ТОМ 9, №4, 2025 eISSN 2587-8999
РЕЦЕНЗИРУЕМЫЙ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Computational Mathematics and Information Technologies

Вычислительная математика / Computational Mathematics

Математическое моделирование / Mathematical Modelling

Информационные технологии / Information Technologies

www.cmit-journal.ru
DOI 10.23947/2587-8999

Computational Mathematics and Information Technologies

Рецензируемый научно-теоретический журнал

eISSN 2587–8999

Издается с 2017 года

Периодичность — 4 выпуска в год

DOI: 10.23947/2587–8999

Учредитель и издатель — Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ), г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Журнал «Computational Mathematics and Information Technologies» публикует обзоры, оригинальные статьи и краткие сообщения, посвященные математическому моделированию, численным методам и информационным технологиям для решения сложных и актуальных проблем науки и современной технологии. Область применения исследований — это механика сплошных сред, гидроаэродинамика, науки о Земле, химия, биология, обработка изображений и распознавание образов, теория параллельных вычислений и ее приложения, технологии больших баз данных и искусственного интеллекта и т. д.

Журнал «Computational Mathematics and Information Technologies» принимает к публикации научные и обзорные статьи в соответствии с разделами:

1. Вычислительная математика
2. Математическое моделирование
3. Информационные технологии

Регистрация:	Свидетельство о регистрации средства массовой информации ЭЛ № ФС 77 – 66529 от 21 июля 2016 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций
Индексация и архивация:	РИНЦ, CrossRef, CyberLeninka
Сайт:	https://cmit-journal.ru
Адрес редакции:	344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1
E-mail:	CMIT-EJ@yandex.ru
Телефон:	+7 (863) 273–85–14
Дата выхода № 4, 2025 в свет:	30.12.2025

© Донской государственный технический университет, 2025

Computational Mathematics and Information Technologies

Peer-reviewed scientific and theoretical journal

eISSN 2587–8999

Published since 2017

Periodicity — 4 issues per year

DOI: 10.23947/2587–8999

Founder and Publisher — Don State Technical University (DSTU), Rostov-on-Don, Russian Federation

The journal "Computational Mathematics and Information Technologies" publishes reviews, original articles and short reports related to mathematical modelling, numerical methods and information technologies for solving complex and topical problems of science and modern modern engineering and technology. Research areas include continuum mechanics, fluid dynamics, Earth sciences, chemistry, biology, image processing and pattern recognition, parallel computing theory and its applications, big data and artificial intelligence technologies, etc.

The journal "Computational Mathematics and Information Technologies" accepts scientific and review articles for publication in accordance with the sections:

1. Computational Mathematics
2. Mathematical Modelling
3. Information Technologies

Registration:	Mass media registration certificate ЭЛ № ФС 77–66529 dated July 21, 2016 issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media
Indexing and Archiving:	RISC, Crossref, Cyberleninka
Website:	https://cmit-journal.ru
Address of the Editorial Office:	1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation
E-mail:	CMIT-EJ@yandex.ru
Telephone:	+7 (863) 273–85–14
Date of publication No. 4, 2025:	30.12.2025

© Don State Technical University, 2025

Редакционная коллегия

Главный редактор, Сухинов Александр Иванович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация), ScopusID, ResearcherID, MathSciNet, SPIN-код, ORCID, sukhinov@gmail.com, spu-40.4@donstu.ru

Заместитель главного редактора, Якобовский Михаил Владимирович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), ScopusID, SPIN-код, ORCID

Ответственный секретарь, Петров Александр Пхоун Чжо, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (Москва, Российская Федерация), ScopusID, ResearcherID, SPIN-код, ORCID, ИСТИНА

Алексеенко Елена В., кандидат физико-математических наук, PhD, профессор, Университет Литораль Кот д'Опаль, (Булонь-сюр-Мер, Франция), ScopusID, ResearcherID, ORCID

Воеводин Владимир Валентинович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Москва, Российская Федерация), ScopusID, ResearcherID, SPIN-код, ORCID

Гасилов Владимир Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), ScopusID, ResearcherID, SPIN-код, ORCID

Гущин Валентин Анатольевич, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт автоматизации проектирования РАН (Москва, Российская Федерация), ScopusID, SPIN-код, ORCID

Зиканов Олег Юрьевич, кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Университет штата Мичиган-Дирборн (Дирборн, Соединенные Штаты Америки), ORCID, SPIN-код

Лазарева Галина Геннадьевна, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор РАН, Российский университет дружбы народов (Москва, Российская Федерация), ScopusID, SPIN-код, ORCID

Петров Игорь Борисович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Московский физико-технический институт (государственный университет) (Москва, Российская Федерация), ScopusID, SPIN-код

Поляков Сергей Владимирович, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), ScopusID, SPIN-код, ORCID

Семенов Алексей Львович, доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН, академик РАО, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Москва, Российская Федерация), ScopusID, ResearcherID, SPIN-код, ORCID

Тишкин Владимир Федорович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), ScopusID, ResearcherID, SPIN-код

Четверушкин Борис Николаевич, академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор, научный руководитель Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), ScopusID, ResearcherID, SPIN-код, ORCID

Чехонин Константин Александрович, доктор физико-математических наук, доцент, зам. директора Института прикладной математики ДВО РАН, руководитель (директор) Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН (Хабаровск, Российская Федерация), ScopusID, ResearcherID, SPIN-код, ORCID

Чистяков Александр Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация), ScopusID, ResearcherID, SPIN-код, ORCID

Шамолин Максим Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Москва, Российская Федерация), ScopusID, ResearcherID, SPIN-код, ORCID

Шананин Александр Алексеевич, академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Московский физико-технический институт (государственный университет) (Москва, Российская Федерация), ScopusID, ResearcherID, SPIN-код, ORCID

Эфендиев Ялчин, PhD, профессор, Техасский университет A&M (Колледж-Стейшен, Соединенные Штаты Америки), ORCID, ScopusID, ResearcherID

Editorial Board

Editor-in-Chief, Alexander I. Sukhinov, Corresponding member of RAS, Dr.Sci. (Phys. & Math.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation), ScopusID, ResearcherID, MathSciNet, SPIN-code, ORCID, sukhinov@gmail.com, spu-40.4@donstu.ru

Deputy Editor-in-Chief, Mikhail V. Yakobovski, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys. & Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), ScopusID, SPIN-code, ORCID

Executive Secretary, Alexander P. Petrov Dr.Sci. (Phys. & Math.), Leading Research Fellow, Institute of Control Sciences RAS (Moscow, Russian Federation), ScopusID, ResearcherID, SPIN-code, ORCID, Istina

Elena V. Aleksenko, Cand.Sci. (Phys. & Math.), Ph.D., Professor, University of Littoral Opal Coast (Boulogne-sur-Mer, France), ScopusID, ResearcherID, ORCID

Vladimir V. Voevodin, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys. & Math.), Professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russian Federation), ScopusID, ResearcherID, ORCID

Vladimir A. Gasilov, Dr.Sci. (Phys. & Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), ScopusID, ResearcherID, SPIN-code, ORCID

Valentin A. Gushchin, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys. & Math.), Professor, Institute of Computer Aided Design, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), ScopusID, SPIN-code, ORCID

Oleg Yu. Zikanov, Cand.Sci. (Phys. & Math.), Professor, Head of Department, University of Michigan-Dearborn (Dearborn, United States of America), ORCID, SPIN-code

Galina G. Lazareva, Corresponding member of RAS, Dr. Sci. (Phys. & Math), Professor of RAS, RUDN University, (Moscow, Russian Federation), ScopusID, SPIN-code, ORCID

Igor B. Petrov, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys. & Math.), Professor, Moscow Institute of Physics and Technology (State University) (Moscow, Russian Federation), ScopusID, SPIN-code

Sergey V. Polyakov, Dr.Sci. (Phys. & Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), ScopusID, SPIN-code, ORCID

Alexey L. Semenov, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Academician of the Russian Academy of Education, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russian Federation), ScopusID, ResearcherID, SPIN-code, ORCID

Vladimir F. Tishkin, Corresponding Member of RAS, Dr.Sci. (Phys. & Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), ScopusID, ResearcherID, SPIN-code

Boris N. Chetverushkin, Academician of RAS, Dr.Sci. (Phys. & Math.), Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation), ScopusID, ResearcherID, SPIN-code, ORCID

Konstantin A. Chekhonin, Dr.Sci. (Phys. & Math.), Associate Professor, Deputy Director of the Institute for Applied Mathematics, Director of the Khabarovsk Branch of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences (Khabarovsk, Russian Federation), ScopusID, ResearcherID, SPIN-code, ORCID

Alexander E. Chistyakov, Dr.Sci. (Phys. & Math.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation), ScopusID, ResearcherID, SPIN-code, ORCID

Maxim V. Shamolin, Dr.Sci. (Phys. & Math.), Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russian Federation), ScopusID, ResearcherID, SPIN-code, ORCID

Alexander A. Shananin, Academician of RAS, Dr.Sci. (Phys. & Math.), Professor, Moscow Institute of Physics and Technology (State University) (Moscow, Russian Federation), ScopusID, ResearcherID, SPIN-code, ORCID

Yalchin Efendiev, PhD, Professor of Mathematics, Texas A&M University (College Station, United States of America), ORCID, ScopusID, ResearcherID

Содержание

Поздравление с юбилеем академика РАН и академика РАО А.Л. Семенова ... 7

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Гибридное моделирование экстремальных штормовых процессов и рисков судоходства в Азовском море на основе трёхмерной гидродинамики и методов машинного обучения 10
А.И. Сухинов, С.В. Проценко, Е.А. Проценко Н.Д. Панасенко

Нестационарная модель свертывания крови в аневризмах кровеносных сосудов 22
Н.К. Волосова, К.А. Волосов, А.К. Волосова, М.И. Карлов, Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов

Математическое моделирование подъема взвеси ветровыми порывами 38
В.В. Сидорякина, А.Е. Чистяков

Математическое моделирование биопродуктивности мелководного водоема при внезапной депрессии сцифоидными медузами 46
Д.В. Бондаренко, А.В. Никитина

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Математическое моделирование инвазии зеленых микроводорослей и оздоровления Таганрогского залива: эколого-гигиенические и медицинские последствия 56
Ю.В. Белова, О.В. Колгунова, М.И. Габуева

Contents

Congratulations to Academician of the Russian Academy of Sciences and Academician of the Russian Academy of Education Alexey Lvovich Semenov 7

MATHEMATICAL MODELLING

Hybrid Modelling of Extreme Storm Processes and Navigation Risks in the Azov Sea Based on Three-Dimensional Hydrodynamics and Machine Learning Methods 10
A.I. Sukhinov, S.V. Protsenko, E.A. Protsenko, N.D. Panasenko

Unsteady Model of Blood Coagulation in Aneurysms of Blood Vessels 22
N.K. Volosova, K.A. Volosov, A.K. Volosova, Mikhail I. Karlov, D.F. Pastukhov, Yu.F. Pastukhov

Mathematical Modelling of Suspension Uplift by Wind Gusts 38
V.V. Sidoryakina, A.E. Chistyakov

Mathematical Modelling of the Bioproductivity of a Shallow Water Body under Sudden Depression Caused by Scyphozoan Jellyfish 46
D.V. Bondarenko, A.V. Nikitina

INFORMATION TECHNOLOGIES

Mathematical Modelling of Green Microalgae Invasion and Rehabilitation of the Taganrog Bay: Ecological-Hygienic and Medical Consequences 56
Yu.V. Belova, O.V. Kolgunova, M.I. Gabueva

ЮБИЛЕЙ УЧЕНОГО
ANNIVERSARY OF THE SCIENTIST

К юбилею академика РАН и академика РАО доктора физико-математических наук, профессора СЕМЕНОВА АЛЕКСЕЯ ЛЬВОВИЧА

Редакционная коллегия журнала «Вычислительная математика и информационные технологии» сердечно поздравляет глубокоуважаемого члена редколлегии Алексея Львовича Семенова с 75-летним юбилеем!

Алексей Львович Семенов — заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов механико-математического факультета, советник ректора федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», директор Института кибернетики и образовательной информатики им. А.И. Берга федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук», академик РАН, академик РАО, профессор, доктор физико-математических наук.

А.Л. Семенов — выдающийся математик, специалист в области математической логики, теории сложности и информатики, работающий в области искусственного интеллекта, разработки прикладного программного обеспечения для отечественной суперЭВМ.

Основные вехи научной, педагогической и организационной деятельности юбиляра.

В 1972 году А.Л. Семенов окончил с отличием механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова по специальности «Математика», а в 1975 году — аспирантуру факультета с защитой кандидатской диссертации на тему «Об определимости в некоторых разрешимых теориях». В 1985 году защитил докторскую диссертацию «Логические теории одноместных функций на натуральном ряде». В 1975–1983 гг. — преподаватель на кафедре математической логики МГУ им. М.В. Ломоносова. Далее — зав. сектором проблемно-ориентированных процессоров, зав. лабораторией теории алгоритмов и лингвистического обеспечения в Научном совете АН СССР по комплексной проблеме «Кибернетика» в Институте проблем кибернетики АН СССР, Вычислительном центре им. А.А. Дородницына РАН. В 1993–2013 годах — ректор Московского института открытого образования — МИОО (до 2002 года — Московский институт повышения квалификации работников образования).

В 2013–2016 гг. — ректор Московского педагогического государственного университета (МПГУ им. В.И. Ленина). С 2015 года по настоящее время — директор Института кибернетики и образовательной информатики им. А.И. Берга ФИЦ «Информатика и управление» РАН. Член-корреспондент РАН с 2008 года, академик РАН с 2011 года — Отделение математических наук. Академик Российской академии образования с 2010 г. Профессор с 1998 года.

Основные научные результаты А.Л. Семенова.

Вклад в математику и теоретическую информатику Алексея Львовича Семенова включает результаты из области формальных грамматик, схем программ и динамических логик, реляционных алгебр, автоматно-реализуемых отношений, разрешающих алгоритмов для ряда математических теорий; построение теории алгоритмической случайности конечных последовательностей, параллельной теории комбинаторной случайности Колмогорова, решение проблемы Колмогорова о точной оценке сложности теста на случайность. Основной темой математических исследований стала теория определимости, где он является признанным в мире авторитетом. Проблематика определимости восходит к классическим работам итальянской (Дж. Пеано, А. Падоа, М. Пиери) и польской (А. Тарский) школ математической логики XIX и первой половины XX вв, работам К. Гёделя. Ключевая работа Л. Свенониуса 1959 года стала основой для «Эрланенской программы» — теоремы полноты для определимости. А.Л. Семеновым и С.Ф. Сопруновым было получена комбинаторная версия теоремы Свенониуса.

Разрешимость пространства определимости сложения натуральных чисел — классический результат Пресбургера 1929 года. А.Л. Семенов в 1979 году доказал разрешимость широкого класса расширений этого пространства одноместными функциями, например, экспонентой или факториалом. В случае монадических пространств А.Л. Семеновым получены результаты о расширении пространства определимости следования натуральных (или целых) чисел почти периодическими (рекуррентными) последовательностями символической динамики, что, в частности, решало проблему Зифкеса и давало решение проблемы униформизации Черча для почти периодического случая. Исследование почти периодических последовательностей было продолжено также в работах учеников А.Л. Семенова — А.А. Мучника, Ю.Л. Притыкина, М.А Ушакова. Для монадических

пространств А.А. Мучник решил проблему, относящуюся к монадическому пространству нескольких следований, поставленную М.О. Рабином на международном конгрессе математиков в Ницце, С.Ф. Сопрунов — поставленную М.О. Рабином и К. Элготом проблему существования максимальных разрешимых пространств определимости для слабо монадического случая.

Общая проблематика пространств определимости породила ряд вопросов, относящихся к решётке таких пространств. Эти вопросы получили ответы в работах А.Л. Семенова и его коллег. В частности, были построены примеры пространств произвольной ширины, А.Л. Семенов и С.Ф. Сопрунов построили примеры пространств определимости произвольной конечной кванторной глубины.

В 1980 г. кафедру математической логики и теории алгоритмов МГУ, которой сегодня руководит А.Л. Семенов, возглавил А.Н. Колмогоров, предложивший А.Л. Семенову совместное руководство семинаром по сложности, работающим по сей день. Это определило еще одно направление деятельности А.Л. Семенова. В своей основополагающей публикации 1963 года по сложности конечных объектов А.Н. Колмогоров поставил вопрос о точном соотношении сложности последовательности, сложности алгоритма, отбирающего из неё подпоследовательность, и степени выполнения для отобранной подпоследовательности закона больших чисел. Колмогоров возвращался к этой проблеме и в 1983 году. Решение этой проблемы А.А. Мучником и А.Л. Семеновым в 2003 году было отмечено премией А.Н. Колмогорова РАН как выдающийся вклад в математику. Ему принадлежит также ряд работ по общей теории алгоритмов и исчислений, алгоритмической случайности, программным логикам, комбинаторной теории групп, сложности вычислений, алгоритмическим степеням, эффективным вычислительным алгоритмам.

Деятельность в области прикладной информатики, создания систем искусственного интеллекта началась в 1964 году, с участием в работах по распознаванию устной речи, создания систем генерации текстов, ситуационного управления, компиляторов для языков Lisp и APL для отечественных ЭВМ. Начиная с 1983 г. А.Л. Семенов принимал участие в разработке прикладного математического обеспечения для «Электроники ССБИС».

А.Л. Семенову принадлежит разработка концепции расширенной личности как методологической основы приложений искусственного интеллекта в образовании. Реализуемый под его руководством проект «Ковчег знаний МГУ» является основой для построения онтологии фундаментального знания и доверенных энциклопедических систем.

А.Л. Семенов — участник создания программы «Цифровая экономика РФ», национальной стратегии в области искусственного интеллекта, видный деятель российского образования, ключевой участник формирования современного содержания в школьной информатике и подготовке учителей. Сфера его интересов — фундаментальные проблемы общего и педагогического образования, цифровые технологии в образовании, цифровая трансформация образования, вопросы обновления содержания образования в начальной и средней школе, а также профессионального педагогического образования.

Начиная с 1967 года А.Л. Семенов преподавал в московской школе № 7, выпускником которой являлся, затем в коллективе А. Н. Колмогорова в Физмат-школе — интернате при МГУ. В 2003 году он воссоздал школу № 179 как часть возглавляемого им института МИОО и вернул для работы в ней создателя и идейного лидера традиции математических школ страны Николая Николаевича Константинова. Был членом исполкома Международной комиссии по математическому образованию. В 1984 году стал организатором и членом авторского коллектива первого учебника по информатике, изданного тиражом 3 млн экз. для всех школ Советского Союза.

С середины 1980-х годов А.Л. Семенов руководил разработками по формированию новой методологии российского образования, включающей исследовательскую деятельность всех учащихся и использование цифровых технологий. Он разрабатывал концептуальную основу и практические решения (включая учебники, программное обеспечение, предметную среду, стандарты и организационные документы) для процессов обучения, преподавания и управления с использованием цифровых технологий. Эту работу он начинал под руководством Е.П. Велихова и А.П. Ершова в рамках ВНТК «Школа-1» АН СССР и продолжал в созданном им Институте новых технологий. Созданная методология оказала влияние на последующее развитие российского и мирового образования, стала основой для рекомендаций ЮНЕСКО для всех ступеней общего и педагогического образования.

А.Л. Семенов известен как создатель Института новых технологий образования (ИНТ), разработавшего и адаптировавшего для России многочисленные цифровые образовательные ресурсы, выпустившего сотни книг для учителей по применению ИКТ во всех школьных дисциплинах и относящегося к числу мировых лидеров в применениях информационных технологий в школе на базе конструкционистского подхода. Руководитель авторского коллектива интегрированного курса математики, информатики и лингвистики для начальной школы. Базирующиеся на нем курсы «Информатика» и «Алгоритмика» широко используются сегодня в российской школе. Под его руководством был разработан ряд компьютерных сред и инструментов деятельности школьников, соответствующих современным целям школьного образования во всех предметах.

Программа региональной информатизации, разработанная под руководством А.Л. Семенова, получила в 1999 году премию Президента РФ. Он — один из лидеров совместных работ РАН, МГУ и образовательного сообщества, направленных на повышение качества цифровых образовательных ресурсов, формирование стандартов. Был одним из разработчиков образовательных стандартов для школ: для Москвы в 1996 году, для РФ в 2004 и 2009 годах. Был руководителем научно-методического совета ФИПИ по государственной итоговой аттестации

по математике; в настоящее время — по информатике. Реализация его идей в области образования в Москве позволила сформировать в городе уникальную на мировом уровне информационную среду обучения, развития, социального взаимодействия учащихся, учителей, систем управления образованием. Работа по информатизации российского образования, выполненная под его руководством, удостоена премии Правительства России за 2009 год. Являлся координатором работ над Концепцией развития российского математического образования, созданной по майскому (2012 г.) Указу Президента РФ, один из руководителей разработки Концепции школьного технологического образования в соответствии с поручением Президента РФ.

А.Л. Семенов являлся единственным пленарным докладчиком от России на II Международном конгрессе ЮНЕСКО «Образование и информатика» в Москве в 1996 г., ключевым докладчиком на семинаре «Сокращение разрыва между информационно богатыми и информационно бедными: новые технологии и будущее образования» на 46-й Международной конференции по образованию (Женева, 2001 г.), основным автором книг ЮНЕСКО «Рекомендации по ИКТ в начальном образовании» (2000 г.), «ИКТ в школах», «Руководство для учителей или как ИКТ могут создать новую открытую образовательную среду» (2005 г.). В 2019–2023 гг. руководил программой РФФИ по внедрению цифровых технологий в школах, в которой принимали участие и ряд коллективов Института образования. По его инициативе была принята «Хартия цифрового пути школы». Целостная модель школы, построенная им на идеологии индивидуального проектирования образовательных траекторий и обязательного достижения каждым учащимся запланированных результатов, получила название «результативного образования».

А.Л. Семенов на постоянной основе принимает участие в научной деятельности регионального научного центра Российской академии образования в Северо-Западном федеральном округе на базе РГПУ им. А.И. Герцена, Института образования в НИУ ВШЭ. Подготовил двух докторов и четырёх кандидатов наук. Автор более 400 научных работ в области математики, информатики и образования. Главный редактор журнала «Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления» с 2021 г., в 2012–2018 гг. — главный редактор журнала «Квант». Входит в редсоветы/редколлегии журналов «Информатика и ее применения», «Искусственный интеллект и принятие решений», «Информационное общество», «Вестник кибернетики», «Вопросы образования», *Educational Studies*, «Образовательная политика», «Педагогика», «Проблемы современного образования», «Математика в школе», «Математическое просвещение», «Информатика и образование», «Информатика в школе», «Компьютерные инструменты в образовании», «Вычислительная математика и информационные технологии».

Коллектив редколлегии журнала «Computational Mathematics and Information Technologies», поздравляет глубокоуважаемого юбиляра, желает ему крепкого здоровья, новых научных открытий и радости от результатов своих трудов! Пусть впереди будет ещё много успешных проектов и благодарных учеников!!!

Редакционная коллегия журнала
«Computational Mathematics and Information Technologies»
Главный редактор — Сухинов Александр Иванович,
Заместитель главного редактора — Якобовский Михаил Владимирович,
Ответственный секретарь — Петров Александр Пхоун Чжо,
Алексеенко Елена В.,
Воеводин Владимир Валентинович,
Гасилов Владимир Анатольевич,
Гущин Валентин Анатольевич,
Зиканов Олег Юрьевич,
Лазарева Галина Геннадьевна,
Петров Игорь Борисович,
Поляков Сергей Владимирович,
Тишкин Владимир Федорович,
Четверушкин Борис Николаевич,
Чехонин Константин Александрович,
Чистяков Александр Евгеньевич,
Шамолин Максим Владимирович,
Шананин Александр Алексеевич,
Эфендиев Ялчин.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
MATHEMATICAL MODELLING

CC BY

Check for updates

УДК 519.6

Оригинальное эмпирическое исследование

https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-4-10-21

Гибридное моделирование экстремальных штормовых процессов и рисков судоходства в Азовском море на основе трёхмерной гидродинамики и методов машинного обучения

А.И. Сухинов[1], С.В. Проценко[1,2] ✉, Е.А. Проценко[2], Н.Д. Панасенко[1]

[1] Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

[2] Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), г. Таганрог, Российская Федерация

✉ rab55555@rambler.ru

Аннотация

Введение. Экстремальные штормы со скоростью ветра более 30–35 м/с представляют серьёзную угрозу для судоходства и прибрежной инфраструктуры Азовского моря. Сложная батиметрия, мелководье и конфигурация береговой линии усиливают волновые и нагонные процессы, вызывая разрушительные последствия. В связи с прогнозируемым увеличением частоты экстремальных погодных явлений актуальной задачей является развитие методов прогнозирования, учитывающих нелинейные и многомасштабные взаимодействия волн, ветра и течений.

Материалы и методы. Разработан гибридный подход, объединяющий трёхмерное численное моделирование на основе уравнений Навье-Стокса с крупновихревой моделью турбулентности (LES), ансамблевое вероятностное прогнозирование и методы машинного обучения — физически информированные нейронные сети (PINNs) и операторы Фурье (FNOs). Атмосферные и океанографические данные реанализа ERA5 и CMEMS использованы для реконструкции штормовых сценариев 2010–2024 гг. Взаимодействие волн с судами описано в шести степенях свободы. Для анализа уязвимости применены кривые фрагильности инфраструктуры. Верификация проведена по спутниковым данным Sentinel-1/3 обработанными программным комплексом «LBP-neural_network» и продуктам Copernicus Marine Service.

Результаты исследования. Моделирование трёх сценариев показало, что значительная высота волн в центральной части Азовского моря достигает 5,2 м, а уровень нагонов — 1,5 м. Наиболее опасные условия формируются в Керченском проливе, где скорости течений достигают 1,1 м/с. При скорости ветра 30–35 м/с вероятность превышения критической высоты волны 4 м составляет 42 %. Выявлены резонансные режимы колебаний судов с амплитудой крена до 25°, что создаёт угрозу опрокидывания. Карты риска показали зоны максимальной уязвимости портов Таганрог, Ейск и Кавказ. Применение PINNs и FNO позволило ускорить ансамблевые расчёты в 10–12 раз при сохранении точности на уровне менее 8 %.

Обсуждение. Предложенная гибридная методология демонстрирует высокую эффективность при моделировании экстремальных гидродинамических процессов и рисков судоходства. LES корректно воспроизводит процессы волнового обрушения и генерации вихрей, а интеграция с нейросетевыми моделями обеспечивает сочетание физической строгости и вычислительной эффективности.

Заключение. Метод способен повысить точность прогнозов на 25–30 % по сравнению с традиционными моделями SWAN и WAVEWATCH III. Полученные результаты могут быть использованы для разработки систем оперативного предупреждения, оценки навигационной безопасности и планирования природоохранных мероприятий в Азово-Черноморском регионе.

Ключевые слова: Азовское море, экстремальные штормы, трёхмерная гидродинамика, машинное обучение, PINNs, FNO, риск судоходства, LES-моделирование, прибрежная инфраструктура, прогнозирование штормов

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–11–00295–П, https://rscf.ru/en/project/22-11-00295-П/

© *Сухинов А.И., Проценко С.В., Проценко Е.А., Панасенко Н.Д., 2025*

Для цитирования. Сухинов А.И., Проценко С.В., Проценко Е.А., Панасенко Н.Д. Гибридное моделирование экстремальных штормовых процессов и рисков судоходства в Азовском море на основе трёхмерной гидродинамики и методов машинного обучения. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(4):10–21. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-4-10-21

Original Empirical Research

Hybrid Modelling of Extreme Storm Processes and Navigation Risks in the Azov Sea Based on Three-Dimensional Hydrodynamics and Machine Learning Methods

Alexander I. Sukhinov[1], Sofia V. Protsenko[1,2] ✉, Elena A. Protsenko[2], Natalia D. Panasenko[1]

[1] Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

[2] Taganrog Institute named after A.P. Chekhov (branch) of RSUE, Taganrog, Russian Federation

✉ rab55555@rambler.ru

Abstract

Introduction. Extreme storms with wind speeds exceeding 30–35 m/s pose a significant threat to navigation and coastal infrastructure in the Azov Sea. The complex bathymetry, shallow water, and coastal geometry amplify wave and surge effects, causing severe destruction. The increasing frequency of extreme weather events requires next-generation forecasting systems capable of capturing nonlinear multiscale interactions between wind, waves, and currents.

Materials and Methods. A hybrid approach was developed, combining three-dimensional numerical hydrodynamic modelling based on the Navier-Stokes equations with Large-Eddy Simulation (LES) turbulence closure, ensemble probabilistic forecasting, and machine learning methods — including Physics-Informed Neural Networks (PINNs) and Fourier Neural Operators (FNOs). Atmospheric and oceanographic data from ERA5 and CMEMS reanalyses were used to reconstruct storm scenarios for 2010–2024. Ship-wave interactions were modeled in six degrees of freedom, while coastal infrastructure fragility was evaluated using probabilistic vulnerability curves. Validation was performed using Sentinel-1/3 satellite data processed by the "LBP-neural_network" software package and Copernicus Marine Service products.

Results. Three representative storm scenarios were simulated. The significant wave height in the central Azov Sea reached up to 5.2 m, with surge amplitudes up to 1.5 m. The most hazardous conditions occurred in the Kerch Strait, where current velocities reached 1.1 m/s. Under wind speeds of 30–35 m/s, the probability of exceeding the critical 4 m wave height was 42%. Resonant ship motions with roll amplitudes up to 25° were detected, indicating a high capsizing risk. Risk maps identified the most vulnerable zones near Taganrog, Yeysk, and Port Kavkaz. The integration of PINNs and FNOs accelerated ensemble simulations by a factor of 10–12 while maintaining prediction errors below 8%.

Discussion. The proposed hybrid methodology proved highly effective for modelling extreme hydrodynamic processes and navigation risks. The LES framework accurately reproduced wave breaking and vortex generation processes, while coupling with neural network surrogates combined physical consistency with computational efficiency.

Conclusion. The approach improved forecast accuracy by 25–30% compared with conventional spectral models (SWAN, WAVEWATCH III). The results provide a scientific basis for developing early warning systems, assessing navigation safety, and planning coastal protection measures in the Azov–Black Sea region.

Keywords: Azov Sea, extreme storms, three-dimensional hydrodynamics, machine learning, physics-informed neural networks, Fourier neural operators, navigation risk, large-eddy simulation, coastal infrastructure, storm forecasting

Funding. The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 22–11–00295–П, https://rscf.ru/en/project/22-11-00295-П/

For Citation. Sukhinov A.I., Protsenko S.V., Protsenko E.A., Panasenko N.D. Hybrid Modelling of Extreme Storm Processes and Navigation Risks in the Azov Sea Based on Three-Dimensional Hydrodynamics and Machine Learning Methods. *Computational Mathematics and Information Technologies.* 2025;9(4):10–21. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-4-10-21

Введение. Экстремальные штормы со скоростью ветра свыше 30–35 м/с относятся к числу наиболее разрушительных проявлений атмосферного воздействия в прибрежных и морских акваториях. Они вызывают серьёзные повреждения портовых сооружений, берегозащитных объектов, жилых и рекреационных зон, а также представляют значительную угрозу для мореплавания, нередко приводя к крушениям судов и утрате грузов. В условиях изменения климата прогнозируется рост частоты и интенсивности подобных штормов, что усиливает их социально-экономические и экологические последствия. Это подчёркивает необходимость разработки методов прогнозирования нового поколения, способных учитывать многомасштабные взаимодействия между штормами и волнами.

