия устойчивости Куранта для промежуточного шага вычислительного алгоритма, соответствующего максимальному по модулю коэффициенту α_5^n .

Для подтверждения достижения заявленного повышенного порядка сходимости данной схемой авторами была проведена серия расчётов на последовательно измельчающихся криволинейных расчётных сетках. Результаты эмпирической оценки порядка сходимости по нормам L_1 и L_∞ представлены в таблице 2.

Таблица 2

Исследование порядка сходимости построенной схемы.
Задача с вертикальной P -волной

h	Error in L_1	Error in L_∞	Order in L_1	Order in L_∞
2,000	2,6081E+09	9,0030E+05	—	—
1,000	1,0736E+09	3,6153E+05	1,281	1,316
0,500	1,1051E+08	4,3919E+04	3,280	3,041
0,250	4,3173E+06	1,6748E+02	4,678	4,713
0,125	1,3778E+05	5,3186E+01	4,970	4,977

Был выполнен расчет с применением стандартного метода расщепления по пространственным направлениям. Результаты представлены в таблице 3.

Таблица 3

Исследование порядка сходимости схемы со стандартным расщеплением.
Задача с вертикальной P -волной

h	Error in L_1	Error in L_∞	Order in L_1	Order in L_∞
2,000	1,7314E+09	5,9920E+05	—	—
1,000	4,3286E+08	1,6200E+05	2,000	1,887
0,500	3,5098E+07	1,9527E+04	3,624	3,052
0,250	5,6940E+06	3,8921E+03	2,624	2,327
0,125	1,3951E+06	9,6667E+02	2,029	2,009

Отметим, что распространение фронта волны вдоль одной из линий расчётной сетки, как это происходило в представленном выше тесте, не является существенным требованием для сохранения схемой порядка сходимости. В описанных выше условиях была решена задача о распространении P -волны под фиксированным углом $\beta = -5^\circ$ к вертикальной оси. Результаты эмпирической оценки порядка сходимости по двум нормам представлены в таблице 4.

Таблица 4

Исследование порядка сходимости построенной схемы.
Задача с наклонной P -волной

h	Error in L_1	Error in L_∞	Order in L_1	Order in L_∞
2,000	2,1279E+09	8,9108E+05	—	—
1,000	8,7694E+08	3,5489E+05	1,279	1,328
0,500	8,8829E+07	4,2314E+04	3,303	3,068
0,250	3,4498E+06	1,6029E+03	4,686	4,722
0,125	1,1013E+05	5,0870E+01	4,969	4,978

Был выполнен расчет с применением стандартного метода расщепления по пространственным направлениям. Результаты представлены в таблице 5.

Исследование порядка сходимости схемы со стандартным расщеплением.
 Задача с наклонной P -волной

h	Error in L_1	Error in L_∞	Order in L_1	Order in L_∞
2,000	1,4481E+09	5,9613E+05	–	–
1,000	3,6522E+08	1,6221E+05	1,987	1,878
0,500	3,6355E+07	2,4925E+04	3,329	2,702
0,250	7,3132E+06	5,4214E+03	2,314	2,201
0,125	1,8012E+06	1,3417E+03	2,022	2,015

Наибольший интерес представляет расчёт процесса распространения сейсмических волн в массиве, состоящем из геологических слоёв, обладающих различными механическими характеристиками (песчаники, глины, карбонаты). Для тестирования возможности применения разработанной численной схемы для решения данного типа задач был проведён следующий вычислительный эксперимент. Рассматривались три расчётные сетки, покрывающие три геологических слоя, занимающих физическую область размерами 90×150 м. Расчётная сетка в средней области задавалась криволинейной с параметром $\gamma = 5 \cdot 10^{-4}$. Это привело к формированию криволинейной верхней и нижней границ. Расчётные сетки в верхней и нижней областях задавались с постепенно изменяющимся параметром γ так, что верхняя граница верхней сетки и нижняя граница нижней сетки оставались горизонтальными. Выполнялся тест на отсутствие значимых отражений от «виртуальных» геологических границ, обусловленных только лишь делением всей расчётной сетки на три подобласти. Для этого в каждом из слоёв использовались одинаковые параметры среды.

В качестве источника сейсмического сигнала была задана плоская P -волна на расстоянии 20 м от верхней границы верхней подобласти, распространяющаяся вниз. Шаг сетки по пространству составлял 0,5 м, шаг по времени 100 мкс, что удовлетворяет условию устойчивости Куранта. Пространственные распределения давления во всей расчётной области в фиксированный момент времени $T = 50$ мс, полученные с использованием сеточно-характеристической схемы третьего порядка аппроксимации и стандартного расщепления, а также с использованием описанной в работе сеточно-характеристической схемы пятого порядка аппроксимации и многошагового расщепления представлены на рис. 2. Видно более точное сохранение амплитуды исходной волны и отсутствие значимых отражений.

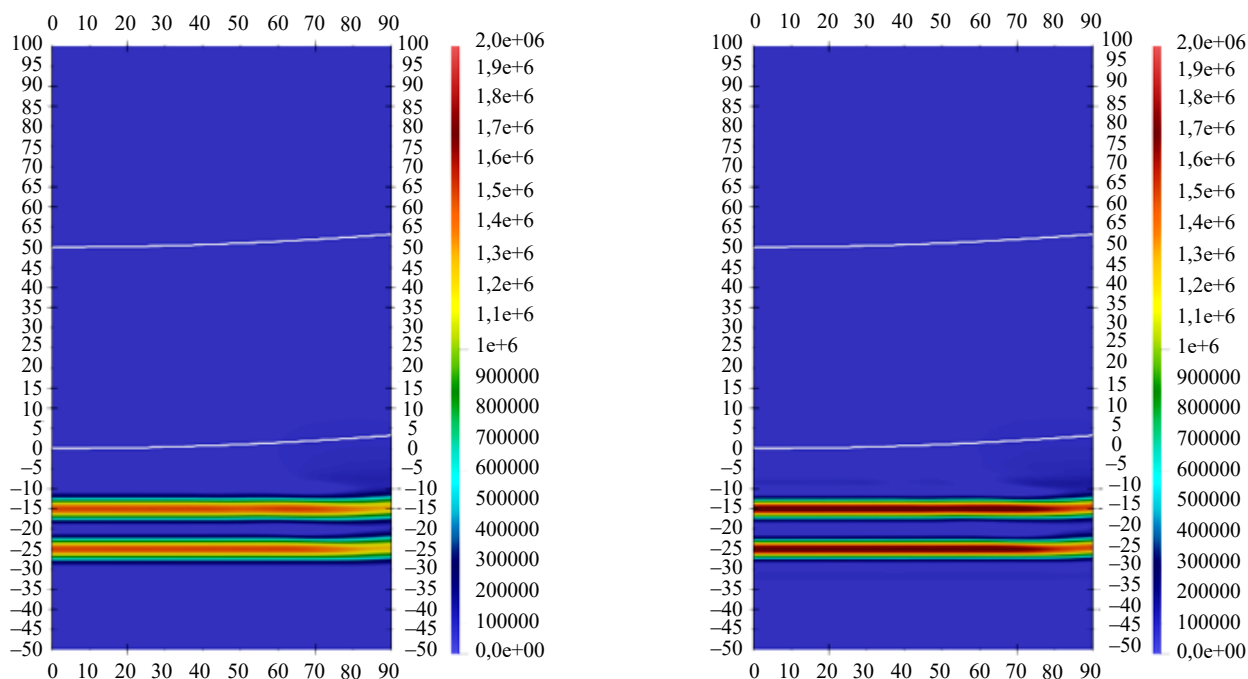


Рис. 2. Акустическое поле в трёхслойной среде.

Использованы: одномерная схема третьего порядка аппроксимации
 и обычное пространственное расщепление (слева); предложенная в настоящей работе схема (справа)

Обсуждение. В данной работе представлена новая двумерная сеточно-характеристическая схема на криволинейных структурных расчётных сетках. Она основана на применении метода многошагового расщепления для сохране-

ния повышенного порядка аппроксимации по времени и использует свойства гиперболической системы уравнений для сведения решения одномерной гиперболической задачи к процедуре пространственной полиномиальной интерполяции на фиксированном семиточечном шаблоне. Систематически исследовано поведение полученного численного решения задачи о распространении плоской волны в расчётной области, покрытой криволинейной сеткой специального вида. Показано достижение заявленного 5-го порядка сходимости как по координате, так и по времени. Отметим, что в случае невозможности аналитического вычисления Якобиана перехода между расчётными сетками или зависимости операторов одномерных задач от координат возможно применение некоторых модификаций метода. Во-первых, Якобиан перехода может быть рассчитан с заданной степенью точности конечно-разностным методом. Во-вторых, зависимость одномерных операторов от координат может быть учтена использованием соответствующих решателей повышенного порядка аппроксимации для одномерной гиперболической задачи.

В работе продемонстрирована возможность применения построенного расчётного алгоритма для моделирования процесса сейсмической разведки в слоистом геологическом массиве с криволинейными границами. Для описания горизонтальности дневной поверхности использована расчётная сетка, постепенно выравнивающаяся при удалении от границы раздела сред. Проведённое сравнение полученных акустических волновых полей с другой расчётной схемой показало возможность повышения точности сохранения амплитуд распространяющихся волн совместно с отсутствием значимых численных артефактов на контактных границах.

Заключение. Представляется возможным применение описанного подхода для решения практических задач сейсмической разведки. Перспективными направлениями дальнейших исследований являются:

1. Обобщение расчётного алгоритма на более сложные модели геологических сред: упругие, упругопластические, упруговязкопластические модели;
2. Обобщение расчётного алгоритма на трёхмерные постановки задач с целью повышения его универсальности и инженерной применимости.

Список литературы / References

1. Kallivokas L.F., Fathi A., Kucukcoban S., Stokoe II K.H., Bielak J., Ghattas O. Site characterization using full waveform inversion. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2013;47:62–82. <http://dx.doi.org/10.1016/j.soildyn.2012.12.012>
2. Yun Zhao, Xiaotao Wen, Chunlan Xie, Bo Li, Chenlong Li, Xiao Pan, et al. Simultaneous seismic inversion of effective stress parameter, fluid bulk modulus, and fracture density in TTI media. *Petroleum Science*. 2025. <https://doi.org/10.1016/j.petsci.2025.04.002>.
3. Самарский А.А., Николаев Е.С. *Методы решения сеточных уравнений*. Москва: Наука; 1978. 592 с. Samarskiy A.A., Nikolaev E.S. *Methods for solving grid equations*. Moscow: Nauka; 1978. 592 p. (In Russ.)
4. Matzen R. An efficient finite element time-domain formulation for the elastic second-order wave equation: A non-split complex frequency shifted convolutional PML. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2011;88(10):951–973. <https://doi.org/10.1002/nme.3205>
5. Antonietti P.F., Mazziari I., Migliorini F. A discontinuous Galerkin time integration scheme for second order differential equations with applications to seismic wave propagation problems. *Computers & Mathematics with Applications*. 2023;134:87–100. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2112.01792>
6. Komatitsch D., Tromp J. Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation. *Geophysical Journal International*. 1999;139(3):806–822. <https://doi.org/10.1046/J.1365-246X.1999.00967.X>.
7. Магомедов К.М., Холодов А.С. *Сеточно-характеристические численные методы: учебник для вузов*. 2-е изд., испр. и доп. Москва: Юрайт; 2025. 313 с. Magomedov K.M., Kholodov A.S. *Grid-characteristic numerical methods: textbook for universities*. 2nd ed., rev. and add. Moscow: Yurait Publishing House; 2025. 313 p. (In Russ.)
8. Petrov I.B., Favorskaya A.V., Muratov M.V., Biryukov V.A., Sannikov A.V. Grid-characteristic method on unstructured tetrahedral grids. *Doklady Mathematics*. 2014;90:781–783. <https://doi.org/10.1134/S1064562414070254>
9. Favorskaya A.V., Petrov I.B. A study of high-order grid-characteristic methods on unstructured grids. *Numerical Analysis and Applications*. 2016;9:171–178. <https://doi.org/10.1134/S1995423916020087>
10. Favorskaya A.V., Zhdanov M.S., Khokhlov N.I., Petrov I.B. Modelling the wave phenomena in acoustic and elastic media with sharp variations of physical properties using the grid-characteristic method. *Geophysical Prospecting*. 2018;66(8):1485–1502. <https://doi.org/10.1111/1365-2478.12639>
11. Favorskaya A.V., Petrov I.B. The use of full-wave numerical simulation for the investigation of fractured zones. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2019;11:518–530. <https://link.springer.com/article/10.1134/S2070048219040069>
12. Favorskaya A.V., Petrov I.B. Inverse Problem of Determining the Strength Characteristics of Multi-Story Buildings on Piles. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2025;46(1):202–213. <https://doi.org/10.1134/S1995080224608555>
13. Kozhemyachenko A.A., Petrov I.B., Favorskaya A.V., Khokhlov N.I. Boundary conditions for modeling the impact of wheels on railway track. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2020;60:1539–1554. <https://link.springer.com/article/10.1134/S0965542520090110>
14. Favorskaya A.V., Khokhlov N.I., Petrov I.B. Grid-characteristic method on joint structured regular and curved grids for modeling coupled elastic and acoustic wave phenomena in objects of complex shape. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2020;41:512–525. <https://doi.org/10.1134/S1995080220040083>

15. Khokhlov N., Favorskaya A., Stetsyuk V, Mitskovets I. Grid-characteristic method using Chimera meshes for simulation of elastic waves scattering on geological fractured zones. *Journal of Computational Physics*. 2021;446:110637. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110637>
16. Khokhlov N.I., Favorskaya A., Furgailo V. Grid-characteristic method on overlapping curvilinear meshes for modeling elastic waves scattering on geological fractures. *Minerals*. 2022;12(12):1597. <https://doi.org/10.3390/min12121597>
17. Pesnya E., Kozhemyachenko A.A., Favorskaya A.V. Vibration Analysis of Frost Heaving of the Ice Lens Type on Railways by a Grid-Characteristic Method. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2025;46(1):317–325. <https://doi.org/10.1134/S1995080224608270>
18. Petrov I., Vasyukov A., Beklemysheva K., Ermakov A., Favorskaya A. Numerical modeling of non-destructive testing of composites. *Procedia Computer Science*. 2016;96:930–938. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2016.08.272>
19. Yao Gang, da Silva N.V., Debens H.A., Wu Di. Accurate seabed modeling using finite difference methods. *Computational Geosciences*. 2018;22:469–84. <https://doi.org/10.1007/s10596-017-9705-5>
20. van Vossen R., Robertsson J.O., Chapman C.H. Finite-difference modeling of wave propagation in a fluid-solid configuration. *Geophysics*. 2002;67(2):618–24. <https://doi.org/10.1190/1.1468623>
21. Sun Yaochong, Zhang Wei, Xu Jiankuan, Chen Xiaofei. Numerical simulation of 2-D seismic wave propagation in the presence of a topographic fluid–solid interface at the sea bottom by the curvilinear grid finite-difference method. *Geophysical Journal International*. 2017;210(3):1721–1738. <https://doi.org/10.1093/gji/ggx257>
22. Golubev V.I., Shevchenko A.V., Petrov I.B. Raising convergence order of grid-characteristic schemes for 2D linear elasticity problems using operator splitting. *Computer Research and Modeling*. 2022;14(4):899–910. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2022-14-4-899-910>
23. Mi Xin, Golubev V. Two-Dimensional Grid-Characteristic Schemes for Acoustic Wave Simulations. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2025;46:283–291. <https://doi.org/10.1134/S199508022460852X>
24. Auzinger W., Hofstätter H., Ketcheson D., Koch O. Practical splitting methods for the adaptive integration of nonlinear evolution equations. Part I: Construction of optimized schemes and pairs of schemes. *BIT. Numerical Mathematics*. 2017;57:55–74. <https://doi.org/10.1007/s10543-016-0626-9>

Об авторах:

Синь Ми, аспирант кафедры информатики и вычислительной математики Московского физико-технического института (141701, Российская Федерация, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9000-0001), xinawafe@gmail.com

Василий Иванович Голубев, профессор кафедры информатики и вычислительной математики Московского физико-технического института (141701, Российская Федерация, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9000-0001), [SPIN-код](https://scopus.com/authid/detail.url?authorID=10110110101), [ScopusID](https://scopus.com/authid/detail.url?authorID=10110110101), golubev.vi@mipt.ru

Заявленный вклад авторов:

Синь Ми: проведение расчетов; формулирование выводов; подготовка текста; оформление научной статьи; работа с источниками; оформление графических материалов.

В.И. Голубев: формирование основной концепции; цели и задачи исследования; анализ результатов исследований; корректировка выводов; доработка текста.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Xin Mi, PhD Student at the Department of Computer Science and Computational Mathematics of the Moscow Institute of Physics and Technology (9, Institutskii lane, Dolgoprudny, 141701, Russian Federation), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9000-0001), xinawafe@gmail.com

Vasily I. Golubev, Professor at the Department of Computer Science and Computational Mathematics of the Moscow Institute of Physics and Technology (9, Institutskii lane, Dolgoprudny, 141701, Russian Federation), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9000-0001), [SPIN-code](https://scopus.com/authid/detail.url?authorID=10110110101), [ScopusID](https://scopus.com/authid/detail.url?authorID=10110110101), golubev.vi@mipt.ru

Contributions of the authors:

M Xin: making calculations; drawing conclusions; text preparation; working with sources; making graphic materials.

Golubev V.I.: basic concept formulation; research objectives and tasks computational analysis; conclusions correction; text revision.

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 27.06.2025

Поступила после рецензирования / Revised 24.07.2025

Принята к публикации / Accepted 15.08.2025

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 519.6

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-16-29>


Аппроксимация граничных условий второго и третьего рода в краевых задачах для уравнений конвекции-диффузии с приложением к экологической гидрофизике

А.И. Сухинов , В.В. Сидорякина  

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

 cvv9@mail.ru

Аннотация

Введение. Рассматривается разностная схема, аппроксимирующая краевую задачу для уравнения параболического типа в трехмерной постановке с условиями на границе I–III рода. Данная статья является дополнением к предыдущим работам авторов, посвященным численному решению одной из актуальных задач гидрофизики зон морского мелководья — задаче переноса, осаждения (транспорта) и трансформации взвешенного вещества. Аппроксимация указанного класса задач внутри области приводит к схемам, сходящимся со скоростью $O(\tau + h^2)$, где $h^2 = h_x^2 + h_y^2 + h_z^2$, h_x, h_y, h_z и τ — шаги разностной сетки по пространственным координатам x, y, z и времени соответственно. При этом требует аккуратного рассмотрения случайных граничных условий, поскольку при неудачной их аппроксимации может понизиться порядок аппроксимации разностной схемы в целом. Предложенные авторами методы аппроксимации граничных условий обеспечивают сходимость разностной схемы со скоростью $O(\tau + h^2)$.

Материалы и методы. В своих исследованиях авторами сделан акцент на аппроксимации граничных условий третьего рода (аппроксимация граничных условий второго рода рассматривается как их частный случай). Ориентиром служит аппроксимация указанных граничных условий по формуле центральных разностей с последующим дифференцированием обеих частей уравнений диффузии-конвекции и исключением из полученных выражений функций решения в фиктивных узлах расширенной сетки.

Результаты исследования. Построены аппроксимации граничных условий II–III рода для краевой задачи, описывающей транспорт частиц взвешенного вещества, обеспечивающие сходимость разностной схемы со скоростью $O(\tau + h^2)$.

Обсуждение. Работа может быть полезна в задачах диффузии-конвекции, где необходимо добиться численного решения с приемлемой точностью.

Заключение. Дальнейшие исследования авторов могут быть направлены на исследование построенных разностных схем с учетом физически мотивированных ограничений на шаг временной сетки τ и сеточное число Пекле.

Ключевые слова: прибрежные морские системы, задача диффузии-конвекции, разностная схема, граничные условия второго и третьего рода, погрешность аппроксимации

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–11–00295–П, <https://rscf.ru/project/22-11-00295/>

Для цитирования. Сухинов А.И., Сидорякина В.В. Аппроксимация граничных условий второго и третьего рода в краевых задачах для уравнений конвекции-диффузии с приложением к экологической гидрофизике. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(3):16–29. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-16-29>

Approximation of Boundary Conditions of the Second and Third Types in Convection–Diffusion Equations with Applications to Environmental Hydrophysics

Alexander I. Sukhinov , Valentina V. Sidoryakina  

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

 cvv9@mail.ru

Abstract

Introduction. A finite-difference scheme approximating a boundary value problem for a parabolic-type equation in a three-dimensional setting with boundary conditions of the first-third types is considered. This paper is a continuation of the authors' previous works devoted to the numerical solution of one of the pressing problems of hydrophysics in shallow marine zones — the problem of transport, deposition, and transformation of suspended matter. The approximation of this class of problems inside the domain leads to schemes converging at a rate of $O(\tau + h^2)$, where $h^2 = h_x^2 + h_y^2 + h_z^2$, h_x , h_y , h_z and τ are the steps of the difference grid along the spatial coordinates x , y , z and time, respectively. However, the case of boundary conditions requires careful treatment, since an inaccurate approximation may reduce the overall order of accuracy of the finite-difference scheme. The methods proposed by the authors for approximating boundary conditions ensure the convergence of the finite-difference scheme at the rate of $O(\tau + h^2)$.

Materials and Methods. The authors focused on approximating third-type boundary conditions (with second-type conditions considered as a particular case). The approach is based on the central difference approximation of boundary conditions on an extended grid and the elimination of suspended matter concentration values in ghost nodes (cells).

Results. Approximations of the second- and third-type boundary conditions were constructed for a boundary value problem describing suspended matter transport. These approximations guarantee convergence of the finite-difference scheme at the rate of $O(\tau + h^2)$.

Discussion. The study may be useful in convection–diffusion problems where achieving numerical solutions with acceptable accuracy is required.

Conclusion. Future research may focus on the analysis of the constructed finite-difference schemes under physically motivated constraints on the time step τ and the grid Peclet number.

Keywords: coastal marine systems, convection–diffusion problem, finite-difference scheme, second- and third-type boundary conditions, approximation error

Funding. The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 22–11–00295–П, <https://rscf.ru/en/project/22-11-00295/>

For Citation. Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V. Approximation of Boundary Conditions of the Second and Third Types in Convection–Diffusion Equations with Applications to Environmental Hydrophysics. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(3):16–29. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-16-29>

Введение. Рассматривается начально-краевая задача транспорта взвешенного вещества многофракционного состава, учитывающая три пространственные переменные, а также следующие физические параметры и процессы: адвективный перенос, обусловленный движением водной среды, микротурбулентную диффузию и гравитационное осаждение частиц взвеси, переход частиц крупных гранулометрических фракций в более мелкие (распад) и наоборот — агрегацию (слипание) частиц мелких гранулометрических фракций в более крупные [1–4]. Для непрерывной задачи выполнено преобразование правых частей уравнений диффузии — конвекции — реакции многофракционных взвесей на временной сетке «с запаздыванием». Для этого на временной сетке с шагом τ выполнено преобразование правых частей уравнений начально-краевой задачи транспорта взвесей: для функций — концентраций взвесей, входящих в правые части уравнений задачи и не относящихся к той фракции, для которой сформулирована начально-краевая задача для уравнения диффузии — конвекции — реакции, значения этих концентраций определяются на предыдущем временном слое. Такой подход позволяет упростить последующую численную реализацию каждого из уравнений диффузии — конвекции — реакции. В настоящей статье рассматривается разностная схема, аппроксимирующая краевую задачу для уравнения параболического типа в трехмерной постановке с условиями на границе I–III рода. Данная статья является дополнением к предыдущим работам авторов, посвященным численному решению одной из актуальных задач гидрофизики зон морского мелководья — задаче переноса, осаждения (транспорта) и трансформации взвешенного вещества. Как правило, аппроксимация указанного класса задач внутри области приводит к схемам, сходящимся со $O(\tau + h^2)$, где $h^2 = h_x^2 + h_y^2 + h_z^2$, h_x , h_y , h_z и τ — шаги разностной сетки по пространственным координатам и времени соответственно. При этом требует аккуратного рассмотрения случая граничных условий, поскольку при неудачной их аппроксимации может понизиться порядок аппроксимации разностной схемы в целом. Предложенные авторами методы аппроксимации граничных условий обеспечивают сходимость разностной схемы со скоростью $O(\tau + h^2)$.

Материалы и методы. Будем полагать, что рассеянные в водной толще частицы взвешенного вещества разделены на R фракций. Осуществим постановку задачи для области \bar{G}

$$\bar{G} = \{0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq L_z\}.$$

В прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ рассмотрим трехмерное уравнение диффузии — конвекции — реакции осаждения с использованием косимметрической формы представления оператора конвективного переноса [5–10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_r}{\partial t} + C_0 c_r &= Dc_r + F_r, \quad r = 1, \dots, R, \quad (x, y, z) \in \bar{G}, \\ C_0 c_r &\equiv \frac{1}{2} \left[u \frac{\partial c_r}{\partial x} + v \frac{\partial c_r}{\partial y} + \frac{\partial c_r}{\partial z} + w' \frac{\partial (uc_r)}{\partial x} + \frac{\partial (vc_r)}{\partial y} + \frac{\partial (w'_r c_r)}{\partial z} \right], \\ Dc_r &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{hr} \frac{\partial c_r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{hr} \frac{\partial c_r}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{vr} \frac{\partial c_r}{\partial z} \right), \\ F_1 &= (\alpha_2 c_2 - \beta_1 c_1) + \gamma_1 c_1, \quad F_R = (\beta_{R-1} c_{R-1} - \alpha_R c_R) + \gamma_R c_R, \\ F_r &= (\beta_{r-1} c_{r-1} - \alpha_r c_r) + (\alpha_{r+1} c_{r+1} - \beta_r c_r) + \gamma_r c_r, \quad r = 2, \dots, R-1, \end{aligned} \quad (1)$$

где $c_r, c_r = c_r(x, y, z, t)$ — концентрация частиц в момент времени $t, t \in [0; T]$; u, v, w — компоненты вектора \vec{U} скорости водной среды; $w'_r, w'_r = w + w_{g,r}, w_{g,r}$ — гидравлическая крупность частиц; μ_{hr}, μ_{vr} — коэффициенты горизонтальной и вертикальной диффузии частиц; F_r — функция источника; α_r, β_r — коэффициенты, описывающие интенсивность превращения частиц одной фракции в другую, $\alpha_r \geq 0, \beta_r \geq 0$; γ_r — мощность внешнего источника частиц.

Уравнение (1) дополняется начальными условиями:

$$c_r(x, y, z, 0) = c_{r,0}(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \bar{G} \quad (2)$$

и граничными условиями:

– на боковых гранях параллелепипеда G :

$$c_r = c'_r, \quad \text{если } u_{\vec{n}} < 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial c_r}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \text{если } u_{\vec{n}} \geq 0 \quad (4)$$

($u_{\vec{n}}$ — проекция вектора скорости на внешнюю нормаль \vec{n} к границе, c'_r — известные значения концентраций);

– на верхнем и нижнем основаниях параллелепипеда G , соответственно:

$$\frac{\partial c_r}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial c_r}{\partial z} = - \frac{w_{g,r}}{\mu_{v,r}} c_r. \quad (6)$$

В задаче (1)–(6) осуществим переход от z -координатной системы к θ -координатной системе, для которой используем декартову систему координат в горизонтальной плоскости, а в качестве вертикальной переменной — безразмерную переменную $\theta, \theta \in [0; 1]$.

При переходе к θ -координатной системе используем формулу:

$$\theta = \frac{z - \eta}{h}, \quad x_\theta = x, \quad y_\theta = y, \quad (7)$$

где h — глубина, η — высота относительно свободной поверхности.

Методами, изложенными в работе [11], выполним преобразование с «запаздыванием» на временной сетке $\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N_t, N_t \tau = T\}$. В результате получена цепочка начально-краевых задач, связанных по начальным и конечным данным на каждом шаге временной сетки.