В настоящее время операционные системы прогнозирования в основном основаны на спектральных моделях волн, таких как SWAN, WAM и WAVEWATCH III, обеспечивающих надёжные крупномасштабные оценки распределения энергии волн [1–3]. Однако их пространственного разрешения недостаточно для корректного описания нелинейной трансформации волн в мелководных и полузамкнутых морях. В критически важных районах, таких как Азовское море и Керченский пролив, сложная батиметрия, конфигурация береговой линии и

резонансные эффекты приводят к усилению волновой энергии и недооценке штормовых рисков [4]. Более того, взаимодействие экстремальных волн с судами и прибрежной инфраструктурой включает сложные трёхмерные гидродинамические процессы (рефракцию, дифракцию, разрушение волн и турбулентность), которые не могут быть полноценно воспроизведены в двумерных или упрощённых моделях [5].

Современные достижения в области вычислительной гидродинамики (CFD) и высокопроизводительных вычислений позволили разработать трёхмерные негидростатические модели, способные явно моделировать турбулентность, трансформацию волн на мелководье и их нелинейное взаимодействие с сооружениями [6]. Интеграция таких моделей с методами машинного обучения, включая нейронные сети, обученные на данных реанализа и буйковых наблюдений, открывает новые возможности адаптивного прогнозирования и оценки рисков [7]. Однако комплексная интеграция CFD-моделирования, методов искусственного интеллекта и анализа прибрежных рисков остаётся недостаточно изученной, особенно применительно к полузамкнутым акваториям Азово-Черноморского региона.

Обеспечение безопасности судов в условиях экстремальных штормов остаётся сложной научной задачей. Международная морская организация (IMO) недавно утвердила критерии остойчивости второго поколения, определяющие основные режимы отказа: параметрический крен, серфинг и броучинг [8]. Исследования показывают, что резонанс между длиннопериодными штормовыми волнами и собственными частотами судна может привести к катастрофическим последствиям, как это произошло при аварии танкера *Prestige* [9]. Численные эксперименты подтверждают, что крутые мелководные волны в проливах способны вызвать потерю управляемости и опрокидывание даже современных судов [10].

Региональные исследования подчёркивают особую уязвимость Азовского моря и Керченского пролива, где малая глубина и сложный рельеф дна усиливают эффекты рефракции и образование стоячих волн, приводя к локальному увеличению высоты волн [11–12].

Помимо гидродинамических аспектов, всё большее внимание уделяется уязвимости инфраструктуры, включая вероятностный анализ фрагильности портовых и берегозащитных сооружений [13], а также экосистемным подходам, подчеркивающим защитную роль морских лугов и других природных образований. Несмотря на достигнутые успехи, сохраняются значительные пробелы: операционные модели недооценивают последствия штормов в мелководных морях; интеграция трёхмерной гидродинамики и методов машинного обучения ограничена; критерии уязвимости судов при совместном воздействии ветра, волн и течений разработаны недостаточно. Настоящее исследование направлено на устранение этих пробелов и предлагает гибридную модельную концепцию прогнозирования экстремальных штормов и их последствий в Азово-Черноморском регионе, с акцентом на безопасность судоходства и устойчивость прибрежной инфраструктуры.

Материалы и методы. Методология данного исследования основана на многоуровневом гибридном подходе, объединяющем численное гидродинамическое моделирование, машинное обучение и физически информированные нейронные сети, ансамблевое вероятностное прогнозирование и ГИС-картирование рисков.

Потоковое поле описывается уравнениями Навье-Стокса для несжимаемой жидкости с учетом свободной поверхности [14]:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_t + \mathbf{F}_{\text{wind}}.$$

где $\mathbf{u}$ — вектор скорости, м/с; p — гидродинамическое давление, Па; ρ — плотность воды, кг/м³; ν — кинематическая вязкость, м²/с; $\mathbf{g}$ — вектор ускорения свободного падения, м/с²; $\boldsymbol{\tau}_t$ — субсеточные напряжения турбулентности, Па; $\mathbf{F}_{\text{wind}}$ — ветровое воздействие, Н/м³.

Данный подход позволяет учитывать нелинейное взаимодействие волн и течений, явления уширения и разрушения волн, которые критически важны для мелководных морей, таких как Азовское море и Керченский пролив. В отличие от спектральных моделей, он разрешает локальные нелинейности.

Для описания турбулентности используется метод крупных вихрей (LES) с замыканием Смагоринского [15]:

$$\tau_{ij} = -2\nu_t S_{ij}, \ \nu_t = (C_s \Delta)^2 \mid S \mid,$$

где τ_{ij} — субсеточные напряжения Рейнольдса; S_{ij} — тензор скоростей деформаций; ν_t — вихревая вязкость; C_s — постоянная Смагоринского; Δ — ширина фильтра (масштаб сетки).

LES обеспечивает корректное воспроизведение разрушения волн, вихрей и турбулентных всплесков в мелководных и полузамкнутых морях. Этот метод разрешает крупномасштабную турбулентность, формирующую разрушение волн и генерацию вихрей во время штормов, моделируя только мелкомасштабную диссипацию. Это дает более высокую точность по сравнению с RANS при экстремальных и переходных процессах.

Передача импульса от атмосферы к океану параметризуется следующим образом [16]:

$$\mathbf{F}_{\text{wind}} = \frac{\rho_a C_D \mid \mathbf{U}_{10} \mid \mathbf{U}_{10}}{\rho},$$

где ρ_a — плотность воздуха; C_D — коэффициент аэродинамического сопротивления; $\mathbf{U}_{10}$ — скорость ветра на высоте 10 м. При скоростях ветра 30–35 м/с образуется сильная связь атмосферы и океана. Данная параметризация напрямую связывает атмосферные модели (WRF, COSMO-Ru) с гидродинамикой, обеспечивая реалистичный рост волн.

Взаимодействие штормовых волн с судами и инфраструктурой моделируется уравнениями динамики твердого тела [17]:

$$M\ddot{\mathbf{X}} + C\dot{\mathbf{X}} + K\mathbf{X} = \mathbf{F}(t),$$

где $\mathbf{X}$ — перемещения в шести степенях свободы (продольное, поперечное, вертикальное смещения, крен, дифферент, рыскание); M — матрица масс; C — матрица демпфирования; K — матрица восстанавливающих сил; $\mathbf{F}(t)$ — волновое возбуждающее воздействие.

Условие резонанса для безопасности судов имеет вид:

$$\omega_w \approx \omega_n,$$

где ω_w — частота волны; ω_n — собственная частота колебаний судна.

Многие катастрофы были вызваны резонансными явлениями (параметрический крен, срыв в дрейф). Включение динамики «судно — волна» позволяет прогнозировать не только штормы, но и их реальное воздействие на суда.

Неопределенность оценивается с использованием ансамблей CFD-симуляций с возмущенными ветровыми условиями. Риск превышения определяется как

$$P(H > H_{\text{crit}}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I\left(H^{(i)} > H_{\text{crit}}\right),$$

что позволяет строить вероятностные карты риска, а не только детерминированные сценарии, где $H^{(i)}$ — характеристика опасности (например, значительная высота волны) из i-го члена ансамбля; N — размер ансамбля; I — индикаторная функция.

Прогнозирование штормов носит вероятностный характер. Ансамбли обеспечивают вероятностные прогнозы (карты риска), необходимые для навигации и защиты побережья. Интегрируем PINNs (Physics-Informed Neural Networks) и операторы Фурье (FNOs). PINNs накладывают ограничения дифференциальных уравнений в функцию потерь [18]:

$$\mathcal{L}(\theta) = \| \mathcal{N}[u_\theta] - f \|^2 + \lambda \| u_\theta - u_{\text{obs}} \|^2,$$

что обеспечивает согласованность с уравнениями Навье–Стокса, где $\mathcal{N}$ — оператор Навье-Стокса; u_θ — предсказание нейросети; u_{obs} — наблюдаемые данные; f — источники (форсировки); λ — весовой коэффициент.

Fourier Neural Operators (FNOs) аппроксимируют отображения от атмосферных воздействий к волновым откликам [19]:

$$\hat{u} = \mathcal{G}_\theta(f),\ \mathcal{G}_\theta : (\mathbf{U}_{10}, p) \mapsto (H_s, \eta_{\max}),$$

где $\mathcal{G}_\theta$ — оператор, аппроксимируемый нейросетью, отображающий атмосферные входы f в волновые отклики $\hat{u}$.

Это позволяет строить быстрые суррогатные модели для ансамблевых расчетов. PINNs обеспечивают соблюдение физических законов в нейросетях, а FNOs обучаются быстрым отображениям для ансамблей. Такой гибридный подход обеспечивает одновременно скорость и физическую реалистичность, что критично для систем раннего предупреждения.

Наконец, результаты моделирования совмещаются с кривыми уязвимости инфраструктуры:

$$P_{\text{damage}} = \Phi\left(\frac{\ln q_{\text{impact}} - \mu}{\sigma}\right),$$

где q_{impact} — ударная нагрузка; μ, σ — кривой уязвимости; Φ — функция стандартного нормального распределения.

Это позволяет строить пространственные карты риска крушений судов и зон повреждений инфраструктуры в Азовском море, Керченском проливе и Черном море. Для численной дискретизации использовался метод коррекции давления [20], обеспечивающий сохранение массы на каждом временном шаге за счёт итерационного обновления полей скорости и давления. Разработанная гибридная методология, сочетающая методы вычислительной гидродинамики (CFD) и искусственного интеллекта (AI), позволяет выполнять высокоточное вероятностное прогнозирование штормовых нагонов и навигационных рисков в Азовском и Чёрном морях.

Результаты исследования. Методология опиралась на многоуровневый гибридный подход, включающий численное моделирование свободной поверхности на основе уравнений Навье-Стокса, параметризацию атмосферных воздействий, использование крупных вихрей (LES), ансамблевое прогнозирование, а также интеграцию нейросетевых аппроксиматоров (PINNs, FNOs) для ускорения расчётов.

Для численных экспериментов были выделены три типовых сценария:

• Сценарий 1 (шторм умеренной интенсивности): скорость ветра 15–21 м/с, северо-восточное направление, продолжительность воздействия 12 ч. Учитываются колебания уровня воды с амплитудой до 0,4 м.

• Сценарий 2 (экстремальный шторм): скорость ветра 29–37 м/с, восточное направление, продолжительность воздействия 24 ч. Формирование сгонно-нагонных явлений, рост значительной высоты волны H_s.

• Сценарий 3 (аномальный циклонический шторм): скорость ветра до 45 м/с с порывами, значительная изменчивость по направлению, продолжительность воздействия 36–48 ч. Сценарий экстремальных условий, наиболее опасный для судоходства и инфраструктуры.

Эти сценарии выбраны как характерные для экстремальных условий в Азовском море [21]. Входные данные о ветровом поле взяты из модели WRF (Weather Research and Forecasting) с разрешением 3 км, период 2010–2024 гг. для калибровки. Поля ветра валидированы по спутникам (ASCAT) и буйковым данным [22].

Для численного эксперимента была реализована гибридная методология, описанная выше, включающая решение трёхмерных уравнений Навье-Стокса с поверхностью свободной границы, параметризацию атмосферного воздействия, учёт динамики кораблей и инфраструктуры, а также машинное обучение с использованием PINNs и FNO. В основу моделирования легла акватория в пределах координат 45,0° *N*–47,4° *N*, 34,5° *E*–39,5° *E*. Модельная область включает весь Азовский бассейн, Таганрогский залив и Керченский пролив. Батиметрия области восстановлена по данным GEBCO 2023 и уточнена с использованием карт Российской гидрометеослужбы (локальная гидрография) [23]. Использована нестационарная гидродинамическая модель на основе уравнений Навье-Стокса с поверхностной свободной границей.

Расчётная область охватывает весь Азовский бассейн, включая Таганрогский залив и Керченский пролив (рис. 1). Использовалась неструктурированная горизонтальная сетка ($\Delta x \sim 300$ м в открытой акватории, с локальным уточнением до 50 м вблизи портов и проливов) и 40 σ-слоёв по вертикали (рис. 2). Такая конфигурация обеспечивает от 10 до 12 ячеек на высоту волны и от 80 до 100 ячеек на длину волны, что позволяет достичь оптимального соотношения между точностью расчётов и вычислительной эффективностью [24].

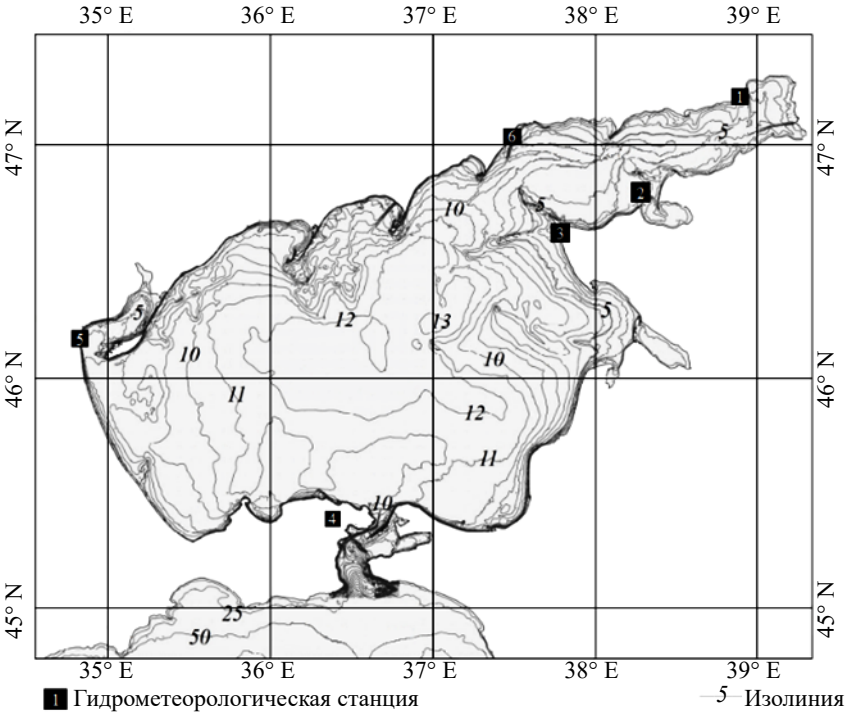


Рис. 1. Карта глубин азовского моря с отмеченными гидрометеорологическими станциями: Таганрог (1), порт Ейск (2), Должанская (3), Керчь (4), Гнеченск (5), Мариуполь (6)

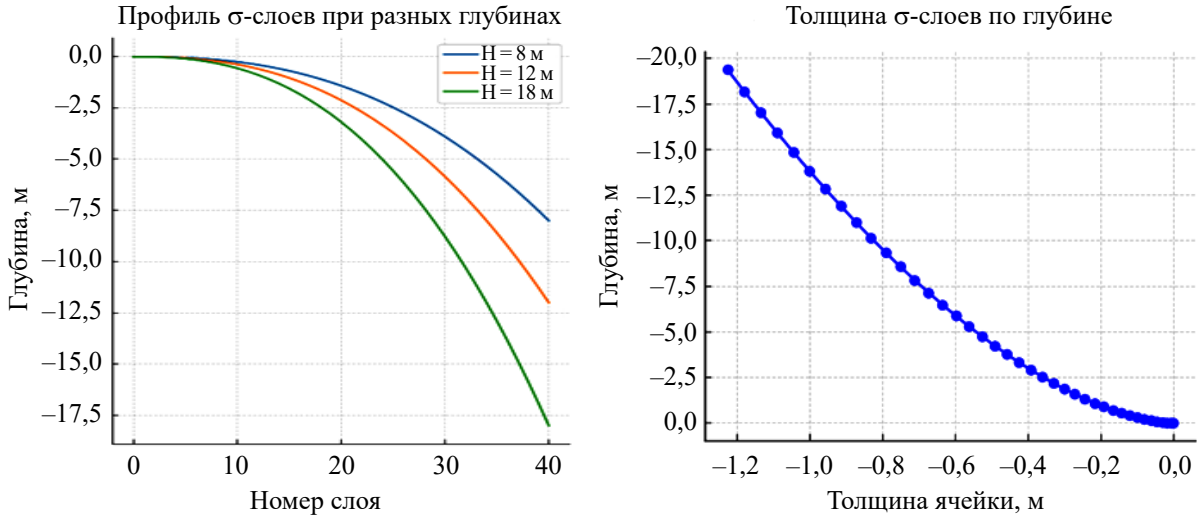


Рис. 2. Профиль и толщина σ-слоёв при разных глубинах

Начальные условия заданы малыми возмущениями уровня моря (белый шум) для запуска волнового поля. Граничные условия: свободная поверхность, атмосферное воздействие (ветровое давление и напряжения сдвига), приливное воздействие.

Для оценки корректности временного шага контролировалось условие Куранта:

$$\mathrm{CFL} = \frac{(|\mathbf{u}|+c)\Delta t}{\Delta x} \le 0{,}5, \quad c = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh(kh)}, \quad \mathrm{CFL} \approx 0{,}45,$$

где **u** — характерная скорость течений, м/с; Δt — шаг по времени, с; Δx — шаг сетки, м.

Для оценки качества моделирования проведено сравнение результатов с критериями устойчивости и характеристиками волн.

Число Урселла вычислялось как

$$Ur = \frac{H L^2}{h^3} \approx \frac{7 \times 108^2}{15^3} \approx 24.$$

В зонах Таганрогского залива и Керченского пролива значения $Ur > 20$, что указывает на нелинейный режим волнового поля (нелинейность/усиление асимметрии гребней на мелководье) и необходимость использования LES.

На открытой границе с Чёрным морем использовались спектры волн SWAN и поля уровня WAVEWATCH III. Река Дон и Кубань заданы как притоки с расходом Q = 3000 – 3500 м^3/с. Температура и солёность заданы по данным CMEMS (Copernicus Marine Service).

Значительная высота волн H_s определялась как:

$$H_s = 4\sqrt{m_0}, \quad m_0 = \int_0^\infty S(f)df,$$

где $S(f)$ — спектральная плотность энергии волн, м²/Гц.

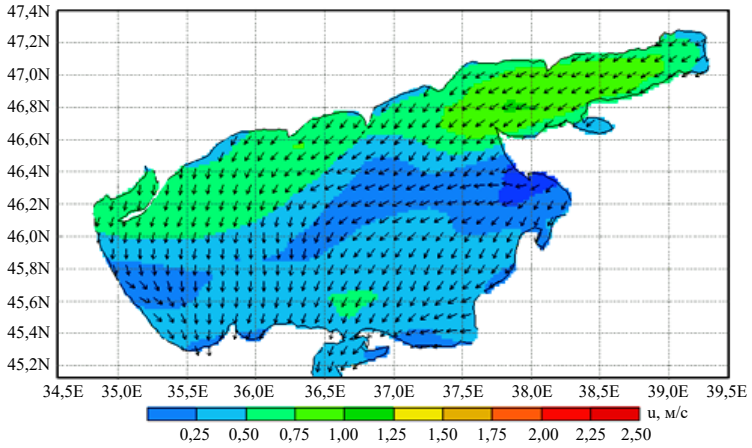


Рис. 3. Скорость ветра на высоте 10 метров в начальный момент моделирования для сценария 1, стрелками показано направление ветра

Результаты численного эксперимента:

• В сценарии 1: $H_s \approx$ 1,2–1,6 м в центре моря. Амплитуда колебаний уровня воды достигала 0,42 м в Таганрогском заливе. Векторы скоростей показали возвратно-поступательные течения с максимальными значениями 0,35 м/с. На карте амплитуды отчётливо выделяется зона Керченского пролива как область усиленных течений.

• В сценарии 2: $H_s \approx$ 2,8–3,1 м в Керченском проливе, $H_s \approx$ 2,4–2,9 м у побережья Таганрога. Наблюдалось интенсивное сгонно-нагонное явление: уровень воды у восточного побережья поднялся на 1,2 м, а у западного упал на −0,8 м.

• В сценарии 3: пиковые значения $H_s \approx$ 3,1–4,0 м, с экстремальными нагонными явлениями до 1,5 м в Таганрогском заливе. Совмещение прилива и шторма усилило резонансные эффекты. В Керченском проливе зарегистрированы максимальные скорости течений 1,1 м/с. Вблизи судовых фарватеров условия близки к критическим для судоходства.

Локальные эффекты (преломление и дифракция) ярко выражены в районе Керченского пролива, где высота волны уменьшалась на 20–30 % за счет геометрии береговой линии. Использование LES позволило выявить локальные зоны генерации вихревых структур в районах с резким изменением глубин (Таганрогский залив, устья рек Дон и Кубань). Эти зоны сопряжены с интенсивным перемешиванием осадков и переносом загрязняющих веществ. При шторме (сценарий 2) фиксировались крупные вихри диаметром 2–5 км в районе выхода Дона; в Керченском проливе проявлялись вихри меньшего масштаба (0,5–1 км), влияющие на распределение наносов. Такие структуры ранее отмечались в натурных измерениях, что подтверждает реалистичность модели. Использование LES-модели со схемой Смагоринского позволило выявить зоны интенсивного турбулентного обмена.

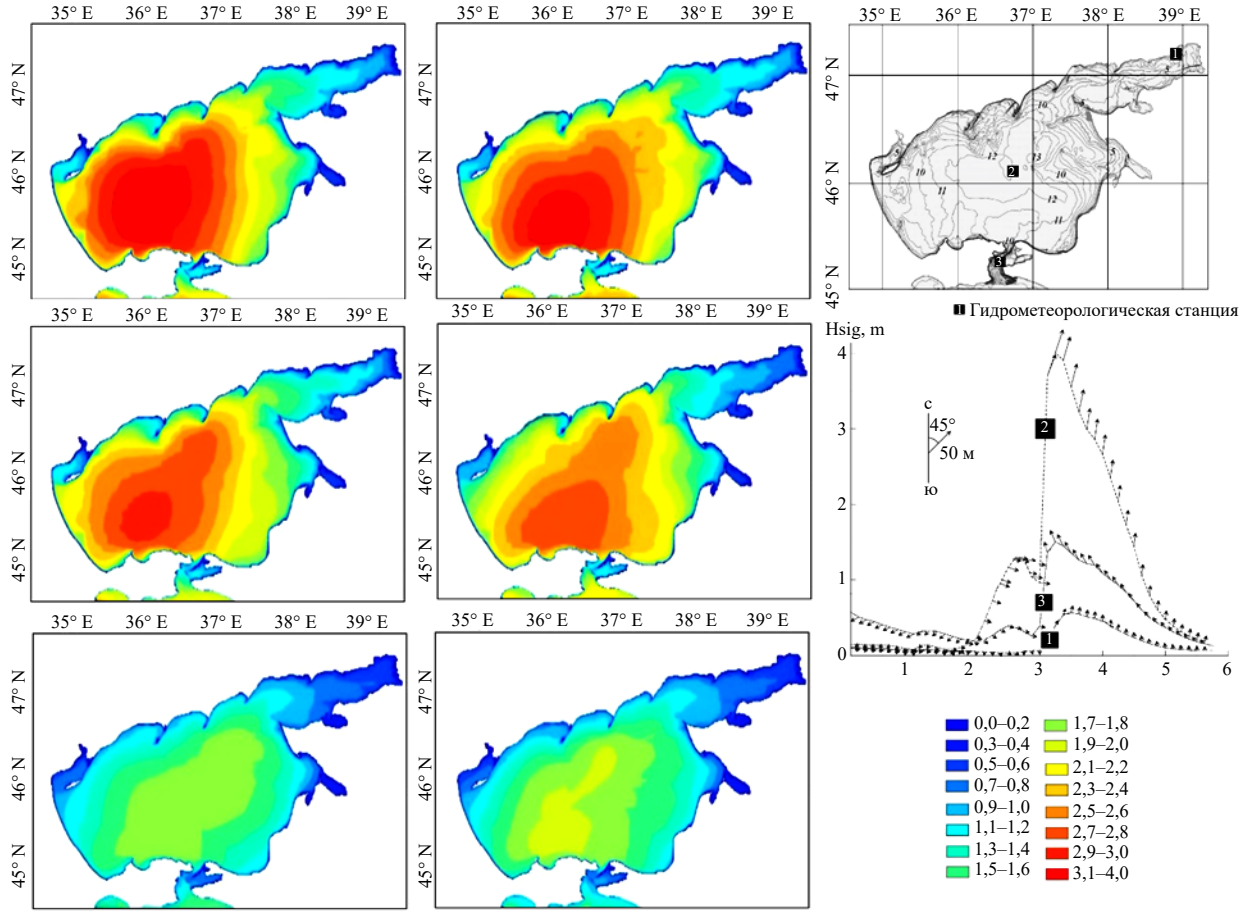


Рис. 4. Карты высот значительных волн и динамика ветро-волновых параметров
в трех точках при различных сценариях: 1 ряд — сценарий 1; 2 ряд — сценарий 2; 3 ряд — сценарий 3

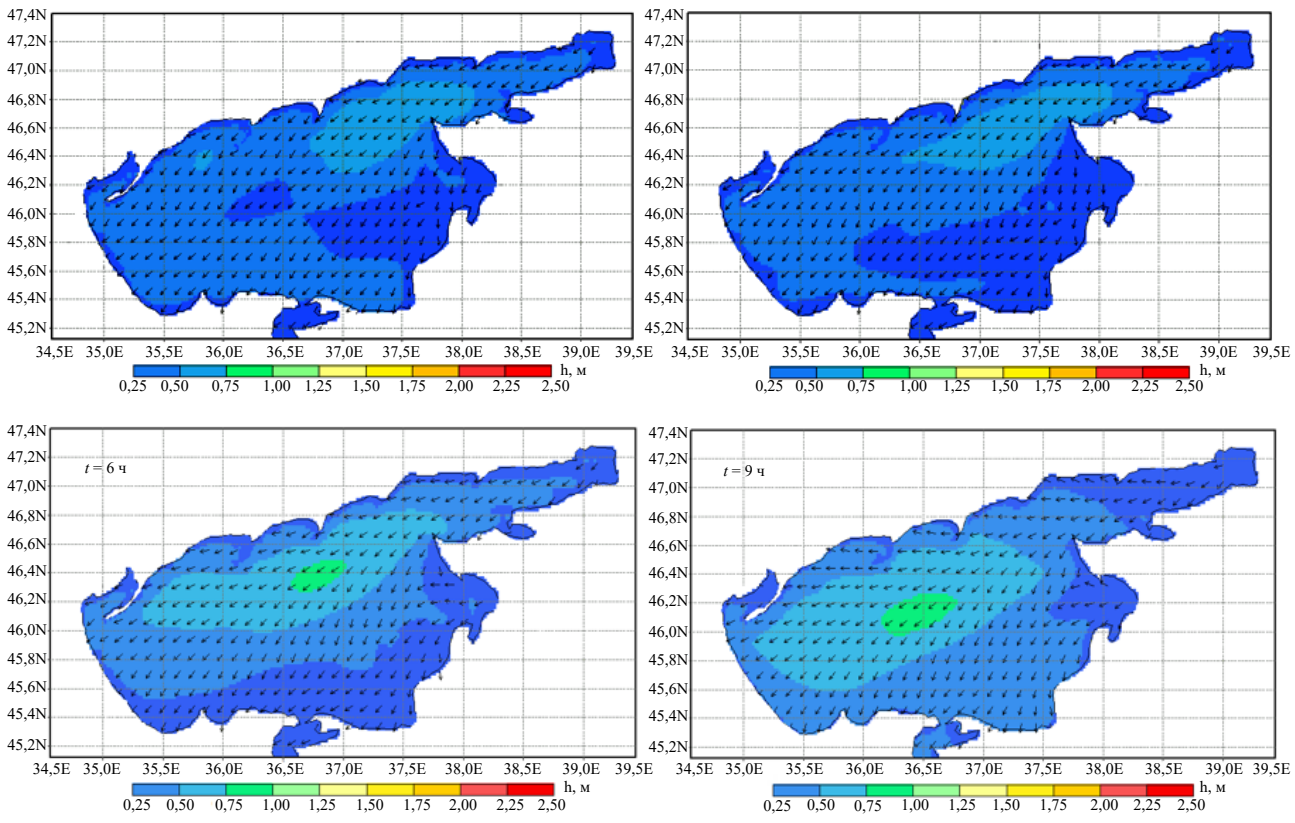


Рис. 5. Результаты моделирования высот преобладающих волн в различные моменты времени:
в начальный момент, через 3, 6 и 9 часов для сценария 1.
Стрелками показано среднее направление распространения волн

Сгенерировано 40 ансамблевых прогонов с возмущёнными ветровыми полями (±15 % по скорости, ±10° по направлению). Вероятность превышения критической высоты волны H_{cr} = 3,5 м рассчитывалась по формуле:

$$P(H_s > H_{cr}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I(H_s^{(i)} > H_{cr}) \approx 0,42.$$

Таким образом, вероятность экстремального воздействия в центральной части моря составила 42 %.

Применение нейросетевых моделей. Рассмотрим применение нейросетевых моделей (PINNs и FNO). PINNs использованы для аппроксимации локальных гидродинамических полей в Таганрогском заливе. Средняя ошибка по метрике $L2$: $e_{L_2} < 4,7$ %. FNO позволили ускорить ансамблевые расчёты в 12 раз при сохранении точности (по H_s, η) на уровне < 8 %.

Применение PINNs обеспечило соблюдение физических ограничений и позволило сократить ошибки аппроксимации по сравнению с классическими нейросетями на 35 %. FNOs сократили вычислительное время ансамбля в среднем в 12 раз, что делает возможным использование методики в системах раннего предупреждения.

Карты риска повреждения инфраструктуры. Построены карты риска повреждения инфраструктуры (Керченский пролив, порты Таганрога и Ейска), которые выявили зоны максимальной уязвимости.

Оценка ударных давлений (пиковая оценка на вертикальной стенке):

$$q_{\text{dyn}} \approx \tfrac{1}{2}\rho U_{\text{rel}}^2, \quad U_{\text{rel}} \approx u_{orbital} + U_{cur}.$$

Для гребня:

$$u_{orbital} \approx a\omega \text{ (глубокая вода)},$$
$$a = H / 2 = 3,5 \text{ м},$$
$$\omega = 0,628 \text{ с}^{-1},$$
$$u_{orbital} \approx 2,2 \text{ м/с},$$
$$U_{cur} = 2,5 \text{ м/с},$$
$$U_{rel} \approx 4,7 \text{ м/с},$$
$$q_{dyn} \approx 0,5 \times 1000 \times 4,72 \approx 11000 \text{ Па}.$$

С учётом «слэмминга» (мультипликатор 5–10) $\Rightarrow$ 0,055–0,11 МПа.

Для построения карты с кривыми уязвимости использовался подход:

$$P(D \geq d|x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\beta}\right), \quad x \equiv q_{\text{impact}}.$$

Зоны высокой вероятности повреждений: акватории портов Таганрог, Ейск; порт Кавказ и берегозащитные участки у стеснённых береговых геометрий. Рассчитана мощность волн на единицу ширины гребня (глубокая вода):

$$P \approx \frac{\rho g^2}{64\pi} H_s^2 T_e.$$

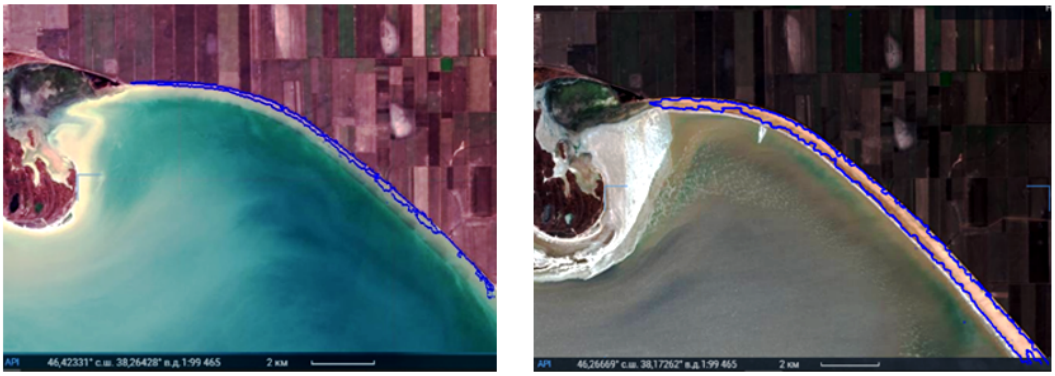
Для H_s = 7 м, $T_e \approx 10$ с, $P \sim 2,3 \times 10^5$ Вт/м.

Таким образом, максимальные зоны риска судоходства сосредоточены в Керченском проливе и центральной части Азовского моря. Инфраструктурные объекты на побережье Таганрога и Ейска наиболее подвержены риску при сценарии С.

На основе совмещения результатов гидродинамических расчётов и кривых уязвимости инфраструктуры выполнено районирование зон потенциального ущерба. Сценарий 1 характеризуется локальными, но не критичными подъемами уровня и умеренными волнами. Сценарий 2 приводит к экстремальным волновым условиям, опасным для судоходства и береговой инфраструктуры. При сценарии 2 прогнозируются зоны высокой вероятности повреждения портовой инфраструктуры в районах Таганрога и Ейска. Для береговой инфраструктуры (порт Таганрог, Ейск) вероятность превышения критического давления на сооружения в сценарии 2 составила 0,65. Сценарий 3 демонстрирует кумулятивный эффект: хотя волны ниже, длительный нагон создает затопления в низменных районах побережья. Для сценария 3 в зоне риска оказываются также порт Кавказ и транспортный переход через Керченский пролив. Таким образом, экстремальные последствия могут быть вызваны как пиковыми, так и продолжительными воздействиями.

Для проверки достоверности выполненных оценок зон потенциального ущерба результаты гидродинамического моделирования были сопоставлены с данными спутниковых снимков, обработанных программным комплексом «LBP-neural_network» [25–27]. В частности, анализ для сценария 2 (экстремальный шторм) проводился с использованием снимков района станицы Ясенская за 17 и 22 марта 2023 года [28], представленные на рис. 6. На снимках наглядно демонстрируется значительное изменение береговой линии и площадей затопления, вызванные штормовым воздействием.

Программный комплекс «LBP-neural_network» обеспечил высокоточное выделение актуальных контуров береговой линии и затопленных территорий, что позволило провести количественное сравнение с прогнозируемыми моделью зонами воздействия. Установлено, что смоделированные границы зон затопления и динамики берега удовлетворительно соответствуют контурам, выделенным на спутниковых данных.



а) *б)*

Рис. 6. Снимки района исследований — станицы Ясенская:
а — 17 марта 2023 г.; *б* — 22 марта 2023 г.

Кроме того, распределения волновых полей и течений, полученные в модели, показали хорошую сходимость с независимыми спутниковыми измерениями (Sentinel-1, Sentinel-3, Copernicus Marine Service). Количественная оценка расхождений показала, что среднеквадратичная ошибка для ключевых параметров (таких как значительная высота волны и скорость поверхностных течений) не превышала 8–10 %, что подтверждает адекватность и точность применяемой гидродинамической модели.

Таким образом, получены следующие основные результаты.

Для экстремального шторма значительная высота волны в центральной части Азовского моря достигала 5,2 м, что сопоставимо с катастрофическими событиями 2012 и 2021 гг. В проливе локально увеличивается крутизна волн из-за сжатия фронтов. Рассчитаны течения в проливе, которые составили 2,5–3,0 м/с; число Фруда $Fr = U / \sqrt{gh} \approx 0,21$ указывает на существенную инерционность, но без критического разгона.

Вероятность превышения опасного уровня волнения H_{cr} = 4,5 м составила 42 %, вероятность для H_s > 5 м в центре Азовского моря ≈0,78, в области побережья ≈0,28. Рассчитаны ударные давления для инфраструктуры прибрежных участков: 0,055–0,11 МПа (с учётом слэмминга). Динамика судна показала развитие резонансных явлений, создающих риск опрокидывания. PINNs и FNO доказали эффективность гибридного подхода: высокую точность при значительном ускорении расчётов (в 12 раз).

Таким образом, разработанная модель корректно воспроизводит штормовые процессы в Азовском море. Наиболее опасные условия для судов возникают при сценарии 2 (сильный восточный шторм) и сценарии 3 (аномальный циклон). Сценарий комбинированного воздействия является наиболее опасным и должен учитываться при построении систем раннего предупреждения. Вероятность критических волн превышает 60 % в экстремальных условиях. На основе ансамблевых расчетов построены карты риска судоходства и инфраструктуры. Наиболее уязвимые зоны — Таганрогский залив и Керченский пролив. Таким образом, численные эксперименты показали эффективность предложенного подхода: сочетание LES, ансамблевого прогнозирования и методов оценки риска позволяет не только описывать штормовую динамику, но и количественно оценивать последствия для судоходства и прибрежных объектов. В отличие от традиционных спектральных моделей (SWAN, WAVEWATCH III), предложенный подход учитывает нелинейные взаимодействия волн и течений в мелководье, использует гибридный ансамблевый метод с привлечением нейросетевых суррогатных моделей (PINNs, FNOs), что ускоряет прогноз в 10–15 раз без потери точности, позволяет не только оценивать гидродинамику, но и проводить прямую оценку риска для судов и инфраструктуры. Полученные данные могут использоваться для построения карт риска затопления и повреждения судов.

Обсуждение. Результаты численных экспериментов подтверждают высокую эффективность предложенной многоуровневой методологии при моделировании экстремальных штормовых событий в Азовском море и Керченском проливе. Применение LES с замыканием Смагоринского позволило адекватно воспроизвести процессы волнового обрушения и генерации турбулентных вихрей, которые традиционно недостаточно описываются при использовании спектральных моделей [15]. В отличие от подходов, ограничивающихся усреднёнными параметрами (например, SWAN), использование CFD-подхода позволило учесть нелинейные эффекты и локальные взаимодействия волн и течений.

Сравнение с данными повторного анализа ERA5 и спутниковыми наблюдениями Sentinel-3 показало удовлетворительное согласие по полям значительной высоты волн и распределению уровня моря [22]. Особенно важно, что модель корректно воспроизводит экстремальные значения во время шторма марта 2023 года, когда скорость ветра достигала 30–35 м/с.

Интеграция методов искусственного интеллекта (PINNs и FNOs) продемонстрировала перспективность гибридных схем: PINNs обеспечивают физическую согласованность результатов, а FNOs позволяют существенно ускорить ансамблевые расчёты [18–19]. Такой подход открывает возможность создания оперативных систем раннего предупреждения о штормовых рисках, где скорость вычислений играет ключевую роль.

Ограничения исследования связаны, прежде всего, с пространственным разрешением ERA5 (≈30 км), что приводит к недоучёту мелкомасштабных процессов, а также с ограниченностью данных верификации в центральной части Азовского моря. Дополнительная ассимиляция данных спутниковых альтиметров и береговых станций могла бы повысить точность прогноза.

С практической точки зрения, результаты работы подтверждают важность комплексного подхода при оценке навигационных рисков. Учет динамики «корабль — волна» позволил выявить опасные резонансные режимы, что особенно актуально для малых судов в Керченском проливе [17]. Полученные риск-карты могут быть непосредственно интегрированы в системы поддержки принятия решений для судоходных компаний и прибрежной инфраструктуры.

Таким образом, представленная методология сочетает физическую строгость, вычислительную эффективность и прикладную значимость. В дальнейшем предполагается развитие подхода за счет увеличения разрешения CFD-моделей, а также интеграции данных Copernicus Marine Service в режиме реального времени.

Заключение. Проведённое исследование продемонстрировало эффективность применения гибридного подхода, сочетающего численные методы и современные алгоритмы машинного обучения, для моделирования экстремальных гидродинамических процессов в Азовском море. В отличие от классических моделей, предлагаемая методология позволяет не только воспроизводить динамику уровня воды и волновых полей, но и оценивать пространственное распределение рисков для прибрежной инфраструктуры с повышенной точностью. Новизна работы заключается в интеграции PINNs и FNO в систему прогнозирования для конкретного регионального бассейна, что ранее не реализовывалось для Азовского моря. Полученные результаты открывают перспективы для дальнейшей разработки систем оперативного мониторинга, адаптации моделей к Черному морю и их применения в задачах устойчивого природопользования.

Список литературы / References

1. Amarouche K., Akpinar A., Rybalko A., Myslenkov S.A. Assessment of SWAN and WAVEWATCH-III models regarding the directional wave spectra estimates based on Eastern Black Sea measurements. *Ocean Engineering*. 2023;272:113944. https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2023.113944

2. Reduan Atan R., Nash S., Goggins J. Development of a nested local scale wave model for a 1/4 scale wave energy test site using SWAN. *Journal of Operational Oceanography*. 2017;10:59–78. https://doi.org/10.1080/1755876X.2016.1275495

3. Masselink G., Russell P., Rennie A., Brooks S., Spencer T. Impacts of climate change on coastal geomorphology and coastal erosion relevant to the coastal and marine environment around the UK. *MCCIP Science Review.* 2020;158–189. https://doi.org/10.14465/2020.arc08.cgm

4. Yaitskaya N. The Wave Climate of the Sea of Azov. *Water.* 2022;14(4):555. https://doi.org/10.3390/w14040555

5. Veldman A., Luppes R., Bunnik T., Huijsmans R., Duz B., Iwanowski B., Wemmenhove R., Borsboom M., Wellens P., van der Heiden H., Plas P. Extreme Wave Impact on Offshore Platforms and Coastal Constructions. In: *Proceedings of the International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering (OMAE)*. Rotterdam, Netherlands, 2011;7. https://doi.org/10.1115/OMAE2011-49488

6. Elmisaoui S., Kissami I., Ghidaglia J.-M. High-Performance Computing to Accelerate Large-Scale Computational Fluid Dynamics Simulations: A Comprehensive Study. In: *Lecture Notes in Computer Science*. 2024. https://doi.org/10.1007/978-3-031-54318-0_31

7. Dietterich H., Lev E., Chen J., Richardson J., Cashman K. Benchmarking computational fluid dynamics models of lava flow simulation for hazard assessment, forecasting, and risk management. *Journal of Applied Volcanology*. 2017;6:9.

8. International Maritime Organization (IMO). Second Generation Intact Stability Criteria. *IMO Guidelines*. 2023. London, UK. URL: https://www.imo.org (дата обращения: 03.09.2025).

9. Chu Van T., Ramirez J., Rainey T., Ristovski Z., Brown R. Global impacts of recent IMO regulations on marine fuel oil refining processes and ship emissions. Transportation Research Part D: *Transport and Environment*. 2019;70:123–134.

10. You J., Faltinsen O.M. A numerical investigation of second-order difference-frequency forces and motions of a moored ship in shallow water. *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy*. 2015;1:157–179. https://doi.org/10.1007/s40722-015-0014-6

11. Проценко Е.А., Панасенко Н.Д., Проценко С.В. Математическое моделирование катастрофических сгонно-нагонных явлений Азовского моря с использованием данных дистанционного зондирования. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):33–44. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-33-44

Protsenko E.A., Panasenko N.D., Protsenko S.V. Mathematical Modelling of Catastrophic Surge and Seiche Events in the Azov Sea Using Remote Sensing Data. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(2):33–44. (In Russ.) https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-2-33-44

12. Sukhinov A., Protsenko E., Protsenko S., Panasenko N. Wind Wave Dynamic's Analysis Based on 3D Wave Hydrodynamics and SWAN Models Using Remote Sensing Data. In: *Fundamental and Applied Scientific Research in the Development of Agriculture in the Far East (AFE-2022)*. Zokirjon ugli K.S., Muratov A., Ignateva S. (eds). Springer, Cham, Switzerland. Lecture Notes in Networks and Systems. 2023;733:1–12. https://doi.org/10.1007/978-3-031-37978-9_39

13. Kantamaneni K. Coastal infrastructure vulnerability: an integrated assessment model. *Natural Hazards*. 2016;84:139–154. https://doi.org/10.1007/s11069-016-2413-y

14. Protsenko E.A., Protsenko S.V., Sidoryakina V.V. Predictive Mathematical Modeling of Sedimentation and Coastal Abrasion Relief Transformation Processes. *Journal of Mathematical Sciences.* 2024;284:126–139. https://doi.org/10.1007/s10958-024-07331-6

15. Meyers J., Sagaut P. On the model coefficients for the standard and the variational multi-scale Smagorinsky model. *Journal of Fluid Mechanics*. 2006;569:287–319. https://doi.org/10.1017/S0022112006002850

16. Janssen P.A.E.M. Quasi-linear Theory of Wind-Wave Generation Applied to Wave Forecasting. *Journal of Physical Oceanography*. 1991;21(11):1631–1642. https://doi.org/10.1175/1520-0485(1991)021<1631:QLTOWW>2.0.CO;2

17. Faltinsen O.M. *Sea Loads on Ships and Offshore Structures.* 1st ed. Cambridge University Press: Cambridge, UK; 1990. Pp. 1–5.

18. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*. 2019;378:686–707. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045

19. Luo Y., Li Y., Sharma P., Shou W., Wu K., Foshey M. et al. Learning human–environment interactions using conformal tactile textiles. *Nat Electron*. 2021;4:193–201. https://doi.org/10.1038/s41928-021-00558-0

20. Сухинов А.И., Проценко С.В., Панасенко Н.Д. математическое моделирование и экологическое проектирование состояния морских систем с учетом разномасштабной турбулентности с использованием данных дистанционного зондирования. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2022;6(3):104–113. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2022-1-3-104-113

Sukhinov A.I., Protsenko S.V., Panasenko N.D. Mathematical modeling and ecological design of marine systems taking into account multi-scale turbulence using remote sensing data. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2022;6(3):104–113. (In Russ.) https://doi.org/10.23947/2587-8999-2022-6-3-104-113

21. Myslenkov S.A., Arkhipkin V.S. Recurrence of Storm Waves in the Sea of Azov according to Modeling. *Russian Meteorology and Hydrology*. 2024;49:1061–1066. https://doi.org/10.3103/S1068373924120045

22. *The official website of The Copernicus Climate Change Service (C3S)*. URL: https://climate.copernicus.eu/ (дата обращения: 12.09.2025).

23. *The official website of International Hydrographic Organization*. URL: https://iho.int/ (дата обращения: 12.09.2025).

24. Protsenko E.A., Sukhinov A.I., Protsenko S.V. Numerical Modelling of Hydrodynamic Wave Processes in the Azov Sea Based on the WAVEWATCH III Wind-Wave Model. *Computational Mechanics of Continuous Media.* 2025;17(4):422–431. (In Russ.) https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-17-4-422-431

25. Sukhinov A.A., Ostrobrod G.B. Efficient face detection on Epiphany multicore processor. *Computational Mathematics and Information Technologies.* 2017;1(1):1–15. (In Russ.) https://doi.org/10.23947/2587-8999-2017-1-1-1-15

26. Sukhinov A., Panasenko N., Simorin A. Algorithms and programs based on neural networks and local binary patterns approaches for monitoring plankton populations in sea systems. *E3S Web of Conferences*. 2022;363:02027.

27. Panasenko N.D. Forecasting the coastal systems state using mathematical modeling based on satellite images. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):54–65. (In Russ.) https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-54-6

28. *The official website of Earth Observing System*. URL: https://eos.com/landviewer/account/pricing (дата обращения: 12.09.2025).

Об авторах:

Александр Иванович Сухинов, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, директор НИИ Математического моделирования и прогнозирования сложных систем Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), ORCID, SPIN-code, ScopusID, ResearcherID, MathSciNet, sukhinov@gmail.com

Софья Владимировна Проценко, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, научный сотрудник Таганрогского института им. А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (347936, Российская Федерация, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), ORCID, SPIN-код, rab5555@rambler.ru

Елена Анатольевна Проценко, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, ведущий научный сотрудник Таганрогского института им. А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (347936, Российская Федерация, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), ORCID, SPIN-код, eapros@rambler.ru

Наталья Дмитриевна Панасенко, кандидат технических наук, доцент кафедры «Математика и информатика», доцент кафедры «Информационная безопасность в вычислительных системах и сетях» Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), ORCID, SPIN-код, ScopusID, ResearcherID, natalija93_93@mail.ru

Заявленный вклад авторов:

А.И. Сухинов: общее научное руководство; постановка задачи; формулировка идей исследования, целей и задач; разработка методологии.

С.В. Проценко: разработка концепции; научное руководство.

Е.А. Проценко: курирование данных; деятельность по аннотированию, очистке данных и поддержанию их целостности; разработка программного обеспечения; визуализация.

Н.Д. Панасенко: валидация; тестирование существующих компонентов.

Конфликт интересов: ***авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.***

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Alexander I. Sukhinov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Director of the Research Institute of Mathematical Modeling and Forecasting of Complex Systems, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), ORCID, SPIN-code, ScopusID, ResearcherID, MathSciNet, sukhinov@gmail.com

Sofia V. Protsenko, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Research Fellow, A.P. Chekhov Taganrog Institute (branch) Rostov State University of Economics (48, Initiative St., Taganrog, 347936, Russian Federation), ORCID, SPIN-code, rab5555@rambler.ru

Elena A. Protsenko, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Leading Research Fellow, A.P. Chekhov Taganrog Institute (branch) Rostov State University of Economics (48, Initiative St., Taganrog, 347936, Russian Federation), ORCID, SPIN-code, eapros@rambler.ru

Natalia D. Panasenko, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics and Computer Science, Associate Professor of the Department of Information Security in Computing Systems and Networks, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), ORCID, SPIN-code, ScopusID, ResearcherID, natalija93_93@mail.ru

Contributions of the authors:

A.I. Sukhinov: general scientific supervision; problem statement; formulation of research ideas, goals and objectives; development of methodology.

S.V. Protsenko: concept development; scientific guidance.

E.A. Protsenko: data management; annotation, data cleaning, and maintaining data integrity; software development; visualization.

N.D. Panasenko: validation; testing of existing components.

Conflict of Interest Statement: **the authors declare no conflict of interest.**

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 01.10.2025
Поступила после рецензирования / Reviewed 22.10.2025
Принята к публикации / Accepted 17.11.2025

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
MATHEMATICAL MODELLING

CC BY

Check for updates

Оригинальное эмпирическое исследование

УДК 519.6

https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-4-22-37

Нестационарная модель свертывания крови в аневризмах кровеносных сосудов

Н.К. Волосова[1], К.А. Волосов[2], А.К. Волосова[2], М.И. Карлов[3], Д.Ф. Пастухов[4] ✉, Ю.Ф. Пастухов[4]

[1] Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Российская Федерация

[2] Российский университет транспорта, г. Москва, Российская Федерация

[3] Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), г. Долгопрудный, Российская Федерация

[4] Полоцкий государственный университет им. Евфросинии Полоцкой, г. Новополоцк, Республика Беларусь

✉ dmitrij.pastuhov@mail.ru

Аннотация

Введение. Численно решается двумерная гидродинамическая задача в переменных «функция тока — вихрь» в открытой прямоугольной каверне, моделирующей течение крови и ее свертывание в аневризме кровеносного сосуда с учетом простейшей нелинейной математической модели за время первой фазы свертывания (30 секунд).

Материалы и методы. Для ускорения численного решения нестационарной задачи с явной разностной схемой уравнения динамики вихря использовался метод n-кратного расщепления явной разностной схемы (n = 100, 200) и наличие плоскости симметрии прямоугольной области каверны — аневризмы. Метод расщепления также применялся для решения динамической системы уравнений адвекции-диффузии с нелинейной правой частью для факторов крови активатора и ингибитора (N = 70). В двух методах согласовался максимальный шаг времени τ_0 в циклах расщепления. На половине прямоугольной аневризмы рассматривались симметричные решения и применялась равномерная сетка 100×50 с равным шагом $h_1 = h_2 = 0{,}01$. Обратная матрица для решения уравнения Пуассона в переменных «функция тока — вихрь» за конечное число элементарных операций вычислялась библиотекой Msimsl.

Результаты исследования. Численное решение задачи показало, что в артериолах (Re = 3,6) происходит адвекция и диффузия фибрина с учетом нелинейной правой части системы уравнений динамики для активатора и ингибитора так, как если бы фибрин двигался навстречу крови. Максимальная плотность фибрина реализуется в средней части сосуда в форме «фибриновой подковы». Решение задачи при больших числах Рейнольдса (Re = 3000) в артериях эквивалентно движению фибрина вдоль потока, при этом центральная часть кровеносного сосуда отделена от аневризмы по ее геометрической границе «фибриновой ножкой». В артериолах обнаружен также эффект слоеного роста фибрина с периодическим изменением плотности у стенки аневризмы, как и у авторов других работ. Решение задачи в артерии показало, что фибриновая пленка в аневризме при быстром движении крови образуется за время порядка одной секунды, что много меньше, чем первая фаза свертывания (30 секунд).

Обсуждение. Аппроксимация уравнений имеет шестой порядок погрешности во внутренних узлах и четвертый в граничных узлах. Задача решена для движения крови в аневризмах артерий при больших числах Рейнольдса (Re = 3000) и для течения крови в аневризмах артериол (Re = 3,6). Безразмерный диапазон изменения плотности фибрина вкладывается в аналогичный диапазон в работах других авторов.

Заключение. В работе предложены системы уравнений, представляющие собой простейшую нестационарную модель движения крови и образования фибрина (тромба) в аневризмах кровеносных сосудов. Предложенная модель поможет качественно выяснить причины образования тромбов в аневризмах артерий и артериол, а также в элементах медицинского оборудования.

Ключевые слова: гидродинамика, численные методы, уравнения в частных производных, начально-краевая задача, математическое моделирование, аневризма

© *Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., 2025*

Для цитирования. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Нестационарная модель свертывания крови в аневризмах кровеносных сосудов. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(4):22–37. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-4-22-37

Original Empirical Research

Unsteady Model of Blood Coagulation in Aneurysms of Blood Vessels

Natalya K. Volosova[1], Konstantin A. Volosov[2], Aleksandra K. Volosova[2], Mikhail I. Karlov[3], Dmitriy F. Pastukhov[4] ✉, Yuriy F. Pastukhov[4]

[1] MGTU named after. N.E. Bauman, Moscow, Russian Federation

[2] Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation

[3] Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russian Federation

[4] Polotsk State University named after Euphrosyne of Polotsk, Novopolotsk, Republic of Belarus

✉ dmitrij.pastuhov@mail.ru

Abstract

Introduction. A two-dimensional hydrodynamic problem is numerically solved in the "stream function-vorticity" formulation for an open rectangular cavity simulating blood flow and its coagulation within a vascular aneurysm. The model accounts for a simplified nonlinear mathematical description of the first phase of blood coagulation (30 seconds).

Materials and Methods. To accelerate the numerical solution of the unsteady problem with an explicit finite-difference scheme for the vorticity dynamics equation, an n-fold splitting method of the explicit scheme ($n = 100, 200$) was employed, along with the use of a symmetry plane in the rectangular aneurysm domain. The splitting method was also applied to solve the dynamic system of advection-diffusion equations with nonlinear source terms for the activator and inhibitor blood factors ($N = 70$). The maximum time step τ_0 was synchronized across both splitting cycles. The computation was performed on half of the rectangular aneurysm using a uniform 100×50 grid with equal spacing $h_1 = h_2 = 0.01$. The inverse matrix required for solving the Poisson equation in the "stream function-vorticity" formulation with a finite number of elementary operations was computed using the Msimsl library.

Results. The numerical solution demonstrated that, in arterioles (Re = 3.6), advection and diffusion of fibrin occur according to the nonlinear dynamics of activator and inhibitor factors, as if fibrin were moving counter to the blood flow. The maximum fibrin density forms in the central region of the vessel in the shape of a "fibrin horseshoe". For higher Reynolds numbers (Re = 3000) corresponding to arteries, fibrin motion occurs along the main flow, and the central part of the vessel is separated from the aneurysm by a "fibrin foot" along its geometric boundary. In arterioles, a layered fibrin growth effect was also observed, with periodic variations in fibrin density near the aneurysm wall, consistent with other authors' findings. In arteries, the fibrin film within the aneurysm forms in approximately one second — significantly shorter than the first coagulation phase (30 seconds).

Discussion. The finite-difference approximation achieves sixth-order accuracy at interior nodes and fourth-order accuracy at boundary nodes. The model was applied to simulate blood flow in arterial aneurysms at high Reynolds numbers (Re = 3000) and in arteriole aneurysms (Re = 3.6). The dimensionless range of fibrin density variation is consistent with data reported by other researchers.

Conclusions. The study proposes a system of equations representing a simplified unsteady model of blood motion and fibrin (thrombus) formation in vascular aneurysms. The proposed model provides a qualitative understanding of thrombus formation mechanisms in aneurysms of arteries and arterioles, as well as in elements of medical equipment.

Keywords: hydrodynamics, numerical methods, partial differential equations, initial-boundary value problem, mathematical modeling, aneurysm

For Citation. Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Karlov M.I., Pastukhov D.F., Pastukhov Yu.F. Unsteady Model of Blood Coagulation in Aneurysms of Blood Vessels. *Computation Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(4):22–37. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-4-22-37

Введение. В настоящей работе, являющейся продолжением работы [1], впервые моделируется двумерная гидродинамическая задача движения и свертывания крови в открытой прямоугольной аневризме-каверне в переменных «функция тока — вихрь». В работе [2] была впервые получена система из двух динамических уравнений в частных производных для диффузии факторов свертывания крови активатора и ингибитора с нелинейной правой частью для локального взаимодействия факторов. В работе [3] сравниваются различные математические модели свертывания крови без учета адвекции, более точно заданы размерные коэффициенты в системе уравнений.

В работе [4] изучена динамика образования крови и ее связь с сердечными пульсациями при небольших числах Рейнольдса. В работе [5] в российской программной среде *FlowVision* изучено движение крови в артериоле с учетом промежуточных компонентов химических реакций и с учетом изменения твердой границы кровеносного сосуда

и границы тромба показано, что небольшие тромбы образуются вблизи пореза внутри прямого сосуда и имеют фрактальную структуру. Работы [6–11] посвящены двумерным гидродинамическим задачам, свойства которых сходны со свойствами данной гидродинамической задачи. Данная работа, во-первых, включает нестационарную математическую модель свертывания крови внутри аневризмы кровеносного сосуда для артериолы Re = 3,6 и для артерии в турбулентной среде с числом Рейнольдса Re = 3000. Во-вторых, алгоритм программы в построенной модели учитывает периодическое перемешивание крови внутри аневризмы от каждой пульсационной волны.

Материалы и методы

Постановка задачи. Рассмотрим двумерную задачу движения и свертывания крови в прямоугольной аневризме-каверне, которая образуется на кровеносном сосуде. Аневризма представляет собой участок кровеносного сосуда, диаметр $2d$ которого обычно в 2 раза больше диаметра основного сосуда. Обозначим длину аневризмы L, ее диаметр $2H$, H — полуширина аневризмы (на рис. 1 показана половина симметричной модели), d — полуширина сосуда. Начало системы координат выберем в левом нижнем углу.

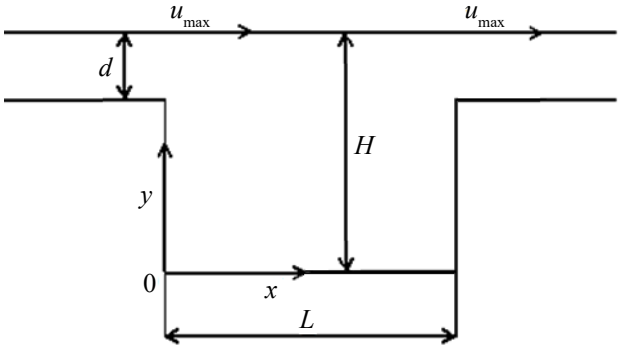


Рис. 1. Геометрия области для численно решаемой задачи

Динамическая часть задачи для движения крови в аневризме артериол (Re = 1,8) и артерий (Re = 1500) численно решена в работе [1], получены поля линий тока частиц жидкости (крови) внутри аневризмы, постановка гидродинамической задачи [1] в безразмерных переменных имеет вид:

$$\begin{cases} \overline{\psi}_{\bar{x}\bar{x}} + \overline{\psi}_{\bar{y}\bar{y}} = -\overline{w}(\bar{x},\bar{y}),\ 0 < \bar{x} = \dfrac{x}{L} < 1,\ \ 0 < \bar{y} < k_{\max}, \\ \overline{w} = \overline{v}_{\bar{x}} - \overline{u}_{\bar{y}}, \\ \overline{u} = \overline{\psi}_{\bar{y}}; \overline{v} = -\overline{\psi}_{\bar{x}}, \\ \overline{w}_{\bar{t}} + \overline{u}\cdot\overline{w}_{\bar{x}} + \overline{v}\cdot\overline{w}_{\bar{y}} = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\overline{w}_{\bar{x}\bar{x}} + \overline{w}_{\bar{y}\bar{y}}\right), 0 < \bar{t} = \dfrac{t}{T}, \\ \overline{\psi}\big|_{\Gamma 1} \equiv 0, \overline{v}\big|_{\Gamma} \equiv 0, \overline{u}\big|_{\Gamma_1} = 0, \overline{v}\big|_{\Gamma_2} = 0, \\ \psi(0,y) = \psi(L,y) = \begin{cases} 0, y \in [0, H-\Delta], \\ u_{\max} L\left(\dfrac{y}{L} + \dfrac{2}{3}\dfrac{\Delta}{L} - \dfrac{H}{L} - \dfrac{\left(y/L - H/L\right)^3}{3\left(\Delta/L\right)^2}\right), y \in [H-\Delta, H], \\ \dfrac{2}{3}u_{\max}\Delta, y = H. \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

Как и в статье [1], в данной работе используются масштабы: длины L, времени $\dfrac{L}{u_{\max}}$, скорости $u_{\max}$, функции тока $Lu_{\max}$, вихря $\dfrac{u_{\max}}{L}$, числа Рейнольдса Re. Обозначим безразмерные переменные: $\bar{x}$ — горизонтальная координата, $\bar{y}$ — вертикальная координата, $\overline{\psi}$, $\overline{w}$ — функции тока и вихря соответственно, $\left(\overline{u},\ \overline{v}\right)$ — вектор скорости, $\bar{t}$ — время. Зададим их формулами:

$$0 \le \bar{x} = \frac{x}{L} \le 1,\ \ 0 \le \bar{y} = \frac{y}{L} \le k = \frac{H}{L}, \overline{\psi} = \frac{\psi}{\psi_{\max}}, \psi_{\max} = Lu_{\max},$$

$$\overline{u} = \frac{u}{u_{\max}}, \overline{v} = \frac{v}{u_{\max}} \overline{w} = \frac{w}{w_{\max}}, w_{\max} = \frac{u_{\max}}{L},$$

$$\bar{t} = \frac{t}{T}, T = \frac{L}{u_{\max}}, \mathrm{Re} = \frac{u_{\max} L}{\nu}.$$

Кинематическая вязкость крови равна $\nu = \dfrac{\mu}{\rho} = \dfrac{3{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{Па} \cdot \text{с}}{1050\ \text{кг}/\text{м}^3} = 3{,}33(3) \cdot 10^{-6}\ \dfrac{\text{м}^2}{\text{с}}$.