Уравнение (1) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_r^n}{\partial t} + C_0 c_r^n &= Dc_r^n + F_r^n, \quad t_{n-1} < t \leq t_n, \quad n = 1, 2, \dots, N_t, \\ C_0 c_r^n &\equiv \frac{1}{2} \left[u \frac{\partial c_r^n}{\partial x} + v \frac{\partial c_r^n}{\partial y} + w'_r \frac{1}{H} \frac{\partial c_r^n}{\partial \theta} + \frac{\partial (uc_r^n)}{\partial x} + \frac{\partial (vc_r^n)}{\partial y} + \frac{1}{H} \frac{\partial (w'_r c_r^n)}{\partial \theta} \right], \\ Dc_r^n &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{hr} \frac{\partial c_r^n}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{hr} \frac{\partial c_r^n}{\partial y} \right) + \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu_{v,r} \frac{\partial c_r^n}{\partial \theta} \right), \\ F_1^n &= (\alpha_2 c_2^{n-1}(x, y, \theta, t_{n-1}) - \beta_1 c_1^n) + \gamma_1 c_1^n, \quad F_R^n = (\beta_{R-1} c_{R-1}^{n-1}(x, y, \theta, t_{n-1}) - \alpha_R c_R^n) + \gamma_R c_R^n, \\ F_r^n &= (\beta_{r-1} c_{r-1}^{n-1}(x, y, \theta, t_{n-1}) - \alpha_r c_r^n) + (\alpha_{r+1} c_{r+1}^{n-1}(x, y, \theta, t_{n-1}) - \beta_r c_r^n) + \gamma_r c_r^n, \quad r = 2, \dots, R-1. \end{aligned} \quad (8)$$

Начальные и граничные условия (2)–(6) соответствующим образом примут вид:

$$c_r^1(x, y, \theta, 0) = c_{r,0}, (x, y, \theta, 0) \in \bar{G}, \quad (9)$$

$$c_r^n(x, y, \theta, t_{n-1}) = c_r^{n-1}(x, y, \theta, t_{n-1}), n = 2, \dots, N_t, (x, y, \theta) \in G, \quad (10)$$

$$c_r^n = c_r', \text{ если } u_{\bar{n}} < 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial c_r^n}{\partial \bar{n}} = 0, \text{ если } u_{\bar{n}} \geq 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial c_r^n}{\partial \theta} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial c_r^n}{\partial \theta} = -\frac{w_{g,r}}{\mu_{v,r}} c_r^n. \quad (13)$$

Доказана сходимость решений преобразованной системы к решению исходной задачи в норме гильбертова пространства $L2(G)$ со скоростью $O(\tau)$ при $\tau \rightarrow 0$ [11].

Для расчета компонент вектора скорости движения водной среды использована трехмерная модель гидродинамического обтекания рельефа дна с учетом донного трения и подъема уровня [12–14].

Результаты исследования. Будем предполагать существование и непрерывность производных

$\frac{\partial^4 c_r^n}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 c_r^n}{\partial y^4}, \frac{\partial^4 c_r^n}{\partial \theta^4}, \frac{\partial^2 c_r^n}{\partial t^2}$, а также непрерывности частных производных второго порядка: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w_r'}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 \mu_{h,r}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \mu_{h,r}}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \mu_{v,r}}{\partial \theta^2}$. Дополнительно считаем, что существуют и непрерывны смешанные частные производные

функции c_r^n по переменным x, y, θ до пятого порядка включительно и по переменным x, y, θ, t до второго порядка включительно, а также смешанные частные производные функций $u^n, v^n, w_r'^n$ по переменным x, y, θ до второго порядка включительно.

Для аппроксимации задачи (8)–(13) используем сетки:

$$\omega = \omega_x \times \omega_y \times \omega_\theta \text{ и } \bar{\omega} = \bar{\omega}_x \times \bar{\omega}_y \times \bar{\omega}_\theta,$$

где

$$\omega_x = \{x: x = ih_x; i = 1, \dots, N_x - 1; (N_x - 1)h_x \equiv L_x - h_x\}, \bar{\omega}_x = \{x: x = ih_x; i = 0, 1, \dots, N_x; N_x h_x \equiv L_x\},$$

$$\omega_y = \{y: y = jh_y; j = 1, \dots, N_y - 1; (N_y - 1)h_y \equiv L_y - h_y\}, \bar{\omega}_y = \{y: y = jh_y; j = 0, 1, \dots, N_y; N_y h_y \equiv L_y\},$$

$$\omega_\theta = \{\theta: \theta = kh_\theta; k = 1, \dots, N_\theta - 1; (N_\theta - 1)h_\theta \equiv 1 - h_\theta\}, \bar{\omega}_\theta = \{\theta: \theta = kh_\theta; k = 0, 1, \dots, N_\theta; N_\theta h_\theta \equiv 1\}.$$

В работе [15] получена разностная схема, аппроксимирующая задачу (8)–(13) во внутренних узлах сетки со вторым порядком точности по пространственным переменным и первым — по временной переменной. Разностная схема, аппроксимирующая уравнение (8), запишется в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^{n-1}(x_i, y_j, \theta_k)}{\tau} + C\bar{c}_r^n = D\bar{c}_r^n + \bar{F}_r^n, r = 1, 2, 3, (x_i, y_j, \theta_k) \in \omega, t_n \in \bar{\omega}_\tau, \\ & C\bar{c}_r^n = \frac{1}{2h_x} \left[u^n(x_i + 0,5h_x, y_j, \theta_k) \bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, \theta_k) - u^n(x_i - 0,5h_x, y_j, \theta_k) \bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, \theta_k) \right] + \\ & + \frac{1}{2h_y} \left[v^n(x_i, y_j + 0,5h_y, \theta_k) \bar{c}_r^n(x_i, y_j + h_y, \theta_k) - v^n(x_i, y_j - 0,5h_y, \theta_k) \bar{c}_r^n(x_i, y_j - h_y, \theta_k) \right] + \\ & + \frac{1}{2H(x, y)h_\theta} \left[w_r'^n(x_i, y_j, \theta_k + 0,5h_\theta) \bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k + h_\theta) - w_r'^n(x_i, y_j, \theta_k - 0,5h_\theta) \bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k - h_\theta) \right], \\ & D\bar{c}_r^n = \frac{1}{h_x^2} \left[\mu_{h,r}(x_i + 0,5h_x, y_j, \theta_k) (\bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k)) - \mu_{h,r}(x_i - 0,5h_x, y_j, \theta_k) \cdot \right. \\ & \cdot (\bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, \theta_k)) \left. \right] + \frac{1}{h_y^2} \left[\mu_{h,r}(x_i, y_j + 0,5h_y, \theta_k) (\bar{c}_r^n(x_i, y_j + h_y, \theta_k) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k)) - \right. \\ & - \mu_{h,r}(x_i, y_j - 0,5h_y, \theta_k) (\bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j - h_y, \theta_k)) \left. \right] + \frac{1}{H^2(x_i, y_j)h_\theta^2} \left[\mu_{v,r}(x_i, y_j, \theta_k + 0,5h_\theta) \cdot \right. \\ & \cdot (\bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k + h_\theta) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k)) - \mu_{v,r}(x_i, y_j, \theta_k - 0,5h_\theta) (\bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k - h_\theta)) \left. \right], \\ & \bar{F}_1^n = (\alpha_2 \bar{c}_2^{n-1}(x, y, \theta, t_{n-1}) - \beta_1 \bar{c}_1^n) + \gamma_1^n \bar{c}_1^n; \bar{F}_R^n = (\beta_{R-1} \bar{c}_{R-1}^{n-1}(x, y, \theta, t_{n-1}) - \alpha_R \bar{c}_R^n) + \gamma_R^n \bar{c}_R^n; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_r^n &= (\beta_{r-1} \bar{c}_{r-1}^{n-1}(x, y, \theta, t_{n-1}) - \alpha_r \bar{c}_r^n) + (\alpha_{r+1} \bar{c}_{r+1}^{n-1}(x, y, \theta, t_{n-1}) - \beta_r \bar{c}_r^n) + \gamma_r^n \bar{c}_r^n, \quad r = 2, \dots, R-1. \\ \bar{F}_3^n &= (\beta_2 \bar{c}_2^{n-1}(x, y, \theta, t_{n-1}) - \alpha_3 \bar{c}_3^n) + \gamma_3^n \bar{c}_3^n, \quad (x_i, y_j, \theta_k) \in \omega, \quad t_n \in \bar{\omega}_\tau. \end{aligned}$$

Здесь и далее черта над c_r^n и F_r^n означает их принадлежность классу сеточных функций.

Нетрудно убедиться, что для погрешности аппроксимации $\Psi^n(x_i, y_j, \theta_k)$ полученной разностной схемы в узлах сетки $\bar{\omega}_\tau \times \omega$ выполнено соотношение:

$$\Psi^n(x_i, y_j, \theta_k) = O(\tau + h^2), \quad n = 0, 1, \dots, N_t,$$

Отметим, что начальное условие (9) задаётся на сетке $\bar{\omega}_\tau \times \omega$ точно.

Перейдем к построению разностной схемы второго порядка точности для задачи транспорта взвешенного вещества в граничных узлах.

Будем считать, что выполнены условия:

$$k_{11} \leq \frac{h_x}{h_y} \leq k_{12}, \quad k_{21} \leq \frac{h_0}{h_x} \leq k_{22}, \quad k_{31} \leq \frac{h_0}{h_y} \leq k_{32}, \quad (15)$$

где $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}, k_{31}, k_{32}$ — некоторые положительные константы.

Для аппроксимации граничных условий введём расширенную сетку:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^+ &= \{(x_i, y_j, \theta_k), i = -1, 0, \dots, N_x + 1, j = -1, 0, \dots, N_y + 1, k = -1, 0, \dots, N_\theta + 1, x_i = ih_x; y_j = jh_y; \theta_k = kh_0, \\ &N_x h_x = L_x; N_y h_y = L_y; N_\theta h_0 = 1\}. \end{aligned}$$

Для узлов сетки $\bar{\omega}^+ \setminus \bar{\omega}$ значения компонент вектора скорости предполагается равным нулю:

$$\bar{c}_r^n(x_i, y_j, \theta_k) = 0, \quad \text{если } (x_i, y_j, \theta_k) \in \bar{\omega}^+ \setminus \bar{\omega}. \quad (16)$$

Кроме того, будем считать известными значения компонент вектора скоростей водной среды и гидравлической крупности частиц взвеси в узлах сетки $\bar{\omega}^+ \setminus \bar{\omega}$ с дробными значениями индексов: $u^n(-0,5h_x, y_j, \theta_k)$, $u^n(L_x + 0,5h_x, y_j, \theta_k)$, $v^n(x_i, -0,5h_y, \theta_k)$, $v^n(x_i, L_y + 0,5h_y, \theta_k)$ и $w_r^n(x_i, y_j, -0,5h_0)$, $w_r^n(x_i, y_j, 1 + 0,5h_0)$.

Граничные условия (10) аппроксимируются следующим образом:

$$\begin{cases} \bar{c}_r^n(0, y_j, \theta_k) = c'_r, \quad \text{если } u^n(0,5h_x, y_j, \theta_k) + u^n(-0,5h_x, y_j, \theta_k) > 0, \\ \bar{c}_r^n(L_x, y_j, \theta_k) = c'_r, \quad \text{если } u^n(L_x - 0,5h_x, y_j, \theta_k) + u^n(L_x + 0,5h_x, y_j, \theta_k) < 0, \quad (x_i, y_j, \theta_k) \in \bar{\omega}^+, \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \bar{c}_r^n(x_i, 0, \theta_k) = c'_r, \quad \text{если } v^n(x_i, 0,5h_y, \theta_k) + v^n(x_i, -0,5h_y, \theta_k) > 0, \\ \bar{c}_r^n(x_i, L_y, \theta_k) = c'_r, \quad \text{если } v^n(x_i, L_y - 0,5h_y, \theta_k) + v^n(x_i, L_y + 0,5h_y, \theta_k) < 0, \quad (x_i, y_j, \theta_k) \in \bar{\omega}^+. \end{cases} \quad (18)$$

Построение разностных схем для граничных условий (11)–(13) проведем на примере условия третьего рода — условия (13). Поскольку граничные условия (11) и (12) (условия второго рода) представляют частный случай условия (13), то построение разностных схем здесь можно будет провести с помощью аналогичных рассуждений.

При $\theta_k = 1$ граничное условие (13) равносильно следующему:

$$\frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} = - \frac{w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} c_r^n(x_i, y_j, 1). \quad (19)$$

На сетке $\bar{\omega}^+$ узлы $(x_i, y_j, 1)$ являются внутренними.

Разностная схема в узлах $(x_i, y_j, 1)$ сетки $\bar{\omega}^+$ запишется в виде:

$$\frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1) - \bar{c}_r^{n-1}(x_i, y_j, 1)}{\tau} + C \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1) = D \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1) + F_r^n(x_i, y_j, 1), \quad n = 1, \dots, N_t. \quad (20)$$

В своих рассуждениях ориентируемся на аппроксимацию рассматриваемого граничного условия по формуле центральных разностей и исключение из полученного выражения и уравнения (20) значений функции \bar{c}_r^n в фиктивном узле $(x_i, y_j, 1 + h_0)$.

В уравнении (20) функции $\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0)$ будут входить в слагаемые:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2H(x_i, y_j)h_0} [w_r^n(x_i, y_j, 1 + 0,5h_0) \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0) - w_r^n(x_i, y_j, 1 - 0,5h_0) \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0)], \\ &\frac{1}{H^2(x_i, y_j)h_0^2} [\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 + 0,5h_0) (\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)) - \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 - 0,5h_0) \cdot \end{aligned}$$

$$\cdot (\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0))],$$

которые мы обозначим как $C_0 \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)$ и $D_0 \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)$ соответственно.

В силу того, что на рассматриваемой границе $\psi|_{(x,y,1)} \equiv 0$, соотношение для $C_0 \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)$ может быть приведено к виду:

$$\frac{w_{g,r}}{2H(x_i, y_j)h_0} [\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0)].$$

Условие (19) запишем в виде:

$$\frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0)}{2h_0} = -\frac{2w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 + 0,5h_0) + \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 - 0,5h_0)} \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1) \quad (21)$$

и из него получим:

$$\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0) = \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0) - \frac{4w_{g,r}h_0}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 + 0,5h_0) + \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 - 0,5h_0)} \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1).$$

Для компактного изложения дальнейших рассуждений обозначим:

$$\varepsilon_r = \frac{2w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 + 0,5h_0) + \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 - 0,5h_0)}$$

и тогда

$$\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0) = \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0) - 2h_0 \varepsilon_r \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1). \quad (22)$$

Подставляя, полученное по формуле (22) значение $\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0)$ в выражение для $C_0 \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)$, получим аппроксимацию:

$$C_0 \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1) \equiv -\frac{w_{g,r} \varepsilon_r}{H(x_i, y_j)} \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1). \quad (23)$$

Как видно из равенства (23) $C_0 \bar{c}_r^n$ в узлах $(x_i, y_j, 1)$ рассчитывается точно.

Предварительные выкладки показали, что если воспользоваться равенством (22) для аппроксимации $D_0 \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)$, то будем иметь первый порядок погрешности по θ . Для аппроксимации данного оператора со вторым порядком по θ авторами будет предложен иной подход.

Разложив функции $c_r^n(x_i, y_j, 1 \pm h_0)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(x_i, y_j, 1)$, найдем выражение для левой части равенства (21):

$$\frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0)}{2h_0} = \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} + \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1) h_0^2}{\partial \theta^3} + O(h_0^4).$$

Последнее выражение с учётом условия (19) может быть преобразовано к виду:

$$\frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0)}{2h_0} = -\frac{w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} c_r^n(x_i, y_j, 1) + \frac{h_0^2}{6} \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^3} + O(h_0^4). \quad (24)$$

С помощью равенства (24) найдем значение функции \bar{c}_r^n в фиктивном узле $(x_i, y_j, 1 + h_0)$:

$$\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0) = \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0) - 2h_0 \varepsilon_r c_r^n(x_i, y_j, 1) + \frac{h_0^3}{3} \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^3} + O(h_0^5). \quad (25)$$

Используя равенство (25), составим выражение для $D_0 \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)$:

$$D_0 \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1) \equiv \frac{1}{H^2(x_i, y_j)h_0} [(\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 + 0,5h_0) + \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 - 0,5h_0))(\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)) - \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 + 0,5h_0) \left(2h_0 \varepsilon_r c_r^n(x_i, y_j, 1) - \frac{h_0^3}{3} \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^3} \right)].$$

Очевидно, что для достижения цели достаточно аппроксимировать производную $\frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^3}$ с первым порядком по θ . Построим аппроксимацию этой производной с заданной точностью.

Обе части уравнения (8) продифференцируем по переменной θ и из полученного равенства выразим производную $\frac{\partial^3 c_r^n}{\partial \theta^3}$. Далее перейдем к пределу при $\theta \rightarrow 1$ и, учитывая условие (36), найдем:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^3} = \frac{H^2(x_i, y_j)}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} \left[\frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial t \partial \theta} - \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1) \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2 \partial \theta} - \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1) \cdot \right. \\
 & \left. \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y^2 \partial \theta} + \left(u^n(x_i, y_j, 1) - \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta} + \left(v^n(x_i, y_j, 1) - \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial y} \right) \cdot \right. \\
 & \left. \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y \partial \theta} + \frac{1}{H(x_i, y_j)} \left(w_{g,r} - \frac{2}{H(x_i, y_j)} \frac{\partial \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} \right) \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^2} - \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} \cdot \right. \\
 & \left. \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2} - \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial u^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta} \right) \cdot \right. \\
 & \left. \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x} + \left(\frac{\partial v^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial y \partial \theta} \right) \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 v^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y \partial \theta} \right) \cdot \right. \\
 & \left. \frac{w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} \frac{\partial u^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x} - \frac{w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} \frac{\partial v^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y} + \frac{2w_{g,r}}{H^2(x_i, y_j) \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} \frac{\partial^2 \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^2} \right] \cdot c_r^n(x_i, y_j, 1) - \frac{\partial F_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} \Big].
 \end{aligned} \tag{26}$$

Очевидным образом, здесь выполнено:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_1^n}{\partial \theta} &= \left(-\alpha_2 \frac{w_{g,2}}{\mu_{v,2}(x_i, y_j, 1)} c_2^{n-1}(x_i, y_j, 1, t_{n-1}) + \beta_1 \frac{w_{g,1}}{\mu_{v,1}(x_i, y_j, 1)} c_1^n \right) + \gamma_1^n \frac{w_{g,1}}{\mu_{v,1}(x_i, y_j, 1)} c_1^n, \\
 F_R^n &= \left(-\beta_{R-1} \frac{w_{g,R-1}}{\mu_{v,R-1}(x_i, y_j, 1)} c_{R-1}^{n-1}(x_i, y_j, 1, t_{n-1}) + \alpha_R \frac{w_{g,R}}{\mu_{v,R}(x_i, y_j, 1)} c_R^n \right) - \gamma_R^n \frac{w_{g,R}}{\mu_{v,R}(x_i, y_j, 1)} c_R^n, \\
 \frac{\partial F_r^n}{\partial \theta} &= \left(-\beta_1 \frac{w_{g,r-1}}{\mu_{v,r-1}(x_i, y_j, 1)} c_{r-1}^{n-1}(x_i, y_j, 1, t_{n-1}) + \alpha_r \frac{w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} c_r^n \right) + \\
 &+ \left(-\alpha_{r+1} \frac{w_{g,r+1}}{\mu_{v,r+1}(x_i, y_j, 1)} c_{r+1}^{n-1}(x_i, y_j, 1, t_{n-1}) + \beta_r \frac{w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} c_r^n \right) - \gamma_r^n \frac{w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} c_r^n.
 \end{aligned}$$

Для удобства восприятия текста читателем, аппроксимацию выражения в прямых скобках из правой части выражения (26) проведем для каждого слагаемого отдельно. Изначально отметим, что для коэффициента $\frac{H^2(x_i, y_j)}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)}$, стоящего перед данной скобкой, используем выражение:

$$\frac{H^2(x_i, y_j)}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} = \frac{2H^2(x_i, y_j)}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 + 0,5h_0) + \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 - 0,5h_0)}. \tag{27}$$

Рассмотрим производную $\frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial t \partial \theta}$. Для неё имеем:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial t \partial \theta} &= \frac{1}{2h_0} \left(\frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0, t_n + \tau) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0, t_n - \tau)}{2\tau} \right. \\
 &\left. - \frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0, t_n + \tau) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0, t_n - \tau)}{2\tau} + O(\tau^2) \right) + O(h_0^2) = \\
 &= \frac{1}{2\tau} \left(\frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0, t_n + \tau) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0, t_n + \tau)}{2h_0} \right. \\
 &\left. - \frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0, t_n - \tau) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0, t_n - \tau)}{2h_0} \right) + \frac{1}{2h_0} O(\tau^2) + O(h_0^2).
 \end{aligned} \tag{28}$$

Используя равенство (28), могут быть записаны соотношения:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0, t_n \pm \tau) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0, t_n \pm \tau)}{2h_0} = \\
 &= -\frac{w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n \pm \tau) + \frac{h_0^2}{6} \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n \pm \tau)}{\partial \theta^3} + O(h_0^4).
 \end{aligned} \tag{29}$$

С помощью равенства (29) преобразуем равенство (28):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 c_r^n}{\partial t \partial \theta} = & -\frac{w_{g,r}}{2\tau\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} \left(c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n + \tau) - c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n - \tau) \right) + \\ & + \frac{h_0^2}{12\tau} \left(\frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n + \tau)}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n - \tau)}{\partial \theta^3} \right) + \frac{1}{2h_0} O(\tau^2) + O(h_0^2). \end{aligned} \quad (30)$$

Для выражения $\frac{w_{g,r}}{2\tau\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} (c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n + \tau) - c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n - \tau))$ имеем:

$$\frac{w_{g,r}}{2\tau\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} (c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n + \tau) - c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n - \tau)) = \frac{w_{g,r}}{2\tau\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n)}{\partial t} + O(\tau^2). \quad (31)$$

С учетом (31) преобразуем выражение (30). Получим:

$$\frac{\partial^2 c_r^n}{\partial t \partial \theta} = -\varepsilon_r \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n)}{\partial t} + \frac{1}{2\tau} \frac{h_0^2}{6} \left(\frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n + \tau)}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n - \tau)}{\partial \theta^3} \right) + \frac{1}{2h_0} O(\tau^2) + O(h_0^2 + \tau^2).$$

Далее, введя обозначение $\varphi(x_i, y_j, 1, t_n \pm \tau) = \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n \pm \tau)}{\partial \theta^3}$, последнее равенство запишем в виде:

$$\frac{\partial^2 c_r^n}{\partial t \partial \theta} = -\varepsilon_r \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n)}{\partial t} + \frac{h_0^2}{6} \left(\frac{\varphi(x_i, y_j, 1, t_n + \tau) - \varphi(x_i, y_j, 1, t_n - \tau)}{2\tau} \right) + \frac{1}{2h_0} O(\tau^2) + O(h_0^2 + \tau^2).$$

Откуда следует

$$\frac{\partial^2 c_r^n}{\partial t \partial \theta} = -\varepsilon_r \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n)}{\partial t} + \frac{h_0^2}{6} \left(\frac{\partial \varphi(x_i, y_j, 1, t_n)}{\partial t} + O(\tau^2) \right) + \frac{1}{2h_0} O(\tau^2) + O(h_0^2 + \tau^2).$$

В соответствии с условием Куранта величина τ ограничена и можно считать выполнимым равенство: $\frac{1}{2h_0} O(\tau^2) = O(h_0)$. С учётом сказанного, имеем:

$$\frac{\partial^2 c_r^n}{\partial t \partial \theta} = -\varepsilon_r \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n)}{\partial t} + \frac{h_0^2}{6} \frac{\partial \varphi(x_i, y_j, 1, t_n)}{\partial t} + O(h_0 + \tau^2).$$

Учитывая последнее соотношение при ограниченности производной $\frac{\partial \varphi(x_i, y_j, 1, t_n \pm \tau)}{\partial t} = \frac{\partial^4 c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n \pm \tau)}{\partial t \partial x^3}$, можем записать:

$$\frac{\partial^2 c_r^n}{\partial t \partial \theta} = -\varepsilon_r \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1, t_n)}{\partial t} + O(h_0 + \tau^2). \quad (32)$$

Далее рассмотрим производную $\frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2 \partial \theta}$.