В системе (1) первым записано уравнение Пуассона в переменных «функция тока — вихрь», которое имеет шестой порядок [12] аппроксимации [1]:

$$\begin{aligned}\Delta\psi = \psi_{xx} + \psi_{yy} = f(x,y) = -w \Leftrightarrow \frac{1}{h^2}\left(-\frac{10}{3}\psi_{0,0} + \frac{2}{3}\left(\psi_{-1,0} + \psi_{0,-1} + \psi_{1,0} + \psi_{0,1}\right) + \frac{1}{6}\left(\psi_{-1,-1} + \psi_{1,-1} + \psi_{-1,1} + \psi_{1,1}\right)\right) = \\ = f + \frac{h^2}{12}\left(f_{xx} + f_{yy}\right) + \frac{h^4}{360}\left(f_x^{(4)} + f_y^{(4)}\right) + \frac{h^4 f_{xxyy}^{(4)}}{90} + O\left(h^6\right) = -\left(w + \frac{h^2}{12}\left(w_{xx} + w_{yy}\right) + \frac{h^4}{360}\left(w_x^{(4)} + w_y^{(4)}\right) + \frac{h^4 w_{xxyy}^{(4)}}{90}\right) + O\left(h^6\right).\end{aligned} \tag{2}$$

Частные производные в формуле (2) также аппроксимированы в [1]. Были получены формулы для внутренних узлов функции f с индексами $n = \overline{2, n_1 - 2}, m = \overline{2, n_2 - 2}$:

$$\begin{cases} f_{xx} + f_{yy} = \dfrac{1}{h^2}\left(-5f_{0,0} + \dfrac{4}{3}\left(f_{-1,0} + f_{0,-1} + f_{1,0} + f_{0,1}\right) - \dfrac{1}{12}\left(f_{-2,0} + f_{0,-2} + f_{2,0} + f_{0,2}\right)\right) + O\left(h^4\right), \\ f_x^{(4)} + f_y^{(4)} = \dfrac{1}{h^4}\left(12f_{0,0} - 4\left(f_{-1,0} + f_{0,-1} + f_{1,0} + f_{0,1}\right) + f_{-2,0} + f_{0,-2} + f_{2,0} + f_{0,2}\right) + O\left(h^2\right), \\ f_{xxyy}^{(4)} = \dfrac{1}{h^4}\left(4f_{0,0} - 2\left(f_{-1,0} + f_{0,-1} + f_{1,0} + f_{0,1}\right) + f_{-1,-1} + f_{-1,1} + f_{1,-1} + f_{1,1}\right) + O\left(h^2\right). \end{cases} \tag{3}$$

Совместный алгоритм решения системы уравнений (1) и системы уравнений (12) состоит из 11 шагов. При этом необходимо задать начальные условия переменных величин: поле функции тока, поле скорости, поле вихря, поля ингибитора и активатора (15)–(17). Данный алгоритм отличен от алгоритма в работе [1] и представляет собой следующую последовательность действий:

1 шаг: задать краевые условия на границе прямоугольной каверны для функции тока и вертикальной компоненты скорости, которые неизменны;

2 шаг: модифицировать правую часть уравнения Пуассона для функции вихря согласно формулам (12), (13) из работы [1];

3 шаг: решить уравнение Пуассона (7)–(11) (из работы [1]), то есть найти значения функции тока во внутренних точках прямоугольной сетки;

4 шаг: по формулам (5) из [1] вычислить скорость на верхнем отрезке каверны;

5 шаг: вычислить новое поле скорости (18) из [1] на внутренних узлах сетки;

6 шаг: найти новые граничные значения вихря с помощью формул (24) из [1];

7 шаг: найти новые значения вихря уравнением (19) из [1] на внутренних узлах;

8 шаг: найти правые части для ингибитора и активатора уравнений (13);

9 шаг: решить уравнения (13) отдельно для ингибитора и отдельно для активатора методом расщепления во внутренних узлах сетки;

10 шаг: найти граничные значения ингибитора и активатора по формуле (14);

11 шаг: если физическое время кратно целому числу пульсаций сердца, привести поля скорости, функции тока, вихря к начальным их значениям до решения задачи (17), что соответствует перемешиванию крови в аневризме пульсационной волной, генерируемой сердцем по кровеносным сосудам (поля ингибитора, активатора и фибрина сохраняются до и после пульсации).

После десятого шага перейти к первому шагу в цикле. Первым в системе уравнений (1) решается уравнение Пуассона за конечное число элементарных операций [1] и аппроксимацией с шестым порядком погрешности во внутренних точках. Вторая строка системы (1) — функция вихря, вычисляемая через координатные производные поля скорости. В третьей строке компоненты скорости вычисляются как частные производные от функции тока. Поэтому аппроксимация уравнений $\overline{w} = \overline{v}_{\overline{x}} - \overline{u}_{\overline{y}}, \overline{u} = \overline{\psi}_{\overline{y}}; \overline{v} = -\overline{\psi}_{\overline{x}}$ сводится к аппроксимации первых производных и не представляет труда. Четвертая строка (1) — уравнение динамики вихря, которое в системе уравнений (1) единственное явно зависит от времени. Слева стоит полная (конвективная) производная по времени.

В системе уравнений (1) необходимо пояснить элементы прямоугольной границы каверны. Здесь Γ_1 — объединение нижней части боковых сторон и нижнего отрезка, Γ_2 — верхний отрезок прямоугольника Γ. Обозначим через ($u(x,u)$, $v(x,y)$) вектор скорости жидкой частицы, причем на твердой границе, то есть на нижнем отрезке и нижней части боковых отрезков высотой $H–d$ прямоугольной каверны скорость равна нулю (условие прилипания частиц жидкости на границе Γ_1), поэтому функцию тока на указанной границе можно положить равной нулю.

На границе прямоугольника равна нулю вертикальная компонента скорости, горизонтальная компонента пока не задана на верхнем отрезке и равна нулю на нижнем отрезке, а на боковых сторонах описывается уравнением (4) согласно [1]:

$$\overline{u}\left(0,y\right) = \overline{u}\left(L,y\right) = \frac{u(y)}{u_{\max}} = \begin{cases} 0, y \in [0, H - \Delta] \\ \left(1 - \dfrac{\left(y - H\right)^2}{\Delta^2}\right), y \in [H - \Delta, H]. \end{cases} \tag{4}$$

На верхнем отрезке прямоугольной каверны неизвестную скорость можно найти по формулам (5) (на 4-м шаге общего описанного алгоритма [1]):

$$u(n_2,j)=\psi_y\left(n_2,j\right)=\frac{1}{\left(-h_2\right)}\left(-\frac{83711}{27720}\psi_{n_2,j}+11\psi_{n_2-1,j}-\frac{55}{2}\psi_{n_2-2,j}+55\psi_{n_2-3,j}-\frac{165}{2}\psi_{n_2-4,j}+\frac{462}{5}\psi_{n_2-5,j}-\right.$$
$$\left.-77\psi_{n_2-6,j}+\frac{330}{7}\psi_{n_2-7,j}-\frac{165}{8}\psi_{n_2-8,j}+\frac{55}{9}\psi_{n_2-9,j}-\frac{11}{10}\psi_{n_2-10,j}+\frac{1}{11}\psi_{n_2-11,j}\right)+O\left(h^{10}\right),\ j=\overline{1,n_1-1}, \tag{5.1}$$

$$u(n_2,j)=\frac{1}{\left(-h_2\right)}\left(-\frac{137}{60}\psi_{n_2,j}+5\psi_{n_2-1,j}-5\psi_{n_2-2,j}+\frac{10}{3}\psi_{n_2-3,j}-\frac{5}{4}\psi_{n_2-4,j}+\frac{1}{5}\psi_{n_2-5,j}\right)+O\left(h^4\right),\ j=\overline{1,n_1-1}. \tag{5.2}$$

Для ускорения численного задачи благодаря симметрии рассмотрим половину аневризмы и две половины прямоугольного канала, подводящего и выводящего жидкость из аневризмы. Удобно выбрать прямоугольную систему координат с равномерной сеткой $n_1\times n_2 = 100\times 50$.

Согласно проекционному принципу для двух выпуклых замкнутых контуров, вложенных друг в друга без самопересечений (допускается касание и частичное совпадение контуров), из некоторой внутренней точки можно провести луч, пересекающий каждый контур в одной точке. Тогда мы можем говорить о геометрическом проектировании одного контура на другой контур. Но можно также говорить о проекции значений физического поля с точек вешнего контура в точки внутреннего контура по правилу: передадим значение поля с точки внешнего контура в точку внутреннего контура. Например, на рис. 1 внешний контур включает левую и правую части кровеносного сосуда и прямоугольную аневризму, а внутренний контур состоит только из одной аневризмы. Можно также проектировать точки внешнего контура вдоль направления нормали на точки внутреннего контура.

Таким образом, благодаря принципу полевого проектирования, для упрощения задачи и ускорения ее решения можно качественно рассматривать задачу движения жидкости не в объемах трех тел (левая часть сосуда, аневризма, правая часть сосуда), а только задачу в аневризме. Поэтому предположим, что профиль скорости сохраняется при входе потока в прямоугольную аневризму и при выходе из нее в узкой симметричной полосе относительно плоскости $0xz$ шириной $2\Delta = 2d$, который на бесконечности описывается формулой Пуазейля (4) [1].

Интегрируя формулу (4) в интервале $y\in[H-\Delta, H]$ получим функцию тока на боковых сторонах аневризмы — последнюю формулу в системе уравнений (1) [1]. На верхнем и нижнем отрезках аневризмы и на боковых малых смежных отрезках проектирование поля скорости и функции тока не требуется.

Качественно обосновать принцип полевого проектирования можно на примере задачи обтекания идеальной жидкостью бесконечного цилиндра. Если поле скорости потока идеальной жидкости на бесконечности равно постоянной, то в диаметрально противоположных точках обтекания цилиндра потоком жидкости направление скорости не меняется, а значение скорости удваивается. При этом в точках касания и в небольших смежных областях условие непротекания жидкости через цилиндр приближенно выполняется. Аналогично на рис. 1 на плоскости симметрии направление жидкости не меняется, приближенно не меняется направление скорости на боковых отрезках входа и выхода жидкости в аневризму из кровеносного сосуда, условие непротекания жестких границ также выполняется, поэтому мы применяем принцип полевого проектирования на боковых сторонах аневризмы.

Для ускорения численного решения уравнения вихря (1) применялся метод расщепления [1, 11]. Аналитически метод n-кратного расщепления уравнения вихря для временного интервала τ_0/n можно записать в виде:

$$\frac{w^{k+((i+1)/n)}-w^{k+(i/n)}}{\tau_0/n}+u^k\cdot w_x^{k+(i/n)}+v^k\cdot w_y^{k+(i/n)}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(w_{xx}^{k+(i/n)}+w_{yy}^{k+(i/n)}\right),\ i=\overline{0,n-1}. \tag{6}$$

Система рекуррентных уравнений (6) для вихря с замороженным полем скорости $\left(u^k(x,y),v^k(x,y)\right),\ i=\overline{0,n-1}$, $k=const, k=1,2,\ldots$ состоит из n промежуточных шагов $i=\overline{0,n-1}$, верхний индекс i указывает номер промежуточного слоя времени в уравнении вихря (6), индекс k — номер кратного слоя времени в системе (6). Поля скорости и функции тока постоянны в уравнениях (6) при значениях $k = const$ и изменении индекса $i=\overline{0,n-1}$. В данной системе уравнений изменяется только поле вихря $w^{k+(i/n)}, i=\overline{0,n-1}$. Поле скорости скачком изменяется в системе (1) когда временной индекс функции вихря увеличивается на единичку от k до k+1 в системе уравнений (6).

Идея расщепления системы уравнений (6) заключается в уменьшении накопления ошибки округления и времени вычислений при ее решении. Дифференциальные операторы по координате в (6) аппроксимированы во внутренних узлах с точностью $O(h^6)$, как и все уравнения системы (1), граничные условия с точностью $O(h^4)$, а по времени с точностью $O(\tau)$.

Здесь действует недоказанное предположение, что для спектральной временной устойчивости разностных схем нужно сохранить порядок аппроксимации уравнений на границе ниже, чем порядок аппроксимаций уравнений во внутренних точках [12]. Таким образом, за время τ_0/n (связанное с уменьшением устойчивости решения из-за наличия особых точек поля скорости), решая n раз уравнение (6), получим скачок по времени τ_0 (в n раз больший, чем последовательное решение системы уравнений (1)).

Для производной w_y в (6) запишем квадратурные формулы (формулы для производной w_x аналогичны):

$$\begin{cases} w_{y(i,j)} = \frac{1}{h}\left(\frac{3}{4}\left(w_{i+1,j} - w_{i-1,j}\right) - \frac{3}{20}\left(w_{i+2,j} - w_{i-2,j}\right) + \frac{1}{60}\left(w_{i+3,j} - w_{i-3,j}\right)\right) + O\left(h^6\right), i = \overline{3, n_2 - 3}, j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{y(1,j)} = \frac{1}{h}\left(-\frac{w_{0,j}}{5} - \frac{13}{12}w_{1,j} + 2w_{2,j} - w_{3,j} + \frac{w_{4,j}}{3} - \frac{w_{5,j}}{20}\right) + O\left(h^4\right), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{y(2,j)} = \frac{1}{12h}\left(8\left(w_{3,j} - w_{1,j}\right) - \left(w_{4,j} - w_{0,j}\right)\right) + O\left(h^4\right), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{y(n_2-1,j)} = -\frac{1}{h}\left(-\frac{w_{n_2,j}}{5} - \frac{13}{12}w_{n_2-1,j} + 2w_{n_2-2,j} - w_{n_2-3,j} + \frac{w_{n_2-4,j}}{3} - \frac{w_{n_2-5,j}}{20}\right) + O\left(h^4\right), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{y(n_2-2,j)} = -\frac{1}{12h}\left(8\left(w_{n_2-3,j} - w_{n_2-1,j}\right) - \left(w_{n_2-4,j} - w_{n_2,j}\right)\right) + O\left(h^4\right), j = \overline{1, n_1 - 1}. \end{cases} \quad (7)$$

Вторые частные производные w_{yy} в (6) имеют вид:

$$\begin{cases} w_{yy(i,j)} = \frac{1}{h^2}\left(-\frac{49}{18}w_{i,j} + \frac{3}{2}\left(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}\right) - \frac{3}{20}\left(w_{i+2,j} + w_{i-2,j}\right) + \frac{1}{90}\left(w_{i+3,j} + w_{i-3,j}\right)\right) + O\left(h^6\right), i = \overline{3, n_2 - 3}, j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{yy(1,j)} = \frac{1}{h^2}\left(\frac{137}{180}w_{0,j} - \frac{49}{60}w_{1,j} - \frac{17}{12}w_{2,j} + \frac{47}{18}w_{3,j} - \frac{19}{12}w_{4,j} + \frac{31}{60}w_{5,j} - \frac{13}{180}w_{6,j}\right) + O\left(h^4\right), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{yy(2,j)} = \frac{1}{h^2}\left(-\frac{5}{2}w_{2,j} + \frac{4}{3}\left(w_{1,j} + w_{3,j}\right) - \frac{1}{12}\left(w_{0,j} + w_{4,j}\right)\right) + O\left(h^4\right), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{yy(n_2-1,j)} = \frac{1}{h^2}\left(\frac{137}{180}w_{n_2,j} - \frac{49}{60}w_{n_2-1,j} - \frac{17}{12}w_{n_2-2,j} + \frac{47}{18}w_{n_2-3,j} - \frac{19}{12}w_{n_2-4,j} + \frac{31}{60}w_{n_2-5,j} - \frac{13}{180}w_{n_2-6,j}\right) + O\left(h^4\right), j = \overline{1, n_1 - 1}, \\ w_{yy(n_2-2,j)} = \frac{1}{h^2}\left(-\frac{5}{2}w_{n_2-2,j} + \frac{4}{3}\left(w_{n_2-1,j} + w_{n_2-3,j}\right) - \frac{1}{12}\left(w_{n_2,j} + w_{n_2-4,j}\right)\right) + O\left(h^4\right), j = \overline{1, n_1 - 1}. \end{cases} \quad (8)$$

Аналогично формулам (8) записываются формулы для производной w_{xx}. Из работы [2] добавим общее краевое условие для вихря (6 шаг общего алгоритма) в открытой каверне с четвертым порядком погрешности, дважды дифференцируя последнее уравнение для функции тока в системе (1) по y:

$$w(x,y) = -\psi_{xx} - \psi_{yy} = \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{415}{72}\psi_0 - 8\psi_1 + 3\psi_2 - \frac{8}{9}\psi_3 + \frac{1}{8}\psi_4\right) - \frac{25}{6}\frac{v(0,y)}{h_1} - \psi_{yy}, v = -\psi_x, \quad (9)$$

$$m = \overline{0, n_2}, y_m = mh_2, \Delta = h_2\left(n_2 - n_3\right), 1 - \Delta = h_2 n_3,$$

$$\overline{w}_{m,0} = \begin{cases} \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{415}{72}\overline{\psi}_{m,0} - 8\overline{\psi}_{m,1} + 3\overline{\psi}_{m,2} - \frac{8}{9}\overline{\psi}_{m,3} + \frac{1}{8}\overline{\psi}_{m,4}\right) - \frac{25}{6}\frac{\overline{v}_{m,0}}{h_1} + 2\frac{\left(\overline{y_m} - H/L\right))}{\left(\Delta/L\right)^2}, m = \overline{n_3, n_2}, \\ \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{415}{72}\overline{\psi}_{m,0} - 8\overline{\psi}_{m,1} + 3\overline{\psi}_{m,2} - \frac{8}{9}\overline{\psi}_{m,3} + \frac{1}{8}\overline{\psi}_{m,4}\right) - \frac{25}{6}\frac{\overline{v}_{m,0}}{h_1}, m = \overline{0, n_3}, \textit{left}, \end{cases} \quad (10.1)$$

$$\overline{w}_{m,n_1} = \begin{cases} \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{415}{72}\overline{\psi}_{m,n_1} - 8\overline{\psi}_{m,n_1-1} + 3\overline{\psi}_{m,n_1-2} - \frac{8}{9}\overline{\psi}_{m,n_1-3} + \frac{1}{8}\overline{\psi}_{m,n_1-4}\right) + \frac{25}{6}\frac{\overline{v}_{m,n_1}}{h_1} + 2\frac{\left(\overline{y_m} - H/L\right))}{\left(\Delta/L\right)^2}, m = \overline{n_3, n_2}, \\ \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{415}{72}\overline{\psi}_{m,n_1} - 8\overline{\psi}_{m,n_1-1} + 3\overline{\psi}_{m,n_1-2} - \frac{8}{9}\overline{\psi}_{m,n_1-3} + \frac{1}{8}\overline{\psi}_{m,n_1-4}\right) + \frac{25}{6}\frac{\overline{v}_{m,n_1}}{h_1}, m = \overline{0, n_3}, \quad \textit{right}, \end{cases} \quad (10.2)$$

$$\overline{w}_{0,n} = \begin{cases} \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{415}{72}\overline{\psi}_{0,n} - 8\overline{\psi}_{1,n} + 3\overline{\psi}_{2,n} - \frac{8}{9}\overline{\psi}_{3,n} + \frac{1}{8}\overline{\psi}_{4,n}\right) + \frac{25}{6}\frac{\overline{u}_{0,n}}{h_2}, n = \overline{0, n_1}, u = \psi_y, \textit{bottom}, \\ \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{415}{72}\overline{\psi}_{n_2,n} - 8\overline{\psi}_{n_2-1,n} + 3\overline{\psi}_{n_2-2,n} - \frac{8}{9}\overline{\psi}_{n_2-3,n} + \frac{1}{8}\overline{\psi}_{n_2-4,n}\right) - \frac{25}{6}\frac{\overline{u}_{n_2,n}}{h_2}, n = \overline{0, n_1}, \textit{top}. \end{cases} \quad (10.3)$$

При выводе краевого уравнения (9) для функции вихря удалены производные функции тока выше второго порядка, что заметно повышает устойчивость краевых разностных условий типа (9), (10) для поля скорости с разрывами первого рода. В таблице 1 приведена классификация кровеносных сосудов по числу Рейнольдса и по их диаметру.

Опыт показывает [1], что для физически быстрого решения задачи (1) в артериолах и в артериях нужно выбрать инерционный интервал времени $T = \frac{L}{u_{\max}}$, а для решения гидродинамической задачи — систему (1).

Таблица 1

Классификация кровеносных сосудов

Тип	Диаметр	Скорость крови	Число Re	Система уравнений
Капилляры	(5–10) мкм	(0,5–1,0) мм/с	0,00075–0,003	–
Артериолы	(10–100) мкм	(0,5–10,0) см/с	0,015–3,000	(1), (13)
Артерии	(2–10) мм	(10,0–50,0) см/с	60–1500	(1), (13)
Аорта	(2–3) см	0,5 м/с	3000	(1), (13)

Рассмотрим простейшую математическую модель образования фибрина, учитывающую изменение концентрации двух метаболитов — активатора процесса свертывания тромбина s и ингибитора z, замедляющего свертывание крови:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial t}+u\dfrac{\partial s}{\partial x}+v\dfrac{\partial s}{\partial y}=D\left(s_{xx}+s_{yy}\right)+\dfrac{\alpha s^2}{s+s_0}-k_1 s-\gamma s z, \\ \dfrac{\partial z}{\partial t}+u\dfrac{\partial z}{\partial x}+v\dfrac{\partial z}{\partial y}=D\left(z_{xx}+z_{yy}\right)+\beta s\left(1-\dfrac{z}{c}\right)\left(1+\dfrac{z^2}{z_0^2}\right)-k_2 z. \end{cases} \tag{11}$$

Здесь u, v — компоненты скорости; коэффициенты α, β, k_1, γ, D, c, v_0, k_2 — размерные, а их численные значения взяты из работы [3, стр. 16].

Таблица 2

Размерные коэффициенты в системе уравнений (11)

α, мин$^{-1}$	β, мин$^{-1}$	$\dfrac{\gamma}{мин\cdot нМ}$	$v_0(z_0)$, нМ	c, нМ	$u_0(s_0)$, нМ	k_1, мин$^{-1}$	k_2, мин$^{-1}$
2,0	0,0015	5,0	0,0525	5,0	2,95	0,05	0,35

Коэффициенты диффузии тромбина и ингибитора будем считать равными $D = 10^{-11}$ м^2/с [2, стр. 99]. Вычислим скорость диффузии тромбина и ингибитора по формуле $v = 2\sqrt{\alpha D} = 2\sqrt{10^{-11}2/60} = 1{,}155\cdot 10^{-6}$ м/с. Эта скорость значительно меньше скорости крови в артериоле (3 мм/с) и скорости крови в артерии (50 *см/с*), что объясняет использование адвективных слагаемых в левой части системы уравнений (11). Преобразуем уравнения (11):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{s}}{T\partial \bar{t}}+\dfrac{u_{\max}}{L}\bar{u}\dfrac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{x}}+\dfrac{u_{\max}}{L}\bar{v}\dfrac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{y}}=\dfrac{D}{L^2}\left(\bar{s}_{\bar{x}\bar{x}}+\bar{s}_{\bar{y}\bar{y}}\right)+\dfrac{\alpha \bar{s}^2}{\bar{s}+1}-k_1\bar{s}-\gamma \bar{s}\bar{z}z_0, \\ \dfrac{\partial \bar{z}}{T\partial \bar{t}}+\dfrac{u_{\max}}{L}\bar{u}\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{x}}+\dfrac{u_{\max}}{L}\bar{v}\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{y}}=\dfrac{D}{L^2}\left(\bar{z}_{\bar{x}\bar{x}}+\bar{z}_{\bar{y}\bar{y}}\right)+\dfrac{s_0}{z_0}\beta\bar{s}\left(1-\dfrac{z_0\bar{z}}{c}\right)\left(1+\bar{z}^2\right)-k_2\bar{z}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{t}}+\bar{u}\dfrac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{x}}+\bar{v}\dfrac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{y}}=\dfrac{D}{Lu_{\max}}\left(\bar{s}_{\bar{x}\bar{x}}+\bar{s}_{\bar{y}\bar{y}}\right)+\dfrac{L}{u_{\max}}\left(\dfrac{\alpha \bar{s}^2}{\bar{s}+1}-k_1\bar{s}-\gamma \bar{s}\bar{z}z_0\right), \\ \dfrac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{t}}+\bar{u}\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{x}}+\bar{v}\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{y}}=\dfrac{D}{Lu_{\max}}\left(\bar{z}_{\bar{x}\bar{x}}+\bar{z}_{\bar{y}\bar{y}}\right)+\dfrac{L}{u_{\max}}\left(\dfrac{s_0}{z_0}\beta\bar{s}\left(1-\dfrac{z_0\bar{z}}{c}\right)\left(1+\bar{z}^2\right)-k_2\bar{z}\right), \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{t}}+\bar{u}\dfrac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{x}}+\bar{v}\dfrac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{y}}=\dfrac{D}{\nu \mathrm{Re}}\left(\bar{s}_{\bar{x}\bar{x}}+\bar{s}_{\bar{y}\bar{y}}\right)+\dfrac{L}{u_{\max}}\left(\dfrac{\alpha \bar{s}^2}{\bar{s}+1}-k_1\bar{s}-\gamma \bar{s}\bar{z}z_0\right), \\ \dfrac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{t}}+\bar{u}\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{x}}+\bar{v}\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{y}}=\dfrac{D}{\nu \mathrm{Re}}\left(\bar{z}_{\bar{x}\bar{x}}+\bar{z}_{\bar{y}\bar{y}}\right)+\dfrac{L}{u_{\max}}\left(\dfrac{s_0}{z_0}\beta\bar{s}\left(1-\dfrac{z_0\bar{z}}{c}\right)\left(1+\bar{z}^2\right)-k_2\bar{z}\right), \\ \dfrac{d\bar{\varphi}}{d\bar{t}}=\bar{s}(\bar{t}). \end{cases} \tag{12}$$

Последним уравнением в системе (12) является уравнение роста тромбина $\bar{\varphi}(\bar{t})$ интегрированием активатора $\bar{s}(\bar{t})$ по безразмерному времени $\bar{t}$. Из работ [2–5] следует, что активатор $\bar{s}(\bar{t})$, ингибитор $\bar{z}(\bar{t})$, тромбин $\bar{\varphi}(\bar{t})$ принимают только неотрицательные величины, что использовалось авторами в программе.

Для артериолы [5] диаметр равен $2d$ = 2 мм, вязкость крови $\eta = 3{,}5\cdot 10^{-3}$ Па·с, кинематическая вязкость крови $\nu = \dfrac{\mu}{\rho} = \dfrac{3{,}5\cdot 10^{-3}\,\text{Па}\cdot\text{с}}{1050\,\text{кг}/\text{м}^3} = 3{,}33(3)\cdot 10^{-6}\,\dfrac{\text{м}^2}{\text{с}}$. Скорость крови [5] $u_{\max}$ = 3 мм/с в аневризме диаметром $L \approx 4d$ = 4 мм.

Тогда число Рейнольдса равно $\mathrm{Re}=\dfrac{u_{\max}L}{\nu}=\dfrac{3\cdot10^{-3}\cdot4\cdot10^{-3}}{3{,}33(3)\cdot10^{-6}}=3{,}6$. Введем обозначения $\bar{s}=s/s_0$, $\bar{z}=z/z_0$, и найдем безразмерные коэффициенты:

$$\frac{D}{\nu\,\mathrm{Re}}=\frac{10^{-11}}{3{,}33(3)\cdot10^{-6}\cdot3{,}6}=8{,}33(3)\cdot10^{-7},\ z_0/C=0{,}0525/5=1{,}05\cdot10^{-2},$$

$$\alpha\frac{L}{u_{\max}}=\frac{2\cdot4\cdot10^{-3}}{60\cdot3\cdot10^{-3}}=0{,}044(4),\ k_1\frac{L}{u_{\max}}=\frac{0{,}05\cdot4\cdot10^{-3}}{60\cdot3\cdot10^{-3}}=0{,}0011(1),$$

$$\frac{L\gamma}{u_{\max}}z_0=\frac{4\cdot10^{-3}}{3\cdot10^{-3}}\cdot\frac{5}{60}\cdot0{,}0525=0{,}005833(3),\ k_2\frac{L}{u_{\max}}=\frac{0{,}35\cdot4\cdot10^{-3}}{60\cdot3\cdot10^{-3}}=0{,}0077(7),$$

$$\frac{L\beta}{u_{\max}}\frac{s_0}{z_0}=\frac{4\cdot10^{-3}}{3\cdot10^{-3}}\cdot\frac{0{,}0015}{60}\cdot\frac{2.95}{0{,}0525}=0{,}00187301587301(587301).$$

Обозначим правые части в уравнениях динамики для ингибитора и активатора в системе уравнений (12) и получим метод расщепления [11] с кратностью расщепления N:

$$F_{\bar{s}}\left(\bar{t}=\tau_0\left(k+(i/N)\right),\bar{x},\bar{y}\right)=\frac{D}{\nu\,\mathrm{Re}}\left(\bar{s}_{\bar{x}\bar{x}}+\bar{s}_{\bar{y}\bar{y}}\right)+\frac{L}{u_{\max}}\left(\frac{\alpha\bar{s}^{2}}{\bar{s}+1}-k_1\bar{s}-\gamma\bar{s}\bar{z}z_0\right),$$

$$F_{\bar{z}}\left(\bar{t}=\tau_0\left(k+(i/N)\right),\bar{x},\bar{y}\right)=\frac{D}{\nu\,\mathrm{Re}}\left(\bar{z}_{\bar{x}\bar{x}}+\bar{z}_{\bar{y}\bar{y}}\right)+\frac{L}{u_{\max}}\left(\frac{s_0}{z_0}\beta\bar{s}\left(1-\frac{z_0\bar{z}}{c}\right)\left(1+\bar{z}^{2}\right)-k_2\bar{z}\right),$$

$$\begin{cases}\dfrac{\bar{s}^{-k+((i+1)/N)}-\bar{s}^{-k+(i/N)}}{\tau_0/N}+u^k\cdot\bar{s}_x^{-k+(i/N)}+v^k\cdot\bar{s}_y^{-k+(i/N)}=F_{\bar{s}}\left(\bar{t}=\tau_0\left(k+(i/N)\right),\bar{x},\bar{y}\right),\\ \dfrac{\bar{z}^{-k+((i+1)/N)}-\bar{z}^{-k+(i/N)}}{\tau_0/N}+u^k\cdot\bar{z}_x^{-k+(i/N)}+v^k\cdot\bar{z}_y^{-k+(i/N)}=F_{\bar{z}}\left(\bar{t}=\tau_0\left(k+(i/N)\right),\bar{x},\bar{y}\right),i=\overline{0,N-1},\ k=0,1,2,\ldots.\end{cases}\tag{13}$$

Кратность расщепления $N=70$ в системе (13) для ингибитора и активатора отличается от кратности $n=200$ расщепления уравнения вихря (6). Необходимо только согласовать по времени системы (6), (13) так, чтобы после окончания работы обоих циклов подпрограмм приращение их безразмерного времени совпало, то есть равнялось τ_0.