С учетом неравенства $k_{21} \leq \frac{h_0}{h_x} \leq k_{22}$ из (16), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2 \partial \theta} = & \frac{1}{2h_0} \left(\frac{\partial^2 \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1+h_0)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1-h_0)}{\partial x^2} \right) + O(h_0^2) = \\ = & \frac{1}{2h_0} \left(\frac{\bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, 1+h_0) - 2\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1+h_0) + \bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1+h_0)}{h_x^2} - \right. \\ & \left. \frac{\bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, 1-h_0) - 2\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1-h_0) + \bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1-h_0)}{h_x^2} + O(h_x^2) \right) + O(h_0^2) = \\ = & \frac{1}{h_x^2} \left(\frac{\bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, 1+h_0) - \bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, 1-h_0)}{2h_0} - 2 \frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1+h_0) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1-h_0)}{2h_0} + \right. \\ & \left. + \frac{\bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1+h_0) - \bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1-h_0)}{2h_0} \right) + \frac{1}{2h_0} O(h_x^2) + O(h_0^2) = \\ = & \frac{1}{h_x^2} \left(\frac{\bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, 1+h_0) - \bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, 1-h_0)}{2h_0} - 2 \frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1+h_0) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1-h_0)}{2h_0} + \right. \\ & \left. + \frac{\bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1+h_0) - \bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1-h_0)}{2h_0} \right) + \frac{1}{2h_0} O(h_x^2) + O(h_0^2) = \\ = & \frac{1}{h_x^2} \left(\frac{\bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, 1+h_0) - \bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, 1-h_0)}{2h_0} - 2 \frac{\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1+h_0) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1-h_0)}{2h_0} + \right. \end{aligned} \quad (33)$$

$$+ \frac{\bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1 + h_0) - \bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1 - h_0)}{2h_0} \Big) + O(h_0^2 + h_x).$$

На основе равенства (24), может быть записано соотношение:

$$\frac{\bar{c}_r^n(x_i \pm h_x, y_j, 1 + h_0) - \bar{c}_r^n(x_i \pm h_x, y_j, 1 - h_0)}{2h_0} = -\varepsilon_r c_r^n(x_i \pm h_x, y_j, 1) + \frac{h_0^2}{6} \frac{\partial^3 c_r^n(x_i \pm h_x, y_j, 1)}{\partial \theta^3} + O(h_0^4). \quad (34)$$

Используя равенства (34), преобразуем соотношение (33) к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2 \partial \theta} &= -\frac{\varepsilon_r}{h_x^2} (c_r^n(x_i + h_x, y_j, 1) - 2c_r^n(x_i, y_j, 1) + c_r^n(x_i - h_x, y_j, 1)) + \\ &+ \frac{h_0^2}{6h_x^2} \left(\frac{\partial^3 c_r^n(x_i + h_x, y_j, 1)}{\partial \theta^3} - 2 \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^3 c_r^n(x_i - h_x, y_j, 1)}{\partial \theta^3} \right) + O(h_0^2 + h_x). \end{aligned} \quad (35)$$

Используя равенство:

$$\frac{1}{h_x^2} (c_r^n(x_i + h_x, y_j, 1) - 2c_r^n(x_i, y_j, 1) + c_r^n(x_i - h_x, y_j, 1)) = \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2} + O(h_x^2),$$

выражение (35) запишем следующим образом:

$$\frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2 \partial \theta} = -\varepsilon_r \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2} + \frac{h_0^2}{6h_x^2} \left(\frac{\partial^3 c_r^n(x_i + h_x, y_j, 1)}{\partial \theta^3} - 2 \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^3 c_r^n(x_i - h_x, y_j, 1)}{\partial \theta^3} \right) + O(h_0^2 + h_x).$$

Пусть $\varphi(x_i \pm h_x, y_j, 1) = \frac{\partial^3 c_r^n(x_i \pm h_x, y_j, 1)}{\partial \theta^3}$, $\varphi(x_i, y_j, 1) = \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^3}$. Тогда последнее равенство может быть записано в виде:

$$\frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2 \partial \theta} = -\varepsilon_r \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2} + \frac{h_0^2}{6} \left(\frac{\varphi(x_i + h_x, y_j, 1) - 2\varphi(x_i, y_j, 1) + \varphi(x_i - h_x, y_j, 1)}{h_x^2} \right) + O(h_0^2 + h_x). \quad (36)$$

Последнее равенство можно преобразовать к виду:

$$\frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2 \partial \theta} = -\varepsilon_r \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2} + \frac{h_0^2}{6} \left(\frac{\partial^2 \varphi(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2} + O(h_x^2) \right) + O(h_0^2 + h_x).$$

Учитывая последнее соотношение, при ограниченности производной $\frac{\partial^2 \varphi(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2} = \frac{\partial^5 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2 \partial \theta^3}$, для слагаемого $\mu_{h,r}(x_i, y_j, 1) \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2 \partial \theta}$ из правой части равенства (26), можем записать:

$$\mu_{h,r}(x_i, y_j, 1) \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2 \partial \theta} = -\varepsilon_r \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1) \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2} + O(h_0). \quad (37)$$

Проводя аналогичные рассуждения для производной $\frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta^2}$, получаем:

$$\mu_{h,r}(x_i, y_j, 1) \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y^2 \partial \theta} = -\varepsilon_r \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1) \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y^2} + O(h_0). \quad (38)$$

Обратимся к смешанной производной $\frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta}$. Придерживаемся представленной ранее логики рассуждений. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta} &= \frac{1}{2h_0} \left(\frac{\partial \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0)}{\partial x} - \frac{\partial \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0)}{\partial x} \right) + O(h_0^2) = \frac{1}{2h_0} \cdot \\ &\cdot \left(\frac{\bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, 1 + h_0) - \bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1 + h_0)}{2h_x} - \frac{\bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, 1 - h_0) - \bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1 - h_0)}{2h_x} \right) + \\ &+ O(h_x^2) \Big) + O(h_0^2) = \frac{1}{2h_x} \left(\frac{\bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, 1 + h_0) - \bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, 1 - h_0)}{2h_0} - \right. \end{aligned} \quad (39)$$

$$\frac{\bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1 + h_0) - \bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1 - h_0)}{2h_0} + \frac{1}{2h_0} O(h_x^2) + O(h_0^2).$$

На основе равенства (39) может быть записано соотношение:

$$\frac{\bar{c}_r^n(x_i \pm h_x, y_j, 1 + h_0) - \bar{c}_r^n(x_i \pm h_x, y_j, 1 - h_0)}{2h_0} = -\varepsilon_r c_r^n(x_i \pm h_x, y_j, 1) + \frac{h_0^2}{6} \frac{\partial^3 c_r^n(x_i \pm h_x, y_j, 1)}{\partial \theta^3} + O(h_0^4). \quad (40)$$

Используя равенства (40), преобразуем соотношение (39) к виду:

$$\frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta} = -\frac{\varepsilon_r}{2h_x} (c_r^n(x_i + h_x, y_j, 1) - c_r^n(x_i - h_x, y_j, 1)) + \frac{h_0^2}{12h_x} \left(\frac{\partial^3 c_r^n(x_i + h_x, y_j, 1)}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^3 c_r^n(x_i - h_x, y_j, 1)}{\partial \theta^3} \right) + O(h_0^2 + h_x). \quad (41)$$

Поскольку имеет место равенство

$$\frac{1}{2h_x} (c_r^n(x_i + h_x, y_j, 1) - c_r^n(x_i - h_x, y_j, 1)) = \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x} + O(h_x^2),$$

выражение (41) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta} = -\varepsilon_r \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x} + \frac{h_0^2}{12h_x} \left(\frac{\partial^3 c_r^n(x_i + h_x, y_j, 1)}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^3 c_r^n(x_i - h_x, y_j, 1)}{\partial \theta^3} \right) + O(h_0^2 + h_x).$$

Пусть $\varphi(x_i \pm h_x, y_j, 1) = \frac{\partial^3 c_r^n(x_i \pm h_x, y_j, 1)}{\partial \theta^3}$, $\varphi(x_i, y_j, 1) = \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^3}$. Тогда последнее равенство может быть записано в виде:

$$\frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta} = -\varepsilon_r \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x} + \frac{h_0^2}{6} \left(\frac{\varphi(x_i + h_x, y_j, 1) - \varphi(x_i - h_x, y_j, 1)}{2h_x} \right) + O(h_0^2 + h_x). \quad (42)$$

Последнее выражение можно преобразовать к виду:

$$\frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta} = -\varepsilon_r \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x} + \frac{h_0^2}{6} \left(\frac{\partial \varphi(x_i, y_j, 1)}{\partial x} + O(h_x^2) \right) + O(h_0^2 + h_x).$$

Учитывая последнее соотношение, при ограниченности производной $\frac{\partial \varphi(x_i, y_j, 1)}{\partial x} = \frac{\partial^4 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta^3}$, для слагаемого $\left(u^n(x_i, y_j, 1) - \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta}$ из правой части равенства (26), можем записать:

$$\left(u^n(x_i, y_j, 1) - \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta} = -\varepsilon_r \left(u^n(x_i, y_j, 1) - \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial x} \right) \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x} + O(h_0). \quad (43)$$

Проводя аналогичные рассуждения для производной $\frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y \partial \theta}$ относительно слагаемого $\left(v^n(x_i, y_j, 1) - \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta}$ из правой части равенства (26), можем получить соотношение:

$$\left(v^n(x_i, y_j, 1) - \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y \partial \theta} = -\varepsilon_r \left(v^n(x_i, y_j, 1) - \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial y} \right) \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y} + O(h_0). \quad (44)$$

Обратимся к производной $\frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^2}$. Имеем:

$$\frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^2} = \frac{1}{2h_0} \left(\frac{\partial \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0)}{\partial \theta} - \frac{\partial \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0)}{\partial \theta} \right) + O(h_0^2). \quad (45)$$

Используя выражение (25), в котором определяется значение функции \bar{c}_r^n в фиктивном узле $(x_i, y_j, 1 + h_0)$, находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0)}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0) + 2h_0 \varepsilon_r c_r^n(x_i, y_j, 1) - \frac{h_0^3}{3} \frac{\partial^3 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^3} + O(h_0^5) \right) = \\ &= \frac{\partial \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0)}{\partial \theta} + 2h_0 \varepsilon_r \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} - \frac{h_0^3}{3} \frac{\partial^4 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^4} + O(h_0^4). \end{aligned}$$

С учетом последнего равенства, приводим равенство (45) к виду:

$$\frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^2} = -\varepsilon_r \frac{\partial \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} + O(h_0). \quad (46)$$

Нетрудно получить следующие аппроксимации с точностью $O(h_x)$ и $O(h_y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x^2} &\cong \frac{1}{h_0 h_x^2} (\mu_{h,r}(x_i, y_j, 0, 5h_0) - \mu_{v,r}(x_i, y_j, -0, 5h_0)) \cdot \\ &\cdot (\bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, 1) - 2\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1) + \bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1)), \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} \frac{\partial^2 c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y^2} &\cong \frac{1}{h_0 h_y^2} (\mu_{h,r}(x_i, y_j, 0, 5h_0) - \mu_{v,r}(x_i, y_j, -0, 5h_0)) \cdot \\ &\cdot (\bar{c}_r^n(x_i, y_j + h_y, 1) - 2\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1) + \bar{c}_r^n(x_i, y_j - h_y, 1)), \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta} \right) \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x} &\cong \frac{1}{2h_x} \left[\frac{1}{h_0} (u^n(x_i, y_j, 1 + 0, 5h_0) - u^n(x_i, y_j, 1 - 0, 5h_0)) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{h_x h_0} (\mu_{v,r}(x_i + 0, 5h_x, y_j, 1 + 0, 5h_0) - \mu_{v,r}(x_i - 0, 5h_x, y_j, 1 + 0, 5h_0)) - \right. \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} &\left. - \mu_{v,r}(x_i + 0, 5h_x, y_j, 1 - 0, 5h_0) + \mu_{v,r}(x_i - 0, 5h_x, y_j, 1 - 0, 5h_0) \right] (\bar{c}_r^n(x_i + h_x, y_j, 1) - \bar{c}_r^n(x_i - h_x, y_j, 1)), \\ \left(\frac{\partial v^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \mu_{h,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial y \partial \theta} \right) \frac{\partial c_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y} &\cong \frac{1}{2h_y} \left[\frac{1}{h_0} (v^n(x_i, y_j, 1 + 0, 5h_0) - v^n(x_i, y_j, 1 - 0, 5h_0)) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{h_y h_0} (\mu_{v,r}(x_i, y_j + 0, 5h_y, 1 + 0, 5h_0) - \mu_{v,r}(x_i, y_j - 0, 5h_y, 1 + 0, 5h_0)) - \right. \\ &\left. - \mu_{v,r}(x_i, y_j + 0, 5h_y, 1 - 0, 5h_0) + \mu_{v,r}(x_i, y_j - 0, 5h_y, 1 - 0, 5h_0) \right] (\bar{c}_r^n(x_i, y_j + h_y, 1) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j - h_y, 1)). \end{aligned} \quad (50)$$

При аппроксимации $c_r^n(x_i, y_j, 1)$ заменяем её на сеточный аналог $\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)$.

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x \partial \theta} c_r^n(x_i, y_j, 1) &\cong \frac{1}{h_0} \left(\frac{u^n(x_i + 0, 5h_x, y_j, 1 + 0, 5h_0) - u^n(x_i - 0, 5h_x, y_j, 1 + 0, 5h_0)}{h_x} - \right. \\ &\left. \frac{u^n(x_i + 0, 5h_x, y_j, 1 - 0, 5h_0) - u^n(x_i - 0, 5h_x, y_j, 1 - 0, 5h_0)}{h_x} \right) \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1), \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y \partial \theta} c_r^n(x_i, y_j, 1) &\cong \frac{1}{h_0} \left(\frac{v^n(x_i, y_j + 0, 5h_y, 1 + 0, 5h_0) - v^n(x_i, y_j - 0, 5h_y, 1 + 0, 5h_0)}{h_y} - \right. \\ &\left. \frac{v^n(x_i, y_j + 0, 5h_y, 1 - 0, 5h_0) - v^n(x_i, y_j - 0, 5h_y, 1 - 0, 5h_0)}{h_y} \right) \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1), \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \frac{w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} \frac{\partial u^n(x_i, y_j, 1)}{\partial x} c_r^n(x_i, y_j, 1) &\cong \frac{2w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 + 0, 5h_0) + \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 - 0, 5h_0)} \cdot \\ &\cdot \left(\frac{u^n(x_i + 0, 5h_x, y_j, 1) - u^n(x_i - 0, 5h_x, y_j, 1)}{h_x} \right) \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1), \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \frac{w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} \frac{\partial v^n(x_i, y_j, 1)}{\partial y} c_r^n(x_i, y_j, 1) &\cong \frac{2w_{g,r}}{\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 + 0, 5h_0) + \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 - 0, 5h_0)} \cdot \\ &\cdot \left(\frac{v^n(x_i, y_j + 0, 5h_y, 1) - v^n(x_i, y_j - 0, 5h_y, 1)}{h_y} \right) \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1), \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \frac{2w_{g,r}}{H^2(x_i, y_j) \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)} \frac{\partial^2 \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^2} c_r^n(x_i, y_j, 1) &\cong \frac{2w_{g,r}}{H^2(x_i, y_j) (\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 + 0, 5h_0) + \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 - 0, 5h_0))} \cdot \\ &\cdot \frac{1}{h_0^2} (\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 + 0, 5h_0) - 2\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1) + \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 - 0, 5h_0)) \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1). \end{aligned} \quad (55)$$

В результате подстановки в равенство (26) аппроксимаций, выполненных выражениями (32), (37), (38), (43)–(55) с погрешностью $O(h_0)$ (или выше) и перегруппировки слагаемых, получаем:

$$\frac{\partial^3 \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)}{\partial \theta^3} = \mathfrak{D}_1 + O(h_0), \quad (56)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1 = & \mathfrak{D}_{10} (\mathfrak{D}_{11} \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0) + \mathfrak{D}_{12} \bar{c}_r^n(x_i, y_j + h_y, 1) + \mathfrak{D}_{13} \bar{c}_r^n(x_i, y_j - h_y, 1) + \mathfrak{D}_{14} \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 + h_0) + \\ & + \mathfrak{D}_{15} \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0) + \mathfrak{D}_{16} \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)). \end{aligned}$$

После подстановки полученных представлений для коэффициентов \mathfrak{D}_{1i} , $i = 1 \dots, 6$ в формулу аппроксимации, приведенную выше, можно получить итоговую аппроксимацию граничного условия третьего рода, которая здесь не приводится ввиду ее громоздкости.

Используя равенство (56) для $D_0 \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)$, можем составить выражение:

$$\begin{aligned} D_0 \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1) \cong & \frac{1}{H^2(x_i, y_j) h_0^2} \left[(\mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 + 0,5h_0) + \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 - 0,5h_0)) \cdot \right. \\ & \left. (\bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1 - h_0) - \bar{c}_r^n(x_i, y_j, 1)) - \mu_{v,r}(x_i, y_j, 1 + 0,5h_0) \left(2h_0 \varepsilon_r c_r^n(x_i, y_j, 1) - \frac{h_0^3}{3} \mathfrak{D}_1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (57)$$

Погрешность аппроксимации схемы (57) в граничных узлах сетки $\bar{\omega}^+$ при $\theta_k = 1$ равна $O(\tau + h_0^2)$.

Обсуждение. В работе рассмотрены вопросы, связанные с разностной аппроксимацией пространственно-трехмерной задачи транспорта многофракционного взвешенного вещества. При аппроксимации этой задачи возникают определенные трудности из-за необходимости обеспечить требуемый порядок аппроксимации вплоть до границы. Предложены методы аппроксимации задачи со вторым порядком точности по пространственным переменным и первым — по временной переменной. Требуют особого внимания исследования, связанные с аппроксимацией граничных условий второго и третьего рода. Для этих целей авторами предложены методы, базирующиеся на аппроксимациях граничных условий по формуле центральных разностей разностей с последующим дифференцированием обеих частей уравнений диффузии-конвекции и исключением из полученных выражений функций решения в фиктивных узлах расширенной сетки.

Заключение. Дальнейшие исследования авторов могут быть направлены на исследование построенных разностных схем с учетом физически мотивированных ограничений на шаг временной сетки τ и сеточное число Пекле.

Список литературы / References

1. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Бондаренко Ю.С. Оценка погрешности решения уравнения на основе схем с весами. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2011;8(121):6–13.
Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Bondarenko Yu.S. Error estimation of the solution to the equation based on weighted schemes. *Izvestiya YUFU. Technical Sciences*. 2011;8(121):6–13. (In Russ.)
2. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Построение дискретной двумерной математической модели транспорта наносов. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2011;8(121):32–44.
Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A. Construction of a discrete two-dimensional mathematical model of sediment transport. *Izvestiya YUFU. Technical Sciences*. 2011;8(121):32–44. (In Russ.)
3. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А., Сидорякина В.В., Проценко С.В. Параллельные алгоритмы решения задачи динамики изменения рельефа дна в прибрежных системах. *Вычислительные методы и программирование*. 2020;21(3):196–206. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v21r318>
Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A., Sidorakina V.V., Protsenko S.V. Parallel algorithms for solving the problem of dynamics of bottom relief changes in coastal systems. *Computational Methods and Programming*. 2020;21(3):196–206. (In Russ.) <https://doi.org/10.26089/NumMet.v21r318>
4. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А., Сидорякина В.В., Проценко С.В. Комплекс объединенных моделей транспорта наносов и взвесей с учетом трехмерных гидродинамических процессов в прибрежной зоне. *Математическое моделирование*. 2020;32(2):3–23. <https://doi.org/10.20948/mm-2020-02-01>
Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A., Sidorakina V.V., Protsenko S.V. A complex of combined models for sediment and suspension transport considering three-dimensional hydrodynamic processes in the coastal zone. *Mathematical Modelling*. 2020;32(2):3–23. (In Russ.) <https://doi.org/10.20948/mm-2020-02-01>
5. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko S.V., Sidoryakina V.V. Coupled 3D wave and 2D bottom deposit transportation models for the prediction of harmful phenomena in coastal zone. In: *Trends in the Analysis and Design of Marine Structures — Proceedings of the 7th International Conference on Marine Structures, MARSTRUCT 2019*. 2019. P. 597–603. <https://doi.org/10.1201/9780429298875-68>
6. Сухинов А.И., Сидорякина В.В. Построение и исследование корректности математической модели транспорта и осаждения взвесей с учетом изменений рельефа дна. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2018;2(2):76–90. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2018-2-76-90>

Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V. Development and analysis of the correctness of a mathematical model for the transport and sedimentation of suspensions, taking into account changes in bottom relief. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2018;2(2):76–90. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2018-2-76-90>

7. Sukhinov A.I., Sukhinov A.A., Sidoryakina V.V. Uniqueness of solving the problem of transport and sedimentation of multicomponent suspensions in coastal systems. In: *Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems*. Bristol, 2020;1479:012081. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012081>

8. Сухинов А.И., Сидорякина В.В. Построение и исследование корректности математической модели транспорта и осаждения взвесей с учетом изменения рельефа дна. *Вестник Донского государственного технического университета*. 2018;18(4):350–361. <https://doi.org/10.23947/1992-5980-2018-18-4-350-361>

Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V. Development and correctness analysis of the mathematical model of transport and suspension sedimentation depending on bottom relief variation. *Vestnik of Don State Technical University*. 2018;18(4):350–361. <https://doi.org/10.23947/1992-5980-2018-18-4-350-361>

9. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Сидорякина В.В., Проценко С.В., Атаян А.М. Локально-двумерные схемы расщепления для параллельного решения трехмерной задачи транспорта взвешенного вещества. *Математическая физика и компьютерное моделирование*. 2021;24(2):38–53. <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2021.2.4>

Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Sidoryakina V.V., Protsenko S.V., Atayan A.M. Locally two-dimensional splitting schemes for parallel solving of the three-dimensional problem of suspended substance transport. *Mathematical Physics and Computer Simulation*. 2021;24(2):38–53. (In Russ.) <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2021.2.4>

10. Попов И.В. Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для нелинейного уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости. *Препринты Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН*. 2017;68:1–22. <https://doi.org/10.20948/prepr-2017-68>

Popov I.V. Construction of a difference scheme of increased order of approximation for a nonlinear transport equation using adaptive artificial viscosity. *Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences*. 2017;68:1–22. (In Russ.) <https://doi.org/10.20948/prepr-2017-68>

11. Сидорякина В.В., Сухинов А.И. Построение и исследование близости решений в L2 двух краевых задач для модели переноса многокомпонентных взвесей в прибрежных системах. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2023;63(10):1721–1732. <https://doi.org/10.1134/S0965542523100111>

Sidoryakina V.V., Sukhinov A.I. Construction and analysis of the proximity of solutions in L2 for two boundary problems in the model of multicomponent suspension transport in coastal systems. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2023;63(10):1721–1732. (In Russ.) <https://doi.org/10.1134/S0965542523100111>

12. Литвинов В.Н., Чистяков А.Е., Никитина А.В., Атаян А.М., Кузнецова И.Ю. Математическое моделирование гидродинамических процессов Азовского моря на многопроцессорной вычислительной системе. *Компьютерные исследования и моделирование*. 2024;16(3):647–672. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2024-16-3-647-672>

Litvinov V.N., Chistyakov A.E., Nikitina A.V., Atayan A.M., Kuznetsova I.Yu. Mathematical modeling of hydrodynamics problems of the Azov Sea on a multiprocessor computer system. *Computer Research and Modelling*. 2024;16(3):647–672. (In Russ.) <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2024-16-3-647-672>

13. Chistyakov A.E., Nikitina A.V., Kuznetsova I.Yu., Rakhimbaeva E.O., Porksheyan M.V. Investigation of the approximation error of the difference scheme for the mathematical model of hydrodynamics. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023;44(5):1839–1846. (In Russ.) <https://doi.org/10.1134/S1995080223050128>

14. Сидорякина В.В., Проценко С.В. Применение различных типов аппроксимаций турбулентного обмена для анализа гидродинамического воздействия волн на дно водохранилища. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2021;5(2):80–87. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2021-1-2-80-87>

Sidoryakina V.V., Protsenko S.V. Various approximations of vertical turbulent exchange parameterization for the analysis of the waves hydrodynamic impact on the bottom of the reservoir. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2021;5(2):80–87. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2021-1-2-80-87>

15. Сидорякина В.В. Построение разностных схем второго порядка точности для задач диффузии-конвекции мультифракционных взвесей в прибрежных морских системах. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(3):43–59. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-3-43-59>

Sidoryakina V.V. Construction of Second-Order Finite Difference Schemes for Diffusion-Convection Problems of Multifractional Suspensions in Coastal Marine Systems. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(3):43–59. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-3-43-59>

Об авторах:

Александр Иванович Сухинов, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, директор НИИ Математического моделирования и прогнозирования сложных систем Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID](https://orcid.org/), [SPIN-код](https://scopus.com/), [ScopusID](https://scopus.com/), [ResearcherID](https://orcid.org/), [MathSciNet](https://mathsci.net/), sukhinov@gmail.com

Валентина Владимировна Сидорякина, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедры математики и информатики Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID](https://orcid.org/), [SPIN-код](https://scopus.com/), [ResearcherID](https://orcid.org/), [MathSciNet](https://mathsci.net/), [ScopusID](https://scopus.com/), cvv9@mail.ru

Заявленный вклад авторов:

А.И. Сушинов: общее научное руководство; постановка задачи; формулировка идей исследования, целей и задач; разработка методологии.

В.В. Сидорякина: получение расчетных формул; формулировка достигнутых результатов и описание их значимости.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Alexander I. Sukhinov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Director of the Research Institute of Mathematical Modeling and Forecasting of Complex Systems, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [MathSciNet](#), sukhinov@gmail.com

Valentina V. Sidoryakina, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), [ResearcherID](#), [MathSciNet](#), [ScopusID](#), cvv9@mail.ru

Contributions of the authors:

A.I. Sukhinov: general scientific guidance; problem statement; formulation of research ideas, goals and objectives; development of methodology.

V.V. Sidoryakina: obtaining calculation formulas; formulation of achieved results and description of their significance.

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 07.08.2025

Поступила после рецензирования / Revised 09.09.2025

Принята к публикации / Accepted 22.09.2025

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

COMPUTATIONAL MATHEMATICS



УДК 519.6

Оригинальное эмпирическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-30-43>


Моделирование циркуляции в аневризмах кровеносных сосудов

Н.К. Волосова¹ , К.А. Волосов² , А.К. Волосова² , М.И. Карлов³,
Д.Ф. Пастухов⁴ ✉, Ю.Ф. Пастухов⁴ 

¹ Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Российская Федерация

² Российский университет транспорта, г. Москва, Российская Федерация

³ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
г. Долгопрудный, Российская Федерация

⁴ Полоцкий государственный университет им. Евфросинии Полоцкой, г. Новополоцк, Республика Беларусь

✉ dmitrij.pastuhov@mail.ru

Аннотация

Введение. Численно решается двумерная гидродинамическая задача в переменных «функция тока — вихрь» в открытой прямоугольной каверне, моделирующей течение крови в аневризме кровеносного сосуда. Предложены два алгоритма решения задачи для чисел Рейнольдса $Re < 1$ и для чисел $Re \geq 1$.

Материалы и методы. Для ускорения численного решения задачи с явной разностной схемой уравнения динамики вихря использовался метод торможения начальных условий, метод n -кратного расщепления явной разностной схемы ($n = 100, 200$) и наличие плоскости симметрии прямоугольной области каверны — аневризмы. В методе расщепления используется максимальный шаг времени, пропорциональный квадрату координатного шага без нарушения спектральной устойчивости явной схемы в уравнении вихря. На половине прямоугольной аневризмы рассматривались симметричные решения и применялась равномерная сетка 100×50 с равным шагом $h_1 = h_2 = 0,01$. Обратная матрица для решения уравнения Пуассона в переменных «функция тока — вихрь» за конечное число элементарных операций вычислялась библиотекой Msimsl.

Результаты исследования. Численное решение задачи показало, что число и расположение областей циркуляции крови в аневризме при небольших числах Рейнольдса зависят от параметра отношения диаметра сосуда к диаметру аневризмы. Именно при небольшом значении этого параметра аневризму занимает один большой вихрь и сужает просвет сосуда в случае образования тромба внутри аневризмы. Сужение диаметра трубки тока крови внутри аневризмы достигает 34 %. Обнаружено, что формирование гидродинамической структуры в аневризме происходит за время, малое (0,002 %) по сравнению с периодом между пульсационными волнами (1с). Впервые предложено краевое условие с четвертым порядком погрешности для связи скорости, вихря и функции тока.






Обсуждение. Аппроксимация уравнений в системах (4) и (22) имеет шестой порядок погрешности во внутренних и четвертый в граничных узлах. Задача решена также для движения крови в артериях при больших числах Рейнольдса ($Re = 1500$). Ее решение показывает, что в плоскости симметрии аневризмы образуется цепочка связанных вихрей с чередованием знака функции вихря и сносимых кровью вдоль кровеносного сосуда.

Заключение. Сформулированные в работе начально-краевые задачи (4), (22) позволяют качественно моделировать движение крови в аневризмах капилляров, артериол и артерий кровеносных сосудов при малых и больших скоростях, а также движение крови в элементах медицинского оборудования.

Ключевые слова: гидродинамика, численные методы, уравнения в частных производных, начально-краевая задача, аневризма

Для цитирования. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Моделирование циркуляции в аневризмах кровеносных сосудов. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(3):30–43. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-30-43>

Modelling Circulation in Blood Vessel Aneurysms

Natalya K. Volosova¹ , Konstantin A. Volosov² , Aleksandra K. Volosova² , Mikhail I. Karlov³,
Dmitriy F. Pastukhov⁴ ✉, Yuriy F. Pastukhov⁴ 

¹ MGTU named after. N.E. Bauman, Moscow, Russian Federation

² Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation

³ Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russian Federation

⁴ Polotsk State University named after Euphrosyne of Polotsk, Novopolotsk, Republic of Belarus

✉ dmitrij.pastuhov@mail.ru

Abstract

Introduction. A two-dimensional hydrodynamic problem in the “stream function–vorticity” variables is numerically solved in an open rectangular cavity simulating blood flow in a blood vessel aneurysm. Two solution algorithms are proposed for Reynolds numbers $Re < 1$ and for $Re \geq 1$.

Materials and Methods. To accelerate the numerical solution with an explicit finite-difference scheme for the vorticity dynamics equation, the initial condition damping method, the n -fold splitting method of the explicit finite-difference scheme ($n = 100, 200$), and the symmetry plane of the rectangular cavity–aneurysm were employed. In the splitting method, the maximum time step proportional to the square of the spatial step was used without violating the spectral stability of the explicit scheme in the vorticity equation. On half of the rectangular aneurysm, symmetric solutions were considered with a uniform 100×50 grid and equal steps $h_1 = h_2 = 0.01$. The inverse matrix for solving the Poisson equation in the “stream function–vorticity” variables with a finite number of elementary operations was computed using the MSIMSL library.

Results. The numerical solution showed that the number and location of circulation regions in the aneurysm at small Reynolds numbers depend on the ratio of the vessel diameter to the aneurysm diameter. At small values of this parameter, the aneurysm contains a single large vortex that narrows the vessel lumen in the case of thrombus formation inside the aneurysm. The narrowing of the blood flow tube inside the aneurysm reaches 34%. It was found that the formation of the hydrodynamic structure in the aneurysm occurs in a time negligible (0.002%) compared to the period between pulsation waves (1 s). For the first time, a boundary condition with fourth-order accuracy was proposed to relate velocity, vorticity, and stream function.

Discussion. The approximation of the equations in systems (4) and (22) has sixth-order accuracy at interior nodes and fourth-order accuracy at boundary nodes. The problem was also solved for blood motion in arteries at high Reynolds numbers ($Re = 1500$). The solution shows that in the aneurysm symmetry plane a chain of connected vortices is formed with alternating signs of vorticity, carried by the blood flow along the vessel.

Conclusion. The initial–boundary value problems (4), (22) formulated in this work make it possible to qualitatively model blood flow in aneurysms of capillaries, arterioles, and arteries at low and high velocities, as well as blood motion in elements of medical equipment.