Если граничные условия для ингибитора и активатора на твердой стенке заданы для случая непротекания (например, на дне каверны), то из формулы (5.1) получим формулу (14.1) с одиннадцатым порядком погрешности:

$$\begin{aligned}0=\bar{s}_y(0,j)=\frac{1}{(-h_2)}\Bigg(&-\frac{83711}{27720}\bar{s}_{0,j}+11\bar{s}_{1,j}-\frac{55}{2}\bar{s}_{2,j}+55\bar{s}_{3,j}-\frac{165}{2}\bar{s}_{4,j}+\frac{462}{5}\bar{s}_{5,j}-\\&-77\bar{s}_{6,j}+\frac{330}{7}\bar{s}_{7,j}-\frac{165}{8}\bar{s}_{8,j}+\frac{55}{9}\bar{s}_{9,j}-\frac{11}{10}\bar{s}_{10,j}+\frac{1}{11}\bar{s}_{11,j}\Bigg)+O\left(h^{10}\right),\ j=\overline{1,n_1-1}\Leftrightarrow\\ \bar{s}_{0,j}=\frac{27720}{83711}\Bigg(&11\bar{s}_{1,j}-\frac{55}{2}\bar{s}_{2,j}+55\bar{s}_{3,j}-\frac{165}{2}\bar{s}_{4,j}+\frac{462}{5}\bar{s}_{5,j}-\\&-77\bar{s}_{6,j}+\frac{330}{7}\bar{s}_{7,j}-\frac{165}{8}\bar{s}_{8,j}+\frac{55}{9}\bar{s}_{9,j}-\frac{11}{10}\bar{s}_{10,j}+\frac{1}{11}\bar{s}_{11,j}\Bigg)+O\left(h^{11}\right),\ j=\overline{1,n_1-1}.\end{aligned}\tag{14.1}$$

Получим аналогичную формулу (14.2) с пятым порядком погрешности:

$$\bar{s}_{0,j}=\frac{60}{137}\left(5\bar{s}_{1,j}-5\bar{s}_{2,j}+\frac{10}{3}\bar{s}_{3,j}-\frac{5}{4}\bar{s}_{4,j}+\frac{1}{5}\bar{s}_{5,j}\right)+O\left(h^{5}\right),\ j=\overline{1,n_1-1}.\tag{14.2}$$

Инициализация задачи. Начальные значения для поля ингибитора и активатора зададим, как и в работе А.И. Лобанова [3], в виде ступеньки для активатора. Эти начальные условия были использованы в системах уравнений (1), (13) с решениями, представленными ниже на рис. 2–7:

$$\begin{cases}\bar{z}_{i,j}(t=0)=0,\forall i=\overline{0,n_2},\ j=\overline{0,n_1},\\ \bar{s}_{i,j}(t=0)=\begin{cases}1,\forall i=\overline{0,n_2},\ j=\overline{0,n_1/2},\\ 0,\forall i=\overline{0,n_2},\ j=\overline{n_1/2,n_1}.\end{cases}\end{cases}\tag{15}$$

Примем также, что краевые условия для активатора и ингибитора на прямоугольной границе каверны — аневризмы представляют собой однородное условие Дирихле

$$\bar{s}\big|_{\Gamma/\Gamma_2}=0,\bar{z}\big|_{\Gamma/\Gamma_2}=0.\tag{16}$$

Начальное поле скорости: вертикальная компонента скорости $v_{i,j}(t=0)$ отсутствует, а горизонтальная $u_{i,j}(t=0)$ имеет вид распределения Пуазейля (4):

$$\begin{cases} v_{i,j}(t=0)=0, \forall i=\overline{0,n_2}, j=\overline{0,n_1}, \\ u_{i,j}(t=0)=\begin{cases} \left(1-\left(\dfrac{\overline{y_i}-\overline{H}}{\overline{\Delta}}\right)^2\right), \overline{H}-\overline{\Delta}=h_2 n_3 \le \overline{y_i} \le \overline{H}=h_2 n_2, \overline{y_i}=i\cdot h_2, i=\overline{n_3,n_2}, \\ 0, i=\overline{0,n_3}. \end{cases} \end{cases} \quad (17)$$

Из работы [5] выберем диаметр артериолы $2d = 2$ мм и скорость крови $u = 3$ мм/с. Диаметр аневризмы и ее длина в 2 раза больше $2D = L = 4$ мм. Расчет дает число Рейнольдса $\mathrm{Re}=\dfrac{u_{\max}L}{\nu}=\dfrac{3\cdot10^{-3}\cdot4\cdot10^{-3}}{3{,}333\cdot10^{-6}}=3{,}6$. Время движения частицы жидкости $T=\dfrac{L}{u_{\max}}=\dfrac{4\cdot10^{-3}}{3\cdot10^{-3}}=1{,}33(3)\ c$ вдоль аневризмы превышает период сердечных пульсаций (1 секунду), поэтому за время $T = 1{,}33(3)$ с возможны две сердечных пульсации и дважды механическое перемешивание крови внутри аневризмы стенками сосуда.

Были выбраны однородные нулевые краевые условия для ингибитора и активатора на стенках каверны исходя из того, что их концентрация в удаленных точках от аневризмы равна нулю. На верхнем отрезке каверны для активатора и ингибитора использовалась формула (14.2), так как мы ищем симметричные решения для всех неизвестных полей. Уравнения (12) имеют тривиальное решение $\overline{s}(\overline{t})=\overline{z}(\overline{t})\equiv 0$. Как показано в работе [3], тривиальные решения $\overline{s}(\overline{t})=\overline{z}(\overline{t})\equiv 0$ устойчивы, если значения ингибитора и активатора меньше пороговых значений $\overline{s}(\overline{t})<s_0, \overline{z}(\overline{t})<z_0$. Этот факт также объясняет выбор однородных нулевых граничных условий.

Начальное поле фибрина $\overline{\varphi}(\overline{t})$ в (12) (интеграл по времени от поля активатора) в момент $T = 1{,}33(3)$ с продемонстрировано на рис. 2.

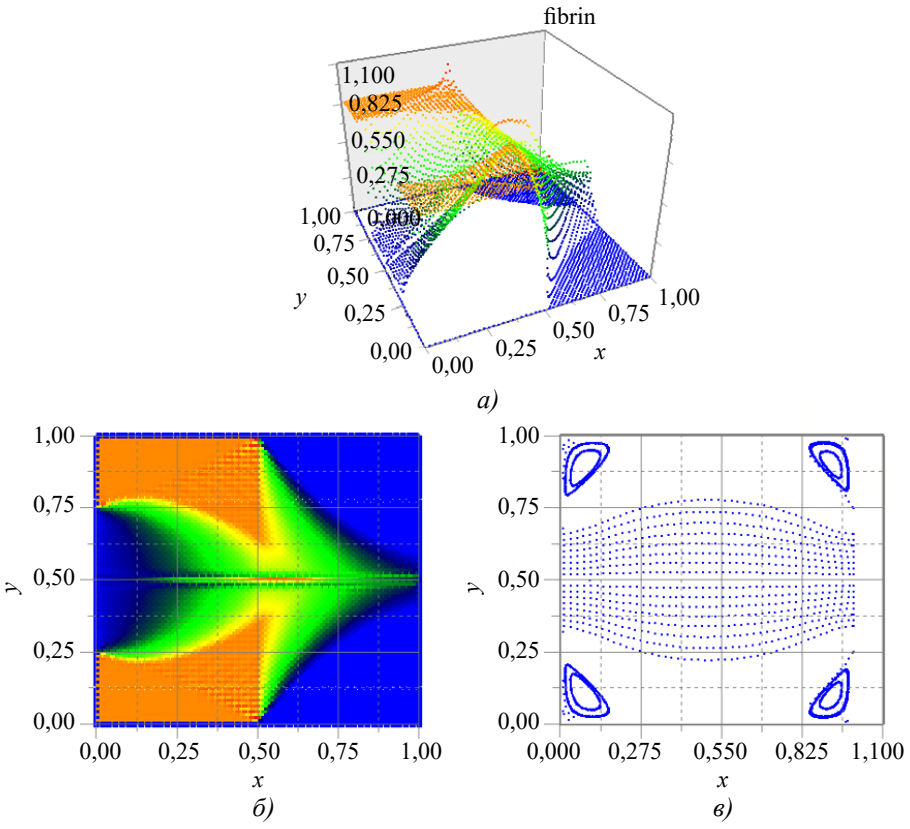


Рис. 2. Поля величин в артериоле с применением (14.2) в момент $T = 1{,}33(3)$ с, $\mathrm{Re} = 3{,}6$, $n_1 \times n_2 = 100\times50$, $\Delta / H = 0{,}5$; $L = 4$ мм, $2H = 4$ мм, $u_{\max} = 3$ мм/с, $\tau=\dfrac{6}{16}h_1^2$, $m = 53000$ шагов, кратности расщепления $n = 200$ в (6), $N = 70$ в (13): *а* — поверхность фибрина; *б* — распределение фибрина в аневризме; *в* — поле линий тока в аневризме

Из рис. 2 следует, что даже на начальной стадии образования фибрина заметно его перемещение — транспорт вдоль тока крови и диффузия согласно системе уравнений (13).

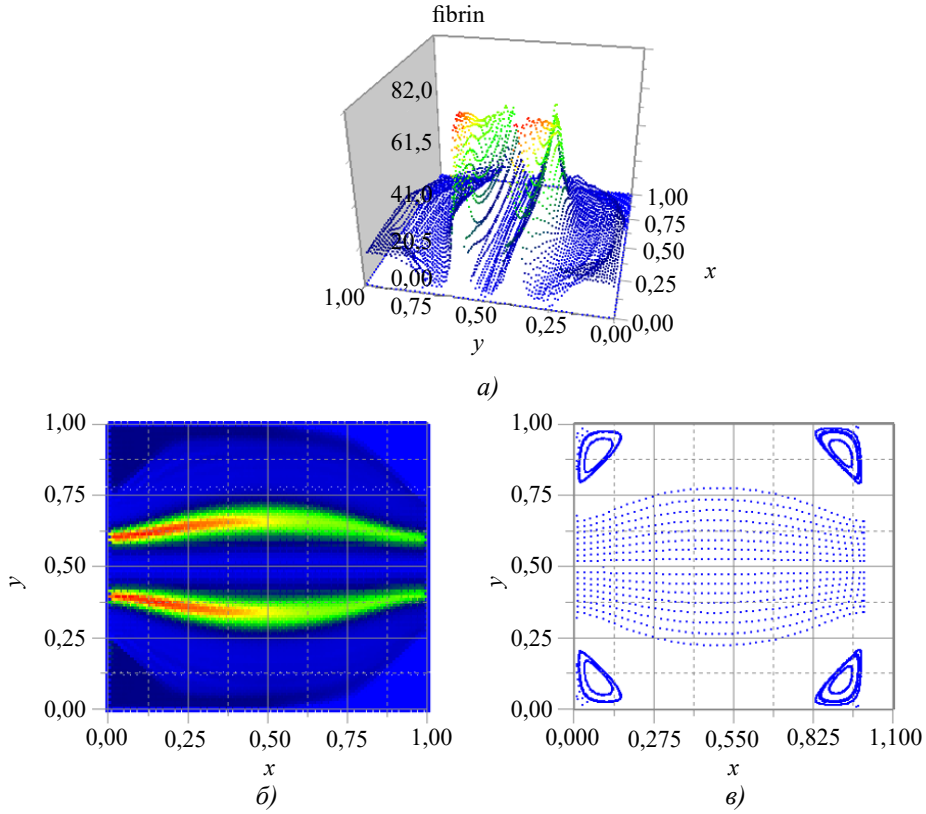


Рис. 3. Поля величин в артериоле с применением (14.2) в момент $T = 20$ с, $\mathrm{Re} = 3{,}6$, $n_1 \times n_2 = 100 \times 50$, $\Delta / H = 0{,}5$; $L = 4$ мм, $2H = 4$ мм, $u_{\max} = 3$ мм/с, $\tau = \frac{6}{16} h_1^2$, $m = 800000$ шагов, кратности расщепления $n = 200$ в (6), $N = 70$ в (13): *а* — поверхность фибрина; *б* — распределение фибрина в аневризме; *в* — поле линий тока в аневризме

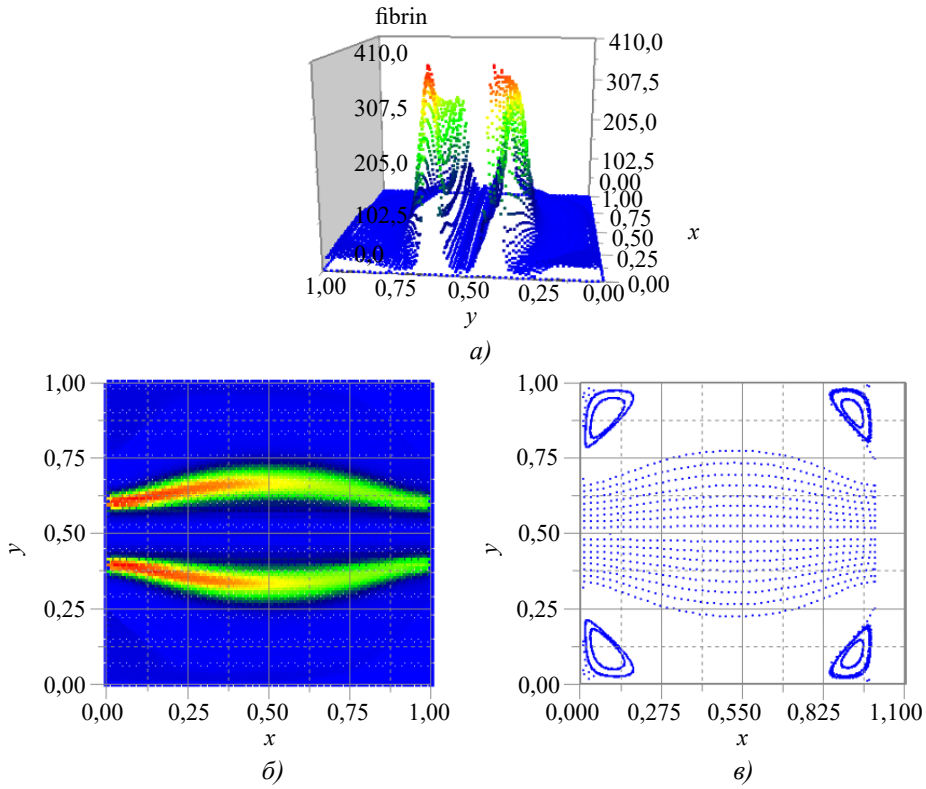


Рис. 4. Поля величин в артериоле с применением (14.2) в момент $T = 26$ с, $\mathrm{Re} = 3{,}6$, $n_1 \times n_2 = 100 \times 50$, $\Delta / H = 0{,}5$; $L = 4$ мм, $2H = 4$ мм, $u_{\max} = 3$ мм/с, $\tau = \frac{6}{16} h_1^2$, $m = 1200000$ шагов, кратности расщепления $n = 200$ в (6), $N = 70$ в (13): *а* — поверхность фибрина; *б* — распределение фибрина в аневризме; *в* — поле линий тока в аневризме

Рис. 4 завершает графическое решение образования тромба в аневризме артериолы в конце первой фазы (30 секунд). Из таблицы 1 выберем диаметр артерии $2d = 1$ см и скорость крови $u = 0{,}5$ м/с. Диаметр аневризмы и ее длина в 2 раза больше $2H = L = 2$ см. Рассчитаем число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{u_{\max} L}{\nu} = \frac{0{,}5 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{3{,}33(3) \cdot 10^{-6}} = 3000$. Время движения частицы жидкости $T = \frac{L}{u_{\max}} = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{0{,}5} = 0{,}04$ с вдоль аневризмы меньше периода сердечных пульсаций (1 секунда), поэтому за время $T = 0{,}04$ с возможна только одна сердечная пульсация с перемешиванием крови в аневризме, причем с малой вероятностью.

Начальное поле фибрина $\varphi(t)$ в (12) (интеграл по времени от поля активатора) в момент $T = 0{,}04$ с продемонстрировано на рис. 5.

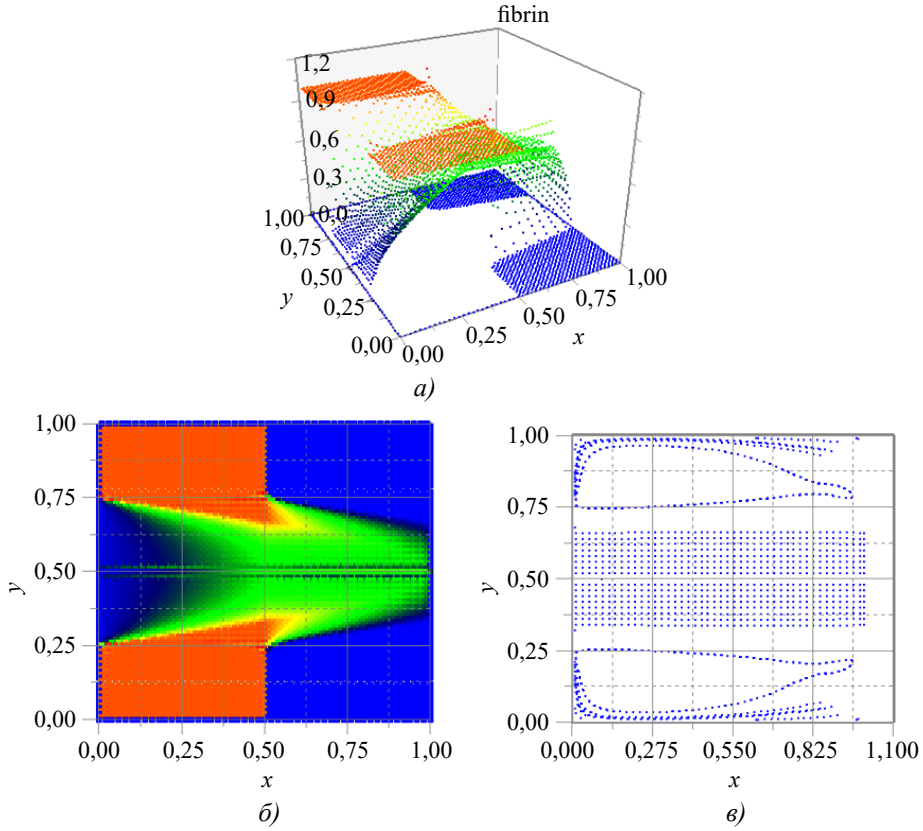


Рис. 5. Поля величин в артерии с применением (14.2) в момент $T = 0{,}04$ с,

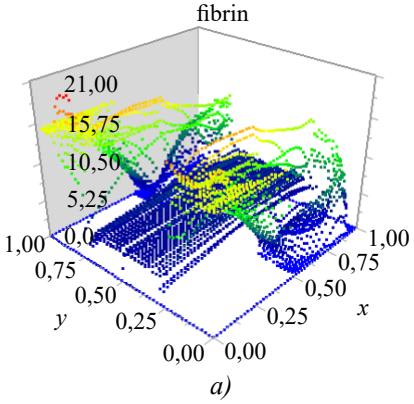
$\mathrm{Re} = 3000$, $n_1 \times n_2 = 100 \times 50$, $\Delta / H = 0{,}5$; $L = 2$ см, $2H = 2$ см, $u_{\max} = 0{,}5$ м/с, $\tau = \frac{6}{16} h_1^2$, $m = 53000$ шагов,

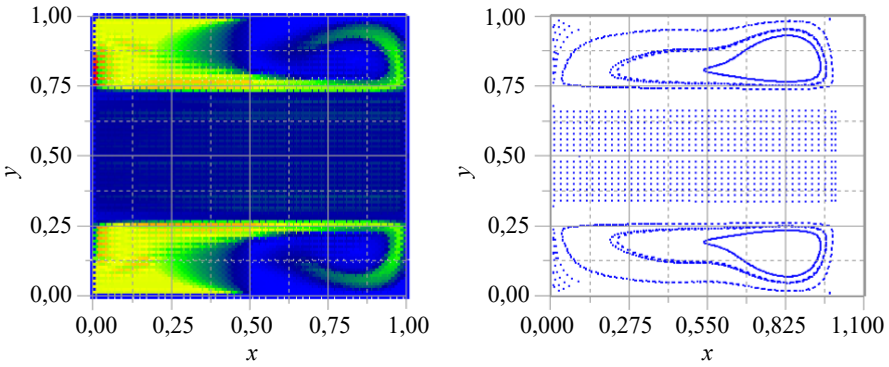
кратности расщепления $n = 200$ в (6), $N = 70$ в (13):

а — поверхность фибрина; *б* — распределение фибрина в аневризме;

в — поле линий тока в аневризме

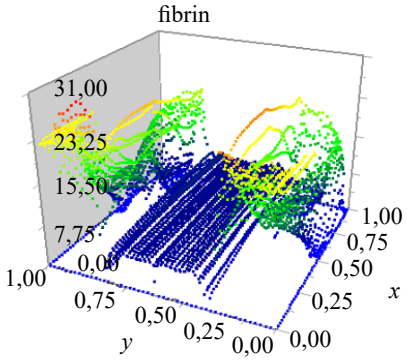
По сравнению с рис. 2*б* на рис. 5*б* транспорт активатора выражен более явно, чем диффузия активатора. На рис. 6*б* видно движение фибрина вдоль потока и его закручивание у правого отрезка каверны с образованием «фибриновой ножки». Таким образом, образуется пленка фибрина у геометрической границы каверны, блокирующая доступ кислорода к стенкам каверны, образуя застой крови внутри аневризмы.



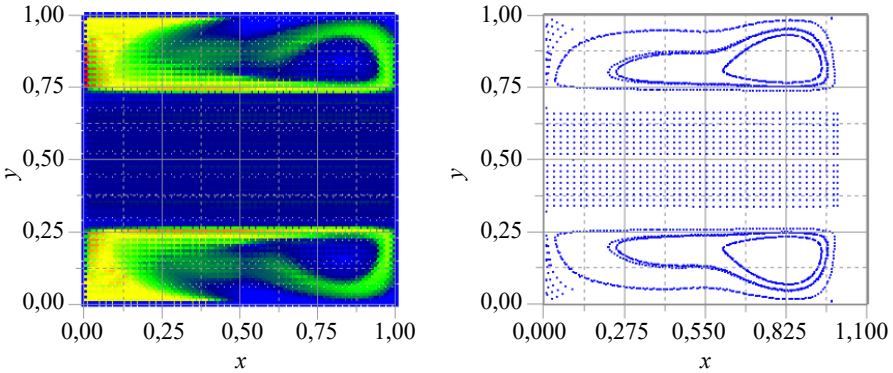


б) *в)*

Рис. 6. Поля величин в артерии с применением (14.2) в момент $T = 0{,}6$ с,
$\mathrm{Re} = 3000$, $n_1 \times n_2 = 100 \times 50$, $\Delta / H = 0{,}5$; $L = 2$ см, $2H = 2$ см, $u_{\max} = 0{,}5$ м/с, $\tau = \frac{6}{16} h_1^2$, $m = 800000$ шагов,
кратности расщепления $n = 200$ в (6), $N = 70$ в (13): *а* — поверхность фибрина;
б — распределение фибрина в аневризме; *в* — поле линий тока в аневризме



а)



б) *в)*

Рис. 7. Поля величин в артерии с применением (14.2) в момент $T = 0{,}9$ с,
$\mathrm{Re} = 3000$, $n_1 \times n_2 = 100 \times 50$, $\Delta / H = 0{,}5$; $L = 2$ см, $2H = 2$ см, $u_{\max} = 0{,}5$ м/с, $\tau = \frac{6}{16} h_1^2$, $m = 1200000$ шагов,
кратности расщепления $n = 200$ в (1), $N = 70$ в (13): *а* — поверхность фибрина;
б — распределение фибрина в аневризме; *в* — поле линий тока в аневризме

Качественно рис. 6 и 7 похожи, кроме того, «фибриновая ножка» на рис. 6*б* уже превратилась в «фибриновый бублик» на рис. 7*б*. Рис. 6, 7 демонстрируют, что в турбулентной среде каждая нить фибрина быстро меняет значение даже вдоль своей длины, подобно разбросанным волосам в ветровом потоке.

Рассмотрим периодическую структуру фибрина в артериоле у стенки аневризмы в момент $t = 10$ с после начала свертывания крови на рис. 8.

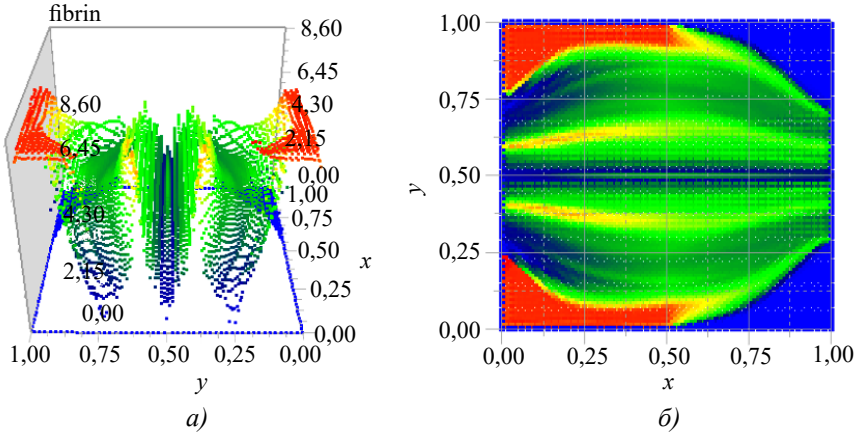


Рис. 8. Поле фибрина в артериоле с применением (14.2) в момент $T = 10$ с,
$\mathrm{Re} = 3{,}8$, $n_1 \times n_2 = 100 \times 50$, $\Delta / H = 0{,}5$; $L = 4$ мм, $2H = 4$ мм, $u_{\max} = 3$ мм/с, $\tau = \frac{6}{16} h_1^2$, $m = 400000$ шагов,
кратности расщепления $n = 200$ в (6), $N = 70$ в (13):
а — поверхность фибрина; *б* — распределение фибрина в аневризме

На рис. 8*а*, 8*б* видно, что фибрин движется вдоль стенки аневризмы тонким слоем против потока крови (со скоростью $u_{\max} = 3$ мм/с), делает поворот у дальней стенки (возможно, крепится к дальней стенке), возвращается к ближней стенке, образуя «фибриновую подкову» с максимальной плотностью фибрина вне области аневризмы. То есть, «фибриновая подкова» растет в объеме потока и против движения потока. На рис. 8*б* также видна структура с периодическим пространственным изменением плотности фибрина у стенки аневризмы. На рис. 3*б*, 4*б* у подковы в центре аневризмы артериолы максимальная плотность фибрина (красным цветом) достигается у левой стенки, что подтверждает рост фибрина противоположно направлению движения крови.

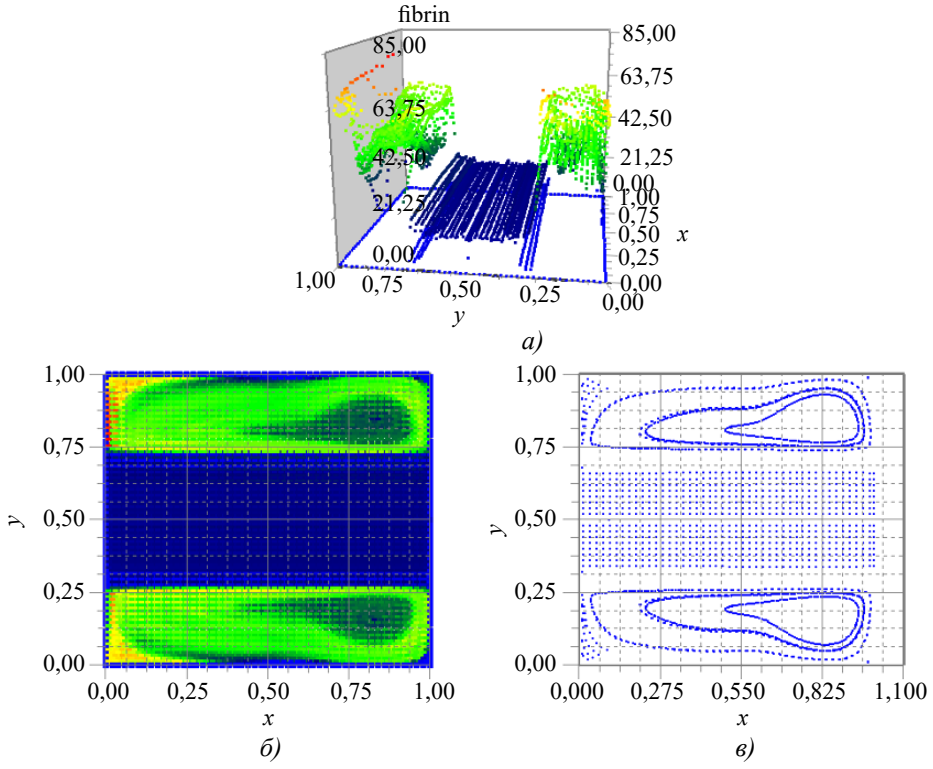


Рис. 9. Поля величин в артерии с применением (14.2) в момент $T = 2{,}54$ с
$\mathrm{Re} = 3000$, $n_1 \times n_2 = 100 \times 50$, $\Delta / H = 0{,}5$; $L = 2$ см, $2H = 2$ см, $u_{\max} = 0{,}5$ м/с, $\tau = \frac{6}{16} h_1^2$, $m = 3387700$ шагов,
кратности расщепления $n = 200$ в (1), $N = 70$ в (13):
а — поверхность фибрина; *б* — распределение фибрина в аневризме; *в* — поле линий тока в аневризме

На рисунке 9*б* в момент 2.54 с в объеме аневризмы образуется однородный тромб по всему ее объему (по сравнению с рисунком 7*б*) с максимальным значением безразмерной плотности 85 единиц. Также важен вопрос о

пороговой плотности фибрина, когда его плотность можно считать твердым телом и непроницаемым для потока крови. Кровь в этом случае должна обтекать сверхплотные сгустки фибрина. Важно также получить экспериментальную зависимость вязкости крови от плотности безразмерного фибрина для учета зависимости в системах уравнений (1), (12).

Обсуждение

1. В начальной фазе (рис. 2*б*, 5*б*) фибрин образуется в области превышения порога активатора и с помощью адвекции и диффузии перемещается в остальные части аневризмы.

2. В начальной фазе в артериолах при $t = 1{,}333$ с (рис. 2*а*, 2*б*) максимальное значение фибрина (красные тона) наблюдается вблизи стенок аневризмы. Но в момент $t = 20$ с (рис. 3*а*, 3*б*) отмечается появление «фибриновой подковы» с максимальными значениями фибрина в центре потока, где его значения в 2 раза больше, чем у стенки.

3. В артериях при большой скорости крови (Re = 3000) фибрин концентрируется внутри аневризмы, отделяя ее границы от потока крови «фибриновой ножкой» (рис. 6*б*).

4. Благодаря нелинейным слагаемым в системах уравнений (12), (13) в артериолах (Re = 3,6) движение фибрина происходит против потока (рис. 3*б*), а в артериях (Re = 3000) — сонаправленно потоку крови (рис. 6*б*).

5. На рис. 8*а*, 8*б* у стенки аневризмы с небольшой скоростью крови обнаружена пространственная структура с периодическим изменением плотности фибрина. Результат согласуется с работами [2–4], решения которых могут иметь слоистый фибрин в неподвижной крови.

6. На рис. 3*б* и 6*б* видно, что даже в плоскости симметрии аневризмы, где плотность фибрина наименьшая (синие тона), значение ее больше нуля. Отсюда следует, что наличие аневризмы приводит как минимум к сгущению крови, к увеличению вязкости во всех элементах аневризмы, хотя и не в каждой точке образуются твердый фибрин.

7. Диапазон изменения безразмерного фибрина в данной работе имеет такой же порядок, как и в работах [2–4], то есть от 50 до 750 безразмерных единиц (в наших примерах меньше 500 безразмерных единиц).

8. Увеличение диаметра аневризмы в 2 раза по сравнению с диаметром сосуда приводит к увеличению числа Рейнольдса (Re = 3000 в артерии) и, как видно из рис. 6 и 7, образуется точка возврата на линии тока вблизи ядра вихря. Таким образом, наличие аневризмы приводит к разрывам поля скорости и к увеличению вихревого поля в области точки возврата.

Заключение. В работе предложены системы уравнений (1), (12), (13) с условиями (14), (15), (16), (17), представляющие собой простейшую нестационарную модель движения крови и образования фибрина (тромба) в аневризмах кровеносных сосудов. Предложенная модель поможет качественно выяснить причины образования тромбов в аневризмах артерий и артериол, а также в элементах медицинского оборудования.

Список литературы / References

1. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Моделирование циркуляции в аневризмах кровеносных сосудов. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(3):30–43. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-30-43

Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Karlov M.I., Pastukhov D.F., Pastukhov Yu.F. Modelling circulation in the aneurysms of blood vessels. *Computation Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(3):30–43. (In Russ.) https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-30-43

2. Атаулаханов Ф.И., Гурия Г.Т., Сорочкина А.Ю. Пространственные аспекты динамики свёртывания крови. Феноменологическая модель. *Биофизика*. 1994;39(1):97–106.

Ataulakhanov F.I., Guria G.T., Sorochkina A.Yu. Spatial aspects of the dynamics of blood coagulation. Phenomenological model. *Biophysics*. 1994;39(1):97−106. (In Russ.)

3. Лобанов А.И., Сторожилова Т.К., Зарницына В.И., Атауллаханов Ф.И. Сравнение двух математических моделей для описания пространственной динамики процесса свертывания крови. *Математическое моделирование*. 2003;15(1):14–28.

Lobanov A.I., Storozhilova T.K., Zarnitsyna V.I., Ataullakhanov F.I. Comparison of two mathematical models to describe the spatial dynamics of the blood coagulation process. *Mathematical modeling*. 2003;15(1):14−28. (In Russ.)

4. Волосов К.А., Вдовина Е.К., Пугина Л.В. Моделирование «пульсирующих» режимов динамики свёртывания крови. *Математическое моделирование*. 2014;26(12):14–32.

Volosov K.A., Vdovina E.K., Pugina L.V. Modeling of “pulsatile” modes of blood coagulation dynamics. *Math modeling*. 2014;26(12):14–32. (In Russ.)

5. Калугина М.Д., Лимарева М.Ю., Лобанов А.И. Нестационарные модели роста тромбоцитарного тромба. *Российский журнал биомеханики*. 2024;26(4):179–188. https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2024.4.15

Kalugina M.D., Limareva M.Yu., Lobanov A.I. Non-stacionary models of growth of platelet thrombus. *Russian Biomechanics Jornal.* 2024;26(4):179–188. (In Russ.) https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2024.4.15

6. Петров А.Г. Высокоточные численные схемы решения плоских краевых задач для полигармонического уравнения и их применение к задачам гидродинамики. Прикладная математика и механика. 2023;87(3):343–368. https://doi.org/10.31857/S0032823523030128

Petrov A.G. High-precision numerical schemes for solving plane boundary value problems for a polyharmonic equation and their application to problems of hydrodynamics. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2023;87(3):343–368. (In Russ.) https://doi.org/10.31857/S0032823523030128

7. Сухинов А.И., Колгунова О.В., Гирмай М.З., Нахом О.С. Двумерная гидродинамическая модель прибрежных систем, учитывающая испарение. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):9–21. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-9-21

Sukhinov A.I., Kolgunova O.V., Girmai M.Z., Nakhom O.S. A two -dimensional hydrodynamic model of coastal systems, taking into account evaporation. *Computation Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):9–21. (In Russ.) https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-9-21

8. Ершова Т.Я. Краевая задача для дифференциального уравнения третьего порядка с сильным пограничным слоем. *Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика*. 2020;1:30–39. https://doi.org/10.3103/S0278641920010057

Ershova T.Ya. Boundary value problem for a third-order differential equation with a strong boundary layer. *Bulletin of Moscow University. Episode 15: Computational mathematics and cybernetics*. 2020;1:30–39. (In Russ.) https://doi.org/10.3103/S0278641920010057

9. Ситникова М.А., Скульский О.И. Течение моментной анизотропной жидкости в тонких слоях. *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2015;28(1):56–62.

Sitnikova M.A., Skulsky O.I. Flow of momentary anisotropic fluid in thin layers. *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2015;28(1):56–62. (In Russ.)

10. Сидорякина В.В., Соломаха Д.А. Симметризованные варианты методов Зейделя и верхней релаксации решения двумерных разностных задач эллиптического типа. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):12–19. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-12-19

Sidoryakina V.V., Solomaha D.A. Symmetrized versions of the Seidel and upper relaxation methods for solving two-dimensional difference problems of elliptic. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(3):12–19. (In Russ.) https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-3-12-19

11. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. *N*-кратное расщепление явной разностной схемы для уравнения вихря в вязкой несжимаемой жидкости. *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2023;63(4):12–21. https://doi.org/10.17072/1993-0550-2023-4-12-21

Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Karlov M.I., Pastuhov D.F., Pastuhov Yu.F. The *N*-fold distribution of the obvious variable scheme for the equalization of the vortex in the viscous incompatible fluid. Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics. 2023; 63(4):12–21. (In Russ.) https://doi.org/10.17072/1993-0550-2023-4-12-21

12. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы: учебное пособие для студентов физико-математических специальностей высших учебных заведений.* Москва: Бином. Лаборатория знаний; 2011. 636 с.

Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Numerical methods: a textbook for students of physics and mathematics specialties of higher educational institutions.* Binom. lab. Knowledge; 2011. 636 p. (In Russ.)

Об авторах:

Наталья Константиновна Волосова, аспирант Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана (105005, Российская Федерация, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, стр. 1), ORCID, navalosova@yandex.ru

Константин Александрович Волосов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Российская Федерация, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9), ORCID, SPIN-код, konstantinvolosov@yandex.ru

Александра Константиновна Волосова, кандидат физико-математических наук, начальник аналитического отдела ООО «Трамплин» Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Российская Федерация, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9), ORCID, SPIN-код, alya01@yandex.ru

Михаил Иванович Карлов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Московского физико-технического института (141701, ГСП-4, Российская Федерация, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9), SPIN-код, karlov.mipt@gmail.com

Дмитрий Феликсович Пастухов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), ORCID, SPIN-код, dmitrij.pastuhov@mail.ru

Юрий Феликсович Пастухов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), ORCID, SPIN-код, pulsar1900@mail.ru

Заявленный вклад авторов:

Н.К. Волосова: постановка задачи; написание черновика рукописи; формулировка идей исследования, целей и задач; разработка программного обеспечения.

К.А. Волосов: научное руководство; разработка методологии.

А.К. Волосова: перевод; изучение истории задачи; поиск литературы.

М.И. Карлов: формальный анализ.

Д.Ф. Пастухов: визуализация; валидация.

Ю.Ф. Пастухов: тестирование существующих компонентов кода.

Конфликт интересов: **авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Natalya K. Volosova, Post-graduate Student of Bauman Moscow State Technical University (2nd Baumanskaya St. 5–1, Moscow, 105005, Russian Federation), ORCID, navalosova@yandex.ru

Konstantin A. Volosov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics of the Russian University of Transport (Obraztsova St. 9–9, Moscow, GSP-4, 127994, Russian Federation), ORCID, SPIN-code, konstantinvolosov@yandex.ru

Aleksandra K. Volosova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Chief Analytical Department “Tramplin” LLC, Russian University of Transport (Obraztsova St. 9–9, Moscow, GSP-4, 127994, Russian Federation), ORCID, SPIN-code, alya01@yandex.ru

Mikhail I. Karlov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (9, Institutsky Lane, GSP-4, Dolgoprudny, 141701, Russian Federation), SPIN-code, karlov.mipt@gmail.com

Dmitriy F. Pastukhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (Blokhin St. 29, Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), ORCID, SPIN-code, dmitrij.pastuhov@mail.ru

Yuriy F. Pastukhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences,Associate Professor of Polotsk State University (Blokhin St. 29, Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), ORCID, SPIN-code, pulsar1900@mail.ru

Contributions of the authors:

N.K. Volosova: ideas; formulation or evolution of overarching research goals and aims; writing – original draft preparation; software.

K.A. Volosov: supervision; methodology.

A.K. Volosova: translation; study of the history of the task; literature.

M.I. Karlov: formal analysis.

D.F. Pastukhov: visualization; validation.

Yu.F. Pastukhov: testing of existing code components.

Conflict of Interest Statement: **the authors declare no conflict of interest.**

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 27.08.2025
Поступила после рецензирования / Reviewed 25.09.2025
Принята к публикации / Accepted 21.10.2025

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
MATHEMATICAL MODELLING

CC BY

Check for updates

УДК 519.6

Оригинальное эмпирическое исследование

https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-4-38-45

Математическое моделирование подъема взвеси ветровыми порывами

В.В. Сидорякина ✉, **А.Е. Чистяков**
Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация
✉ cvv9@mail.ru

Аннотация

Введение. Изучение процесса подъема взвеси (например, частиц пыли, песка, почвы и др.) ветровыми порывами в приземном слое направлено на фундаментальное понимание механизмов ветровой эрозии, возникновения пыльных бурь, переноса загрязняющих веществ и др. Эта область научных исследований имеет важное практическое значение для борьбы с опустыниванием, эрозией, засухой, а также для повышения урожайности и сохранения природных экосистем. Прогнозирование данных процессов позволяет оценивать и своевременно реагировать на негативные эффекты, связанные с данными процессами. Цель настоящей работы — предложить и реализовать математическую модель, которая позволит проводить численные эксперименты с различными сценариями подъема взвеси ветровыми порывами.

Материалы и методы. В работе представлена непрерывная математическая модель движения многокомпонентной воздушной среды в приземном слое атмосферы, которая учитывает такие факторы, как турбулентное перемешивание, переменную плотность, силу Архимеда, тангенциальное напряжение на границах раздела сред и др. Отличительной особенностью математической модели является присутствие в воздушной среде частиц взвеси (их состава и агрегатного состояния), а также влияние техногенных факторов — источников взвеси. Подход, основанный на математическом моделировании, призван обеспечить универсальность численной реализации.

Результаты исследования. Математическая модель реализована в виде комплекса программ. Проведены численные эксперименты, моделирующие подъем взвеси ветровыми порывами в расчетных областях.

Обсуждение. Результаты данной работы могут быть востребованы для широкого круга задач, связанных с охраной здоровья человека, экологической безопасностью и планированием природопользования в засушливых и степных регионах страны.

Заключение. Дальнейшие исследования авторов могут быть направлены на моделирование движения воздушного потока, содержащего пыль, для природных ландшафтов, содержащих лесонасаждения.

Ключевые слова: ветровой порыв, взвешенное вещество, турбулентное перемешивание, аэродинамика, математическая модель, численный эксперимент

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–11–00295–П. https://rscf.ru/project/22-11-00295/

Для цитирования. Сидорякина В.В., Чистяков А.Е. Математическое моделирование подъема взвеси ветровыми порывами. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025; 9(4):38–45. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-4-38-45

Original Empirical Research

Mathematical Modelling of Suspension Uplift by Wind Gusts

Valentina V. Sidoryakina ✉, **Alexander E. Chistyakov**
Don State Technical University, 1, Gagarin Square, Rostov-on-Don, Russian Federation
✉ cvv9@mail.ru

Abstract

Introduction. The study of suspension uplift processes (e. g., particles of dust, sand, soil, etc.) by wind gusts in the surface layer is aimed at fundamentally understanding the mechanisms of wind erosion, dust storm formation, pollutant transport, and related phenomena. This area of scientific research has significant practical importance for combating desertification,

© *Сидорякина В.В., Чистяков А.Е., 2025*

erosion, drought, as well as for increasing crop yields and preserving natural ecosystems. Predicting these processes allows for the assessment and timely response to negative effects associated with them. The objective of this work is to propose and implement a mathematical model that enables numerical experiments with various scenarios of suspension uplift by wind gusts.
Materials and Methods. The paper presents a continuous mathematical model of multicomponent air medium motion in the atmospheric surface layer. The model accounts for factors such as turbulent mixing, variable density, Archimedes' force, tangential stress at media interfaces, etc. A distinctive feature of the mathematical model is the presence of suspension particles (their composition and aggregate state) in the air medium, as well as the influence of anthropogenic factors — suspension sources. The approach based on mathematical modelling aims to ensure the universality of the numerical implementation.
Results. The mathematical model has been implemented as a software package. Numerical experiments simulating the uplift of suspension by wind gusts in computational domains have been conducted.
Discussion. The results of this work can be in demand for a wide range of tasks related to human health protection, environmental safety, and land-use planning in arid and steppe regions of the country.
Conclusion. Further research by the authors may be directed towards modelling the movement of dust-laden air flows for natural landscapes containing forest plantations.

Keywords: wind gust, suspended matter, turbulent mixing, aerodynamics, mathematical model, numerical experiment

Funding. The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 22–11–00295–П. https://rscf.ru/en/project/22-11-00295/

For Citation. Sidoryakina V.V., Chistyakov A.E. Mathematical Modelling of Suspension Uplift by Wind Gusts. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(4):38–45. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-4-38-45

Введение. Подъем пыли, песка и других взвешенных частиц в нижних слоях атмосферы ветровыми порывами представляет собой сложный физический процесс, который зависит от силы ветра (особенно порывов), турбулентности атмосферы, физических характеристик частиц, шероховатости и влажности почвы, наличия растительного покрова и др. Достигая критической (пороговой) скорости ветер может «подхватывать» пыле-песчаные частицы и частицы мелкозема и переносить их на большие расстояния, тем самым разрушая верхний плодородный слой почвы и вызывая ветровую эрозию. Одно из ярких проявлений ветровой эрозии связывают с образованием пыльных бурь. Пыльные бури совместно с сильными ветрами на юге России (преимущественно в Ростовской, Волгоградской и Астраханской областях, Краснодарском и Ставропольском краях), вызваны сочетанием следующих факторов: сильная жара, которая высушивает почву; усиление ветров до 12–15 м/с, которые поднимают и переносят частицы пыли и песка; огромные массивы распаханных земель, не укрытых растительностью. Сезонно пылевые бури приходят в начале весны и в начале осени (наибольшая их интенсивность наблюдается во второй половине года, приходящейся на сентябрь и октябрь), что связано с малым количеством атмосферных осадков, потерей почвой влаги и высокой степенью распаханности земель. Главной и долгосрочной причиной является исчезновение защитных лесополос, которые могли бы сдерживать ветер, а также приток горячих воздушных масс из соседних пустынных регионов, таких как Калмыкия. Здесь в зонах с полупустынными и пустынными ландшафтами создаются условия для переноса пыле-песчаного и аэрозольного материла в соседние регионы. Масштаб и цикличность данных явлений выросли в последние годы. В связи с этим приобретает актуальность прогнозирование процессов движения воздушных масс, содержащих частицы пыли и мелкодисперсного песка, выявление областей с высоким риском ветровой эрозии. В связи с этим интересен и полезен опыт российских и зарубежных исследователей и их команд, применявших как фундаментальные физические модели (Эйлера-Лагранжа, дискретной фазы — DPM), так и современные программные комплексы (ANSYS Fluent, COMSOL и др.) [1–5]. Подавляющее большинство исследований фокусируется на конкретных регионах и территориях, что связано со специфическими метеорологическими условиями, локальными данными о рельефе и типе почв, уникальными источниками пыли и др. Для Юга России исследования, посвященные данной тематике, отражены в работах ученых Южного математического института Владикавказского научного центра РАН, Южного федерального университета, Донского государственного технического университета и др. [6–10]. Авторами предложена к рассмотрению математическая модель, которая позволит проводить численные эксперименты с различными сценариями движения воздушного потока, содержащего пыль. В работе сделан акцент на моделировании турбулентности воздушного потока, обусловленной структурой ветра, способствующей подъему с земной поверхности частиц взвешенного вещества и являющегося основной причиной образования пыльных бурь. Математическая модель реализована в виде комплекса программ. Проведены численные эксперименты, моделирующие ветровые порывы в нижних слоях атмосферы с подъемом и переносом взвеси восходящими турбулентными потоками в расчетных областях.

Материалы и методы

Математическая модель распространения взвеси в приземном слое атмосферы. Авторами рассматривается комплексная математическая модель, описывающая процессы движения воздушной среды и распространения в ней взвеси, включающая [9, 10]:

– модель движения многокомпонентной воздушной среды (определяет поле скоростей воздушной среды), учитывающая турбулентный обмен, переменную плотность, зависимость плотности воздушной среды от давления;

– модель распространения взвеси в воздушной среде, учитывающая переход воды из жидкого в газообразное состояние и наоборот, транспорт вещества;

– модель расчета давления, учитывающая сжимаемость среды, источники взвеси, связанные с переходом воды из жидкого состояния в газообразное и обратно, а также турбулентное перемешивание многокомпонентной воздушной среды.

Сформулируем уравнения модели движения многокомпонентной воздушной среды в системе координат $Ox_1x_2x_3$:

– уравнение движения (уравнение Навье-Стокса):

$$\frac{dv_j}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j} + div\left(\mu grad\left(v_j\right)\right) - g_i; \tag{1}$$

– уравнение транспорта вещества:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho\vec{v}\right) = div\left(\mu grad\left(\rho\right)\right) + I_\rho; \tag{2}$$

– уравнение состояния:

$$P = \sum_i \frac{\rho_i}{M_i} RT; \tag{3}$$

– уравнение транспорта примеси:

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = div\left(\mu grad\left(\varphi_i\right)\right) + I_\varphi; \tag{4}$$

– уравнение модели турбулентности:

$$v_{SGS} = \left(C_S\Delta\right)^2 S. \tag{5}$$

В уравнениях (1–5) использованы следующие обозначения: t — временная переменная; v_j ($j = 1, 2, 3$) — компоненты вектора скорости воздушной среды $\vec{v}$; p — давление; μ — коэффициент турбулентного обмена; ρ — плотность воздушной среды; ρ_i — плотность i-ой фазы (i = 0 — воздух, 1 — вода в газообразном состоянии, 2 — газ на источнике, 3 — вода в жидком состоянии, 4 — сажа); φ_i — объемные доли i-ой фазы; g_i — ускорение свободного падения, соответствующее i-ой фазе; I — функция, описывающая распределение и мощность источников взвесей; R — универсальная газовая постоянная, M — молярная масса, T — температура газовой фазы.

С целью упрощения вычислительных расчетов для дискретных аналогов уравнений модели, осуществляется переход от 3D к 2D уравнениям. Рассмотрим 3D уравнение диффузии-конвекции-реакции:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho v_1\right)}{\partial x_1} + \frac{\partial\left(\rho v_2\right)}{\partial x_2} + \frac{\partial\left(\rho v_3\right)}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mu\frac{\partial\rho}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\mu\frac{\partial\rho}{\partial x_3}\right) + I_\rho. \tag{6}$$

Уравнение (6) дополняется соответствующими граничными условиями [9].

В результате преобразований получим:

$$\varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\left(\varepsilon\rho v_1\right)}{\partial x_1} + \frac{\partial\left(\varepsilon\rho v_3\right)}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu\varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\mu\varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial x_3}\right) - \frac{\tau}{\rho}\Bigg|_{x_2(a)}^{x_2(b)} + \varepsilon I_\rho, \tag{7}$$

где ε — параметр, описывающий относительную величину объема расчетной области, свободной от растений.

Двумерная математическая модель аэродинамики приземного слоя атмосферы. Пусть далее $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, а для компонент вектора скорости воздушной среды $\vec{v}$ — $v_1 = u$, $v_2 = v$, $v_3 = w$.

Рассмотрим основные уравнения динамики воздушной среды:

– система уравнений Навье-Стокса:

$$\begin{aligned} \varepsilon u'_t + u\varepsilon u'_x + v\varepsilon u'_z &= -\frac{1}{\rho}\left(\varepsilon P\right)'_x + \left(\mu\varepsilon u'_x\right)'_x + \left(\mu\varepsilon u'_z\right)'_z + \varepsilon f_x, \\ \varepsilon w'_t + u\varepsilon w'_x + w\varepsilon w'_z &= -\frac{1}{\rho}\left(\varepsilon P\right)'_z + \left(\mu\varepsilon v'_x\right)'_x + \left(\mu\varepsilon w'_z\right)'_z + \varepsilon f_z; \end{aligned} \tag{8}$$

– уравнение неразрывности:

$$\varepsilon\rho'_t + \left(\varepsilon\rho u\right)'_x + \left(\varepsilon\rho w\right)'_z = \left(\varepsilon\mu\rho'_x\right)'_x + \left(\varepsilon\mu\rho'_z\right)'_z + \varepsilon I_\rho; \tag{9}$$

– уравнение состояния:

$$P = \sum_i \frac{\rho_i}{M_i} RT, \tag{10}$$

где ε — параметр, описывающий относительную величину объема моделируемой области, свободной от растений.

Предположив, что воздушная среда находится в состоянии покоя, начальные условия будут иметь вид:

$$u = 0,\ w = 0,\ P = P_a,$$

где $\vec{v} = \{u, w\}$, P_a — атмосферное давление.

Система уравнений (9), (10) рассматривается при следующих граничных условиях:

– на непроницаемой границе:

$$\rho_w \eta u_n' = \tau_{x,b}(t),\ \rho_w \eta v_n' = \tau_{z,b}(t),\ \overline{V}_n = 0, P_n' = 0,\ P_n' = 0;$$

– на боковых проницаемых границах:

$$u_n' = 0,\ w_n' = 0,\ P_n' = 0;$$

– на источнике:

$$u = U,\ w = W,\ P_n' = 0,$$

где P — давление; U, W — компоненты вектора скорости на источнике; τ_x, τ_z — составляющие касательного тангенциального напряжения.

Схемы расщепления по физическим процессам для решения задач аэродинамики. Согласно методу поправки к давлению, исходная модель гидродинамики разбивается на три подзадачи [11–14].

Первая подзадача представлена уравнением диффузии-конвекции-реакции, на основе которого рассчитываются компоненты поля скорости на промежуточном слое по времени:

$$\begin{aligned} \varepsilon\frac{\tilde{u}-u}{h_t} + u\varepsilon\overline{u}_x' + w\varepsilon\overline{u}_z' &= \left(\mu\varepsilon\overline{u}_x'\right)_x' + \left(\mu\varepsilon\overline{u}_z'\right)_z', \\ \varepsilon\frac{\tilde{w}-w}{h_t} + u\varepsilon\overline{w}_x' + w\varepsilon\overline{w}_z' &= \left(\mu\varepsilon\overline{w}_x'\right)_x' + \left(\mu\varepsilon\overline{w}_z'\right)_z'. \end{aligned} \tag{11}$$

Для аппроксимации по временной переменной уравнения диффузии-конвекции-реакции использованы схемы с весами. Здесь $\overline{u} = \sigma\tilde{u} + (1-\sigma)u$; $\sigma \in [0,1]$ — вес схемы.

Опишем граничные условия системы (11):

– на непроницаемой границе:

$$\rho_w \eta u_n' = \tau_{x,b}(t),\ \rho_w \eta v_n' = \tau_{z,b}(t);$$

– на боковых проницаемых границах:

$$u_n' = 0,\ w_n' = 0;$$

– на источнике:

$$u = U,\ w = W,\ P_n' = 0.$$

Вторая подзадача позволяет рассчитать распределение давлений

$$\left(\varepsilon P_x'\right)_x' + \left(\varepsilon P_z'\right)_z' = \varepsilon\frac{\hat{\rho}-\rho}{h_t^2} + \frac{\left(\overline{\rho}\varepsilon\tilde{u}\right)_x'}{h_t} + \frac{\left(\overline{\rho}\varepsilon\tilde{w}\right)_z'}{h_t}$$

или

$$\varepsilon\frac{\hat{P}-P}{h_t} + \left(\varepsilon\overline{P}\tilde{u}\right)_x' + \left(\varepsilon\overline{P}\tilde{w}\right)_z' = kh_t\left(\left(\varepsilon\overline{P}_x'\right)_x' + \left(\varepsilon\overline{P}_z'\right)_z'\right),\ k = \frac{RT}{\mathrm{M}}. \tag{12}$$

Третья подзадача позволяет по явным формулам определить распределение скоростей на верхнем временном слое

$$\varepsilon\frac{\hat{u}-\tilde{u}}{h_t} = -\frac{1}{\rho}\left(\varepsilon\overline{P}\right)_x',\ \varepsilon\frac{\hat{w}-\tilde{w}}{h_t} = -\frac{1}{\rho}\left(\varepsilon\overline{P}\right)_z', \tag{13}$$

где h_t — шаг по временной координате; u — значение поля скорости на предыдущем слое по времени; $\tilde{u}$ — значение поля скорости на промежуточном слое по времени; $\hat{u}$ — на текущем слое по времени.

Умножим систему уравнений (13) на произведение $h_t\rho$ и продифференцируем по переменным *x, y, z* соответственно, в результате чего получим

$$\left(\varepsilon\rho\hat{u}\right)_x' = \left(\varepsilon\rho\tilde{u}\right)_x' - \varepsilon h_t P_{xx}'',\ \left(\varepsilon\rho\hat{w}\right)_z' = \left(\varepsilon\rho\tilde{w}\right)_z' - \varepsilon h_t P_{zz}''. \tag{14}$$

Используем выражения (14) для преобразования уравнения (9). Получим:

$$\varepsilon\rho_t' + \left(\varepsilon\rho\tilde{u}\right)_x' - \varepsilon h_t P_{xx}'' + \left(\varepsilon\rho\tilde{w}\right)_z' - \varepsilon h_t P_{zz}'' = \left(\varepsilon\mu\rho_x'\right)_x' + \left(\varepsilon\mu\rho_z'\right)_z' + \varepsilon I_\rho. \tag{15}$$

С учетом уравнения состояния выражение (15) примет вид:

$$\varepsilon\frac{\rho}{P}\frac{\partial P}{\partial t} = \varepsilon h_t P_{xx}'' + \varepsilon h_t P_{zz}'' - \left(\varepsilon\rho\tilde{u}\right)_x' - \left(\varepsilon\rho\tilde{w}\right)_z' + \left(\varepsilon\mu\rho_x'\right)_x' + \left(\varepsilon\mu\rho_z'\right)_z' + \varepsilon I_\rho. \tag{16}$$

На основе уравнения (16) вычисляется поле давлений. Следует отметить, что при расчете давления учитывается сжимаемость среды, тепловое расширение, источники вещества, связанные с переходом воды из жидкого состояния в газообразное и обратно, а также турбулентное перемешивание многокомпонентной воздушной среды.

Построение разностных схем, аппроксимирующих рассматриваемые уравнения (16), выполнено на гидродинамических сетках методами, описанными в работах [15, 16] и в данной статье не приводится.

Результаты исследования. На основе построенных алгоритмов был создан комплекс программ, предназначенный для численного моделирования подъема взвеси ветровыми порывами для многокомпонентной воздушной среды. Проведён ряд численных экспериментов.

На рис. 1 и 2 приведены результаты численного эксперимента по моделированию движения воздушной среды при порывах ветра. Модельная область имеет размеры 30 м×50 м. Исходными данными являются: плотность воздушной среды 1,29 кг/м^3; атмосферное давление 100 кПа; скорость ветрового порыва 10 м/с, направление ветра — слева направо. При решении задачи использованы расчетные сетки с шагом 10 метров по каждому координатному направлению. Шаг по временной переменной равен 0,1 с, расчетный временной интервал составлял 100 с.

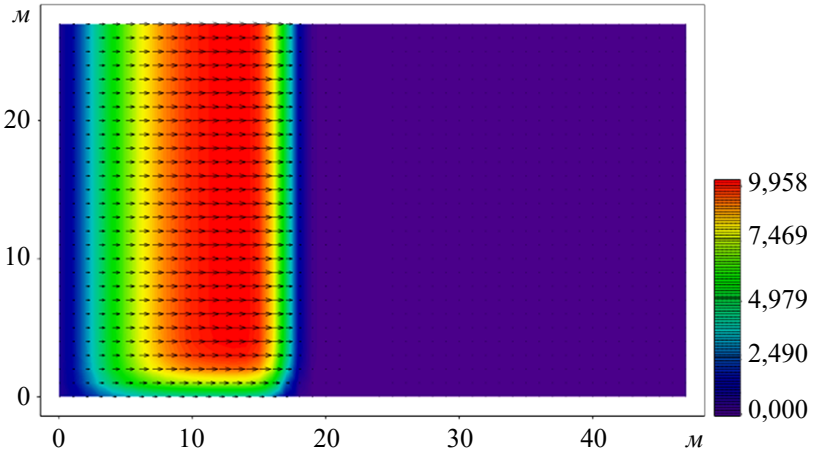


Рис. 1. Изображение начального момента моделирования при расчете скорости движения воздушной среды. Горизонтальное сечение

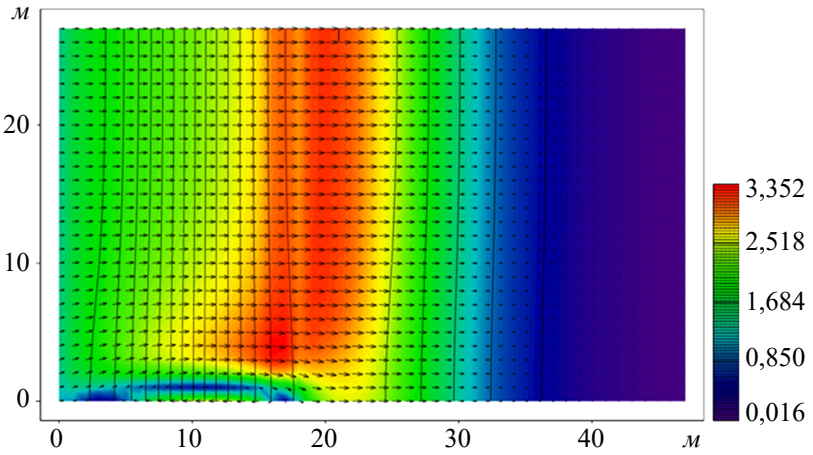


Рис. 2. Результат моделирования скорости движения воздушной среды. Горизонтальное сечение

На рис. 1 и 2 интенсивность движения воздушной среды в м/с представлена в соответствии с цветовой палитрой. Рис. 2 демонстрирует наличие вихря в левой нижней его части, что может быть связано с движением потока с разной скоростью на границе между слоями воздуха, а также с рельефом местности (часто возникают вихревые потоки из-за «отталкивания» воздушных масс от поверхности). Вихревой характер течений атмосферы наблюдается вблизи поверхности и постепенно уменьшается с высотой. Это приводит к образованию устойчивого градиента плотности. Воздушный поток в приземном слое становится устойчиво-стратифицированным и вихри ослабевают. В результате скорость потока увеличивается.

Далее представим результаты моделирования подъема взвеси при ветровых порывах. Исходными данными являются: плотность воздушной среды 1,29 кг/м^3; плотность выброса 1,4 кг/м^3; температура окружающей среды 20 °C; скорость течения воздушной среды 10 м/с; удельная мощность выброса 5 л/с. При решении модельной задачи были использованы расчетные сетки размерами 30 м × 50 м. Шаги по пространственным переменным равны 1 м, ско-

рость движения воздушной среды на левой границе задавалась равной 1 м/с. Для решения модельной задачи применены схемы с весами, при этом вес схемы задавался равным 0,5. Шаг по временной переменной равен 0,1 с, расчетный временной интервал составлял 10 с.