Keywords: hydrodynamics, numerical methods, partial differential equations, initial–boundary value problem, aneurysm

For Citation. Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Karlov M.I., Pastukhov D.F., Pastukhov Yu.F. Modelling Circulation in Blood Vessel Aneurysms. *Computation Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(3):30–43. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-30-43>

Введение. В работе моделируется двумерная гидродинамическая задача движения крови в открытой прямоугольной каверне в переменных «функция тока — вихрь» [1]. Поле скорости имеет четыре угловые особые точки в отрезках входа и выхода потока в каверну — аневризму, так как линии тока в этих точках могут претерпевать излом под углом 90 градусов. В связи с этим в данных точках появляются высокие градиенты скорости, а точки являются источниками вихрей при высокой скорости движения крови. Данная работа использует метод торможения начального поля скорости, описанного в работе [2]. Работы [3–7], [8] связаны с решением двумерных гидродинамических задач или с их аппроксимацией с высокой степенью точности. Работа [7] связана с задачей движения крови и ее свертыванием в кровеносных сосудах. В настоящей работе используется метод n -кратного расщепления уравнения вихря ($n = 100, 200$) с явной разностной схемой, описанный в [9], а из-за симметрии прямоугольной каверны (аневризмы) можно вдвое ускорить решение задачи, используя только половину прямоугольника.

Материалы и методы

Постановка задачи. В двумерной задаче рассматривается течение жидкости (крови) в прямоугольной каверне-аневризме, определяющей геометрию задачи. Поэтому удобно выбрать прямоугольную систему координат с равномерной сеткой $n_1 \times n_2 = 100 \times 100$.

Получим формулу Пуазейля для профиля скорости $u(y)$ плоского потока жидкости между двумя параллельными прямоугольными пластинами. На рис. 1 центр прямоугольной системы координат совпадает с центром симметрии жидкого параллелепипеда со сторонами $2y \cdot l \cdot b$, ребро длиной b перпендикулярно плоскости рисунка. На левую и правую грани действует давление p_1, p_2 соответственно, величина давления постоянна вдоль оси u и

меняется в направлении оси x . Разность сил давлений равна $\Delta F_p = (p_1 - p_2)2yb = \frac{p_1 - p_2}{l} 2ybl = \frac{\Delta p}{\Delta x} 2ybl$. Разность сил ΔF_p уравновешивается силой вязкого трения, действующей на нижнюю и верхнюю грани бруска.

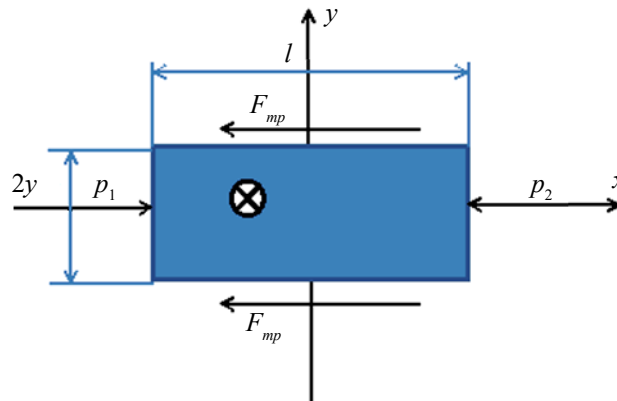


Рис. 1. Иллюстрация формулы Пуазейля для плоского потока жидкости

Разность сил составляет

$$\Delta F_p = \frac{\Delta p}{\Delta x} 2ybl = 2F_{mp} = 2bl\mu \frac{du}{dy} \Leftrightarrow \frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} y \Leftrightarrow u(y) = C_1 y^2 + C_2, C_1 = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} = const.$$

Обозначим полуширину плоского канала для движения жидкости Δ , скорость жидкости на плоскости симметрии u_{max} и определим неизвестные константы C_1, C_2 из условия прилипания жидкости к твердым прямоугольным пластинам:

$$u(\Delta) = 0 \Leftrightarrow C_1 \Delta^2 + C_2 = 0, u(0) = C_2 = u_{max}, C_1 = -\frac{C_2}{\Delta^2} = -\frac{u_{max}}{\Delta^2}, u(y) = u_{max} \left(1 - \frac{y^2}{\Delta^2} \right). \quad (1)$$

Аневризма представляет собой небольшой участок кровеносного сосуда, диаметр которого обычно превышает в 2 раза диаметр основного сосуда. Длина аневризмы L обычно сопоставима с ее диаметром $2H$, H — полуширина аневризмы. Для упрощения задачи в прямоугольной системе координат предположим, что в бесконечной прямоугольной области между верхней и нижней пластинами формируется плоский поток жидкости с профилем скорости (1). Прямоугольную каверну с входом и выходом назовем открытой.

Для простоты решения также предположим, что профиль скорости (1) сохраняется при входе потока в прямоугольную аневризму и при выходе из нее в узкой симметричной полосе относительно плоскости Oxz шириной $2\Delta = 2d$. Для ускорения численного решения задачи благодаря симметрии рассмотрим половину аневризмы и две половины прямоугольного канала, подводящих и выводящих жидкость из аневризмы. Согласно принципу симметрии, ищем решения, в которых на оси симметрии скорость частиц жидкости направлена вдоль оси симметрии в каждой точке оси, скорость может изменяться численно, оставаясь неизменной по направлению. На рис. 2 начало координатной системы совпадает с нижним левым углом аневризмы, ось x направлена вправо, а ось y — вверх. Обозначим через $(u(x,y), v(x,y))$ вектор скорости жидкой частицы, причем на твердой границе, то есть на нижнем отрезке и нижней части боковых отрезков высотой $H-d$ прямоугольной каверны скорость равна нулю (условие прилипания частиц жидкости), поэтому функцию тока на указанной границе можно положить равной нулю. Также нормальная компонента скорости равна нулю на верхнем отрезке прямоугольной каверны $v(x,H) = 0, 0 \leq x \leq L$.

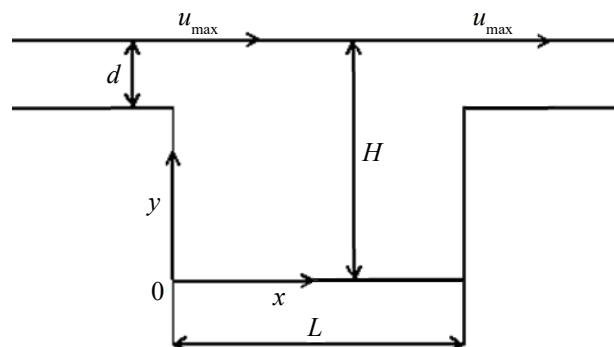


Рис. 2. Геометрия области для численно решаемой задачи

Необходимо изменить краевые условия для скорости и функции тока в постановке классической гидродинамической задачи в переменных «функция тока — вихрь» для прямоугольной каверны, рассмотренной в работах [1, 2].

Перепишем формулу для скорости (1) с учетом переноса начала координат на рис. 2:

$$y = \bar{y} + H, u(\bar{y}) = u(y - H) = u_{\max} \left(1 - \frac{(y - H)^2}{\Delta^2} \right), y \in [H - \Delta, H]. \quad (2)$$

Интегрируя формулу (2) по переменной y с учетом уравнения $u = \psi_y$, получим зависимость функции тока в зазорах на боковых стенках каверны:

$$\begin{aligned} \psi(y) &= u_{\max} \left(y - \frac{(y - H)^3}{3\Delta^2} \right) + C_0, \psi(H - \Delta) = 0 \Leftrightarrow C_0 = -u_{\max} \left(H - \frac{2}{3}\Delta \right), \\ \psi(0, y) = \psi(L, y) &= \begin{cases} 0, y \in [0, H - \Delta], \\ u_{\max} \left(y + \frac{2}{3}\Delta - H - \frac{(y - H)^3}{3\Delta^2} \right), y \in [H - \Delta, H]. \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

Как и в работе [2] обозначаем длину L , время $\frac{L}{u_{\max}}$, скорость u_{\max} , функции тока Lu_{\max} , вихря $\frac{u_{\max}}{L}$, числа Рейнольдса Re . Обозначим безразмерные переменные: \bar{x} — горизонтальная координата, \bar{y} — вертикальная координата, $\bar{\psi}, \bar{w}$ — функции тока и вихря соответственно, (\bar{u}, \bar{v}) — вектор скорости, \bar{t} — время, задав их формулами:

$$\begin{aligned} 0 \leq \bar{x} = \frac{x}{L} \leq 1, \quad 0 \leq \bar{y} = \frac{y}{L} \leq k = \frac{H}{L}, \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{\psi_{\max}}, \quad \psi_{\max} = Lu_{\max}, \\ \bar{u} = \frac{u}{u_{\max}}, \quad \bar{v} = \frac{v}{u_{\max}}, \quad \bar{w} = \frac{w}{w_{\max}}, \quad w_{\max} = \frac{u_{\max}}{L}, \\ \bar{t} = \frac{t}{T}, \quad T = \frac{L}{u_{\max}}, \quad Re = \frac{u_{\max} L}{\nu}. \end{aligned}$$

Кинематическая вязкость крови равна $\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{3,5 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}}{1050 \text{ кг} / \text{м}^3} = 3,33(3) \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$.

Система уравнений гидродинамики с безразмерными переменными и функциями с учетом работ [1, 2] в открытой каверне с большими числами Re :

$$\left\{ \begin{aligned} &\bar{\psi}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{\psi}_{\bar{y}\bar{y}} = -\bar{w}(\bar{x}, \bar{y}), \quad 0 < \bar{x} = \frac{x}{L} < 1, \quad 0 < \bar{y} < k_{\max}, \\ &\bar{w} = \bar{v}_{\bar{x}} - \bar{u}_{\bar{y}}, \\ &\bar{u} = \bar{\psi}_{\bar{y}}; \bar{v} = -\bar{\psi}_{\bar{x}}, \\ &\bar{w}_{\bar{t}} + \bar{u} \cdot \bar{w}_{\bar{x}} + \bar{v} \cdot \bar{w}_{\bar{y}} = \frac{1}{Re} (\bar{w}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{w}_{\bar{y}\bar{y}}), \quad 0 < \bar{t} = \frac{t}{T}, \\ &\bar{\psi}|_{r_1} = 0, \bar{v}|_r = 0, \bar{u}|_{r_1} = 0, \bar{v}|_{r_2} = 0, \\ &\psi(0, y) = \psi(L, y) = \begin{cases} 0, y \in [0, H - \Delta], \\ u_{\max} L \left(\frac{y}{L} + \frac{2\Delta}{3L} - \frac{H}{L} - \frac{(y/L - H/L)^3}{3(\Delta/L)^2} \right), y \in [H - \Delta, H], \\ \frac{2}{3} u_{\max} \Delta, y = H, \end{cases} \end{aligned} \right. \quad (4)$$

$$\bar{u}(0, y) = \bar{u}(L, y) = \frac{u(y)}{u_{\max}} = \begin{cases} 0, y \in [0, H - \Delta], \\ \left(1 - \frac{(y - H)^2}{\Delta^2} \right), y \in [H - \Delta, H], \end{cases}$$

$$\bar{\psi}(0, \bar{y}) = \bar{\psi}(L, \bar{y}) = \frac{\psi(0, y)}{\psi_{\max}} = \begin{cases} 0, y \in [0, H - \Delta], \\ \left(\bar{y} + \frac{2}{3}\Delta/L - H/L - \frac{(\bar{y} - H/L)^3}{3(\Delta/L)^2} \right), \bar{y} \in [(H - \Delta)/L, H/L], \\ \frac{2}{3}\Delta, \bar{y} = H/L. \end{cases}$$

Здесь Γ_1 — объединение нижней части боковых сторон и нижнего отрезка, Γ_2 — верхний отрезок прямоугольника Γ . Первым в системе (1) следует уравнение Пуассона для функции тока и функции вихря. Двумерное уравнение Пуассона на прямоугольнике решается в матричном виде за конечное число арифметических действий с шестым порядком погрешности [2]. Далее по тексту опустим черту сверху над безразмерными функциями, временем и координатами, за исключением формул (24).

Вторая строка системы (1) — функция вихря, вычисляемая через координатные производные поля скорости. Третья строка — компоненты скорости — вычисляются как частные производные от функции тока. Четвертая строка — уравнение динамики вихря, которое в системе уравнений (1) единственное явно зависит от времени. Слева стоит полная (конвективная) производная по времени. На границе прямоугольника равна нулю вертикальная компонента скорости, горизонтальная компонента пока не задана на верхнем отрезке и равна нулю на нижнем отрезке, на боковых сторонах описывается формулой (1).

Методом неопределенных коэффициентов [10] зададим скорость на верхнем отрезке квадратурной формулой (5.1) с десятым порядком погрешности в задачах (4) ($Re = 1500$) и в задаче (22) ($Re = 0,75$). Формула (5.1) используется только в задаче (4):

$$u(n_2, j) = \psi_y(n_2, j) = \frac{1}{(-h_2)} \left(-\frac{83711}{27720} \psi_{n_2, j} + 11 \psi_{n_2-1, j} - \frac{55}{2} \psi_{n_2-2, j} + 55 \psi_{n_2-3, j} - \frac{165}{2} \psi_{n_2-4, j} + \frac{462}{5} \psi_{n_2-5, j} - 77 \psi_{n_2-6, j} + \frac{330}{7} \psi_{n_2-7, j} - \frac{165}{8} \psi_{n_2-8, j} + \frac{55}{9} \psi_{n_2-9, j} - \frac{11}{10} \psi_{n_2-10, j} + \frac{1}{11} \psi_{n_2-11, j} \right) + O(h^{10}), j = \overline{1, n_1 - 1}, \quad (5.1)$$

$$u(n_2, j) = \frac{1}{(-h_2)} \left(-\frac{137}{60} \psi_{n_2, j} + 5 \psi_{n_2-1, j} - 5 \psi_{n_2-2, j} + \frac{10}{3} \psi_{n_2-3, j} - \frac{5}{4} \psi_{n_2-4, j} + \frac{1}{5} \psi_{n_2-5, j} \right) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}. \quad (5.2)$$

Аналогично работе [2] выберем ненулевое и непрерывное начальное поле скоростей в центральной части каверны:

$$\bar{u}(x_m, y_n) = \begin{cases} 0, y_m \in [0, H - \Delta], \\ \left(1 - \frac{(y_m - H)^2}{\Delta^2} \right), y_m \in [H - \Delta, H], y_m = mh_2, m = \overline{0, n_2}, x_n = nh_1, n = \overline{0, n_1} \end{cases} \quad (6)$$

$$\bar{v}(x_m, y_n) = 0, y_m = mh_2, m = \overline{0, n_2}, x_n = nh_1, n = \overline{0, n_1}.$$

В новой гидродинамической задаче для открытой прямоугольной каверны в переменных «функция тока — вихрь», в которой скорость на верхнем отрезке каверны вычисляется формулами (5), укажем последовательность вычислений, так как она значительно отличается от описанного в работе [1] алгоритма:

1 шаг: задать краевые условия на границе прямоугольной каверны для функции тока, вертикальной компоненты скорости, которые неизменны;

2 шаг: модифицировать правую часть уравнения Пуассона для функции вихря согласно формулам (12), (13);

3 шаг: решить уравнение Пуассона (7)–(11), то есть найти значения функции тока во внутренних точках прямоугольной сетки;

4 шаг: по формулам (5) вычислить скорость на верхнем отрезке каверны;

5 шаг: вычислить новое поле скорости (18) на внутренних узлах сетки;

6 шаг: найти новые граничные значения вихря с помощью формул (24);

7 шаг: найти новые значения вихря уравнением (19) на внутренних узлах.

После седьмого шага перейти к первому шагу в цикле.

Остановимся на каждом шаге подробнее. Согласно работе [1] первым в системе уравнений (1) решается уравнение Пуассона за конечное число элементарных операций [2] и аппроксимацией с шестым порядком погрешности во внутренних точках

$$\Delta \psi = \psi_{xx} + \psi_{yy} = f(x, y) = -w \Leftrightarrow \frac{1}{h^2} \left(-\frac{10}{3} \psi_{0,0} + \frac{2}{3} (\psi_{-1,0} + \psi_{0,-1} + \psi_{1,0} + \psi_{0,1}) + \frac{1}{6} (\psi_{-1,-1} + \psi_{1,-1} + \psi_{-1,1} + \psi_{1,1}) \right) = f + \frac{h^2}{12} (f_{xx} + f_{yy}) + \frac{h^4}{360} (f_x^{(4)} + f_y^{(4)}) + \frac{h^4}{90} f_{xyyy}^{(4)} + O(h^6). \quad (7)$$

Для решения уравнения Пуассона (7) с функцией тока в системе уравнений (4) с точностью $O(h^6)$ положим $f = -w$, производные f_{xx}, f_{yy} представим с точностью $O(h^4)$, а $f_x^{(4)}, f_y^{(4)}, f_{xyyy}^{(4)}$ — с точностью $O(h^2)$.

В работах [2, 10] методом неопределенных коэффициентов были получены формулы для внутренних узлов функции f с индексами $n = \overline{2, n_1 - 2}, m = \overline{2, n_2 - 2}$:

$$\begin{cases} f_{xx} + f_{yy} = \frac{1}{h^2} \left(-5f_{0,0} + \frac{4}{3}(f_{-1,0} + f_{0,-1} + f_{1,0} + f_{0,1}) - \frac{1}{12}(f_{-2,0} + f_{0,-2} + f_{2,0} + f_{0,2}) \right) + O(h^4), \\ f_x^{(4)} + f_y^{(4)} = \frac{1}{h^4} (12f_{0,0} - 4(f_{-1,0} + f_{0,-1} + f_{1,0} + f_{0,1}) + f_{-2,0} + f_{0,-2} + f_{2,0} + f_{0,2}) + O(h^2), \\ f_{xyyy}^{(4)} = \frac{1}{h^4} (4f_{0,0} - 2(f_{-1,0} + f_{0,-1} + f_{1,0} + f_{0,1}) + f_{-1,-1} + f_{-1,1} + f_{1,-1} + f_{1,1}) + O(h^2). \end{cases} \quad (8)$$

Таким образом, формулы (7), (8) совместно аппроксимируют уравнение Пуассона в задачах (4), (22) с точностью $O(h^6)$ во внутренних узлах.

В работе [2] описан матричный метод решения разностного уравнения Пуассона (7) за конечное число арифметических операций методом векторной прогонки. Запишем разностное уравнение (9):

$$\frac{1}{h^2} \left(\frac{-10}{3} \psi_{m,n} + \frac{2}{3} (\psi_{m-1,n} + \psi_{m+1,n} + \psi_{m,n-1} + \psi_{m,n+1}) + \frac{1}{6} (\psi_{m-1,n-1} + \psi_{m+1,n-1} + \psi_{m-1,n+1} + \psi_{m+1,n+1}) \right) = f_{m,n} + \frac{h^2}{12} (f_{xx} + f_{yy}) + h^4 \left(\frac{1}{360} (f_x^{(4)} + f_y^{(4)}) + \frac{1}{90} f_{xyxy}^{(4)} \right) + O(h^6) \equiv F_{m,n}, \quad n = \overline{1, n_1 - 1}, m = \overline{1, n_2 - 1}. \quad (9)$$

Определим квадратные матрицы A, B размерности $(n_1 - 1) \times (n_1 - 1)$:

$$a_{m,n} = \begin{cases} -\frac{10}{3}, m = n; m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1}, \\ \frac{2}{3}, m = n + 1 \text{ или } m = n - 1, \\ 0, m \geq n + 2 \text{ или } m \leq n - 2, \end{cases} \quad b_{m,n} = \begin{cases} \frac{2}{3}, m = n; m = \overline{1, n_1 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1}, \\ \frac{1}{6}, m = n + 1 \text{ или } m = n - 1, \\ 0, m \geq n + 2 \text{ или } m \leq n - 2. \end{cases} \quad (10)$$

В данной работе матричный алгоритм решения (9) такой же, как и в [2]:

1. По формуле

$$F^T_{m,n} = f_{m,n} h^2 + \frac{h^4}{12} (f_{xx} + f_{yy}) + h^6 \left(\frac{1}{360} (f_x^{(4)} + f_y^{(4)}) + \frac{1}{90} f_{xyxy}^{(4)} \right) \Big|_{x=x_n, y=y_m}$$

вычислить правую часть уравнения Пуассона во всех внутренних узлах равномерной сетки прямоугольника ($m=1, \dots, n_2-1; n=1, \dots, n_1-1$).

2. Модифицировать правые части системы уравнений (11) по формулам (12), (13) в узлах прямоугольного контура, соседнего с граничным контуром, то есть найти $\overline{F_{m,n}}$ по величинам $F_{m,n}$ пункта 1:

$$\begin{cases} A\psi_1^T + B\psi_2^T = \overline{F_1^T}, \\ B\psi_{m-1}^T + A\psi_m^T + B\psi_{m+1}^T = \overline{F_m^T}, m = \overline{2, n_2 - 2}, \\ B\psi_{n_2-2}^T + A\psi_{n_2-1}^T = \overline{F_{n_2-1}^T}. \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \frac{-10}{3} \psi_{1,n_1-1} + \frac{2}{3} (\psi_{2,n_1-1} + \psi_{1,n_1-2} + \psi_{1,n_1} + \psi_{0,n_1-1}) + \frac{1}{6} (\psi_{2,n_1-2} + \psi_{0,n_1-2} + \psi_{2,n_1} + \psi_{0,n_1}) = F_{1,n_1-1}, \\ \overline{F_{1,n_1-1}} \equiv F_{1,n_1-1} - \frac{2}{3} (\psi_{1,n_1} + \psi_{0,n_1-1}) - \frac{1}{6} (\psi_{0,n_1-2} + \psi_{2,n_1} + \psi_{0,n_1}), \\ \frac{-10}{3} \psi_{n_2-1,1} + \frac{2}{3} (\psi_{n_2-2,1} + \psi_{n_2-1,2} + \psi_{n_2-1,0} + \psi_{n_2,1}) + \frac{1}{6} (\psi_{n_2-2,2} + \psi_{n_2,2} + \psi_{n_2-2,0} + \psi_{n_2,0}) = F_{n_2-1,1}, \\ \overline{F_{n_2-1,1}} \equiv F_{n_2-1,1} - \frac{2}{3} (\psi_{n_2-1,0} + \psi_{n_2,1}) - \frac{1}{6} (\psi_{n_2,2} + \psi_{n_2-2,0} + \psi_{n_2,0}), \\ \frac{-10}{3} \psi_{n_2-1,n_1-1} + \frac{2}{3} (\psi_{n_2-2,n_1-1} + \psi_{n_2-1,n_1-2} + \psi_{n_2-1,n_1} + \psi_{n_2,n_1-1}) + \frac{1}{6} (\psi_{n_2-2,n_1-2} + \psi_{n_2,n_1-2} + \psi_{n_2-2,n_1} + \psi_{n_2,n_1}) = F_{n_2-1,n_1-1}, \\ \overline{F_{n_2-1,n_1-1}} \equiv F_{n_2-1,n_1-1} - \frac{2}{3} (\psi_{n_2-1,n_1} + \psi_{n_2,n_1-1}) - \frac{1}{6} (\psi_{n_2,n_1-2} + \psi_{n_2-2,n_1} + \psi_{n_2,n_1}), \\ \frac{-10}{3} \psi_{1,1} + \frac{2}{3} (\psi_{2,1} + \psi_{1,2} + \psi_{1,0} + \psi_{0,1}) + \frac{1}{6} (\psi_{2,2} + \psi_{0,2} + \psi_{2,0} + \psi_{0,0}) = F_{1,1}, \\ \overline{F_{1,1}} \equiv F_{1,1} - \frac{2}{3} (\psi_{1,0} + \psi_{0,1}) - \frac{1}{6} (\psi_{0,2} + \psi_{2,0} + \psi_{0,0}). \end{cases} \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 -\frac{10}{3}\Psi_{1,n} + \frac{2}{3}(\Psi_{1,n-1} + \Psi_{2,n} + \Psi_{1,n+1} + \Psi_{0,n}) + \frac{1}{6}(\Psi_{2,n-1} + \Psi_{2,n+1} + \Psi_{0,n-1} + \Psi_{0,n+1}) = F_{1,n}, n = \overline{2, n_1 - 2}, \\
 \overline{F_{1,n}} = F_{1,n} - \frac{2}{3}\Psi_{0,n} - \frac{1}{6}(\Psi_{0,n-1} + \Psi_{0,n+1}), n = \overline{2, n_1 - 2}, \\
 -\frac{10}{3}\Psi_{n_2-1,n} + \frac{2}{3}(\Psi_{n_2-1,n-1} + \Psi_{n_2-2,n} + \Psi_{n_2-1,n+1} + \Psi_{n_2,n}) + \frac{1}{6}(\Psi_{n_2-2,n-1} + \Psi_{n_2-2,n+1} + \Psi_{n_2,n-1} + \Psi_{n_2,n+1}) = F_{n_2-1,n}, n = \overline{2, n_1 - 2}, \\
 \overline{F_{n_2-1,n}} = F_{n_2-1,n} - \frac{2}{3}\Psi_{n_2,n} - \frac{1}{6}(\Psi_{n_2,n-1} + \Psi_{n_2,n+1}), n = \overline{2, n_1 - 2}, \\
 -\frac{10}{3}\Psi_{m,1} + \frac{2}{3}(\Psi_{m-1,1} + \Psi_{m,2} + \Psi_{m+1,1} + \Psi_{m,0}) + \frac{1}{6}(\Psi_{m-1,2} + \Psi_{m+1,2} + \Psi_{m-1,0} + \Psi_{m+1,0}) = F_{m,1}, m = \overline{2, n_2 - 2}, \\
 \overline{F_{m,1}} = F_{m,1} - \frac{2}{3}\Psi_{m,0} - \frac{1}{6}(\Psi_{m-1,0} + \Psi_{m+1,0}), m = \overline{2, n_2 - 2}, \\
 -\frac{10}{3}\Psi_{m,n_1-1} + \frac{2}{3}(\Psi_{m-1,n_1-1} + \Psi_{m,n_1-2} + \Psi_{m+1,n_1-1} + \Psi_{m,n_1}) + \frac{1}{6}(\Psi_{m-1,n_1-2} + \Psi_{m+1,n_1-2} + \Psi_{m-1,n_1} + \Psi_{m+1,n_1}) = F_{m,n_1-1}, m = \overline{2, n_2 - 2}, \\
 \overline{F_{m,n_1-1}} = F_{m,n_1-1} - \frac{2}{3}\Psi_{m,n_1} - \frac{1}{6}(\Psi_{m-1,n_1} + \Psi_{m+1,n_1}), m = \overline{2, n_2 - 2}, \\
 \overline{F_{m,n}} = F_{m,n}, \forall m \in \overline{2, n_2 - 2}, n \in \overline{2, n_1 - 2}.
 \end{array} \right. \quad (13)$$

3. Найти матричные коэффициенты прогонки вперед по формулам (14), (15) $m = \overline{1, n_2 - 2}$:

$$\lambda_1 = -A^{-1}B, v_1 = A^{-1}\overline{F_1^T}, \quad (14)$$

$$\lambda_m = -(B\lambda_{m-1} + A)^{-1}B, v_m = (B\lambda_{m-1} + A)^{-1}(\overline{F_m^T} - Bv_{m-1}), m = \overline{2, n_2 - 2}. \quad (15)$$

4. Найти вектор-строку $\Psi_{n_2-1}^T$ по формуле (16):

$$\Psi_{n_2-1}^T = (B\lambda_{n_2-2} + A)^{-1}(\overline{F_{n_2-1}^T} - Bv_{n_2-2}). \quad (16)$$

5. Найти остальные строки матрицы-решения Ψ_m^T по формулам (17):

$$\Psi_m^T = \lambda_m \Psi_{m+1}^T + v_m, m = \overline{n_2 - 2, 1}, v_{n_2-1} = \Psi_{n_2-1}^T. \quad (17)$$

Матричный алгоритм прогонки (9)–(17) сохраняет шестой порядок погрешности согласно формулам (7), (8) для уравнения Пуассона.