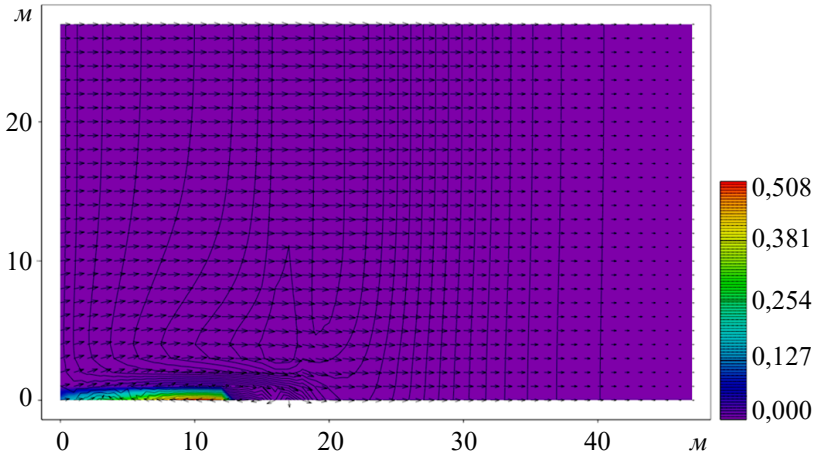


Рис. 3. Изображение начального момента моделирования
при расчете концентрации взвешенных веществ

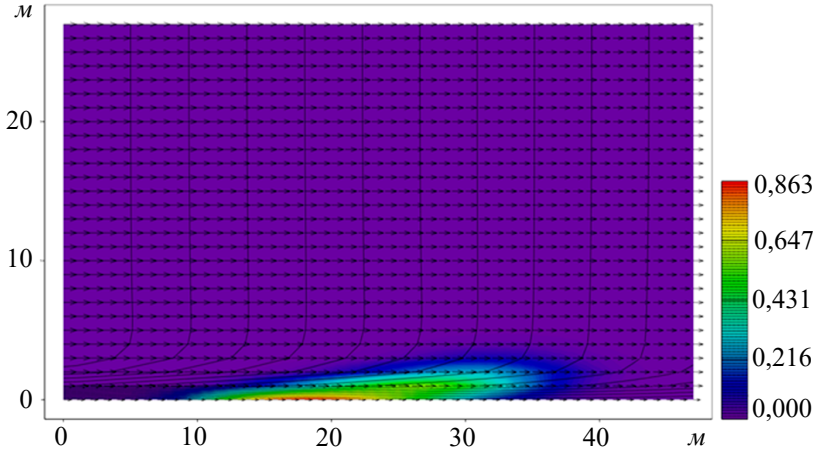


Рис. 4. Результаты моделирования при расчете концентрации взвешенных веществ
спустя 10 с после момента начала моделирования

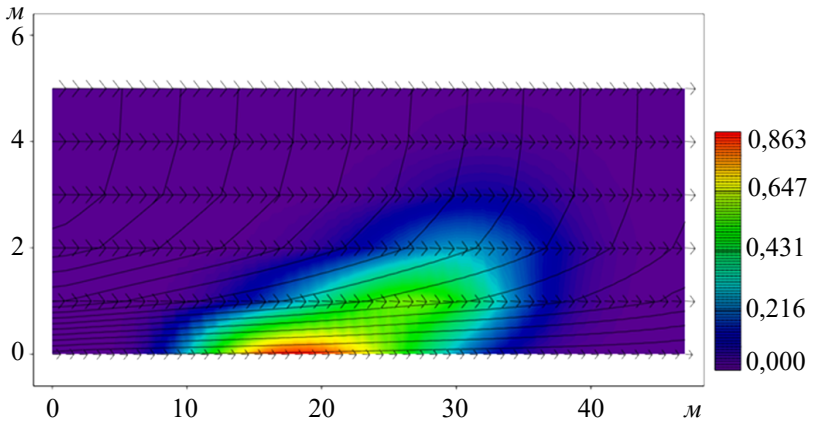


Рис. 5. Результаты моделирования при расчете концентрации взвешенных веществ
спустя 10 с после начала моделирования — укрупнение зоны распространения вещества

Цветовой палитрой на рис. 3–5 показана концентрация взвешенного вещества в приземном слое атмосферы. Результаты моделирования демонстрируют распространение примеси в направлении движения воздушной среды на десятки метров; подъем примеси произошел более чем на 5 м.

Обсуждение. Результаты данной работы могут быть востребованы для широкого круга задач, связанных с охраной здоровья человека, экологической безопасностью и планированием природопользования в засушливых и степных регионах страны.

Заключение. Дальнейшие исследования авторов могут быть направлены на моделирование движения воздушного потока, содержащего пыль, для природных ландшафтов, содержащих лесонасаждения.

Список литературы / References

1. Zhou X.H., Brandle J.R., Takle E.S., Mize C.W. Estimation of the three-dimensional aerodynamic structure of a green ash shelterbelt. *Agricultural and Forest Meteorology.* 2002;111(2):93–108. https://doi.org/10.1016/S0168-1923(02)00017-5

2. Bannister E.J., MacKenzie A.R., Cai X.-M. Realistic Forests and the Modeling of Forest-Atmosphere Exchange. *Reviews of Geophysics*. 2022;60(1):e2021RG000746. https://doi.org/10.1029/2021RG000746

3. Xu X., Yi C., Kutter E. Stably stratified canopy flow in complex terrain. *Atmospheric Chemistry and Physics*. 2015;15(13):7457–7470. https://doi.org/10.5194/acp-15-7457-2015

4. Yan C., Miao S., Liu Y., Cui G. Multiscale modeling of the atmospheric environment over a forest canopy. *Science China Earth Sciences.* 2020;63:875–890. https://doi.org/10.1007/s11430-019-9525-6

5. Zeng P., Takahashi H. A first-order closure model for the wind flow within and above vegetation canopies. *Agricultural and Forest Meteorology*. 2000;103(3):301–313. https://doi.org/10.1016/S0168-1923(00)00133-7

6. Сухинов А.И., Проценко Е.А., Чистяков А.Е., Шретер С.А. Сравнение вычислительных эффективностей явной и неявной схем для задачи транспорта наносов в прибрежных водных системах. В: *Труды международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2015)»*. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ; 2015. С. 297–307.

Sukhinov A.I., Protsenko E.A., Chistyakov A.E., Shreter S.A. Comparison of computational efficiencies of explicit and implicit schemes for the problem of sediment transport in coastal water systems. In: *Parallel computing technologies (PaVT'2015). Proceedings of the international scientific conference* (Ekaterinburg, March 31 – April 2, 2015). Editors: L.B. Sokolinsky, K.S. Pan. Chelyabinsk: Publishing center of SUSU, 2015. pp. 297–307. (In Russ.)

7. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Двумерная гидродинамическая модель, учитывающая динамическое перестроение геометрии дна мелководного водоема. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2011;8(121):159–167.

Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A. Two-dimensional hydrodynamic model taking into account the dynamic restructuring of the bottom geometry of a shallow reservoir. *Bulletin of SFedU. Engineering sciences*. 2011;8(121):159–167. (In Russ.)

8. Каменецкий Е.С., Радионов А.А., Тимченко В.Ю., Панаэтова О.С. Математическое моделирование распространения пыли от хвостохранилища в Алагирском ущелье РСО-Алания. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):22–29. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-22-29

Kamenetsky E.S., Radionoff A.A., Timchenko V.Yu., Panaetova O.S. Mathematical Modelling of Dust Transfer from the Tailings in the Alagir Gorge of the RNO-Alania. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2023;7(4):22–29. (In Russ.) https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-7-4-22-29

9. Сухинов А.И., Хачунц Д.С., Чистяков А.Е. Математическая модель распространения примеси в приземном слое атмосферы прибрежной зоны и ее программная реализация. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2015;55(7):1238–1254. https://doi.org/10.7868/S0044466915070121

Sukhinov A.I., Khachunts D.S., Chistyakov A.E. A mathematical model of pollutant propagation in near-ground atmospheric layer of a coastal region and its software implementation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2015;55(7):1216–1231. https://doi.org/10.1134/S096554251507012X

10. Белова Ю.В., Проценко Е.А., Атаян А.М., Курская И.А. Моделирование прибрежной аэродинамики с учетом лесных насаждений. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2018;2(2):91–105. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2018-2-2-91-105

Belova Yu.V., Protsenko E.A., Atayan A.M., Kurskaya I.A. Simulation of coastal aerodynamics taking into account forest plantations. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2018;2(2):91–105. (In Russ.) https://doi.org/10.23947/2587-8999-2018-2-2-91-105

11. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Sidoryakina V.V. Parallel solution of sediment and suspension transportation problems on the basis of explicit schemes. *Communications in Computer and Information Science*. 2018;910:306–321. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99673-8_22

12. Сидорякина В.В., Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А., Проценко С.В. Параллельные алгоритмы решения задачи динамики изменения рельефа дна в прибрежных системах. *Вычислительные методы и программирование*. 2020;21(3):196–206. https://doi.org/10.26089/NumMet.v21r318

Sidoryakina V.V., Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A., Protsenko S.V. Parallel algorithms for solving the problem of bottom relief change dynamics in coastal systems. *Computational Methods and Programming*. 2020;21(3):196–206. (In Russ.) https://doi.org/10.26089/NumMet.v21r318

13. Сухинов А.И., Сидорякина В.В. Построение и исследование корректности математической модели транспорта и осаждения взвесей с учетом изменения рельефа дна. *Вестник Донского государственного технического*

университета. 2018;18(4):350–361. https://doi.org/10.23947/1992-5980-2018-18-4-350-361

Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V. Development and correctness analysis of the mathematical model of transport and suspension sedimentation depending on bottom relief variation. *Vestnik of Don State Technical University*. 2018;18(4):350–361. https://doi.org/10.23947/1992-5980-2018-18-4-350-361

14. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Сидорякина В.В., Проценко С.В., Атаян А.М. Локально-двумерные схемы расщепления для параллельного решения трехмерной задачи транспорта взвешенного вещества. *Математическая физика и компьютерное моделирование*. 2021;24(2):38–53. https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2021.2.4

Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Sidoryakina V.V., Protsenko S.V., Atayan A.M. Locally two-dimensional splitting schemes for parallel solving of the three-dimensional problem of suspended substance transport. *Mathematical Physics and Computer Simulation*. 2021;24(2):38–53. (In Russ.) https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2021.2.4

15. Сидорякина В.В., Сухинов А.И. Построение и исследование близости решений в L2 двух краевых задач для модели переноса многокомпонентных взвесей в прибрежных системах. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2023;63(10):1721–1732. https://doi.org/10.1134/S0965542523100111

Sidoryakina V.V., Sukhinov A.I. Construction and analysis of the proximity of solutions in L2 for two boundary problems in the model of multicomponent suspension transport in coastal systems. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2023;63(10):1721–1732. (In Russ.) https://doi.org/10.1134/S0965542523100111

16. Литвинов В.Н., Чистяков А.Е., Никитина А.В., Атаян А.М., Кузнецова И.Ю. Математическое моделирование гидродинамических процессов Азовского моря на многопроцессорной вычислительной системе. *Компьютерные исследования и моделирование.* 2024;16(3):647–672. https://doi.org/10.20537/2076-7633-2024-16-3-647-672

Litvinov V.N., Chistyakov A.E., Nikitina A.V., Atayan A.M., Kuznetsova I.Yu. Mathematical modeling of hydrodynamics problems of the Azov Sea on a multiprocessor computer system. *Computer Research and Modeling*. 2024;16(3):647–672. (In Russ.) https://doi.org/10.20537/2076-7633-2024-16-3-647-672

Об авторах:

Валентина Владимировна Сидорякина, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедры математики и информатики Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), ORCID, SPIN-код, ResearcherID, MathSciNet, ScopusID, cvv9@mail.ru

Чистяков Александр Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), ORCID, SPIN-код, ResearcherID, MathSciNet, ScopusID, cheese_05@mail.ru

Заявленный вклад авторов:

В.В. Сидорякина: формулировка достигнутых результатов и описание их значимости, оформление материала статьи.

А.Е. Чистяков: общее научное руководство; постановка задачи; формулировка идей исследования, целей и задач, разработка методологии, получение расчетных формул и проведение численного эксперимента.

Конфликт интересов: **авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Valentina V. Sidoryakina, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), ORCID, SPIN-code, ResearcherID, MathSciNet, ScopusID, cvv9@mail.ru

Alexander E. Chistyakov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Software for Computer Engineering and Automated Systems, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), ORCID, SPIN-code, ResearcherID, MathSciNet, ScopusID, cheese_05@mail.ru

Contributions of the authors:

V.V. Sidoryakina: formulation of the results and description of their significance, article design.

A.E. Chistyakov: general scientific supervision; problem statement; formulation of research ideas, goals, and objectives; methodology development; derivation of calculation formulas; and numerical experiment execution.

Conflict of Interest Statement: **the authors declare no conflict of interest.**

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 29.10.2025
Поступила после рецензирования / Reviewed 14.11.2025
Принята к публикации / Accepted 15.12.2025

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
MATHEMATICAL MODELLING

CC BY

Check for updates

Оригинальное эмпирическое исследование

УДК 004.942:532.1

https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-4-46-55

Математическое моделирование биопродуктивности мелководного водоема при внезапной депрессии сцифоидными медузами

Д.В. Бондаренко ✉, **А.В. Никитина**

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

✉ denis.bondarenko.dev@gmail.com

Аннотация

Введение. Актуальность исследования обусловлена необходимостью количественной оценки негативного влияния массового развития сцифоидных медуз (*Aurelia aurita* и *Rhizostomeae*) на биоресурсы Азовского моря, испытывающего комплекс антропогенных нагрузок. Теоретической основой для решения данной проблемы выступает концепция трофических взаимодействий и инвазий в морских экосистемах. Целью настоящей работы является разработка математической модели динамики рыбного сообщества Азовского моря, учитывающей конкурентное и хищническое давление со стороны медуз, для оценки критических порогов его биомассы, приводящих к депрессии промысловых запасов.

Материалы и методы. Для исследования влияния сцифомедуз на биоресурсы Азовского моря в качестве основного инструмента использована математическая модель биологической кинетики, описывающая динамику трёх ключевых компонентов (зоопланктон, рыбы, медузы) с учётом конкуренции и хищничества. Материалом исследования выступали теоретические уравнения системы с соответствующими параметрами взаимодействий и начально-краевыми условиями.

Результаты исследования. Результаты численного моделирования показали, что при характерных для летнего сезона условиях в Азовском море (высокая температура, эвтрофикация) прирост биомассы сцифомедуз более чем в три раза за период июль-август приводит к резкому переходу экосистемы в альтернативное устойчивое состояние с их доминированием. Этот переход обусловлен комбинированным эффектом интенсивной конкуренции за зоопланктон и прямого хищничества медуз на ранних стадиях развития рыб и сопровождается критическим снижением доступности кормовой базы, что подавляет восстановление промысловых рыбных популяций.

Обсуждение. Проведённое исследование подтверждает высокую экологическую значимость массовых скоплений сцифомедуз и количественно обосновывает риск перехода экосистемы Азовского моря в альтернативное, менее продуктивное состояние, доминируемое медузами. С теоретической точки зрения работа вносит вклад в развитие моделей трофических взаимодействий с учётом множественных механизмов воздействия инвазионных видов.

Заключение. Практическая значимость работы заключается в том, что разработанная модель представляет собой инструмент для прогнозной оценки состояния биоресурсов и обоснования управленческих решений, направленных на смягчение последствий эвтрофикации и биологических инвазий. Перспективы исследования связаны с дальнейшей детализацией модели и включением в неё сезонных и климатических факторов для повышения точности долгосрочных прогнозов.

Ключевые слова: математическое моделирование, биопродуктивность, Азовское море, сцифоидные медузы, трофические взаимодействия, альтернативные устойчивые состояния, экологический прогноз

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–11–00295–П, https://rscf.ru/project/22-11-00295/

Для цитирования. Бондаренко Д.В., Никитина А.В. Математическое моделирование биопродуктивности мелководного водоема при внезапной депрессии сцифоидными медузами. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(4):46–55. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-4-46-55

 © *Бондаренко Д.В., Никитина А.В., 2025*

Original Empirical Research

Mathematical Modelling of the Bioproductivity of a Shallow Water Body under Sudden Depression Caused by Scyphozoan Jellyfish

Denis V. Bondarenko, Alla V. Nikitina
Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation
✉ denis.bondarenko.dev@gmail.com

Abstract

Introduction. The relevance of this study is determined by the need for a quantitative assessment of the negative impact of mass outbreaks of scyphozoan jellyfish (*Aurelia aurita* and *Rhizostomeae*) on the bioresources of the Azov Sea, which is subjected to a complex combination of anthropogenic pressures. The theoretical framework of the research is based on the concept of trophic interactions and biological invasions in marine ecosystems. The aim of this study is to develop a mathematical model of the dynamics of the fish community in the Azov Sea that accounts for both competitive and predatory pressure exerted by jellyfish, in order to identify critical biomass thresholds leading to the depression of commercial fish stocks.

Materials and Methods. To investigate the influence of scyphozoan jellyfish on the bioresources of the Azov Sea, a mathematical model of biological kinetics was employed as the primary research tool. The model describes the dynamics of three key ecosystem components (zooplankton, fish, and jellyfish), incorporating mechanisms of competition and predation. The research material consists of a system of theoretical equations with appropriate interaction parameters and initial and boundary conditions.

Results. Numerical simulations demonstrated that under environmental conditions typical of the summer period in the Azov Sea (elevated water temperature and eutrophication), an increase in scyphozoan jellyfish biomass by more than threefold during July–August leads to an abrupt shift of the ecosystem to an alternative stable state dominated by jellyfish. This transition is driven by the combined effects of intense competition for zooplankton and direct predation by jellyfish on the early life stages of fish, and is accompanied by a critical reduction in food availability, which suppresses the recovery of commercial fish populations.

Discussion. The results confirm the high ecological significance of mass aggregations of scyphozoan jellyfish and provide a quantitative justification for the risk of a regime shift in the Azov Sea ecosystem toward an alternative, less productive state dominated by jellyfish. From a theoretical perspective, the study contributes to the development of trophic interaction models that incorporate multiple impact mechanisms of invasive species.

Conclusion. The practical significance of this work lies in the fact that the proposed model serves as a tool for predictive assessment of bioresource status and for substantiating management decisions aimed at mitigating the consequences of eutrophication and biological invasions. Future research will focus on further refinement of the model, including the incorporation of seasonal and climatic factors to improve the accuracy of long-term forecasts.

Keywords: mathematical modelling, bioproductivity, Azov Sea, scyphozoan jellyfish, trophic interactions, alternative stable states, ecological forecasting

Funding. The study was supported by grant No. 22–11–00295–П from the Russian Science Foundation, https://rscf.ru/project/22-11-00295/

For Citation. Bondarenko D.V., Nikitina A.V. Mathematical modelling of the bioproductivity of a shallow water body under sudden depression caused by scyphozoan jellyfish. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(4):46–55. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-4-46-55

Введение. Азовское море — одно из самых мелководных морей мира, играющее ключевую роль в рыбопромысловой и экологической системе Юга России. В последние десятилетия его экосистема испытывает серьёзные нагрузки: эвтрофикация, изменение речного стока, загрязнение и инвазии чужеродных видов [1]. Одной из характерных тенденций является массовое развитие сцифомедуз, в первую очередь Aurelia aurita и Rhizostomeae. Обладая высокой репродуктивной способностью и экологической пластичностью, эти медузы формируют обширные скопления в прибрежных водах в весенне-летний период. В отдельные годы их биомасса достигает тысяч тонн, оказывая значительное давление на трофические сети [2]. Поэтому можно говорить о внезапной депрессии водоема сцифоидными медузами и их влиянии на биопродуктивность водной экоситемы. На рис. 1 можем наблюдать скопления сцифоидных медуз в Азовском море.

Сцифомедузы могут быть опасны для человека, так как их прикосновение к коже вызывает ожоги, зуд или раздражение. Сцифоидные медузы (сцифомеду́зы, лат. *Scyphozoa*) — класс морских организмов из типа стрекающих (*Cnidaria* — их характеризует наличие стрекательных клеток, которые они используют для охоты и защиты от хищников). Группа включает сравнительно небольшое количество видов — около 200. Жизненный цикл сцифоидных — метагенез, в котором присутствует бесполая (полипоидная) и половая (медузоидная) стадии. Медузы некоторых представителей характеризуются крупными размерами и порой образуют очень большие скопления. Полипы сцифоидных (сцифистомы), напротив, обладают очень мелкими размерами — порядка нескольких

миллиметров. Обычные для морей России сцифомедузы — это ушастая медуза (*Aurelia aurita*), львиная грива (*Cyanea capillata*), корнерот (*Rhizostoma pulmo*). Некоторые виды сцифомедуз, например, «морская оса», опасны особенно сильно. Прикосновение к ней вызывает острую боль и жжение, как от удара хлыстом. Болевой шок часто приводит к потере сознания, а затем возникают симптомы интоксикации (сухость во рту, трудности с дыханием). Иногда «укус» морской осы приводит к смерти человека.

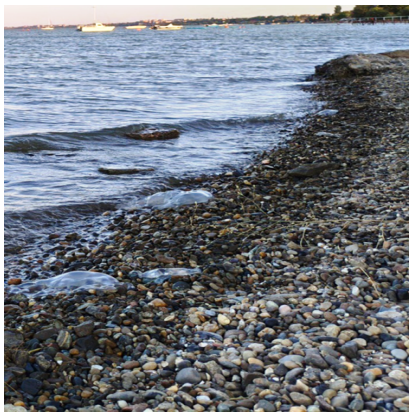


Рис. 1. Побережье Ейского лимана с медузами в июле 2025 года

Aurelia aurita и *Rhizostomeae* Азовского моря активно потребляют зоопланктон — копепод, личинок ракообразных и моллюсков, которые являются основным кормом для молоди и планктоноядных рыб, таких как салака, тарань и молодь судака. Это приводит к жёсткой конкуренции за ресурс. Кроме того, медузы проявляют хищничество в отношении икры и личинок рыб, что подтверждается полевыми данными: при высокой численности они могут потреблять до 10–30 % суточного рациона личинок [3]. Несмотря на наличие биологических данных, количественная оценка влияния медуз на рыбные запасы остаётся недостаточной [4–7]. В работе представлена математическая модель, с помощью которой описывается динамика рыбного сообщества с учётом конкуренции и хищничества со стороны медуз. Модель позволяет оценивать критические пороги их биомассы, при которых происходит подавление продуктивности ценных и промысловых рыб Азовского моря [8]. Поэтому имеет смысл говорить о внезапной депрессии состояния основных биоресурсов Азовского моря при появлении такого рода инвазиантов — сцифоидных медуз.

Материалы и методы. Для количественной оценки влияния сцифомедуз *Aurelia aurita* и *Rhizostomeae* на рыбные сообщества Азовского моря разработана динамическая модель, описывающая взаимодействие трёх ключевых компонентов экосистемы: $Z(t)$ — концентрации зоопланктона (ресурс), $F(t)$ — биомассы рыбного сообщества, $J(t)$ — биомассы сцифомедуз. Модель учитывает два основных механизма воздействия медуз на рыб: конкуренция за общий пищевой ресурс — зоопланктон, прямое хищничество медуз на икру и личинки рыб. Структура взаимодействий представлена на рис. 2.

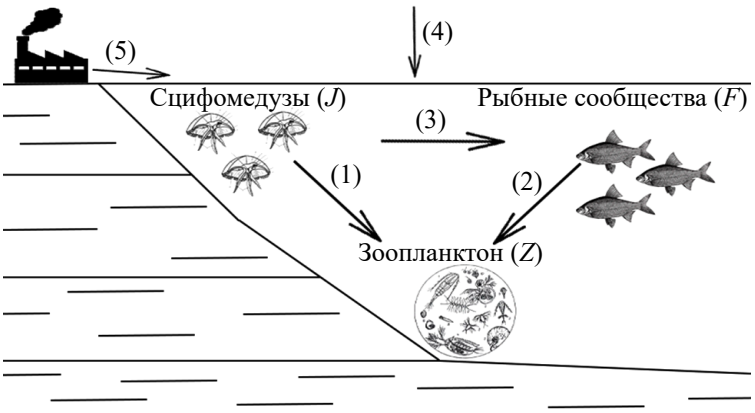


Рис. 2. Структурная схема трофических взаимодействий между медузами, рыбами и зоопланктоном

На рис. 2 введены обозначения: (1) — потребление зоопланктона сцифомедузами, (2) — потребление зоопланктона рыбными сообществами, (3) — потребление икры и личинок рыбы сцифомедузами, (4) — влияние изменения внешних факторов среды (температура, солёность и т. д.), (5) — влияние изменений среды с суши (антропогенная нагрузка, речной сток, эвтрофикация).

Модель биологической кинетики базируется на известных моделях [9, 10] и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial t}+u\dfrac{\partial Z}{\partial x}+v\dfrac{\partial Z}{\partial y}+(w+w_{gZ})\dfrac{\partial Z}{\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu_Z\dfrac{\partial Z}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\mu_Z\dfrac{\partial Z}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\nu_Z\dfrac{\partial Z}{\partial z}\right)+\psi_Z, \\ \dfrac{\partial F}{\partial t}+u\dfrac{\partial F}{\partial x}+v\dfrac{\partial F}{\partial y}+(w+w_{gF})\dfrac{\partial F}{\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu_F\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\mu_F\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)+\psi_F, \\ \dfrac{\partial J}{\partial t}+u\dfrac{\partial J}{\partial x}+v\dfrac{\partial J}{\partial y}+(w+w_{gJ})\dfrac{\partial J}{\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu_J\dfrac{\partial J}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\mu_J\dfrac{\partial J}{\partial y}\right)+\psi_J, \end{cases} \tag{1}$$

$$\psi_Z=rZ\left(1-\frac{Z}{K}\right)-\frac{a_ZFZ}{1+h_aa_ZZ}-\frac{b_ZJZ}{1+h_bb_ZZ},$$

$$\psi_F=\alpha\left(\frac{a_ZFZ}{1+h_aa_ZZ}\right)-d_FF-\varepsilon JF,\quad \psi_J=\beta\left(\frac{b_ZFZ}{1+h_bb_ZZ}\right)+\delta JF-d_JJ.$$

В системе (1) введены следующие обозначения: $\mathbf{u}=(u, v, w)$ — поле скоростей водного потока; $w_{g\varphi}$ — скорость осаждения субстанции φ, $\varphi\in\{Z, F, G\}$; μ_φ, ν_φ — коэффициенты диффузии субстанции φ, $\varphi\in\{Z, F, G\}$ в горизонтальном и вертикальном направлениях; r — внутренняя скорость роста зоопланктона; K — ёмкость среды; a_z — коэффициент скорости поедания зоопланктона рыбой; b_z — коэффициент скорости поедания зоопланктона медузами; h_a — время обработки пищи рыбой; h_b — время обработки пищи медузами; α — коэффициент прироста рыб (эффективность преобразования зоопланктона); d_F — коэффициент естественной смертности; ε — коэффициент потери биомассы рыб с учетом хищничества медуз на икру и личинки рыб; β — коэффициент прироста медуз; δ — коэффициент нелинейного хищничества; d_J — коэффициент смертности медуз.

Пусть Γ — граница области G, $\overline{G}=G\cup\Gamma$; σ — боковая граничная поверхность; $\Sigma_{пов}$ — часть свободной поверхности и $\Sigma_{дно}$ — поверхность дна. $\Gamma=\sigma\cup\Sigma_{пов}\cup\Sigma_{дно}$.

Зададим:

– начальные условия при $t = 0$

$$\varphi(x,y,z,0)\equiv\varphi_0(x,y,z); \tag{2}$$

– граничные условия на боковой поверхности σ в любой момент времени $\sigma\times(0,T]$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}=0,\ \text{если}\ (\mathbf{u}_\Gamma,\mathbf{n})<0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}=-\frac{u_\Gamma}{\mu_\varphi}\varphi,\ \text{если}\ (\mathbf{u}_\Gamma,\mathbf{n})\geq 0, \tag{4}$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к границе области σ; $\mathbf{u}_\Gamma$ — вектор скорости движения жидкости на границе S; u_Γ — проекция вектора скорости движения среды на направление нормали $\mathbf{n}$ на границе области G;

– граничные условия на поверхности воды $\Sigma_{пов}\times(0<t\leq T]$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}=0; \tag{5}$$

– граничные условия на дне $\Sigma_{дно}\times(0<t\leq T]$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}=-\frac{w_{g\varphi}}{\nu_i}\varphi,\ \varphi\in\{Z,F,J\}. \tag{6}$$

Для изучения динамики рассматриваемых гидробионтов экосистемы Азовского моря и выявления ключевых закономерностей взаимодействия сцифомедуз и рыбных сообществ проведём качественный анализ предложенной нелинейной системы с ОДУ. Основное внимание уделено поиску равновесных состояний (точек покоя) и исследованию их устойчивости на основе анализа матрицы Якоби. Такой подход позволяет выявить условия, при которых возможно сосуществование выделенных компонент экосистемы, а также определить пороговые параметры, при превышении которых происходит переход в альтернативное устойчивое состояние — например, доминирование медуз. Рассмотрим систему (1). Равновесные состояния системы определяются из условия обращения всех правых частей в ноль:

$$\frac{dZ}{dt}=0,\frac{dF}{dt}=0,\frac{dJ}{dt}=0.$$

Рассмотрим четыре основных биологически значимых случая.

1. Тривиальное равновесие $E_0=(K,0,0)$.

Это состояние соответствует отсутствию как рыб, так и медуз. Зоопланктон достигает ёмкости среды. Подстановка $F = 0$, $J = 0$ в систему приводит к:

$$rZ\left(1-\frac{Z}{K}\right)=0\Rightarrow Z=K.$$

Исходя из этого, E_0 = (K,0,0) — равновесие. Для анализа устойчивости вычислим коэффициенты матрицы Якоби в окрестности E_0:

$$J\left(E_0\right)=\left(\begin{array}{ccc}\frac{\partial Z}{\partial Z} & \frac{\partial Z}{\partial F} & \frac{\partial Z}{\partial J}\\ \frac{\partial F}{\partial Z} & \frac{\partial F}{\partial F} & \frac{\partial F}{\partial J}\\ \frac{\partial J}{\partial Z} & \frac{\partial J}{\partial F} & \frac{\partial J}{\partial J}\end{array}\right)\Bigg|_{(K,0,0)}.$$

После вычисления частных производных и подстановки получаем:

$$J\left(E_0\right)=\left(\begin{array}{ccc}-r & -\frac{a_Z K}{1+h_a a_Z K} & -\frac{b_Z K}{1+h_b b_Z K}\\ 0 & \alpha\frac{a_Z K}{1+h_a a_Z K}-d_F & 0\\ 0 & 0 & \beta\frac{b_Z K}{1+h_b b_Z K}-d_J\end{array}\right).$$

Собственными значениями матрицы являются диагональные элементы, так как матрица является верхнетреугольной:

$$\lambda_1=-r<0,\lambda_2=\alpha\frac{a_Z K}{1+h_a a_Z K}-d_F,\lambda_3=\beta\frac{b_Z K}{1+h_b b_Z K}-d_J.$$

Равновесие E_0 устойчиво, если $\lambda_2<0$ и $\lambda_3<0,$ то есть:

$$\alpha\frac{a_Z K}{1+h_a a_Z K}<d_F,\ \beta\frac{b_Z K}{1+h_b b_Z K}<d_J,\ \text{при}\ \alpha>0,\ \beta>0.$$

Эти условия определяют пороговые значения ёмкости среды K, при которых медузы и рыбы не могут колонизировать экосистему. При превышении этих порогов E_0 становится неустойчивым, и начинается рост одной или обеих популяций.

2. Равновесие с рыбами, без медуз $E_F=\left(Z_F^*,F^*,0\right)$.