Второе и третье уравнения системы (4) $\overline{w} = \overline{v_x} - \overline{u_y}$, $\overline{u} = \overline{v_y}$, $\overline{v} = -\overline{v_x}$ линейны относительно первых частных производных. Приведем квадратурные формулы первой производной с различными центрами. Для уравнения $u = \Psi_{\overline{y}}$ имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 u_{(i,j)} = \frac{1}{h} \left(\frac{3}{4}(\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}) - \frac{3}{20}(\Psi_{i+2,j} - \Psi_{i-2,j}) + \frac{1}{60}(\Psi_{i+3,j} - \Psi_{i-3,j}) \right) + O(h^6), i = \overline{3, n_2 - 3}, j = \overline{1, n_1 - 1}, \\
 u_{(1,j)} = \frac{1}{h} \left(-\frac{\Psi_{0,j}}{5} - \frac{13}{12}\Psi_{1,j} + 2\Psi_{2,j} - \Psi_{3,j} + \frac{\Psi_{4,j}}{3} - \frac{\Psi_{5,j}}{20} \right) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\
 u_{(2,j)} = \frac{1}{12h} (8(\Psi_{3,j} - \Psi_{1,j}) - (\Psi_{4,j} - \Psi_{0,j})) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\
 u_{(n_2-1,j)} = -\frac{1}{h} \left(-\frac{\Psi_{n_2,j}}{5} - \frac{13}{12}\Psi_{n_2-1,j} + 2\Psi_{n_2-2,j} - \Psi_{n_2-3,j} + \frac{\Psi_{n_2-4,j}}{3} - \frac{\Psi_{n_2-5,j}}{20} \right) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\
 u_{(n_2-2,j)} = -\frac{1}{12h} (8(\Psi_{n_2-3,j} - \Psi_{n_2-1,j}) - (\Psi_{n_2-4,j} - \Psi_{n_2,j})) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}.
 \end{array} \right. \quad (18)$$

Аналогичные формулы можно записать для уравнения $\overline{v} = -\overline{v_x}$. Для ускорения численного решения уравнение вихря (4) применялся метод расщепления [9].

Аналитически метод n -кратного расщепления уравнения вихря для временного интервала τ_0 / n можно записать в виде:

$$\frac{w^{k+(i+1)/n} - w^{k+(i/n)}}{\tau_0 / n} + u^k \cdot w_x^{k+(i/n)} + v^k \cdot w_y^{k+(i/n)} = \frac{1}{\text{Re}} (w_{xx}^{k+(i/n)} + w_{yy}^{k+(i/n)}), i = \overline{0, n-1}. \quad (19)$$

Система рекуррентных уравнений (19) для вихря с замороженным полем скорости $(u^k(x, y), v^k(x, y)), i = \overline{0, n-1}, k = \text{const}, k = 1, 2, \dots$ состоит из n промежуточных шагов $i = \overline{0, n-1}$, верхний индекс i указывает номер промежуточного слоя времени в уравнении вихря (19), индекс k — номер кратного слоя времени в системе (19). Поля скорости и функции тока постоянны в уравнениях (19) при значениях $k = \text{const}$ и изменении

индекса $i = \overline{0, n-1}$. В данной системе уравнений изменяется только поле вихря $w^{k+(i/n)}, i = \overline{0, n-1}$. Поле скорости скачком изменяется в системах (4) или в (22), (19), когда временной индекс функции вихря увеличивается на единицу от k до $k+1$ в системе уравнений (19).

Идея расщепления системы уравнений (19) заключается в уменьшении накопления ошибки округления и времени вычислений при ее решении. Дифференциальные операторы по координате в (19) аппроксимированы во внутренних узлах с точностью $O(h^6)$, как и все уравнения системы (4), граничные условия с точностью $O(h^4)$, а по времени — с точностью $O(\tau)$.

Таким образом, за время τ_0 / n (связанное с уменьшением устойчивости решения из-за наличия четырех особых точек поля скорости), решая n раз уравнение (19), получим скачок по времени τ_0 (в n раз больший, чем последовательное решение системы уравнений (4)).

Уравнение (19) линейно относительно координатных производных $w_x^i, w_y^i, w_{xx}^i, w_{yy}^i$. В работе [9] показано, что для спектральной устойчивости уравнения динамики вихря (19) достаточно выбрать соотношение временного и пространственного шагов в виде неравенства $\tau_0 \leq \frac{3}{16}h^2 \text{Re}-(4), (\tau_0 \leq \frac{3}{16}h^2 - (22))$.

Для производной w_y в (19) запишем квадратурные формулы (формулы для производной w_x аналогичны):

$$\begin{cases} w_{y(i,j)} = \frac{1}{h} \left(\frac{3}{4}(w_{i+1,j} - w_{i-1,j}) - \frac{3}{20}(w_{i+2,j} - w_{i-2,j}) + \frac{1}{60}(w_{i+3,j} - w_{i-3,j}) \right) + O(h^6), i = \overline{3, n_2 - 3}, j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{y(1,j)} = \frac{1}{h} \left(-\frac{w_{0,j}}{5} - \frac{13}{12}w_{1,j} + 2w_{2,j} - w_{3,j} + \frac{w_{4,j}}{3} - \frac{w_{5,j}}{20} \right) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{y(2,j)} = \frac{1}{12h} (8(w_{3,j} - w_{1,j}) - (w_{4,j} - w_{0,j})) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{y(n_2-1,j)} = -\frac{1}{h} \left(-\frac{w_{n_2,j}}{5} - \frac{13}{12}w_{n_2-1,j} + 2w_{n_2-2,j} - w_{n_2-3,j} + \frac{w_{n_2-4,j}}{3} - \frac{w_{n_2-5,j}}{20} \right) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{y(n_2-2,j)} = -\frac{1}{12h} (8(w_{n_2-3,j} - w_{n_2-1,j}) - (w_{n_2-4,j} - w_{n_2,j})) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}. \end{cases} \quad (20)$$

Вторые частные производные w_{yy} в (19) имеют вид:

$$\begin{cases} w_{yy(i,j)} = \frac{1}{h^2} \left(-\frac{49}{18}w_{i,j} + \frac{3}{2}(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - \frac{3}{20}(w_{i+2,j} + w_{i-2,j}) + \frac{1}{90}(w_{i+3,j} + w_{i-3,j}) \right) + O(h^6), i = \overline{3, n_2 - 3}, j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{yy(1,j)} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{137}{180}w_{0,j} - \frac{49}{60}w_{1,j} - \frac{17}{12}w_{2,j} + \frac{47}{18}w_{3,j} - \frac{19}{12}w_{4,j} + \frac{31}{60}w_{5,j} - \frac{13}{180}w_{6,j} \right) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{yy(2,j)} = \frac{1}{h^2} \left(-\frac{5}{2}w_{2,j} + \frac{4}{3}(w_{1,j} + w_{3,j}) - \frac{1}{12}(w_{0,j} + w_{4,j}) \right) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{yy(n_2-1,j)} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{137}{180}w_{n_2,j} - \frac{49}{60}w_{n_2-1,j} - \frac{17}{12}w_{n_2-2,j} + \frac{47}{18}w_{n_2-3,j} - \frac{19}{12}w_{n_2-4,j} + \frac{31}{60}w_{n_2-5,j} - \frac{13}{180}w_{n_2-6,j} \right) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{yy(n_2-2,j)} = \frac{1}{h^2} \left(-\frac{5}{2}w_{n_2-2,j} + \frac{4}{3}(w_{n_2-1,j} + w_{n_2-3,j}) - \frac{1}{12}(w_{n_2,j} + w_{n_2-4,j}) \right) + O(h^4), j = \overline{1, n_1 - 1}. \end{cases} \quad (21)$$

Аналогично формулам (21) записываются формулы для производной w_{xx} . Задача (4) и алгоритм ее решения (5)–(21), (23), (24) применяется при движении крови в аорте и в артериях при больших скоростях и больших числах Рейнольдса, но при малых числах Рейнольдса, используя диффузионный масштаб времени [9], приходим к задаче (22).

Обозначим

$$\bar{t} = \frac{t}{T}, T_{dif} = T = \frac{L^2}{\nu}, \text{Re} = \frac{u_{\max} L}{\nu},$$

$$0 \leq \bar{x} = \frac{x}{L} \leq 1, 0 \leq \bar{y} = \frac{y}{L} \leq k = \frac{H}{L}, \bar{\psi} = \frac{\psi}{\psi_{\max}}, \psi_{\max} = Lu_{\max},$$

$$\bar{u} = \frac{u}{u_{\max}}, \bar{v} = \frac{v}{u_{\max}}, \bar{w} = \frac{w}{w_{\max}}, w_{\max} = \frac{u_{\max}}{L},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{T} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \frac{u_{\max}}{L} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{\nu}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\nu}{L^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \frac{u_{\max}}{L} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{\nu}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \right) \Leftrightarrow \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \text{Re} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\psi}_{xx} + \overline{\psi}_{yy} = -\overline{w}(x, y), 0 < \overline{x} = \frac{x}{L} < 1, 0 < \overline{y} < k_{\max}, \\ \overline{w} = \overline{v}_x - \overline{u}_y, \\ \overline{u} = \overline{\psi}_y; \overline{v} = -\overline{\psi}_x, \\ \overline{w}_t + \text{Re}(\overline{u} \cdot \overline{w}_x + \overline{v} \cdot \overline{w}_y) = \overline{w}_{xx} + \overline{w}_{yy}, 0 < \overline{t} = \frac{t}{T}, \\ \overline{\psi}|_{\Gamma_1} \equiv 0, \overline{v}|_{\Gamma} \equiv 0, \overline{u}|_{\Gamma_1} = 0, \overline{v}|_{\Gamma_2} = 0, \\ \overline{\psi}(0, y) = \overline{\psi}(L, y) = \begin{cases} 0, y \in [0, H - \Delta], \\ \frac{1}{L} \left(y + \frac{2}{3} \Delta - H - \frac{(y - H)^3}{3\Delta^2} \right), y \in [H - \Delta, H], \\ \frac{2\Delta}{3L} = \text{const}, y = H, \forall x \in [0, L]. \end{cases} \\ \overline{u}(0, y) = \overline{u}(L, y) = \frac{u(y)}{u_{\max}} = \begin{cases} 0, y \in [0, H - \Delta], \\ \left(1 - \frac{(y - H)^2}{\Delta^2} \right), y \in [H - \Delta, H]. \end{cases} \end{array} \right. \quad (22)$$

Другие уравнения в задаче (22) такие же, как и в задаче (4). Согласно общему алгоритму (шаг 6) необходимо вычислить вихрь на границе прямоугольника, а затем решать уравнение вихря (19) во внутренних точках каверны. В линейном приближении предположим, что скорость и функция вихря, а также функция тока на границе и в ближайших внутренних узлах связаны одной линейной квадратурной формулой. Аппроксимируем граничные значения вихря с четвертым порядком погрешности [10], так как в работе [1] указаны формулы аппроксимации только с первым или со вторым порядком:

$$\begin{aligned} \psi_{xx}(0) &= \frac{1}{h_1^2} (C_0 \psi_0 + C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2 + C_3 \psi_3 + C_4 \psi_4) + \frac{C_5 \psi_x(0)}{h_1} = \frac{1}{h_1^2} \left(C_0 \psi_0 + \sum_{i=1}^4 \sum_{k=0}^{\infty} C_i \cdot \frac{(ih_1)^k \psi_0^{(k)}}{k!} \right) + \frac{C_5 \psi_x(0)}{h_1} = \\ &= \frac{\psi_0}{h_1^2} (C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + \frac{\psi_x(0)}{h_1} (C_1 + 2C_2 + 3C_3 + 4C_4 + C_5) + \psi_{xx}(0) \left(\frac{C_1}{2} + 2C_2 + \frac{9}{2}C_3 + 8C_4 \right) + \\ &\quad + h_1 \psi_x^{(3)}(0) \left(\frac{C_1}{6} + \frac{8}{6}C_2 + \frac{27}{6}C_3 + \frac{64}{6}C_4 \right) + h_1^2 \psi_x^{(4)}(0) \left(\frac{C_1}{24} + \frac{16}{24}C_2 + \frac{81}{24}C_3 + \frac{256}{24}C_4 \right) + \\ &\quad + h_1^3 \psi_x^{(5)}(0) \left(\frac{C_1}{120} + \frac{32}{120}C_2 + \frac{243}{120}C_3 + \frac{1024}{120}C_4 \right) + O(h_1^4). \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0 \\ C_1 + 2C_2 + 3C_3 + 4C_4 + C_5 = 0 \\ C_1 + 4C_2 + 9C_3 + 16C_4 = 2 \\ C_1 + 8C_2 + 27C_3 + 64C_4 = 0 \\ C_1 + 16C_2 + 81C_3 + 256C_4 = 0 \\ C_1 + 32C_2 + 243C_3 + 1024C_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow C_0 = -\frac{415}{72}, C_1 = 8, C_2 = -3, C_3 = \frac{8}{9}, C_4 = -\frac{1}{8}, C_5 = -\frac{25}{6}.$$

С учетом (22) получим общее краевое условие для вихря в открытой каверне с четвертым порядком погрешности, дважды дифференцируя (22) по y :

$$w(x, y) = -\psi_{xx} - \psi_{yy} = \frac{1}{h_1^2} \left(\frac{415}{72} \psi_0 - 8\psi_1 + 3\psi_2 - \frac{8}{9}\psi_3 + \frac{1}{8}\psi_4 \right) - \frac{25 v(0, y)}{6 h_1} - \psi_{yy}, v = -\psi_x. \quad (23)$$

$$\overline{w}_{m,0} = \begin{cases} \frac{1}{h_1^2} \left(\frac{415}{72} \overline{\psi}_{m,0} - 8\overline{\psi}_{m,1} + 3\overline{\psi}_{m,2} - \frac{8}{9}\overline{\psi}_{m,3} + \frac{1}{8}\overline{\psi}_{m,4} \right) - \frac{25 \overline{v}_{m,0}}{6 h_1} + 2 \frac{(\overline{y}_m - H / L)}{(\Delta / L)^2}, m = \overline{n_3}, \overline{n_2}, \\ \frac{1}{h_1^2} \left(\frac{415}{72} \overline{\psi}_{m,0} - 8\overline{\psi}_{m,1} + 3\overline{\psi}_{m,2} - \frac{8}{9}\overline{\psi}_{m,3} + \frac{1}{8}\overline{\psi}_{m,4} \right) - \frac{25 \overline{v}_{m,0}}{6 h_1}, m = \overline{0}, \overline{n_3}, \text{left}. \end{cases} \quad (24.1)$$

$$\overline{w}_{m,n_1} = \begin{cases} \frac{1}{h_1^2} \left(\frac{415}{72} \overline{\psi}_{m,n_1} - 8\overline{\psi}_{m,n_1-1} + 3\overline{\psi}_{m,n_1-2} - \frac{8}{9}\overline{\psi}_{m,n_1-3} + \frac{1}{8}\overline{\psi}_{m,n_1-4} \right) + \frac{25 \overline{v}_{m,n_1}}{6 h_1} + 2 \frac{(\overline{y}_m - H / L)}{(\Delta / L)^2}, m = \overline{n_3}, \overline{n_2}, \\ \frac{1}{h_1^2} \left(\frac{415}{72} \overline{\psi}_{m,n_1} - 8\overline{\psi}_{m,n_1-1} + 3\overline{\psi}_{m,n_1-2} - \frac{8}{9}\overline{\psi}_{m,n_1-3} + \frac{1}{8}\overline{\psi}_{m,n_1-4} \right) + \frac{25 \overline{v}_{m,n_1}}{6 h_1}, m = \overline{0}, \overline{n_3}, \text{right}. \end{cases} \quad (24.2)$$

$$\bar{w}_{0,n} = \begin{cases} \frac{1}{h_2^2} \left(\frac{415}{72} \bar{\psi}_{0,n} - 8 \bar{\psi}_{1,n} + 3 \bar{\psi}_{2,n} - \frac{8}{9} \bar{\psi}_{3,n} + \frac{1}{8} \bar{\psi}_{4,n} \right) + \frac{25 \bar{u}_{0,n}}{6 h_2}, & n = \overline{0, n_1}, u = \bar{\psi}_y, \text{bottom}, \\ \frac{1}{h_2^2} \left(\frac{415}{72} \bar{\psi}_{n_2,n} - 8 \bar{\psi}_{n_2-1,n} + 3 \bar{\psi}_{n_2-2,n} - \frac{8}{9} \bar{\psi}_{n_2-3,n} + \frac{1}{8} \bar{\psi}_{n_2-4,n} \right) - \frac{25 \bar{u}_{n_2,n}}{6 h_2}, & n = \overline{0, n_1}, \text{top}. \end{cases} \quad (24.3)$$

В отличие от работы [2] с закрытой каверной с явно вычисляемыми производными от функции вихря до 5-го порядка включительно, в задачах (4), (22) уместно применение формулы (23). Так как в поле скоростей с разрывами функция вихря и ее частные производные имеют большие значения. При выводе формулы (23) удалены производные функции тока выше второго порядка. В таблице 1 приведена классификация кровеносных сосудов.

Таблица 1

Классификация кровеносных сосудов

Тип	Диаметр	Скорость крови	Число Re	Система уравнений
Капилляры	(5–10) мкм	(0,5–1,0) мм/с	0,00075–0,00300	(21)
Артериолы	(10–100) мкм	(0,5–10,0) см/с	0,015–3,000	(21),(4)
Артерии	(2–10) мм	(10–40) см/с	60–1200	(4)
Аорта	(2–3) см	0,5 м/с	3000	(4)

Для определенности решаем численно задачу (22) если $Re < 1$ и задачу (4) в случаях, когда $Re > 1$ ($h_1 = h_2 = 0,01$). Опыт показывает, что для быстрого решения задачи в артериолах нужно выбрать инерционный интервал времени $\frac{L}{u_{\max}}$, а для решения гидродинамической задачи в аневризме артериолы использовать систему уравнений (4) аналогично решению задачи в аневризме артерии.

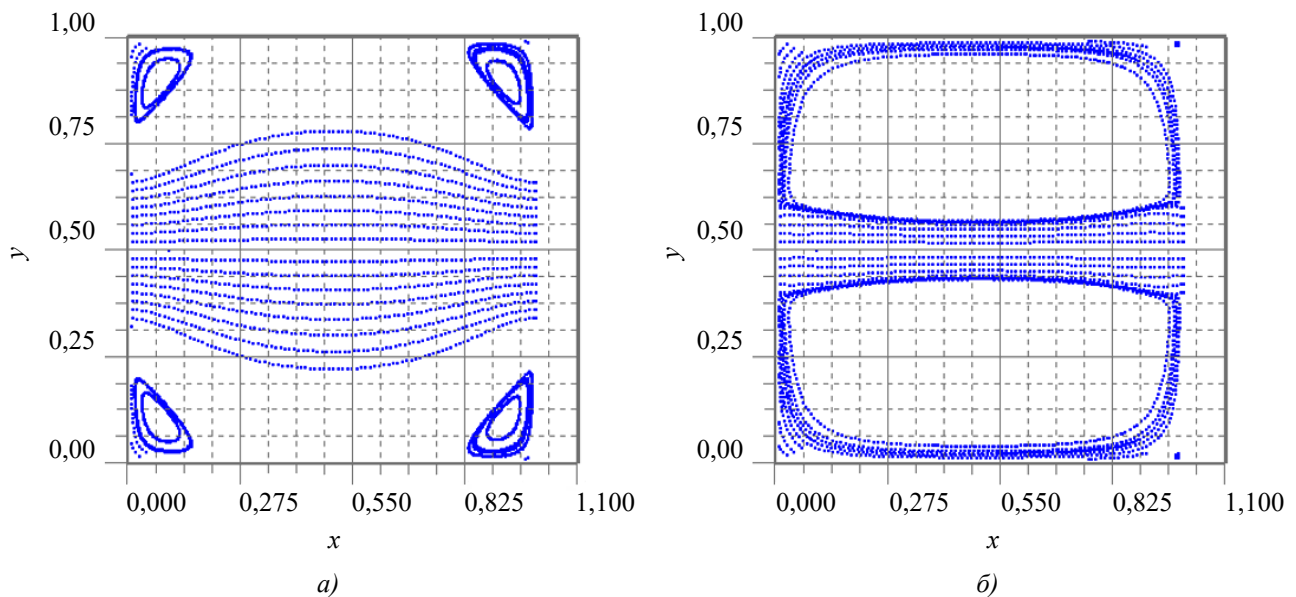


Рис. 3. Предельное поле линий тока в артериолах с применением формулы (5.1):

- a* — $Re = 0,75, n_1 \times n_2 = 100 \times 50, \Delta / H = 0,5; L = 1, H = 50 \text{ мкм}, u_{\max} = 5 \text{ см/с}, \tau = \frac{6}{16} h_1^2, n = 400000$ шагов,
кратность расщепления $m = 100, t = 0,512$ с;
- б* — $Re = 0,75, n_1 \times n_2 = 100 \times 50, \Delta / H = 0,2; L = 1, H = 50 \text{ мкм}, u_{\max} = 5 \text{ см/с}, \tau = \frac{6}{16} h_1^2, n = 200000$ шагов,
кратность расщепления $m = 100, t = 0,256$ с

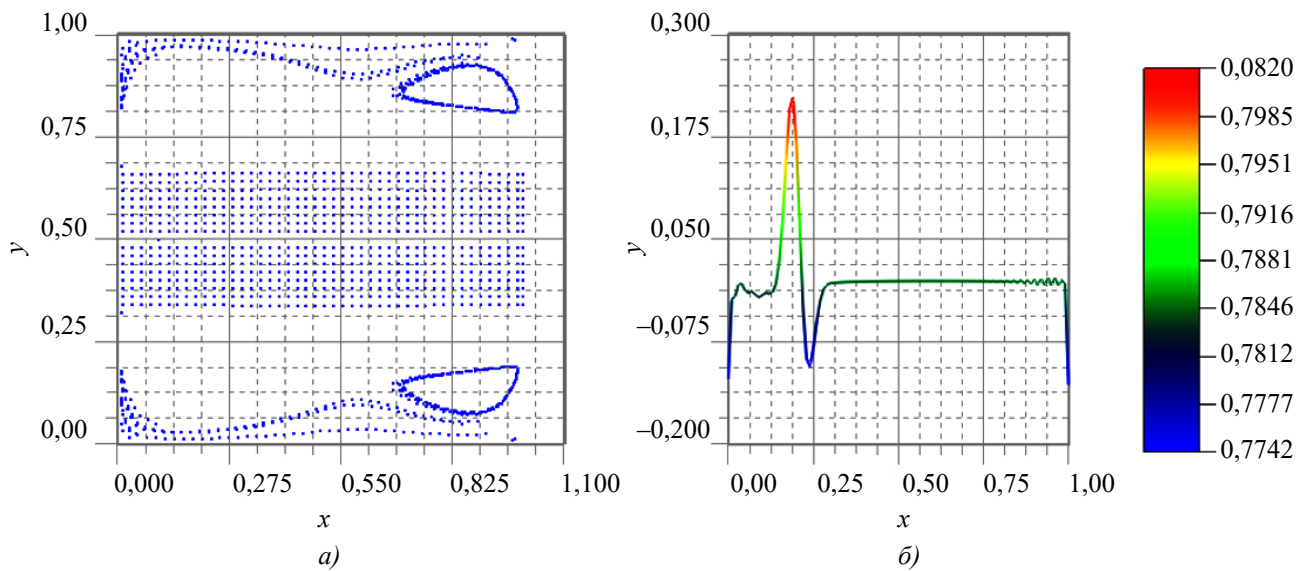


Рис. 4. Результаты решения задачи (4) с применением (5.1):

a — $Re = 1500$, $n_1 \times n_2 = 100 \times 50$, $\Delta / H = 0,6$; $L = 1$, $H = 1$ см, $u_{\max} = 50$ см/с, поле линий тока крови в артериях после $n = 10000$ шагов, кратность расщепления $m = 200$; *б* — график функции вихря в плоскости симметрии

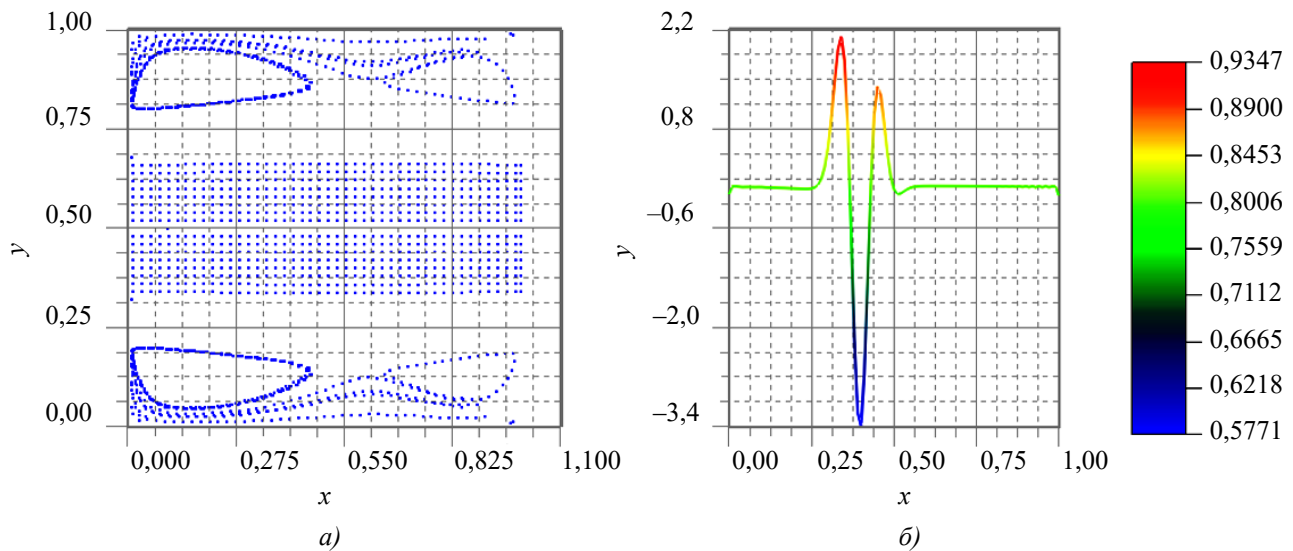


Рис. 5. Результаты решения задачи (4) с применением (5.1):

a — $Re = 1500$, $n_1 \times n_2 = 100 \times 50$, $\Delta / H = 0,6$; $L = 1$, $H = 1$ см, $u_{\max} = 50$ см/с, поле линий тока крови в артериях после $n = 20000$ шагов, кратность расщепления $m = 200$; *б* — график функции вихря в плоскости симметрии

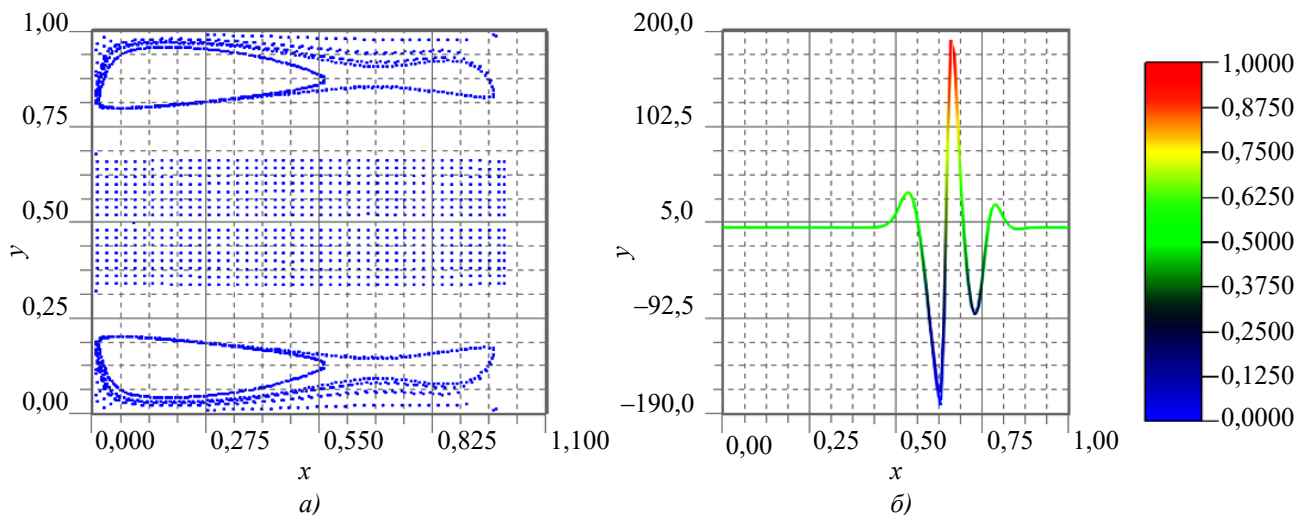
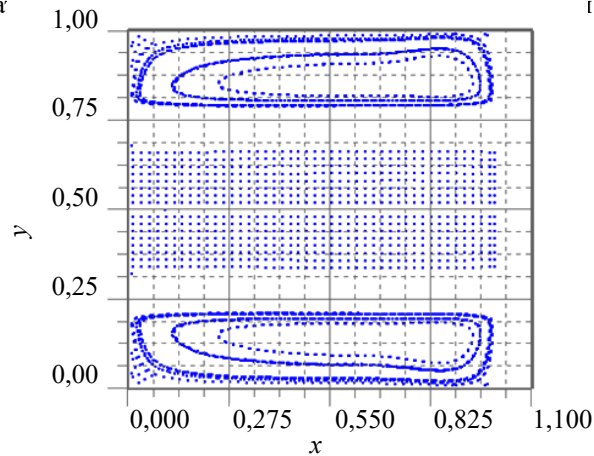


Рис. 6. Результаты решения задачи (4) с применением (5.1):

a — $Re = 1500$, $n_1 \times n_2 = 100 \times 50$, $\Delta / H = 0,6$; $L = 1$, $H = 1$ см, $u_{\max} = 50$ см/с, поле линий тока крови в артериях

после $n = 34000$ шагов, кра



т вихря в плоскости симметрии

Рис. 7. Результаты решения задачи (4) с применением (5.2):
 $Re = 1500$, $n_1 \times n_2 = 100 \times 50$, $\Delta / H = 0,6$; $L = 1$, $H = 1$ см, $u_{\max} = 50$ см/с,
 поле линий тока в артерии $n = 2310000$ шагов, кратность расщепления $m = 200$

Обсуждение. Предложены два численных алгоритма решения двумерной задачи в открытой каверне (5)–(21), (23), (24) в переменных «функция тока — вихрь», моделирующих движение крови в аневризме для ламинарного ($Re < 1$, 22)) и для турбулентного ($Re > 1$, (4)) течения. В капиллярах и артериолах (рис. 3) структура течения устанавливается за время 0,002 % от периода между пульсационными волнами (1 с). Таким образом, область свертывания определяется областью циркуляции крови в аневризме. Структура областей циркуляции при малых числах Рейнольдса существенно зависит от соотношения диаметра сосуда к диаметру аневризмы (рис. 3). Если параметр $\Delta / H = 0,5$, то область циркуляции расположена в углах аневризмы (рис. 3а). Если параметр $\Delta / H = 0,2$, то область циркуляции — вся аневризма (рис. 3б) и происходит сужение диаметра канала на 34 %. Это объясняет явление «сужения просвета канала» при образовании тромба. При быстрых течениях ($Re = 1500$) в артериях и аортах область циркуляции — вся аневризма для любого параметра Δ / H ($\Delta / H = 0,6$ на рис. 6а и 7).

В плоскости симметрии аневризмы вдоль по току крови (вправо) образуется последовательность вихрей переменного знака. На рис. 4б два вихря со знаками $w +, -$. На рис. 5б три вихря со знаками $+, -, +$. На рис. 6б пять вихрей с последовательностью знаков $w +, -, +, -, +$. Такую цепь вихрей с чередованием знаков можно сравнить с дорожкой Кармана в вихревом следе за препятствием.

Наличие вихрей в плоскости симметрии аневризмы нарушает предположение о симметрии решения. Поэтому необходимо допустить возможность нормальной компоненты скорости в плоскости симметрии и включать всю аневризму при решении задачи (4) движения крови в аорте. Постановки задач (4), (22) и алгоритмы их решения обобщены на случай открытой каверны, то есть с пересечением границ каверны потоками жидкости.

Заключение. Сформулированные в работе начально-краевые задачи (4), (22) позволят качественно моделировать движение крови в аневризмах капилляров, артериол и артерий кровеносных сосудов при малых и больших скоростях, а также движение крови в элементах медицинского оборудования.

Список литературы / References

1. Salih A. Streamfunction — Vorticity Formulation. *Department of Aerospace Engineering Indian Institute of Space Science and Technology*. 2013;10:1–10.
2. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Сравнение решений гидродинамической задачи в прямоугольной каверне методами торможения и разгона начального поля скорости. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):22–33. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-22-33>
3. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Comparison of solution of the hydrodynamic problem in a rectangular cavity methods of inhibition and acceleration of the initial speed field. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):22–33 (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-22-33>
3. Петров А.Г. Высокоточные численные схемы решения плоских краевых задач для полигармонического уравнения и их применение к задачам гидродинамики. *Прикладная математика и механика*. 2023;87(3):343–368. <https://doi.org/10.31857/S0032823523030128>
4. Petrov A.G. High-precision numerical schemes for solving plane boundary value problems for a polyharmonic equation and their application to problems of hydrodynamics. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2023;87(3):343–368 (In Russ.) <https://doi.org/10.31857/S0032823523030128>
4. Сухинов А.И., Колгунова О.В., Гирмай М.З., Нахом О.С. Двумерная гидродинамическая модель прибрежных систем, учитывающая испарение. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):9–21. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-9-21>

Sukhinov A.I., Kolgunova O.V., Ghirmay M.Z., Nahom O.S. A two-dimensional hydrodynamic model of coastal systems, taking into account evaporation. *Computation Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):9–21. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-9-21>

5. Ершова Т.Я. Краевая задача для дифференциального уравнения третьего порядка с сильным пограничным слоем. *Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика*. 2020;1:30–39. <https://doi.org/10.3103/S0278641920010057>

Ershova T.Ya. Boundary value problem for a third-order differential equation with a strong boundary layer. *Bulletin of Moscow University. Episode 15: Computational mathematics and cybernetics*. 2020;1:30–39 (In Russ.) <https://doi.org/10.3103/S0278641920010057>

6. Ситникова М.А., Скульский О.И. Течение моментной анизотропной жидкости в тонких слоях. *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2015;28(1):56–62.

Sitnikova M.A., Skulsky O.I. Flow of momentary anisotropic fluid in thin layers. *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2015;28(1):56–62 (In Russ.)

7. Волосов К.А., Вдовина Е.К., Пугина Л.В. Моделирование «пульсирующих» режимов динамики свёртывания крови. *Математическое моделирование*. 2014;26(12):14–32.

Volosov K.A., Vdovina E.K., Pugina L.V. Modeling of “pulsatile” modes of blood coagulation dynamics. *Math modeling*. 2014;26(12):14–32 (In Russ.)

8. Сидорякина В.В., Соломаха Д.А. Симметризованные варианты методов Зейделя и верхней релаксации решения двумерных разностных задач эллиптического типа. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):12–19. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-12-19>

Sidoryakina V.V., Solomaha D.A. Symmetrized versions of the Seidel and upper relaxation methods for solving two-dimensional difference problems of elliptic. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):12–19. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-12-19>

9. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. N-кратное расщепление явной разностной схемы для уравнения вихря в вязкой несжимаемой жидкости. *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2023;63(4):12–21. <https://doi.org/10.17072/1993-0550-2023-4-12-21>

Volosova N.K., Volosov K. A., Volosova A.K., Karlov M.I., Pastuhov D.F., Pastuhov Yu.F. The N-fold distribution of the obvious variable scheme for the equalization of the vortex in the viscous incompatible fluid. *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2023;63(4):12–21 (In Russ.) <https://doi.org/10.17072/1993-0550-2023-4-12-21>

10. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы: учебное пособие для студентов физико-математических специальностей высших учебных заведений*. Москва: Бином. Лаборатория знаний; 2011. 636 с.

Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Numerical methods: a textbook for students of physics and mathematics specialties of higher educational institutions Binom. lab*. Moscow: Knowledge; 2011. 636 p. (In Russ.)

Об авторах:

Наталья Константиновна Волосова, аспирант Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана (105005, Российская Федерация, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, стр. 1), [ORCID](https://orcid.org/10.0000-0001-9152-0000), navalossova@yandex.ru

Константин Александрович Волосов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Российская Федерация, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9), [ORCID](https://orcid.org/10.0000-0001-9152-0000), [SPIN-код](https://spiner.ru), konstantinvolosov@yandex.ru

Александра Константиновна Волосова, кандидат физико-математических наук, начальник аналитического отдела ООО «Трамплин» Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Российская Федерация, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9), [ORCID](https://orcid.org/10.0000-0001-9152-0000), [SPIN-код](https://spiner.ru), alya01@yandex.ru

Михаил Иванович Карлов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Московского физико-технического института (141701, ГСП-4, Российская Федерация, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9), [SPIN-код](https://spiner.ru), karlov.mipt@gmail.com

Дмитрий Феликсович Пастухов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), [ORCID](https://orcid.org/10.0000-0001-9152-0000), [SPIN-код](https://spiner.ru), dmitrij.pastuhov@mail.ru

Юрий Феликсович Пастухов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), [ORCID](https://orcid.org/10.0000-0001-9152-0000), [SPIN-код](https://spiner.ru), pulsar1900@mail.ru

Заявленный вклад авторов:

Н.К. Волосова: постановка задачи; написание черновика рукописи; формулировка идей исследования, целей и задач.

К.А. Волосов: научное руководство; разработка методологии.

А.К. Волосова: перевод; изучение истории задачи; поиск литературы.

М.И. Карлов: формальный анализ.

Д.Ф. Пастухов: визуализация; валидация; разработка программного обеспечения.

Ю.Ф. Пастухов: тестирование существующих компонентов кода.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Natalya K. Volosova, Post-graduate Student of Bauman Moscow State Technical University (2nd Baumanskaya St. 5–1, Moscow, 105005, Russian Federation), [ORCID](#), navalosova@yandex.ru

Konstantin A. Volosov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics of the Russian University of Transport (Obraztsova St. 9–9, Moscow, GSP-4, 127994, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), konstantinvolosov@yandex.ru

Aleksandra K. Volosova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Chief Analytical Department “Tramplin” LLC, Russian University of Transport (Obraztsova St. 9–9, Moscow, GSP-4, 127994, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), alya01@yandex.ru

Mikhail I. Karlov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (9, Institutsky Lane, GSP-4, Dolgoprudny, 141701, Russian Federation), [SPIN-code](#), karlov.mipt@gmail.com

Dmitriy F. Pastukhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (Blokhin St. 29, Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), [ORCID](#), [SPIN-code](#), dmitrij.pastuhov@mail.ru

Yuriy F. Pastukhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (Blokhin St. 29, Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), [ORCID](#), [SPIN-code](#), pulsar1900@mail.ru

Contributions of the authors:

N.K. Volosova: setting the task; writing a draft of the manuscript; formulation of research ideas, goals and objectives.

K.A. Volosov: scientific guidance; methodology development.

A.K. Volosova: translation; study of the history of the task; literature.

M.I. Karlov: formal analysis.

D.F. Pastukhov: visualization; validation; software.

Yu.F. Pastukhov: testing of existing code components.

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 25.07.2025

Поступила после рецензирования / Revised 18.08.2025

Принята к публикации / Accepted 17.09.2025

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELLING



УДК 519.6

Оригинальное эмпирическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-44-55>


Адаптивные сеточные методы для эффективного моделирования динамики мелководных прибрежных систем

А.И. Сухинов¹ , С.В. Проценко²  , Е.А. Проценко² 

¹ Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

² Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), г. Таганрог, Российская Федерация

 rab55555@rambler.ru

Аннотация

Введение. Мелководные прибрежные зоны представляют собой высокодинамичные природные системы, в которых протекают сложные гидродинамические процессы, обусловленные взаимодействием приливных явлений, ветрового воздействия и особенностей рельефа дна. Для их надежного прогнозирования и оценки связанных с ними экологических и техногенных рисков необходимы численные модели повышенной точности. Однако традиционные методы, основанные на использовании равномерных расчетных сеток, характеризуются чрезмерными вычислительными затратами, что существенно ограничивает их применение в задачах оперативного прогнозирования. В этой связи перспективным направлением является использование адаптивных сеточных методов, позволяющих сосредотачивать расчетное разрешение в динамически значимых областях и одновременно снижать общую вычислительную нагрузку.

Материалы и методы. Разработана численная модель, основанная на двумерных уравнениях мелкой воды в постановке с усреднением по глубине. В качестве расчетного алгоритма применена конечно-объемная схема второго порядка точности с TVD-лимитированием, реализованная на динамически адаптируемой сетке типа квадродерева. Критерием для локального уточнения сетки служат градиенты уровня свободной поверхности и скорости течений, что обеспечивает детальную аппроксимацию в зонах интенсивной динамики, включая приливные фронты и области со сложной батиметрией. Для оценки эффективности метода проведены три численных эксперимента: моделирование гармонического прилива, ветрового штормового нагона и их комбинированного воздействия.

Результаты исследования. Численные эксперименты показали устойчивую работу алгоритмов осушения и затопления, погрешность сохранения массы не превышала 0,06 %. Качественные характеристики модели подтверждаются значениями метрик $RMSE \leq 0,07$ м и $NSE \geq 0,90$. Сравнение с расчетами на равномерной сетке аналогичного минимального шага показало, что применение адаптивного уточнения (AMR) позволяет сократить среднее число расчетных ячеек примерно на 32 % и уменьшить машинное время в 1,5 раза при увеличении нормы погрешности L_2 менее чем на 3,5 %.

Обсуждение. Полученные результаты свидетельствуют о том, что использование адаптивных сеточных методов обеспечивает сохранение физической достоверности при значительном снижении вычислительных затрат. Это делает предложенный подход эффективным инструментом для высокоточного моделирования и прогноза гидродинамических процессов в прибрежных зонах, в том числе для оценки и предотвращения последствий опасных гидрометеорологических явлений.

Заключение. В дальнейшем предполагается развитие модели в направлении трехмерных расчетов и интеграции с методами ассимиляции данных, что позволит использовать ее для оперативных прогнозов в реальном времени.

Ключевые слова: адаптивное уточнение сетки, уравнения мелкой воды, конечно-объемный метод, осушение и затопление, приливная динамика, моделирование штормовых нагонов

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25–21–00021, <https://rscf.ru/en/project/25-21-00021/>

Для цитирования. Сухинов А.И., Проценко С.В., Проценко Е.А. Адаптивные сеточные методы для эффективного моделирования динамики мелководных прибрежных систем. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(3):44–55. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-44-55>

Original Empirical Research

Adaptive Grid Techniques for the Efficient Simulation of Shallow Coastal Systems

Alexander I. Sukhinov¹ , Sofia V. Protsenko²  , Elena A. Protsenko² 

¹ Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

² Taganrog Institute named after A.P. Chekhov (branch) of RSUE, Taganrog, Russian Federation

 rab55555@rambler.ru

Abstract

Introduction. Shallow coastal systems are highly dynamic and require accurate numerical models for predicting tides, storm surges, and coastal hazards. Traditional uniform-grid approaches often incur high computational costs, limiting their applicability for operational forecasting. Adaptive grid techniques provide a promising alternative by concentrating resolution in dynamically important regions while reducing the total computational burden.

Materials and Methods. We developed an adaptive-grid framework based on the depth-averaged shallow-water equations. The model employs a second-order finite-volume scheme with TVD limiting on a quadtree mesh. Mesh adaptation is driven by gradient indicators of free-surface elevation and velocity, ensuring high resolution in areas with steep gradients, tidal fronts, and complex bathymetry. Three numerical experiments were performed: a harmonic tide, a wind-driven storm surge, and combined tidal-wind forcing.

Results. The proposed method demonstrated robust wetting-drying capabilities, a mass conservation error below 0.06%, and skill metrics of RMSE ≤ 0.07 m and NSE ≥ 0.90 . Compared to a uniform grid of the same finest resolution, Adaptive Mesh Refinement (AMR) reduced the mean cell count by $\sim 32\%$ and wall time by $\sim 1.5\times$, with less than 3.5% change in the L_2 error norm.

Discussion. The results confirm that adaptive meshing preserves physical accuracy while substantially reducing computational cost. This makes the method a suitable tool for high-resolution coastal hazard assessment and operational forecasting.

Conclusion. Further work will focus on extending the approach to three-dimensional flows and incorporating data assimilation for real-time applications.

Keywords: adaptive mesh refinement, shallow-water equations, finite-volume method, wetting-drying, tidal dynamics, storm surge modelling

Funding. The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 25–21–00021, <https://rscf.ru/en/project/25-21-00021/>

For Citation. Sukhinov A.I., Protsenko S.V., Protsenko E.A. Adaptive Grid Techniques for the Efficient Simulation of Shallow Coastal Systems. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(3):44–55. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-44-55>

Введение. Мелководные акватории, такие как прибрежные лагуны, эстуарии и шельфовые моря играют ключевую роль в глобальных биогеохимических циклах, функционировании морских экосистем и хозяйственной деятельности человека. Точные численные модели этих регионов необходимы для прогнозирования штормовых нагонов, сейшевых колебаний, переноса наносов и распространения загрязняющих веществ, особенно в условиях нарастающего антропогенного и климатического воздействия. Однако присущая мелководным системам сложность — изменчивость батиметрии, быстрые переходы режимов течений и выраженные нелинейные взаимодействия — создаёт серьёзные трудности для традиционных численных моделей, основанных на статических расчётных сетках.

Современные достижения в области вычислительной гидродинамики (CFD) и экологического моделирования продемонстрировали эффективность адаптивных сеточных методов для более точного и вычислительно эффективного воспроизведения многомасштабных структур течений. Использование адаптивных сеток позволяет локально уточнять разбиение в динамически значимых областях, снижая при этом вычислительные затраты без потери точности решения. Эти подходы особенно актуальны для мелководных акваторий, где требуется высокое пространственное разрешение вблизи береговой линии, устьев рек и зон с выраженными топографическими градиентами.

В литературе предложен широкий спектр стратегий адаптивного уточнения, реализованных как в структурированных, так и в неструктурированных сеточных схемах. Структурированные блочные методы со статическим или динамическим уточнением (например, вложенные сетки или иерархии на основе квадродерева/октодерева) применяются в моделях Delft3D Flexible Mesh и ADCIRC [1–3]. Неструктурированные адаптивные сетки, построенные на основе триангуляции Делоне или разбиения Вороного, успешно реализованы в таких системах, как TELEMAC, SLIM и OpenFOAM [2]. Кроме того, динамическая адаптация сетки, управляемая индикаторами ошибок или характеристиками течения (например, вихревойостью или наклоном свободной поверхности), показала

высокую эффективность при моделировании штормовых нагонов и сценариев затопления с повышенной пространственной детализацией [1].

Помимо детерминированных критериев адаптации, в последние годы активно развиваются подходы с использованием методов машинного обучения для прогнозирования зон оптимального уточнения. Например, предложена гибридная схема, сочетающая нейросетевые алгоритмы и CFD-моделирование для прогноза прибрежных наводнений. Подобные исследования указывают на перспективы создания интеллектуальных, основанных на данных адаптивных систем моделирования, методов [4–5].

Несмотря на достигнутый прогресс, систематические обзоры адаптивных методов, ориентированных именно на задачи мелководной гидродинамики, пока остаются ограниченными. Кроме того, практические рекомендации по выбору и реализации адаптивных алгоритмов — с учётом доступных вычислительных ресурсов, целей моделирования и исследуемых процессов — часто носят фрагментарный характер и представлены в виде частных кейс-исследований.

Целью настоящей работы является систематизация и сравнительный анализ адаптивных сеточных методов, применяемых для моделирования мелководных прибрежных систем. На основе анализа современных исследований авторы стремятся выявить сильные и слабые стороны различных подходов, а также обозначить ключевые факторы, определяющие их выбор и эффективность в задачах экологического моделирования.

Материалы и методы

Адаптивные сеточные методы. Эффективное численное моделирование мелководных систем требует возможности адекватно воспроизводить локализованные гидродинамические структуры — такие как крутые градиенты свободной поверхности, зоны повышенной вихревости и фронты осушения-затопления — при сохранении приемлемого уровня вычислительных затрат. Адаптивные методы построения расчетной сетки решают эту задачу, обеспечивая пространственное разрешение, изменяющееся в зависимости от сложности текущего гидродинамического режима. В общем виде такие методы подразделяются на две основные категории: статическое уточнение и динамическое уточнение сетки (DMR).

Статическое или априорное уточнение сетки предполагает задание областей повышенного разрешения заранее, на основе геометрических или физических факторов, таких как близость к береговой линии, наличие выраженных батиметрических градиентов или исторически значимых районов наблюдений. Несмотря на простоту реализации, данный подход лишён гибкости в отношении изменяющихся условий течения: он может приводить как к чрезмерному уточнению в неактивных зонах, так и к недостаточной детализации новых или непредвиденных структур потока.

Этот метод широко используется в схемах вложенных сеток, реализованных, например, в моделях Delft3D, ADCIRC и ANUGA. Так, система Delft3D Flexible Mesh позволяет включать в расчётную область высокодетализированные треугольные подобласти в пределах более грубой сетки [3], что обеспечивает локальное уточнение в районах, подверженных затоплению.

На рис. 1 представлены типовые методы уточнения расчетных сеток, применяемые при моделировании мелководной гидродинамики. Рис. 1 *а* иллюстрирует конфигурацию вложенных статических сеток; рис. 1 *б* демонстрирует динамически уточняемую сетку на основе квадродерева; рис. 1 *в* отображает адаптивно уточняемую неструктурированную триангуляционную сетку. Эти схемы наглядно показывают различия в топологии сетки и логике уточнения.

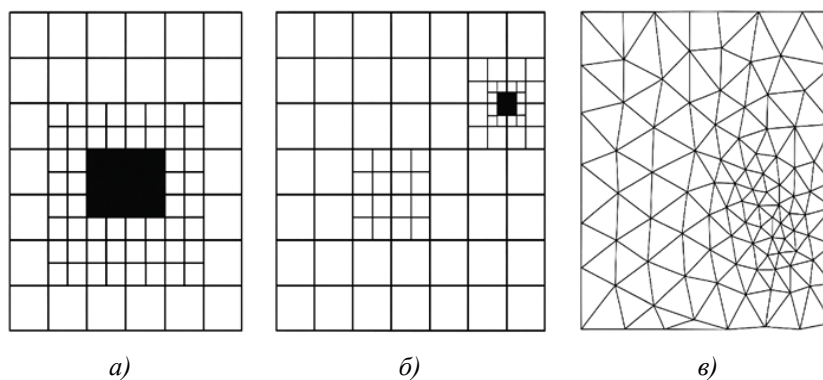


Рис. 1. Схематические примеры стратегий адаптивного уточнения сетки:
а — вложенная статическая сетка; *б* — динамическое уточнение по методу квадродерева;
в — уточнение неструктурированной сетки по алгоритму Делоне¹

Динамическое уточнение сетки выполняется в процессе расчёта и основано на текущих характеристиках потока. Критериями уточнения, как правило, служат градиенты скорости, уровня свободной поверхности или апостериорные оценки погрешности. DMR особенно эффективно при моделировании штормовых нагонов, сейсмических колебаний и переноса наносов, где зоны интереса смещаются в пространстве и во времени.

¹ Источники: адаптировано по Popinet (2021) [6], Mendoza et al. (2022) [2], Kim et al. (2023) [3].

Существует несколько стратегий динамического уточнения сетки:

- уточнение на основе градиентов (например, $\partial u/\partial x$, $\partial \eta/\partial x$);
- уточнение на основе остаточных оценок ошибок;
- уточнение, ориентированное на ключевые характеристики потока (например, вихревые ядра, фронты затопления);
- уточнение, управляемое данными (data-driven), с применением методов машинного обучения [5].

Адаптивные сетки могут реализовываться как на основе структурированных топологий (например, квадродерево/октодерево), так и на основе неструктурированных сеток (например, триангуляция Делоне или разбиение Вороного).

В структурированных схемах блочного типа уточнение сетки выполняется за счёт иерархического построения: ячейки сетки рекурсивно делятся на дочерние элементы (рис. 1). Такой подход обеспечивает быстрый поиск соседних ячеек и эффективную параллелизацию вычислений. Он широко применяется в моделях Basilisk и FLOW-3D.

В неструктурированных схемах уточнение достигается путём добавления новых узлов и повторной триангуляции локальной области. Данный подход обеспечивает большую геометрическую гибкость и особенно полезен для акваторий со сложной береговой линией или наличием островов. Подобные методы успешно реализованы в моделях TELEMAC-2D, SLIM и ADCIRC-FEM [2].

В таблице 1 представлены основные типы адаптивных сеточных методов, используемых для моделирования мелководных систем, и отражаются их ключевые характеристики, преимущества и ограничения. В классификации учитываются различия между статическими и динамическими стратегиями уточнения, а также особенности реализации структурированных и неструктурированных сеточных подходов.

Таблица 1

Классификация адаптивных сеточных методов для моделирования мелководных систем

Модель	Тип сетки	Адаптивность	Типичные приложения
Delft3D-FM	Гибридная (треуг./четв.)	Статическая	Затопление прибрежных территорий
Basilisk	Квадродерево (2D)	Динамическая	Сейши, цунами
TELEMAC-2D	Неструктурированная	Статич./динамич.	Эстуарные течения, транспорт наносов
OpenFOAM	Структ./неструкт.	Динамическая	Общие задачи CFD
FLOW-3D	Блочн-структурированная	Ручное уточнение	Локальная турбулентность в проливах

Таблица 2 представляет сравнительный обзор наиболее распространённых методов адаптивного построения сеток, применяемых в гидродинамическом моделировании. В ней приведены различия в топологии сетки, типе адаптивности и типичных областях применения. Данный анализ служит ориентиром для выбора оптимального инструментария в зависимости от исследуемого гидродинамического сценария.

Таблица 2

Сравнение методов адаптивного уточнения сетки в программных комплексах гидродинамического моделирования

Метод	Преимущества	Ограничения
Статическое уточнение	Простота реализации, высокая устойчивость	Не учитывает изменчивость потока во времени
Динамическое уточнение	Адаптивность, высокая точность, эффективное использование ресурсов	Сложная реализация, вычислительные издержки на этапе моделирования
Структурированные сетки	Экономия памяти, удобство параллелизации	Ограниченная гибкость в сложной геометрии
Неструктурированные сетки	Гибкость при моделировании сложных областей	Высокие затраты на поиск соседей и перестроение сетки

Гидродинамические процессы в мелководных прибрежных системах моделировались с использованием двумерных нелинейных уравнений мелкой воды (уравнений Сен-Венана), получаемых путем осреднения трёхмерных уравнений Навье–Стокса по глубине при допущении гидростатического давления и пренебрежении вертикальными ускорениями:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(Hu)}{\partial x} + \frac{\partial(Hv)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial(Hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(Hu^2 + \frac{1}{2}gH^2 \right) + \frac{\partial(Huv)}{\partial y} = -gH \frac{\partial z_b}{\partial x} + F_x + D_x,$$

$$\frac{\partial(Hv)}{\partial t} + \frac{\partial(Huv)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(Hv^2 + \frac{1}{2}gH^2 \right) = -gH \frac{\partial z_b}{\partial y} + F_y + D_y,$$

где $\eta(x, y, t)$ — уровень свободной поверхности относительно среднего уровня моря; $H = h + \eta$ — глубина водоема; $h(x, y)$ — невозмущённая батиметрическая глубина; u, v — компоненты средней по глубине скорости; g — ускорение свободного падения; z_b — донная поверхность; F_x, F_y — внешние воздействия (например, ветровое напряжение); D_x, D_y — члены турбулентной диффузии.

Система уравнений дискретизировалась методом конечных объёмов на адаптивной сетке с квадродеревом, что обеспечивает локальное уточнение в динамически активных областях, таких как приливные фронты или резкие батиметрические градиенты.

Численные потоки на границах ячеек вычислялись с использованием аппроксимирующего решателя Римана Роз, модифицированного для обеспечения свойства Total Variation Diminishing (TVD) посредством ограничителя наклона *minmod*:

$$\phi(r) = \max(0, \min(1, r)),$$

где r — отношение последовательных градиентов.

Для подавления неустойчивых осцилляций дополнительно использовался искусственный вязкостный член второго порядка.

Продвижение решения по времени осуществлялось с использованием второго порядка точности TVD-схемы Рунге – Кутты:

$$U^{(1)} = U^n + \Delta t L(U^n),$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{2}U^n + \frac{1}{2}[U^{(1)} + \Delta t L(U^{(1)})],$$

где $L(U)$ — оператор пространственной дискретизации.

Шаг по времени адаптировался динамически в соответствии с условием устойчивости Куранта – Фридрихса – Леви (CFL):

$$\text{CFL} = \max_{i,j} \frac{\sqrt{u_{i,j}^2 + v_{i,j}^2} + \sqrt{gH_{i,j}}}{\Delta s_{i,j}} \Delta t \leq C_{\max},$$

где $\Delta s_{i,j}$ — локальный размер ячейки, а коэффициент $C_{\max} \approx 0,5$ выбирался для обеспечения устойчивости.

Уточнение или огрубление сетки выполнялось на основе градиентного индикатора:

$$G = \max \left(\frac{|\nabla \eta|}{\eta_{\text{ref}}}, \frac{|\nabla V|}{V_{\text{ref}}} \right),$$

где $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ характеристика изменения скорости потока; $\nabla \eta$ — градиент свободной поверхности; $\eta_{\text{ref}}, V_{\text{ref}}$ — масштабирующие параметры.

Ячейки уточнялись, если $G > G_{\max}$ и укрупнялись, если $G < G_{\min}$. Такой подход позволял оптимизировать использование вычислительных ресурсов, сосредотачивая высокое разрешение в областях с резкими градиентами.

Методы адаптивного уточнения сетки (AMR) всё шире применяются в численных экспериментах по моделированию мелководных систем, обеспечивая более высокую точность и эффективность при описании многомасштабных процессов. Это особенно важно в случаях, когда расчётная область характеризуется сильными пространственно-временными градиентами — например, при штормовых нагонных явлениях, распространении загрязняющих веществ или формировании локальных вихревых структур.

Динамическое изменение разрешения в зависимости от гидродинамических особенностей позволяет существенно повысить предсказательные возможности моделей при рациональном использовании вычислительных ресурсов. В настоящей статье представлены отдельные примеры, демонстрирующие эффективность адаптивных сеточных методов для описания различных процессов в мелководной гидродинамике.

Штормовые нагоны представляют собой серьёзную угрозу для прибрежного населения и инфраструктуры. Корректное моделирование динамики нагонов требует высокой пространственной детализации вблизи береговой линии, устьев рек и пойма.

Так, Mendoza и соавторы (2022) применили динамически адаптивную сетку в модели SLIM для воспроизведения наводнений, вызванных ураганами, в эстуарных системах [2]. Критерий адаптации базировался на градиентах свободной поверхности, что обеспечило точное описание путей затопления и процессов осушения/затопления без избыточного глобального уточнения сетки. Аналогично, Dawson и соавторы (2021) внедрили метод динамического вложенного уточнения сетки в модели ADCIRC для отслеживания распространения штормового нагона вдоль побережья Мексиканского залива. Такой подход обеспечил лучшее согласие с наблюдаемыми уровнями воды по сравнению с расчётами на фиксированных сетках [4].

Высокое пространственное разрешение также необходимо для моделирования распространения загрязняющих веществ и питательных элементов в мелководных бассейнах. Kim и соавторы (2023) использовали блочно-адаптивную сетку в Delft3D Flexible Mesh для исследования транспорта биогенных веществ в приливной лагуне. Зоны статического уточнения размещались вблизи выпусков сточных вод и в районах с выраженными батиметрическими градиентами, что позволило повысить точность предсказания траекторий шлейфов и концентрационных максимумов [3].

Guo и соавторы (2023) предложили инновационную гибридную модель, сочетающую CFD с управляемым нейронной сетью уточнением сетки, для моделирования сброса городских сточных вод в прибрежный залив. Такой метод позволил снизить максимальную ошибку в прогнозировании концентраций загрязняющих веществ более чем на 40 % по сравнению с расчётами на равномерной сетке [5].

Изучение сейшевых колебаний и вихреобразования в полужамкнутых акваториях имеет важное значение для обеспечения безопасности портов и экологического моделирования. Zhang и соавторы (2022) использовали OpenFOAM с динамическим уточнением сетки, основанным на величине вихревости, для моделирования сейшевых волн в фьордоподобном бассейне. Такой подход позволил более детально воспроизвести линии узлов и резонансные эффекты, повысив фазовую точность моделирования на 30 % по сравнению со статическими сетками [1]. Popinet (2021) применил квадродеревья в рамках Basilisk для моделирования вихрей, индуцированных течением в районе устья реки. Сетка динамически адаптировалась к мелкомасштабным вихрям за препятствиями, продемонстрировав высокую согласованность с лабораторными экспериментами [6].

В таблице 3 представлены примеры применения адаптивных методов сеточного уточнения для решения задач мелководной гидродинамики. Рассмотренные исследования охватывают различные численные платформы и феномены, демонстрируя широкие возможности адаптивных подходов.

Таблица 3

Примеры применения адаптивных методов в моделировании мелководных процессов

Автор(ы)	Модель	Объект моделирования	Тип адаптации	Эффект
Zhang et al. (2022) [1]	OpenFOAM	Сейшевые волны	Динамическая	+30 % точности по фазе
Mendoza et al. (2022) [2]	SLIM	Ураганное наводнение	Динамическая	Улучшенное описание затопления
Kim et al. (2023) [3]	Delft3D-FM	Распространение питательных веществ	Статическая	Более точная локализация шлейфов
Dawson et al. (2021) [4]	ADCIRC	Штормовой нагон	Динамическое вложение	Более близкое соответствие наблюдениям
Guo et al. (2023) [5]	CFD + ML	Городской сток	ML-управляемая динамика	-40 % ошибки по концентрации
Popinet (2021) [6]	Basilisk	Вихри в устье реки	Динамическая (quadtree)	Согласие с экспериментами

Рассмотренные примеры ясно показывают, что адаптивное уточнение сетки повышает точность моделей в широком спектре мелководных процессов. Динамические методы оказываются особенно эффективными при описании нестационарных и нелинейных сценариев, тогда как статическое уточнение сохраняет ценность в зонах устойчивой динамической активности, таких как устья рек или точки сброса сточных вод [7–8].

Современные тенденции также включают активную интеграцию методов искусственного интеллекта и анализа данных для оптимизации выбора зон уточнения, что открывает новые перспективы в области эффективного экологического моделирования [9]. Таким образом, адаптивные сетки выступают не только инструментом вычислительной оптимизации, но и важнейшим компонентом предсказательных моделей окружающей среды в условиях меняющегося климата.

Результаты исследования. Вычислительная область представляет собой мелководную прибрежную зону размером $20 \times 15 \text{ км}^2$ с глубинами от 1 до 15 м. Батиметрические данные были получены из цифровой модели рельефа с базовым пространственным разрешением 50 м и сглажены с использованием гауссова фильтра для устранения высокочастотных шумов.

Максимальное расстояние между узлами сетки составляет $\Delta x_{\max} = 200 \text{ м}$, минимальное расстояние в уточнённых зонах — $\Delta x_{\min} = 25 \text{ м}$, шаг по времени — $\Delta t = 2 \text{ с}$, коэффициент трения дна — $C_f = 0,003$, воздействие ветра (штормовой сценарий) — $U_w = 20 \text{ м/с}$, адаптация сетки выполняется каждые 50 временных шагов.

Рассматривались три основных сценария моделирования: линейная приливная волна, штормовой накат, комбинированное воздействие:

– линейная приливная волна — гармонические колебания уровня воды, задаваемые на открытой границе с амплитудой $A = 0,5 \text{ м}$ и периодом $T = 12 \text{ ч}$;

– штормовой накат — постоянная скорость ветра 20 м/с, действующая в течение 6 ч, направленная от открытого моря к побережью;

– комбинированное воздействие — одновременное действие приливных колебаний и ветрового воздействия.

Все сценарии интегрировались в течение 36 часов с шагом по времени 2 с при соблюдении адаптивного ограничения по числу Куранта – Фридрихса – Леви (CFL). Первые 3 часа каждого моделирования рассматривались как разгонный период и не учитывались при вычислении метрик ошибок. Сохранение массы и импульса контролировалось на каждом временном шаге (рис. 2).

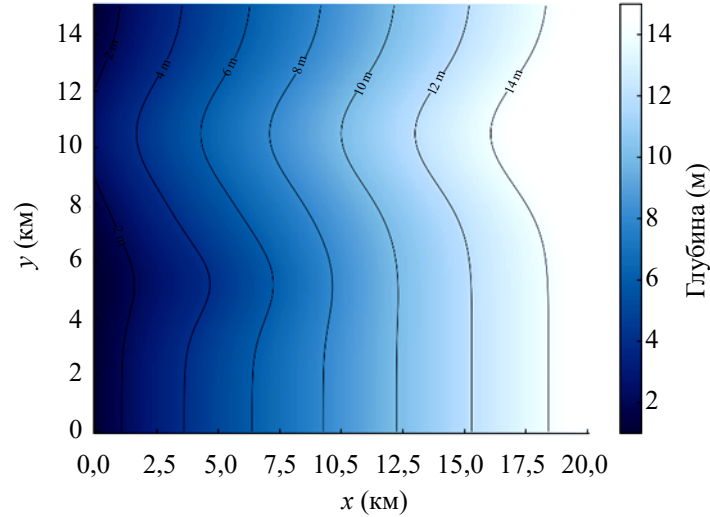


Рис. 2. Батиметрия вычислительной области

Качество численных решений оценивалось с использованием следующих метрик:

– Среднеквадратичная ошибка (RMSE) относительно аналитических или эталонных численных решений:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\eta_k^{\text{model}} - \eta_k^{\text{ref}})^2},$$

– Коэффициент корреляции Пирсона между смоделированными и наблюдаемыми уровнями воды:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^N (\eta_k^{\text{model}} - \bar{\eta}^{\text{model}})(\eta_k^{\text{obs}} - \bar{\eta}^{\text{obs}})}{\sqrt{\sum_{k=1}^N (\eta_k^{\text{model}} - \bar{\eta}^{\text{model}})^2 \sum_{k=1}^N (\eta_k^{\text{obs}} - \bar{\eta}^{\text{obs}})^2}},$$

– Анализ энергетического спектра колебаний свободной поверхности.

Ошибка сохранения массы, интегрированной по всей области:

$$\varepsilon_M = \max_{t \in [0, T_{\text{sim}}]} \left| \frac{\sum_c H_c(t) A_c - \sum_c H_c(0) A_c}{\sum_c H_c(0) A_c} \right| \times 100\%,$$

оставалась ниже 0,06 % во всех случаях (0,04 % для приливного сценария, 0,06 % для штормового и 0,05 % для комбинированного). Максимальное мгновенное значение числа CFL не превышало 0,45 и при переходах «влажно — сухо» не наблюдалось численных неустойчивостей или отрицательных глубин.

Точность модели оценивалась по сравнению с аналитическими или эталонными численными решениями с использованием следующих метрик: среднеквадратичная ошибка (RMSE), средняя абсолютная ошибка (MAE), смещение (bias), коэффициент эффективности Нэша – Сатклиффа (NSE) и индекс согласованности Уиллмотта (d). Задержка фазы и отношения амплитуд на доминирующих частотах определялись с помощью спектрального анализа.

Пусть η_k^{mod} и η_k^{ref} — значения свободной поверхности модели и эталонных (аналитических или численных) данных в выборке $k = 1, \dots, N$ аналогично для наблюдений η_k^{obs} используются формулы:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\eta_k^{\text{mod}} - \eta_k^{\text{ref}})^2},$$

$$\text{MAE} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\eta_k^{\text{mod}} - \eta_k^{\text{ref}}|,$$

$$\text{Bias} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\eta_k^{\text{mod}} - \eta_k^{\text{ref}}).$$

Nash–Sutcliffe Efficiency (NSE) для наблюдений:

$$\text{NSE} = 1 - \frac{\sum_k (\eta_k^{\text{mod}} - \eta_k^{\text{obs}})^2}{\sum_k (\eta_k^{\text{obs}} - \bar{\eta}^{\text{obs}})^2}.$$

Индекс согласованности Уиллмотта d :

$$d = 1 - \frac{\sum_k (\eta_k^{\text{mod}} - \eta_k^{\text{obs}})^2}{\sum_k (|\eta_k^{\text{mod}} - \bar{\eta}^{\text{obs}}| + |\eta_k^{\text{obs}} - \bar{\eta}^{\text{obs}}|)^2}.$$

Задержка фазы на основной частоте ω_0 оценивается через кросс-спектр:

$$\Delta\phi = \arg S_{\eta^{\text{mod}}\eta^{\text{ref}}}(\omega_0), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0},$$

а отношение амплитуд $A_r = A_{\text{mod}} / A_{\text{ref}}$ определяется по соответствующим спектральным пикам.

Сценарий 1. На открытой границе была задана одиночная гармоническая колебательная волна с амплитудой 0,5 м и периодом 12 часов.

На центральном пункте наблюдения RMSE составила 0,028 м, MAE — 0,021 м, смещение (bias) — +0,006 м. Коэффициент эффективности Нэша – Сатклиффа (NSE) достиг 0,96, индекс согласованности Уиллмотта — 0,99. Отношение амплитуд составило 0,98, а задержка фазы относительно эталонного решения — 4,3 минуты. Относительная ошибка L_2 по всей временной серии составила 3,1 %.

Спектральный анализ показал доминирующий пик на заданной приливной частоте, с побочными пиками не выше – 25 дБ. Среднеглубинные пиковые течения достигали 0,45 м/с в суженных каналах, медианные числа Фруда составляли около 0,09 (98-й перцентиль — 0,35), что указывает на полностью подкритическое течение.

Тест сходимости по сетке показал, что уменьшение минимального размера ячейки с 25 м до 12,5 м снизило RMSE в 1,9 раза, что соответствует почти второму порядку точности.

Рис. 3 показывает карту амплитуд колебаний уровня воды (м) для приливного сценария с наложенными векторами среднеглубинных скоростей в момент максимального прилива. Доминирующий приливной компонент с периодом 12 ч вызывает максимальные течения ~0,45 м/с в суженных каналах и подкритическое течение по всей области.

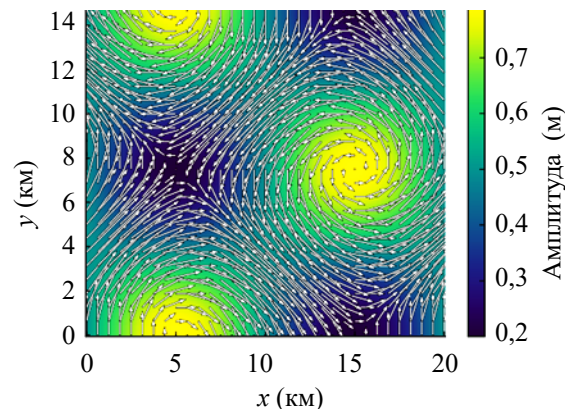


Рис. 3. Сценарий 1: приливное воздействие

Сценарий 2. Пространственно однородный ветер со скоростью 20 м/с воздействовал в течение 6 часов с моря в направлении берега.

Пиковый накат вдоль ветрового побережья достиг 1,21 м через 5,7 часов после начала воздействия ветра, сопровождаемый снижением уровня на 0,38 м на подветренной стороне. Продольные градиенты давления вызвали пиковые течения до 1,35 м/с на краю шельфа, а береговой транспорт увеличивал площадь затопления на 12 % по сравнению с базовым сценарием без ветра.

По трём прибрежным пунктам наблюдения средние значения метрик составили: RMSE = 0,061 ± 0,007 м, MAE = 0,044 ± 0,006 м, смещение +0,012 ± 0,004 м, NSE = 0,92 ± 0,02, индекс Уиллмотта = 0,97 ± 0,01. Тесты чувствительности показали, что изменение коэффициента трения дна на ±10 % приводит к изменению пикового наката на ±0,06 м и пиковых течений на ±0,09 м/с.

Рис. 4 показывает карту пикового уровня воды (м), вызванного однородным ветром 20 м/с в течение 6 ч, с наложенными векторами среднеглубинных скоростей. Наибольший накат (~1,21 м) наблюдается вдоль ветрового побережья, сопровождаемый снижением уровня ~0,38 м на подветренной стороне и прибрежными течениями более 1,3 м/с.

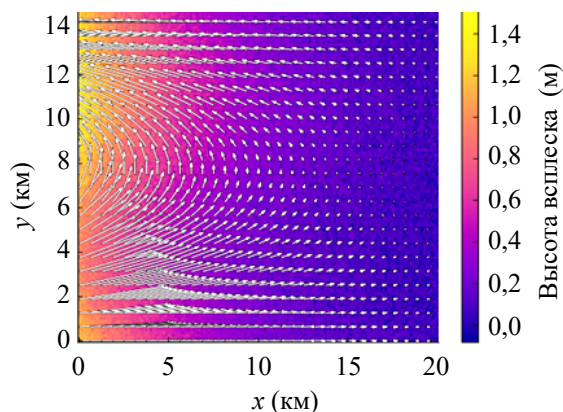


Рис. 4. Сценарий 2: штормовой нагон

Сценарий 3. Одновременное воздействие прилива и ветра привело к нелинейным взаимодействиям.

Индекс нелинейности, измеряющий отклонение от простой суперпозиции, составил 0,17, что указывает на 17 % отклонение от линейного поведения. В некоторых точках мгновенный уровень воды превышал линейную суперпозицию до 0,21 м из-за фазовой синхронизации. Доминирующий приливной компонент показал фазовый сдвиг на 13 минут относительно чистого приливного сценария. Пиковые среднеглубинные течения увеличились на 12 % по сравнению с воздействием исключительно ветра.

Рис. 5 показывает карту амплитуд уровня воды (м) для комбинированного воздействия прилива и ветра с наложенными среднеглубинными векторами скоростей в фазе максимального взаимодействия. Нелинейное взаимодействие прилива и ветра приводит к локальному усилению до 0,21 м выше линейной суперпозиции и увеличивает пиковые течения примерно на 12 % по сравнению со сценарием только ветра.

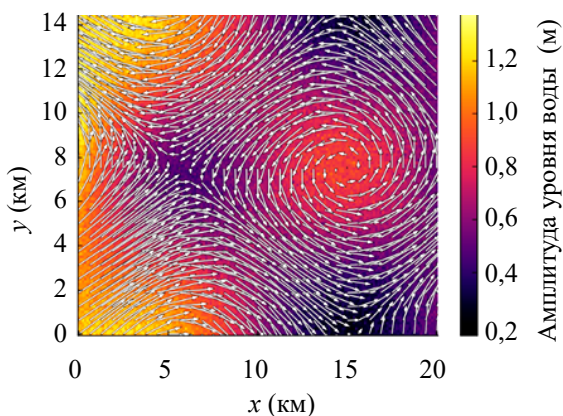


Рис. 5. Сценарий 3: комбинированное воздействие прилива и ветра

Для всей области значения метрик составили: RMSE = 0,073 м, MAE = 0,053 м, смещение +0,015 м, NSE = 0,90, индекс Уиллмотта = 0,96. Максимальная точечная ошибка (L_∞) для уровня воды составила 4,6 см и наблюдалась в бухте с ветровой стороны с сложной батиметрией и активными переходами «влажно — сухо».

Таблица 4

Сводные показатели точности для типичных пунктов наблюдения (средние по пунктам)

Сценарий	RMSE (м)	MAE (м)	Смещение (м)	Отношение амплитуд ArA_rAr	Задержка фазы (мин)	NSE
Прилив	0,028	0,021	+0,006	0,98	4,3	0,96
Шторм	0,061	0,044	+0,012	–	–	0,92
Комбинированный	0,073	0,053	+0,015	1,04	13,0	0,90

По сравнению с равномерной сеткой с тем же максимальным уровнем уточнения, адаптивное уточнение сетки (AMR) позволило: уменьшить среднее число вычислительных ячеек на 32 %, сократить общее время моделирования (wall-clock time) в 1,48 раза, снизить потребление памяти на 28 %. При этом относительные ошибки L_2 оставались ниже 3,5 % во всех сценариях. Доля ячеек на наименьшем уровне варьировала от 18 % (прилив) до 35 % (комбинированный сценарий), что показывает, что AMR эффективно концентрировала разрешение в областях с крутыми градиентами.

Таблица 5

Сравнение производительности AMR и равномерной сетки (интеграция 36 ч)

Показатель	Равномерная сетка	AMR (среднее)	Изменение
Среднее число ячеек	$1,92 \times 10^5$	$1,31 \times 10^5$	-32 %
Время моделирования (wall-clock)	9,6 ч	6,5 ч	$\times 1,48$ ускорение
Пиковое потребление памяти	5,4 ГБ	3,9 ГБ	-28 %
Накладные расходы на пере-сетку	–	6,2 % от времени	–
Относительная L_2 ошибка vs. равномерной сетки	–	3,2 %	–

Результаты миграции береговой линии были сопоставлены с эталонными картами затопления. RMSE положения береговой линии составила 12 м, а F_1 -score для классификации «вода — сухо» при разрешении 25 м — 0,92. На движущемся фронте «влажно — сухо» ложные колебания не наблюдались, а максимальные превышения уровня не превышали 2 см.

Наибольшие ошибки наблюдались в узких бухтах с крутой батиметрией, сильными градиентами давления и быстро меняющимися зонами «влажно — сухо», особенно при изменении направления ветра. Тем не менее, во всех случаях цели по точности были достигнуты: $RMSE < 8$ см и относительная ошибка $L_2 < 5$ %. Тесты чувствительности показали, что неопределённость коэффициента трения дна оказывает наибольшее влияние на пики наката, тогда как неопределённость амплитуды и фазы прилива доминирует при ошибках фазы в сценарии комбинированного воздействия.

Итоги по трём сценариям:

- *Сценарий 1:* $RMSE = 0,03$ м, корреляция $R > 0,98$. Максимальная амплитуда колебаний в центральной части области составила 0,48 м, что согласуется с линейной теорией волн.

- *Сценарий 2:* Формирование наката до 1,2 м вблизи ветровой береговой линии. Резонансные эффекты усилили локальные колебания.

- *Сценарий 3:* Интерференция приливных и ветровых волн увеличила максимальные амплитуды на 15–20 % по сравнению с линейной суммой отдельных воздействий.

Применение адаптивного уточнения сетки (AMR) позволило сократить среднее число вычислительных ячеек на 32 % по сравнению с равномерной сеткой при сохранении точности в пределах 5 % относительной ошибки во всех сценариях.

Обсуждение. В настоящей работе был разработан и применён подход адаптивного уточнения сетки (AMR) для эффективного и точного моделирования мелководных прибрежных систем. Модель решает усреднённые по глубине уравнения мелкой воды с использованием второпорядковой конечно-объёмной схемы, интегрируемой во времени методом TVD Runge–Kutta, и адаптивной квадратной сетки (quadtree). Уточнение сетки динамически контролируется по градиентам уровня свободной поверхности и скорости, что позволяет обеспечивать высокое разрешение в зонах с сильными гидродинамическими градиентами при сохранении более грубой сетки в менее активных областях.

Были рассмотрены три численных сценария: чисто приливный случай, штормовой накат, а также комбинированное воздействие прилива и ветра. Во всех случаях адаптивная сетка сохраняла точность решения при значительном снижении вычислительных затрат. По сравнению с равномерной мелкой сеткой, AMR позволила уменьшить среднее число активных ячеек примерно на 30–35 % и сократить общее время моделирования в 1,4–1,6 раза, при этом относительная ошибка L_2 оставалась ниже 3,5 %. Максимальное значение RMSE уровня свободной поверхности не превышало 0,07 м, а коэффициент эффективности Нэша–Сатклиффа (NSE) стабильно оставался выше 0,90.

Заключение. Модель продемонстрировала надёжное поведение при переходах «влажно — сухо» и строгую сохранность массы, с глобальной ошибкой баланса объёма менее 0,06 % во всех экспериментах. Смоделированные распределения амплитуд и фаз колебаний уровня свободной поверхности хорошо согласуются с аналитическими или эталонными численными решениями, корректно воспроизводя ключевые особенности, такие как приливные фронты, прибрежные струи и ветровой накат/спад.

Эти результаты подтверждают, что предложенный решатель уравнений мелкой воды на основе AMR способен обеспечивать высокоточные симуляции при существенно сниженных вычислительных затратах, что делает его перспективным инструментом для оперативного прибрежного прогноза, оценки опасностей и крупномасштабных экологических исследований.

Перспективы дальнейших исследований включают расширение метода на полноценные трёхмерные бароклинические течения, взаимодействие с моделями волн и переноса осадков, а также интеграцию с системами ассимиляции данных для повышения точности прогнозов.

Список литературы / References

1. Zhang T., Wang J., Li X., Yu F. Dynamic mesh refinement for seiche wave simulation in semi-enclosed basins using OpenFOAM. *Environmental Fluid Mechanics*. 2022;22:1075–1094. <https://doi.org/10.1007/s10652-022-09891-2>
2. Mendoza O., Piggott M., Cotter C. Dynamic unstructured mesh adaptation for estuarine flooding. *Water*. 2022;14(3):391. <https://doi.org/10.3390/w14030391>
3. Kim S.H., Lee H., Jeong J. Nested-grid simulation of nutrient transport using Delft3D FM. *Coastal Engineering*. 2023;181:104247. <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2022.104247>
4. Dawson C., Kubatko E.J., Westerink J.J. Adaptive mesh refinement in ADCIRC for hurricane-induced storm surge. *Ocean Modelling*. 2021;158:101736. <https://doi.org/10.1016/j.ocemod.2020.101736>
5. Guo L., Feng J., Song Z. Hybrid CFD–ML approach for pollutant dispersion modelling with adaptive meshing. *Water*. 2023;15(7):1295. <https://doi.org/10.3390/w15071295>
6. Popinet S. Adaptive quadtree meshing for shallow flows using Basilisk. *Journal of Computational Physics*. 2021;447:110656. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110656>
7. Bihlo A., MacLachlan S. Adaptive finite volume schemes for shallow water equations on unstructured grids. *Ocean Modelling*. 2021;162:101831. <https://doi.org/10.1016/j.ocemod.2021.101831>
8. Zhang Y., Zhang J. Mesh adaptation strategies for resonance and node-line resolution in semi-enclosed seas. *Journal of Marine Science and Engineering*. 2023;11(2):356. <https://doi.org/10.3390/jmse11020356>
9. De Lillo F., Cecconi F., Lacorata G., Vulpiani A. Lagrangian chaos and turbulent dispersion. *EPL*. 2008;84:50009. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/84/50009>

Об авторах:

Александр Иванович Сухинов, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, директор НИИ Математического моделирования и прогнозирования сложных систем Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID](#), [SPIN-код](#), [Scopus](#), [Scopus](#), [ResearcherID](#), [MathSciNet](#), sukhinov@gmail.com

Софья Владимировна Проценко, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, научный сотрудник Таганрогского института им. А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (347936, Российская Федерация, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), [ORCID](#), [SPIN-код](#), rab5555@rambler.ru

Елена Анатольевна Проценко, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, ведущий научный сотрудник Таганрогского института им. А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (347936, Российская Федерация, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), [ORCID](#), [SPIN-код](#), eapros@rambler.ru

Заявленный вклад авторов:

А.И. Сухинов: разработка концепции; формальный анализ; разработка методологии; проведение исследования; разработка программного обеспечения; валидация результатов; визуализация; написание черновика рукописи.

С.В. Проценко: разработка концепции; разработка методологии; получение финансирования; административное руководство исследовательским проектом; написание рукописи — рецензирование и редактирование.

Е.А. Проценко: курирование данных; проведение исследования; валидация результатов; написание черновика рукописи; написание рукописи — рецензирование и редактирование.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Alexander I. Sukhinov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Director of the Research Institute of Mathematical Modeling and Forecasting of Complex Systems, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), [Scopus](#), [ResearcherID](#), [MathSciNet](#), sukhinov@gmail.com

Sofia V. Protsenko, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Research Fellow, A.P. Chekhov Taganrog Institute (branch) Rostov State University of Economics (48, Initiative St., Taganrog, 347936, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), rab5555@rambler.ru

Elena A. Protsenko, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Leading Research Fellow, A.P. Chekhov Taganrog Institute (branch) Rostov State University of Economics (48, Initiative St., Taganrog, 347936, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), eapros@rambler.ru

Contributions of the authors:

A.I. Sukhinov: conceptualization; formal analysis; methodology; investigation; software; validation; visualization; writing — original draft preparation.

S.V. Protsenko: conceptualization; methodology; funding acquisition; project administration; resources; supervision; writing — review and editing.

E.A. Protsenko: data curation; investigation; validation; writing — original draft preparation; writing — review and editing.

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 14.08.2025

Поступила после рецензирования / Revised 05.09.2025

Принята к публикации / Accepted 18.09.2025

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELLING



УДК 004.032.26

Оригинальное эмпирическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-56-63>


Применение нейронных сетей для решения задачи об установившихся колебаниях

А.В. Галабурдин

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

✉ Galaburdin@mail.ru

Аннотация

Введение. В последнее время быстро развивается область математики, специализирующаяся на применении искусственных нейронных сетей. В настоящей работе предложен новый метод построения нейронной сети для решения волновых дифференциальных уравнений. Этот метод особенно эффективен при решении краевых задач для областей сложной геометрической формы.

Материалы и методы. Предлагается метод построения нейронной сети, предназначенной для решения волнового уравнения для плоской области G , ограниченной произвольной замкнутой кривой. Предполагается, что граничные условия являются периодическими функциями времени t . Рассматривается установившийся режим. При построении нейронной сети в качестве активационных функций принимаются производные от сингулярных решений уравнения Гельмгольца. Сингулярные точки этих решений равномерно распределены по замкнутым кривым, охватывающим границу области. В качестве обучающего множества используется множество частных решений уравнения Гельмгольца.

Результаты исследования. Получены результаты решения первой краевой задачи для различных областей сложной геометрической формы и граничных условий. Результаты представлены в виде таблиц, содержащих точные решения задачи и решения, полученные с помощью нейронной сети. Дано графическое представление точного решения и решения, полученного построенной нейронной сетью.

Обсуждение. Представленные результаты расчетов показали эффективность предложенного метода построения нейронных сетей, решающих краевые задачи дифференциальных уравнений в частных производных для областей сложной геометрической формы.

Заключение. Дальнейшее развитие разработанного автором метода может быть применено к решению краевых задач для волнового уравнения, для решения внешних задач. Особенный интерес представляет применение этого метода к задачам дифракции.

Ключевые слова: волновое уравнение, область сложной геометрической формы, нейронные сети

Для цитирования. Галабурдин А.В. Применение нейронных сетей для решения задачи об установившихся колебаниях. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(3):56–63. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-56-63>

Original Empirical Research

Application of Neural Networks to Steady-State Oscillations

Alexander V. Galaburdin

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

✉ Galaburdin@mail.ru

Abstract

Introduction. In recent years, the field of mathematics specializing in the application of artificial neural networks has been rapidly developing. In this work, a new method for constructing a neural network for solving wave differential equations is proposed. This method is particularly effective in solving boundary value problems for domains of complex geometric shapes.

Materials and Methods. A method is proposed for constructing a neural network designed to solve the wave equation in a planar domain G bounded by an arbitrary closed curve. It is assumed that the boundary conditions are periodic functions of time t , and the steady-state regime is considered. When constructing the neural network, the activation functions are taken as derivatives of singular solutions of the Helmholtz equation. The singular points of these solutions are uniformly distributed along closed curves surrounding the domain boundary. The training set consists of a set of particular solutions of the Helmholtz equation.

Results. Results were obtained for the solution of the first boundary value problem in various domains of complex geometric shape and under different boundary conditions. The results are presented in tables containing both the exact solutions of the problem and the solutions obtained using the neural network. A graphical comparison is also provided between the exact solution and the solution obtained with the constructed neural network.

Discussion. The presented computational results demonstrate the efficiency of the proposed method for constructing neural networks that solve boundary value problems of partial differential equations in domains of complex geometry.

Conclusion. The further development of the proposed method may be applied to solving boundary value problems for the wave equation in exterior domains. Of particular interest is the application of this method to diffraction problems.

Keywords: wave equation, domain of complex geometric shape, neural networks

For Citation. Galaburdin A.V. Application of Neural Networks to Steady-State Oscillations. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(3):56–63. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-56-63>

Введение. При моделировании различных природных объектов и явлений часто используется аппарат дифференциальных уравнений в частных производных. Сложность разрабатываемых моделей не всегда позволяет эффективно использовать традиционные методы. Поэтому в настоящее время все чаще применяется метод нейронных сетей.

Теоретические основы метода нейронных сетей были заложены еще в середине прошлого века в трудах А.Н. Колмогорова [1]. В настоящее время нейронные сети используются при решении различных краевых задач. Работы [2, 3] посвящены решению краевых задач для уравнения Лапласа. В статье [4] представлено применение методов глубокого обучения для решения уравнения Пуассона в двухмерной области. В статье [5] исследованы подходы к решению задач тепломассопереноса на основе нейронной сети персептронного типа.

В настоящее время часто при решении уравнений в частных производных используют физико-информированную нейронную сеть [6, 7]. В работах [8, 9] в качестве активационных функций используются радиально-базисные функции, причем в процессе обучения предлагается варьировать их параметры. В статьях [10, 11] представлено успешное применение нейронных сетей при решении уравнений Навье-Стокса.

В статье [12] радиально-базисные нейронные сети применяются при решении прямых и обратных задач рассеяния. Настоящая работа является дальнейшим развитием метода построения нейронных сетей, используемых при решении дифференциальных уравнений в частных производных, представленных в работах [13–15]. Суть этого метода заключается в том, что в качестве функций активации берутся функции, удовлетворяющие рассматриваемому дифференциальному уравнению. В данной работе этот подход применяется при построении нейронной сети, предназначенной для решения краевых задач для волнового уравнения.

Материалы и методы. Рассмотрим первую краевую задачу для волнового уравнения для плоской области G , ограниченной произвольной гладкой замкнутой кривой γ . Пусть граничные условия являются периодическими функциями времени t с периодом ω , действующими с момента времени $t = -\infty$.

Тогда решение волнового уравнения

$$\Delta U = c^{-2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

можно искать в виде:

$$U = U_1(x, y) \cos \omega t + U_2(x, y) \sin \omega t,$$

где функции $U_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$ удовлетворяют уравнению

$$\Delta U = \frac{\omega^2}{c^2} U.$$

При решении краевой задачи для данного уравнения применялась построенная ниже нейронная сеть. Разыскиваемая функция U в этом случае представлялась в виде:

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^N w_k u(s_k) F(x, y, x_0(\sigma_k), y_0(\sigma_k)) + \sum_{k=1}^N v_k u(s_k) G(x, y, x_0(\tau_k), y_0(\tau_k)),$$

где $u(s_k)$ — заданные значения неизвестной функции U на границе области; $F(x, y, x_0(\sigma_k), y_0(\sigma_k))$ и $G(x, y, x_0(\tau_k), y_0(\tau_k))$ — активационные функции; σ_k и τ_k — дуговые координаты на контурах γ_1 и γ_2 , которые получаются из граничного контура γ смещением каждой точки в направлении внешней нормали к границе области на расстояния ρ_1 и ρ_2 соответственно; x, y — координаты точек области G .

В качестве активационных функций брались

$$F(x, y, x_o(\sigma_k), y_o(\sigma_k)) = \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} Y_0\left(\frac{\omega R}{c}\right)$$

и

$$G(x, y, x_o(\sigma_k), y_o(\sigma_k)) = \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2} Y_0\left(\frac{\omega R}{c}\right) n_1(\sigma_k) + \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} Y_0\left(\frac{\omega R}{c}\right) n_2(\sigma_k),$$

где $R = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}$, $n_1(\sigma_k)$, $n_2(\sigma_k)$ — компоненты вектора нормали к кривой γ_2 ; $Y_0(z)$ — функция Бесселя второго рода.

Активационные функции удовлетворяют уравнению (1), следовательно, необходимо удовлетворить лишь граничным условиям на контуре γ :

$$U|_{\gamma} = u.$$

При обучении сети определялись веса и величины ρ_1 и ρ_2 , для чего минимизировался функционал ошибок

$$\Phi(w_k, v_k, \rho_1, \rho_2) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^N w_k f_k^j F(x_i, y_i, x_o(\sigma_k), y_o(\sigma_k)) + v_k f_k^j G(x_i, y_i, x_o(\tau_k), y_o(\tau_k)) - f_i^j \right\}^2,$$

f_k^j — значение j -ой функции из обучающего множества в точке граничного контура с координатой σ_k .

Для определения w_k и v_k из соотношений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial w_k} = 0 \text{ и } \frac{\partial \Phi}{\partial v_k} = 0$$

строилась система линейных уравнений. Значения ρ_1 и ρ_2 определяются простым перебором.

Оценить точность полученного решения можно, сравнив значения U на границе области, вычисленные с помощью нейронной сети с заданными граничными значениями

$$U(x(s_i), y(s_i)) = \sum_{k=1}^N w_k u(s_k) F(s_i, \sigma_k) + \sum_{k=1}^N v_k u(s_k) G(s_i, \tau_k),$$

$$F(s_i, \sigma_k) = F(x(s_i), y(s_i), x_o(\sigma_k), y_o(\sigma_k)),$$

$$G(s_i, \tau_k) = F(x(s_i), y(s_i), x_o(\tau_k), y_o(\tau_k)).$$

В качестве обучающего множества применялось множество функций, являющихся решением уравнения (1) и имеющих вид:

$$v_1 = \cos\left(\frac{\omega}{c} n_1^k x + \alpha_k\right) \cos\left(\frac{\omega}{c} n_2^k y - \alpha_k\right),$$

$$v_2 = \cos\left(\frac{\omega}{c} n_2^k x + \alpha_k\right) \cos\left(\frac{\omega}{c} n_1^k y - \alpha_k\right).$$

Каждая функция соответствовала точке граничного контура с номером k . С изменением номера k изменялись и значения величин α_k , а также компонент вектора нормали.

Определенные описанным выше способом параметры не всегда обеспечивают желаемую точность полученного с помощью нейронной сети решения. В этом случае нужной точности можно достичь итерационным уточнением полученного результата, используя изложенный ниже алгоритм:

$$\Delta u^0(s_i) = u(s_i), u_i^0(s_i) = u(s_i), i = 1, 2, \dots, N,$$

$$\Delta V^{n+1}(s_i) = \sum_{k=1}^N \{w_k \Delta u^n(s_k) F(s_i, \sigma_k) + v_k \Delta u^n(s_k) G(s_i, \tau_k)\},$$

$$\Delta u^{n+1}(s_i) = \Delta u^n(s_i) - \Delta V^{n+1}(s_i),$$

$$u_i^{n+1}(s_i) = u_i^n(s_i) - \Delta u^{n+1}(s_i).$$

Здесь $u_i^{n+1}(s_i)$ — значения уточненного решения на границе области.

Итерационный процесс уточнения решения продолжается до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность

ность $\frac{\|\Delta u^{n+1}(s_i)\|}{\|u_i^{n+1}(s_i)\|} < \delta$ (δ — величина, определяющая желаемую точность значений функции U на границе области G),

либо величина $\frac{\|\Delta u^{n+1}(s_i)\|}{\|u_i^{n+1}(s_i)\|}$ не начнет расти.

После этого значение решения в любой точке области G вычисляется по формуле:

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^N w_k u_t(s_k) F(x, y, x_o(\sigma_k), y_o(\sigma_k)) + \sum_{k=1}^N v_k u_t(s_k) G(x, y, x_o(\tau_k), y_o(\tau_k)).$$

Результаты исследования. Изложенный выше метод был применен для решения краевых задач для волнового уравнения для плоских областей, граница которых задавалась в виде

$$\begin{cases} x = a \cos(t) + g \sin(dt), \\ y = b \sin(t) + f \cos(dt), \end{cases}$$

где $t \in [0, 2\pi]$, a, b, g, f, d — изменяемые параметры.

Во всех рассмотренных ниже задачах принимались следующие значения параметров: количество функций в обучающем множестве $M = 72$, количество нейронов сети $N = 72$, $c = 250$, $\delta = 0,0025$.

Задача 1. Рассматривалась плоская область, форма которой определялась значениями параметров $a = 0,27$, $b = 0,27$, $g = -0,055$, $f = 0,055$, $d = 3$ (рис. 1).

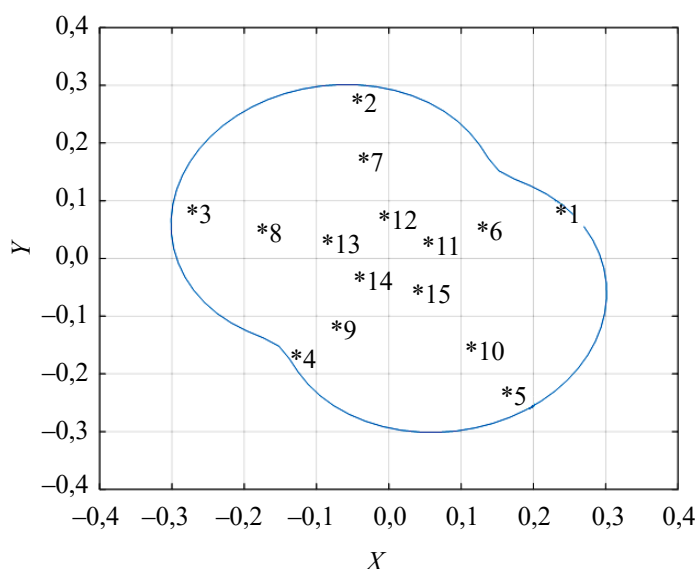


Рис. 1. Форма области задачи 1

На рис. 1 звездочками обозначены точки области, в которых вычисляются точные значения решения задачи и значения, полученные при помощи нейронной сети. В таблице 1 представлены результаты расчетов (амплитуды), соответствующие решению, которое в полярной системе координат имеет вид:

$$U = J_1\left(\frac{\omega r}{c}\right) \cos \varphi \cos(\omega t), \quad \omega = 550.$$

Таблица 1

Результаты расчетов для задачи 1

Номер точки	1	2	3	4	5
Точное решение	0,25615	0,12741	-0,01673	-0,18688	-0,28990
Решение НС	0,25598	0,12730	-0,01643	-0,18703	-0,28962
Номер точки	6	7	8	9	10
Точное решение	0,16308	0,08066	-0,01072	-0,12037	0,18643
Решение НС	0,16297	0,08061	-0,01065	-0,12032	0,18635
Номер точки	11	12	13	14	15
Точное решение	0,06463	0,03187	-0,00426	-0,04800	-0,07427
Решение НС	0,06457	0,03184	-0,00426	-0,04800	-0,07425

Задача 2. Исследовалась плоская область, форма которой определялась значениями параметров $a = 0,27$, $b = 0,27$, $g = -0,035$, $f = 0,035$, $d = 4$ (рис. 2).

Рассматривалось решение волнового уравнения, имеющее вид:

$$U = \cos\left(\frac{\omega}{c}\right) \cdot (ct - \cos(f)x - \sin(f)y), \quad f = 1,5, \quad \omega = 125.$$

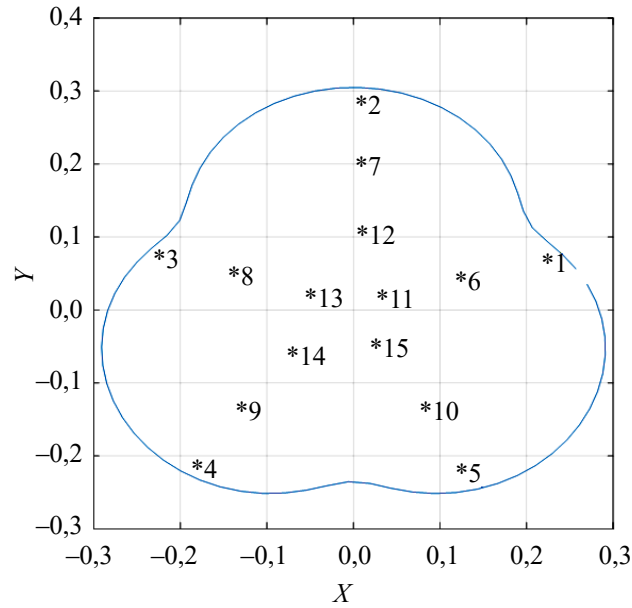


Рис. 2. Форма области задачи 2

Приведенное выражение удовлетворяет как волновому уравнению, так и уравнению (1). Поэтому время t рассматривалось как параметр, которому присваивалось некоторое значение и затем реализовывался описанный ранее алгоритм получения решения. В таблице 2 представлены результаты расчетов с применением нейронной сети и точное решение задачи, соответствующее моменту времени $t = 3T/5$ ($T = 2\pi/\omega$ — период решения).

Таблица 2

Результаты расчетов для задачи 2

Номер точки	1	2	3	4	5
Точное решение	-0,82913	-0,86526	-0,88547	-0,87167	-0,83232
Решение НС	-0,82908	-0,86525	-0,88553	-0,87169	-0,83227
Номер точки	6	7	8	9	10
Точное решение	-0,82047	-0,84421	-0,86163	-0,84979	-0,82211
Решение НС	-0,82046	-0,84420	-0,86164	-0,84979	-0,82210
Номер точки	11	12	13	14	15
Точное решение	-0,81162	-0,82176	-0,83572	-0,82633	-0,81163
Решение НС	-0,81161	-0,82176	-0,83572	-0,82633	-0,81163

Задача 3. Исследовалась плоская область, форма которой определялась значениями параметров $a = 0,27$, $b = 0,27$, $g = 0,035$, $f = 0,035$, $d = 2$ (рис. 3).

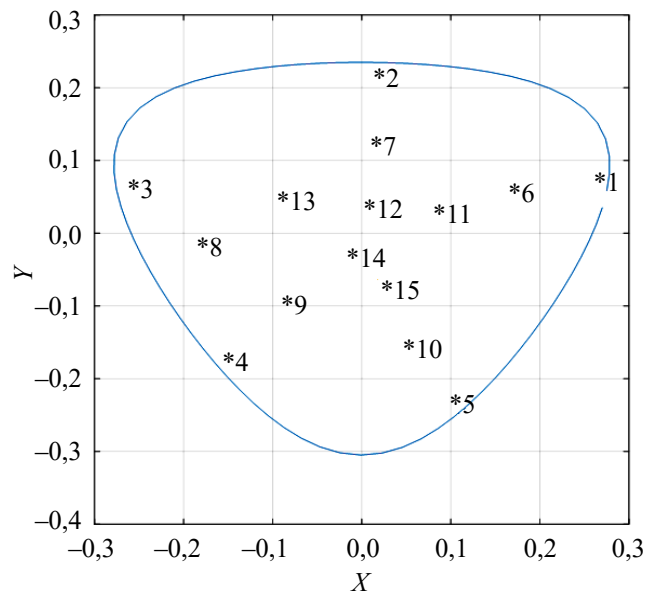


Рис. 3. Форма области задачи 3

Рассматривалось решение волнового уравнения, имеющее в полярной системе координат вид:

$$U = J_1\left(\frac{\omega r}{c}\right)\cos(\varphi - \omega t), \quad \omega = 25.$$

В таблице 3 представлены результаты расчетов с применением нейронной сети и точные значения решения задачи, соответствующие моменту времени $t = 5T/10$.

Таблица 3

Результаты расчетов для задачи 3

Номер точки	1	2	3	4	5
Точное решение	-0,01309	-0,01010	-0,002314	0,005639	0,01259
Решение НС	-0,01309	-0,01010	-0,002317	0,005640	0,01259
Номер точки	6	7	8	9	10
Точное решение	-0,00840	0,00672	-0,00145	0,00365	0,00840
Решение НС	-0,00840	0,00672	-0,00146	0,00365	0,00840
Номер точки	11	12	13	14	15
Точное решение	-0,00372	-0,00333	0,000595	0,00166	0,00421
Решение НС	-0,00372	-0,00333	0,000594	0,00166	0,00421

На рис. 4 и рис. 5 представлено изменение во времени при решении задачи в точках 3 и 5, полученное с помощью нейронной сети. Звездочками отмечены точные значения решения данной задачи.

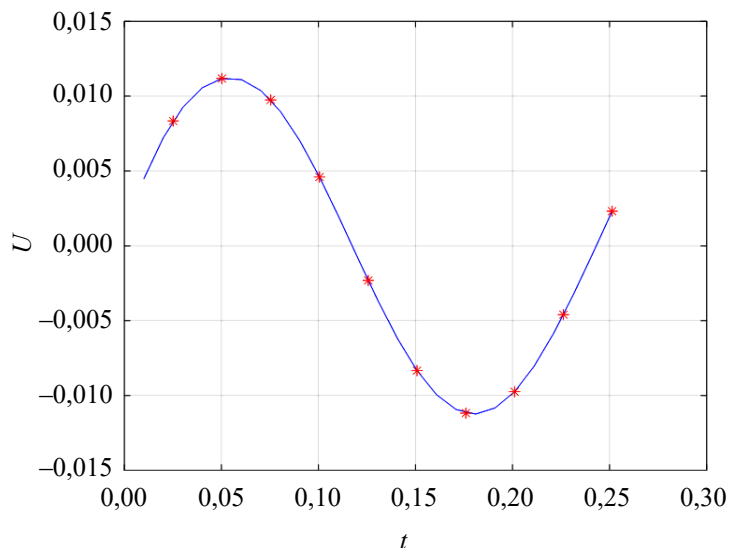


Рис. 4. Изменение во времени, иллюстрирующее решение задачи в точке 3

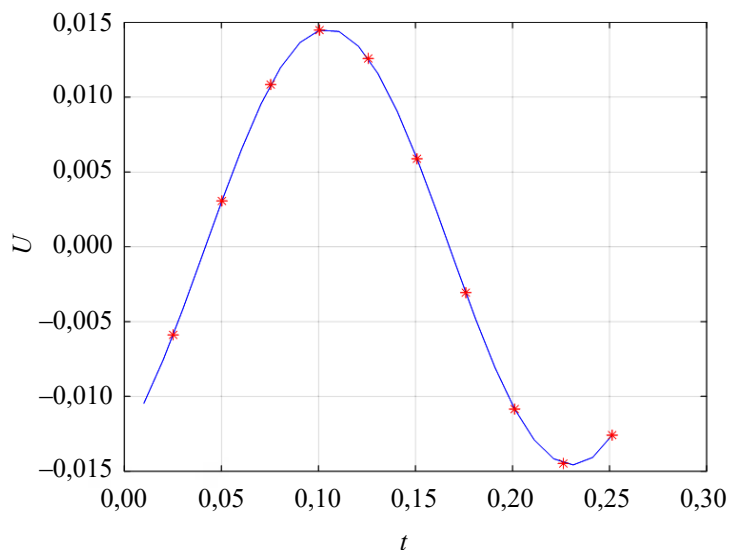


Рис. 5. Изменение во времени, иллюстрирующее решение задачи в точке 5

Обсуждение. Предложенный метод построения нейронных сетей, решающих краевые задачи дифференциальных уравнений в частных производных для областей сложной геометрической формы, показал свою эффективность на представленных задачах.

Заключение. Дальнейшие исследования автора будут посвящены применению разработанного метода к решению краевых задач для волнового уравнения, для решения внешних задач, к задачам дифракции. Развитие данного подхода в указанных направлениях может принести интересные и важные результаты как в теории, так и при решении практических задач.

Список литературы / References

1. Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения. *Доклады Академии наук СССР*. 1957;114(5):953–956.
Kolmogorov A.N. On the representation of continuous functions of several variables in the form of superpositions of continuous functions of one variable and addition. *Reports of the USSR Academy of Sciences*. 1957;114(5):953–956. (In Russ.)
2. Варшавчик Е.А., Галютудинова А.Р., Седова Ю.С., Тархов Д.А. Решение дифференциальных уравнений в частных производных для областей с постоянными границами. В: «Искусственный интеллект в решении актуальных социальных и экономических проблем XXI века». Пермь: издательство Пермского государственного национального исследовательского университета; 2018. С. 294.
Varshavchik E.A., Galyautdinova A.R., Sedova Yu.S., Tarkhov D.A. Solving partial differential equations for regions with constant boundaries. In: “Artificial intelligence in solving urgent social and economic problems of the 21st century”. Perm: Publishing House of Perm State National Research University; 2018. P. 294. (In Russ.)
3. Тюрин К.А., Брагунец В.В., Светлов Д.Д. Решение дифференциального уравнения Лапласа с помощью модифицированной нейронной сети. *Молодой ученый*. 2019;27(265):10–12.
Tyurin K.A., Bragunets V.V., Svetlov D.D. Solution of the Laplace Differential Equation Using a Modified Neural Network. *Young Scientist*. 2019;27(265):10–12.
4. Епифанов А.А. Применение методов глубокого обучения для решения дифференциальных уравнений в частных производных. *Успехи кибернетики*. 2020;1(4):22–28. <https://doi.org/10.51790/2712-9942-2020-1-4-3>
Epifanov A.A. Application of deep learning methods for solving partial differential equations. *Russian Journal of Cybernetics*. 2020;1(4):22–28. (In Russ.) <https://doi.org/10.51790/2712-9942-2020-1-4-3>
5. Cai S., Wang Z., Wang S., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks for heat transfer problems. *Journal of Heat Transfer*. 2021;143(6):060801. <https://doi.org/10.1115/1.4050542>
6. Raissia M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*. 2019;378:686–707.
7. Зрелова Д.П., Ульянов С.В. Модели физически информированных / осведомленных классических Лагранжевых / Гамильтоновых нейронных сетей в глубоком обучении. *Современные информационные технологии и ИТ-образование*. 2022;18(2):310–325. <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.310-325>
Zrelova D.P., Ulyanov S.V. Physics-informed classical Lagrange / Hamilton neural networks in deep learning. *Modern information technologies and IT-education*. 2022;18(2):310–325. <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.310-325>
8. Kansa E.J. Motivation for using radial basis functions to solve PDEs. URL: <http://uahtitan.uah.edu/kansaweb.html> (дата обращения: 12.08.2025).
9. Kansa E.J. Multiquadrics – A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. II. Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*. 1990;19(8–9):147–161. [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(90\)90271-K](https://doi.org/10.1016/0898-1221(90)90271-K)
10. Almajid M., Abu-alsaud M. Prediction of porous media fluid flow using physics informed neural networks. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 2021;208:109205. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.109205>
11. Eivazi H., Tahani M., Schlatter P., Vinuesa R. Physics-informed neural networks for solving Reynolds-averaged Navier-Stokes equations. *Physics of Fluids*. 2022;34:075117. <https://doi.org/10.1063/5.0095270>
12. Шевкун С.А., Самойлов Н.С. Применение нейросетевого подхода к решению прямых и обратных задач рассеяния. *Вестник инженерной школы ДВФУ*. 2021;2(47):66–74. <https://doi.org/10.24866/2227-6858/2021-2-7>
Shevkun S.A., Samoylov N.S. Application of the neural network approach for solution of direct and inverse problems of scattering. *FEFU: School of Engineering Bulletin*. 2021;2(47):66–74. (In Russ.) <https://doi.org/10.24866/2227-6858/2021-2-7>
13. Галабурдин А.В. Применение нейронных сетей для решения задачи Дирихле для областей сложной формы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):68–79. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-68-79>
Galaburdin A.V. Application of neural networks to solve the Dirichlet problem for areas of complex shape. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):68–79. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-68-79>
14. Галабурдин А.В. Применение нейронных сетей для решения нелинейных краевых задач для областей сложной формы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):35–42. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-35-42>
Galaburdin A.V. Application of neural networks to solve nonlinear boundary value problems for areas of complex shape. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):35–42. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-35-42>

15. Галабурдин А.В. Применение нейронных сетей при решении эллиптических уравнений для областей сложной формы. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):44–51. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-44-51>

Galaburdin A.V. Application of Neural Networks for Solving Elliptic Equations in Domains with Complex Geometries. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(2):44–51. <https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-2-44-51>

Об авторе:

Александр Васильевич Галабурдин, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID](#), [SPIN-код](#), Galaburdin@mail.ru

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

About the Author:

Alexander V. Galaburdin, Cand. Sci. (Phys. – math.), Associate Professor at the Department Mathematics and informatics, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostovon-Don, 344003, Russian Federation), [ORCID](#), [SPIN-code](#), Galaburdin@mail.ru

Conflict of Interest Statement: the author declares no conflict of interest.

The author has read and approved the final version of manuscript.

Поступила в редакцию / Received 18.08.2025

Поступила после рецензирования / Reviewed 12.09.2025

Принята к публикации / Accepted 19.09.2025