Рассмотрим случай, когда J = 0, F > 0 Это соответствует состоянию, в котором медузы отсутствуют, а рыбное сообщество стабилизировалось на фоне зоопланктона. Из уравнений получим:

$$\frac{dZ}{dt}=0\Rightarrow rZ\left(1-\frac{Z}{K}\right)=\frac{a_Z FZ}{1+h_a a_Z Z},$$

$$\frac{dF}{dt}=0\Rightarrow\alpha\frac{a_Z FK}{1+h_a a_Z K}=d_F F\Rightarrow\alpha\frac{a_Z K}{1+h_a a_Z K}=d_F\Rightarrow\frac{a_Z Z}{1+h_a a_Z Z}=\frac{d_F}{\alpha}.$$

Отсюда получаем:

$$Z_F^*=\frac{d_F}{a_Z\left(\alpha-h_a d_F\right)}\ (\textit{при условии}\ \alpha>h_a d_F).$$

Подставляя Z_J^* в первое уравнение, можно найти F^*. Из этого следует, что существует нетривиальное равновесие $E_F=\left(Z_F^*,F,0\right)$, при условии, что $d_F<\alpha\frac{a_Z}{1+h_a a_Z K}$. Устойчивость E_F зависит от влияния медуз, то есть если $\beta\frac{b_Z Z_F^*}{1+h_b b_Z Z_F^*}>d_J,$ то медузы могут инвазировать, из чего следует, что равновесие неустойчиво.

3. Равновесие с медузами, без рыб $E_J=\left(Z_F^*,0,J^*\right)$.

Рассмотрим случай обратный второму, то есть F = 0, J > 0. Это состояние, когда происходит доминирование медузных сообществ. После подстановки из уравнений получим:

$$\frac{dZ}{dt}=0\Rightarrow rZ\left(1-\frac{Z}{K}\right)=\frac{JZ}{1+h_b Z},$$

$$\frac{dJ}{dt}=0\Rightarrow\beta\frac{JZ}{1+h_b Z}=d_J J\Rightarrow\beta\frac{Z}{1+h_b Z}=d_J\Rightarrow\frac{Z}{1+h_b Z}=\frac{d_J}{\beta}.$$

Получим:

$$Z_J^*=\frac{d_J}{\left(\beta-h_b d_J\right)}\ (\textit{при условии}\ \beta>h_b d_J).$$

Подставляя Z_J^* в первое уравнение, находим J^*. Таким образом, существует равновесие $E_J = \left(Z_F^*, 0, J^*\right)$, которое соответствует вытеснению рыб медузами. Устойчивость E_J в данном случае зависит от влияния рыб, то есть если $\alpha \dfrac{a_Z Z_J^*}{1 + h_a a_Z Z_J^*} > d_F$, то рыбы могут начать вытеснять медуз из чего следует, что равновесие неустойчиво.

4. Условия сосуществования и бифуркации.

Сосуществование рыб и медуз возможно при одновременном выполнении условий:

$$\alpha \frac{a_Z Z}{1 + h_a a_Z Z} > d_F + \varepsilon J,\ \beta \frac{b_Z Z}{1 + h_b b_Z Z} + \delta F > d_J.$$

Однако численный анализ показывает, что область сосуществования узкая. При увеличении J и b_z система теряет устойчивость, и происходит вытеснение, при котором $F \to 0$. Критический порог массы медуз, при котором это происходит можно оценить из условия:

$$\alpha \frac{a_Z Z}{1 + h_a a_Z Z} = d_F + \varepsilon J.$$

При $Z \approx Z_J^*$, это уравнение даёт пороговое значение, превышение которого делает невозможным существование рыбного сообщества.

После исследования устойчивости равновесных состояний перейдём к качественному анализу динамики системы, позволяющему визуализировать типичные траектории развития экосистемы и выявить ключевые сценарии её поведения. Для этого построим фазовые портреты в проекции рыбного сообщества F и сцифомедуз J при фиксированном уровне зоопланктона Z, что соответствует квазистационарному приближению (редукции размерности), часто используемому в моделях биологической кинетики [11]. Рассмотрим упрощённую систему, описывающую динамику F и J при постоянной концентрации зоопланктона $Z = Z^*$:

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{dt} = \alpha \left(\dfrac{a_Z F Z^*}{1 + h_a a_Z Z^*} \right) - d_F F - \varepsilon J F, \\ \dfrac{dJ}{dt} = \beta \left(\dfrac{b_Z F Z^*}{1 + h_b b_Z Z^*} \right) + \delta J F - d_J J. \end{cases} \tag{7}$$

Это позволяет исключить быструю динамику зоопланктона и сосредоточиться на долгосрочном взаимодействии медуз и рыб при заданной продуктивности экосистемы. На рис. 3 представлен фазовый портрет системы при $Z^* = 1{,}5$ усл. ед.

Анализ фазового портрета показывает наличие двух аттракторов:

1. Устойчивое равновесие с доминированием рыб — наблюдается при низкой начальной численности медуз.
2. Состояние доминирования медуз — достигается при превышении критического порога массы медуз.

Между ними находится граница бассейнов притяжения, определяющая, какой из двух сценариев реализуется в зависимости от начальных условий. Это указывает на альтернативную устойчивость экосистемы: при одних и тех же внешних параметрах возможны два качественно разных состояния.

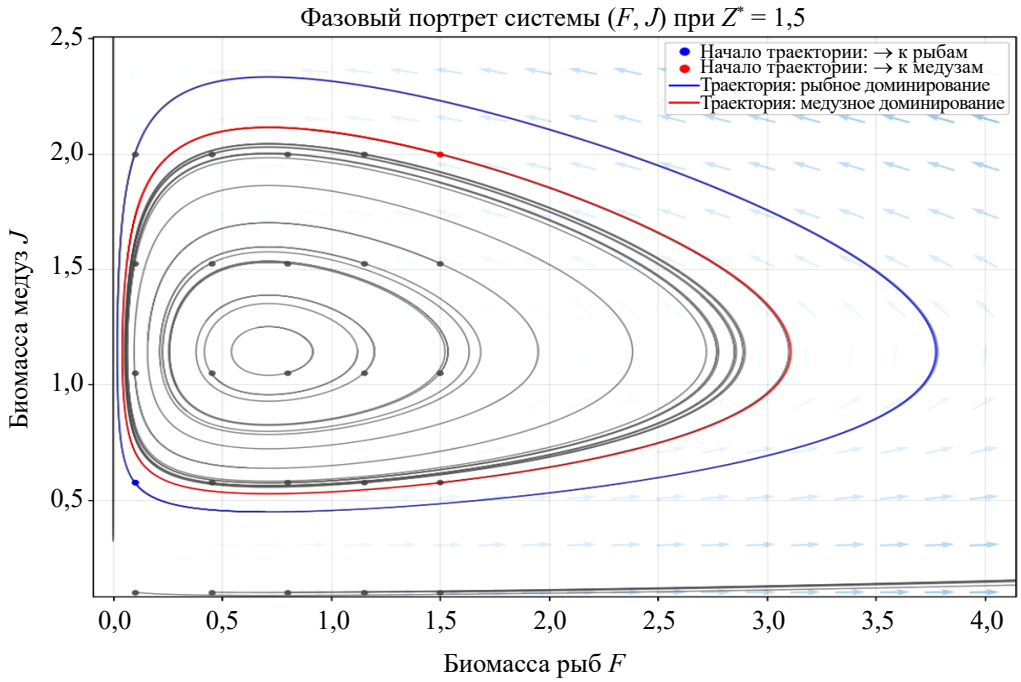


Рис. 3. Фазовый портрет системы в проекции (F, J) при $Z^* = 1{,}5$ усл. ед.

Для количественной оценки перехода между режимами построена бифуркационная диаграмма — зависимость равновесной биомассы рыб от биомассы медуз (рис. 4). Такой тип поведения характерен для систем с положительной обратной связью: рост численности медуз → падение роста численности зоопланктона и гибель личинок рыб → снижение конкуренции за ресурс → дальнейший рост численности медуз. Это делает переход в новое состояние малообратимым без внешнего вмешательства (например, снижения эвтрофикации водной экосистемы) [12–14].

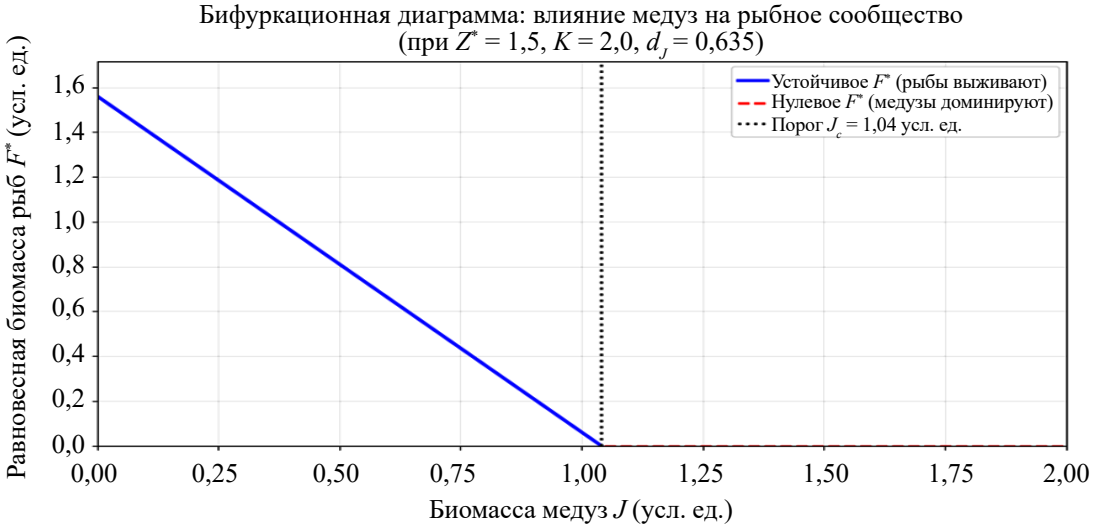


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма: равновесная биомасса рыб в зависимости от биомассы медуз

Полученные результаты подтверждают, что экосистема Азовского моря может находиться в двух альтернативных устойчивых состояниях:

• рыбоцентричное (при умеренной численности медуз);

• медузоцентричное (при превышении численности медуз критического порога).

Таким образом, фазовый анализ наглядно демонстрирует риск экологического коллапса и необходимости экологического мониторинга и управления Азовского моря [9, 10].

Результаты исследования. Численное моделирование динамики экосистемы Азовского моря за период с 1 июля по 31 августа 2025 года выявило существенное влияние сцифомедуз *Rhizostomeae* и *Aurelia aurita* на состояние рыбного сообщества через комбинированное воздействие — конкуренцию за зоопланктон и прямое хищничество на ранних стадиях развития рыб. В качестве начальных условий приняты значения, соответствующие типичному состоянию экосистемы в начале июля, когда медузы только начинают активно размножаться, а рыбные популяции используют высокую продуктивность планктона для роста молоди [15].

Ключевые параметры модели заданы следующим образом:

• r = 0,8 день$^{-1}$ — скорость роста зоопланктона, соответствует высокой температуре воды (22–26 °C) и обилию питательных веществ вследствие эвтрофикации;

• K = 2,0 усл. ед. — ёмкость среды, отражающая максимальную устойчивую биомассу зоопланктона в прибрежной зоне;

• a_z = 1,2; b_z = 2 — скорости потребления зоопланктона рыбами и медузами соответственно. Значение учитывает высокую фильтрационную способность *Aurelia aurita*, способной обрабатывать большие объёмы воды;

• h_a = 0,9; h_b = 0,3 — время обработки пищи (handling time). Более низкое указывает на большую эффективность медуз как фильтраторов по сравнению с рыбами;

• α = 0,3; β = 0,4 — коэффициенты эффективности преобразования пищи в прирост биомассы. У медуз он выше, что связано с низкими энергозатратами на поддержание жизнедеятельности;

• δ = 0,03 — дополнительный прирост медуз за счёт потребления икры и личинок рыб, отражающий их хищническую активность;

• d_F = 0,05; d_J = 0,635 — естественные уровни смертности. У медуз смертность растёт к концу августа из-за стробиляции и отмирания;

• ε = 0,15 — коэффициент хищничества медуз на личинок рыб.

Динамика всех трёх компонентов системы (зоопланктона, рыб и медуз) наглядно представлена на рис. 5.

Как показали расчёты, при начальной биомассе медуз на уровне 0,3 усл. ед. и благоприятных условиях (высокая температура, эвтрофикация) их численность к концу августа увеличивается более чем в 3 раза, что приводит к резкому снижению доступности зоопланктона и подавлению прироста рыбной биомассы. Полученные результаты демонстрируют переход экосистемы в состояние, при котором медузы временно доминируют в трофической структуре, ограничивая восстановление ихтиофауны.

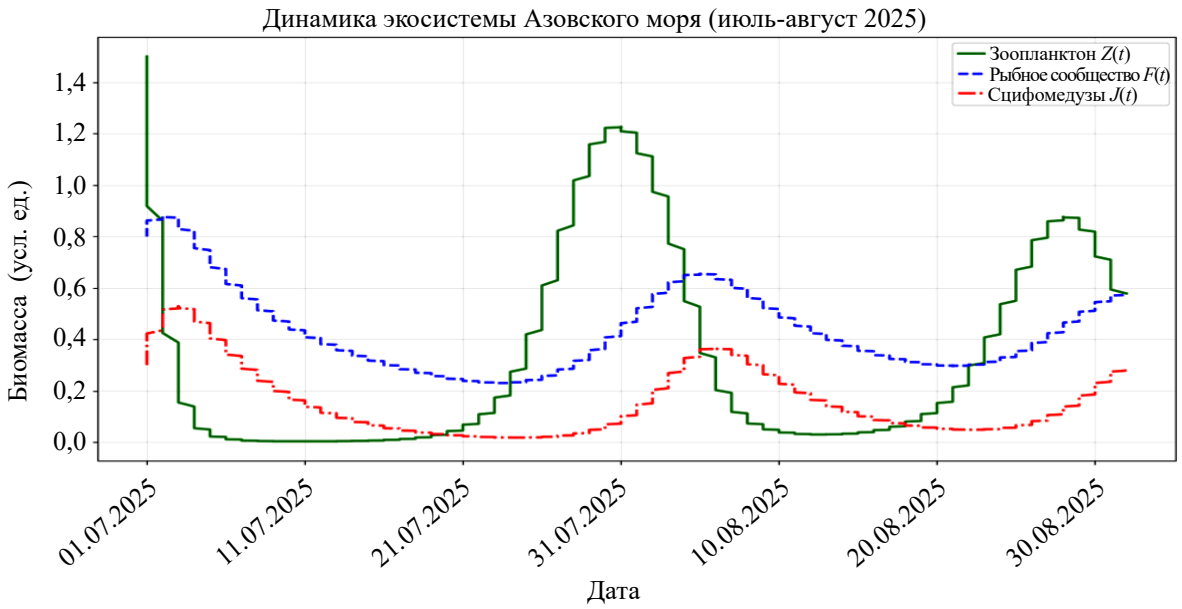


Рис. 5. Результаты численного эксперимента динамики
основных гидробионтов и сцифомедуз экосистемы Азовского моря

Обсуждение. В ходе проведённого исследования разработана, исследована и численно реализована математическая модель, отражающая сложные трофические взаимодействия между сцифомедузами и рыбными сообществами в экосистеме Азовского моря. В предложенной математической модели учитывается как конкуренция за общий ресурс — зоопланктон, так и прямое хищничество медуз на ранних стадиях развития рыб, что делает модель более реалистичной по сравнению с классическими системами «ресурс — потребитель». Результаты численного эксперимента за июль-август 2025 года показали, что массовое размножение медуз может привести к существенному подавлению продуктивности ценных и промысловых рыб, особенно в условиях продолжающейся эвтрофикации и повышения температуры воды. Это указывает на риск устойчивого смещения экосистемы в режим, доминируемый гельминтофагами, что снижает её устойчивость и рыбопромысловую ценность.

Заключение. Математическое моделирование подтверждает необходимость комплексного мониторинга скоплений желетелых инвазиантов и их интеграции в системы экологического управления морскими ресурсами Юга России. Предложенная модель может быть использована в качестве инструментария для прогнозирования экологических состояний, оценки эффективности природоохранных мер и обоснования управления рыбопромысловыми нагрузками в регионе. В перспективе модель может быть расширена за счёт учёта сезонной динамики внешних факторов и влияния климатических изменений [16].

Список литературы / References

1. Матишов Г.Г., Степаньян О.В. НИС «Денеб»: 10 лет морских научных исследований. *Морской гидрофизический журнал*. 2018;34(6):548–555.

Matishov G.G., Stepanyan O.V. R/V “Deneb”: 10 years of marine scientific research. *Physical Oceanography*. 2018;34(6):548–555. (In Russ.)

2. Смирнова Е.А., Матишов Г.Г., Глухов В.В. Исследование выбросов сцифоидных медуз Rhizostoma pulmo (Macri, 1778) на Ясенской косе Азовского моря в сентябре 2024 г. *Наука Юга России*. 2025;21(1):58–62. https://doi.org/10.7868/S25000640250108

Smirnova E.A., Matishov G.G., Glukhov V.V. Study of the strandings of scyphozoan jellyfish Rhizostoma pulmo (Macri, 1778) on the Yasenskaya Spit of the Azov Sea in September 2024. *Science of the South of Russia*. 2025;21(1):58–62. (In Russ.) https://doi.org/10.7868/S25000640250108

3. Мирзоян З.А., Мартынюк М.Л., Хренкин Д.В., Афанасьев Д.Ф. Развитие популяций сцифоидных медуз Rhizostoma pulmo и Aurelia aurita в Азовском море. *Водные биоресурсы и среда обитания*. 2019;2(2):27–35. https://doi.org/10.47921/2619-1024_2019_2_2_27

Mirzoyan Z.A., Martynyuk M.L., Khrenkin D.V., Afanasiev D.F. Development of scyphozoan jellyfish Rhizostoma pulmo and Aurelia aurita populations in the Sea of Azov. *Aquatic Bioresources and Environment*. 2019;2(2):27–35. (In Russ.) https://doi.org/10.47921/2619-1024_2019_2_2_27

4. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Белова Ю.В., Кузнецова И.Ю. Аналитическое и численное исследование задачи динамики планктонных популяций при наличии микропластика. *Математическое моделирование*. 2024;36(3):95–114. https://doi.org/10.20948/mm-2024-03-07

Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Belova Yu.V., Kuznetsova I.Yu. Analytical and numerical study of the plankton population dynamics problem in the presence of microplastic. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2024;36(3):95–114. (In Russ.) https://doi.org/10.20948/mm-2024-03-07

5. Рябенький В.С. Теория управления решениями линейных разностных схем в составных областях. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2012;(011):1–32.

Ryabenkii V.S. Theory of control of solutions of linear difference schemes in composite domains. *Keldysh Institute Preprints*. 2012;(011):1–32. (In Russ.)

6. Lovisari M., Kelly O.R., McDonald A.R. Hydrocarbon Oxidation by a Porphyrin-π-Cation Radical Complex. *Angewandte Chemie International Edition*. 2023;62(20):202303083. https://doi.org/10.1002/anie.202303083

7. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Якобовский М.В. Точность численного решения уравнения диффузии-конвекции на основе разностных схем второго и четвертого порядков погрешности аппроксимации. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика*. 2016;5(1):47–62.

Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Yakobovskiy M.V. Accuracy of the numerical solution of the convection-diffusion equation using finite difference schemes with the second and fourth order of approximation error. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Computer Science*. 2016;5(1):47–62. (In Russ.)

8. Сухинов А.И., Атаян А.М., Белова Ю.В., Литвинов В.Н., Никитина А.В., Чистяков А.Е. Обработка данных натурных измерений экспедиционных исследований для математического моделирования гидродинамических процессов Азовского моря. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2020;13(2):161–174.

Sukhinov A.I., Atayan A.M., Belova Yu.V., Litvinov V.N., Nikitina A.V., Chistyakov A.E. Processing of field measurement data from expeditionary studies for mathematical modeling of hydrodynamic processes of the Azov Sea. *Computational Continuum Mechanics*. 2020;13(2):161–174. (In Russ.)

9. Самарский А.А., Николаев Е.С. *Методы решения сеточных уравнений*. Москва: Наука; 1978. 591 с.

Samarskiy A.A., Nikolaev E.S. *Methods for solving grid equations*. Moscow: Nauka; 1978. 591 p. (In Russ.)

10. Кудинов Н.В., Филина А.А., Никитина А.В. Моделирование вертикальных движений морской воды в стратифицированных водоемах. *Advanced Engineering Research*. 2023;23(2):212–224. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-2-212-224

Kudinov N.V., Filina A.A., Nikitina A.V. Modeling of vertical movements of seawater in stratified reservoirs. *Advanced Engineering Research.* 2023;23(2):212–224. (In Russ.) https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-2-212-224

11. Литвинов В.Н., Руденко Н.Б., Грачева Н.Н. Разработка модели параллельно-конвейерного вычислительного процесса для решения системы сеточных уравнений. *Advanced Engineering Research.* 2023;23(3):329–339. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-3-329-339

Litvinov V.N., Rudenko N.B., Gracheva N.N. Development of a model of a parallel-pipeline computing process for solving a system of grid equations. *Advanced Engineering Research*. 2023;23(3):329–339. (In Russ.) https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-3-329-339

12. Белова Ю.В., Никитина А.В. Применение методов усвоения данных наблюдений для моделирования распространения загрязняющих веществ в водоеме и управления устойчивым развитием. *Безопасность техногенных и природных систем*. 2024;8(3):39–48. https://doi.org/10.23947/2541-9129-2024-8-3-39-48

Belova Yu.V., Nikitina A.V. Application of observational data assimilation methods for modeling the spread of pollutants in a reservoir and managing sustainable development. *Safety of technogenic and natural systems*. 2024;8(3):39–48. (In Russ.) https://doi.org/10.23947/2541-9129-2024-8-3-39-48

13. Белова Ю.В., Филина А.А., Чистяков А.Е. Прогнозирование динамики летних видов фитопланктона на основе методов усвоения спутниковых данных. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):27–34. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-27-34

Belova Yu.V. Filina A.A., Chistyakov A.E. Forecasting the dynamics of summer phytoplankton species based on satellite data assimilation methods. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(4):27–34. (In Russ.) https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-4-27-34

14. Babar Z.B., Rizwan K., Munir S. Multifunctional Smart Nano-membranes for the Removal of Oil-Based Pollutants from Marine Sources: A Tool for Sustainable Environment. *Water, Air, & Soil Pollution*. 2024;235(2):80. https://doi.org/10.1007/s11270-023-06864-x

15. Сухинов А.И., Сидорякина В.В. Аппроксимация граничных условий второго и третьего рода в краевых задачах для уравнений конвекции-диффузии с приложением к экологической гидрофизике. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(3):16–29. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-16-29

Sukhinov A.I., Sidoryakina V.V. Approximation of boundary conditions of the second and third kind in boundary value problems for convection-diffusion equations with application to environmental hydrophysics. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(3):16–29. (In Russ.) https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-3-16-29

16. Состояние запасов медуз в Черном и Азовском морях (по периодам до 2000 года) в условиях хозяйственной деятельности на акватории региона и прилегающих территориях. Оценка запасов медузы, карта распределения и прогноз вылова: отчет о НИР. Ростов-на-Дону: Изд-во АзНИИРХ; 1981. 18 с.

The state of jellyfish stocks in the Black and Azov Seas (according to periods until 2000) under the conditions of economic activity in the water area of the region and adjacent territories. Assessment of jellyfish stocks, distribution map and catch forecast: research report. Rostov-on-Don: AzNIIRKH Publishing House; 1981. 18 p. (In Russ.)

Об авторах:

Денис Вадимович Бондаренко, ассистент кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), ORCID, SPIN-код, ScopusID, denis.bondarenko.dev@gmail.com

Алла Валерьевна Никитина, доктор технических наук, профессор кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), ORCID, SPIN-код, ScopusID, nikitina.vm@gmail.com

Заявленный вклад авторов:

Д.В. Бондаренко: проведение расчетов; подготовка текста; оформление графических материалов; работа с источниками.

А.В. Никитина: формирование основной концепции; цели и задачи исследования; анализ результатов исследований; формулирование выводов; корректировка текста.

Конфликт интересов: ***авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.***

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Denis V. Bondarenko, assistant department of software for computing equipment and automated systems Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), ORCID, SPIN-code, ScopusID, denis.bondarenko.dev@gmail.com

Alla V. Nikitina, doctor of engineering science, Professor department of software for computing equipment and automated systems Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), ORCID, SPIN-code, ScopusID, nikitina.vm@gmail.com

Contributions of the authors:

D.V. Bondarenko: calculations; text preparation; graphic design; source analysis.

A.V. Nikitina: development of the main concept; research goals and objectives; analysis of research results; formulation of conclusions; proofreading.

Conflict of Interest Statement: **the authors declare no conflict of interest.**

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 27.10.2025
Поступила после рецензирования / Reviewed 12.11.2025
Принята к публикации / Accepted 10.12.2025

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
INFORMATION TECHNOLOGIES

CC BY

Check for updates

Оригинальное эмпирическое исследование

УДК 519.6:574.5:504.45

https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-4-56-67

Математическое моделирование инвазии зеленых микроводорослей и оздоровления Таганрогского залива: эколого-гигиенические и медицинские последствия

Ю.В. Белова[1] ✉, **О.В. Колгунова**[2], **М.И. Габуева**[3]

[1] Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

[2] Северо-Осетинский государственный университет, г. Владикавказ, Российская Федерация

[3] Северо-Осетинская государственная медицинская академия, г. Владикавказ, Российская Федерация

✉ yvbelova@yandex.ru

Аннотация

Введение. Таганрогский залив Азовского моря является одной из наиболее эвтрофных и экологически уязвимых акваторий России, где в летний период регулярно формируются массовые цветения токсичных цианобактерий (*Microcystis, Aphanizomenon, Anabaena, Nodularia*). Их развитие сопровождается накоплением цианотоксинов (микроцистин, анатоксин, цилиндроспермопсин, сакситоксин), представляющих серьёзную угрозу для здоровья населения. В работе рассматривается подход к биологической реабилитации залива на основе контролируемого внесения пресноводных зелёных микроводорослей *Chlorella vulgaris*, конкурирующих с цианобактериями за биогенные элементы. Цель исследования заключается в разработке и применении комплексной математической модели, описывающей кинетику фитопланктона и процессы переноса веществ в условиях осолонения залива, а также в оценке эколого-гигиенических и медицинских последствий предложенного метода.

Материалы и методы. Объектом исследования является Таганрогский залив Азовского моря. Моделирование выполнено на основе трёхмерной гидродинамической модели «Azov3D», ранее применённой для расчётов течений и вертикального перемешивания в условиях изменяющейся солёности. Параметры водной среды (солёность, температура, скорости течений) использовались как входные данные для решения линеаризованной гидробиологической задачи. Источник батиметрических данных — оцифрованные лоцманские карты, обработанные с применением автоматизированных алгоритмов распознавания глубин. Сеточная основа модели формировалась с учётом реальной конфигурации береговой линии и рельефа дна. Расчёты выполнялись на вычислительном кластере Южного федерального университета. Численный метод основан на разностных схемах, применяемых ранее для гидробиологических расчётов в Азовском море.

Результаты исследования. Показано, что увеличение солёности на 30 % приводит к смещению ареала цианобактерий из акватории Азовского моря в восточную часть Таганрогского залива, что согласуется с гидрологическими наблюдениями. Модельные расчёты демонстрируют усиление доли зелёных водорослей при контролируемом внесении культур *Chlorella vulgaris*, что отражает потенциал биомелиорации. Прогноз пространственного распределения популяций показывает устойчивое доминирование зеленых и синезеленых водорослей, составляющих 60–70 % биомассы фитопланктона залива, при различных сценариях воздействия.

Обсуждение. Результаты показывают, что математическое моделирование является эффективным инструментом для прогнозирования динамики фитопланктонных популяций в условиях изменяющейся гидрологии. Модель позволяет оценить влияние биологической регуляции и сценариев осолонения, предоставляя основу для принятия управленческих решений в сфере экологического оздоровления водоёмов.

Заключение. Применение *Chlorella vulgaris* может быть перспективным методом биомелиорации, однако требует дальнейшей проверки с опорой на натурные наблюдения и контролируемые полевые эксперименты. Модельные результаты указывают на возможность адаптивного экологического управления Таганрогским заливом и минимизации риска токсичных цветений.

Ключевые слова: динамика фитопланктона, *Chlorella vulgaris*, моделирование эвтрофикации, гидродинамическая модель, уравнения конвекции-диффузии, перенос веществ, цветение цианобактерий, численное моделирование, биологическая регуляция, Таганрогский залив

© *Белова Ю.В., Колгунова О.В., Габуева М.И., 2025*

Благодарности. Авторы выражают искреннюю благодарность Сухинову Александру Ивановичу, доктору физико-математических наук, профессору, член-корреспонденту РАН за внимательное отношение и помощь в работе, конструктивные замечания и ценные рекомендации, которые способствовали улучшению качества исследования.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–11–00295–П, https://rscf.ru/project/22-11-00295/

Для цитирования. Белова Ю.В., Колгунова О.В., Габуева М.И. Математическое моделирование инвазии зелёных микроводорослей и оздоровления Таганрогского залива: эколого-гигиенические и медицинские последствия. *Computational Mathematics and Information Technologies.* 2025;9(4):56–67. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-4-56-67

Original Empirical Research

Mathematical Modelling of Green Microalgae Invasion and Rehabilitation of the Taganrog Bay: Ecological-Hygienic and Medical Consequences

Yuliya V. Belova[1], Olesya V. Kolgunova[2], Mariya I. Gabueva[3]

[1] Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

[2] North Ossetian State University, Vladikavkaz, Russian Federation

[3] North Ossetian State Medical Academy, Vladikavkaz, Russian Federation

✉ yvbelova@yandex.ru

Abstract

Introduction. The Taganrog Bay of the Azov Sea is one of the most eutrophic and ecologically vulnerable water areas in Russia, where massive blooms of toxic cyanobacteria (*Microcystis, Aphanizomenon, Anabaena, Nodularia*) regularly occur during summer. Their proliferation is accompanied by the accumulation of cyanotoxins (microcystin, anatoxin, cylindrospermopsin, saxitoxin), posing a serious threat to public health. This paper considers an approach to the biological rehabilitation of the bay based on the controlled introduction of the freshwater green microalgae *Chlorella vulgaris*, which competes with cyanobacteria for nutrients. The aim of the study is to develop and apply a comprehensive mathematical model describing phytoplankton kinetics and substance transport processes under conditions of increasing bay salinity, as well as to assess the ecological-hygienic and medical consequences of the proposed method.

Materials and Methods. The research object is the Taganrog Bay of the Azov Sea. The modelling is based on the three-dimensional hydrodynamic model "Azov3D", previously used to calculate currents and vertical mixing under conditions of changing salinity. Water environment parameters (salinity, temperature, current velocities) were used as input data for solving the linearized hydrobiological problem. The source of bathymetric data was digitized nautical charts processed using automated depth recognition algorithms. The model grid was generated considering the actual coastline configuration and bottom topography. Calculations were performed on the computing cluster of the Southern Federal University. The numerical method is based on finite-difference schemes previously applied for hydrobiological calculations in the Azov Sea.

Results. It is shown that a 30% increase in salinity leads to a shift in the cyanobacteria habitat from the Azov Sea water area to the eastern part of the Taganrog Bay, which is consistent with hydrological observations. Model calculations demonstrate an increase in the proportion of green algae with the controlled introduction of *Chlorella vulgaris* cultures, reflecting the potential for biomelioration. The forecast of the spatial distribution of populations shows stable dominance of green and blue-green algae, constituting 60–70% of the bay's phytoplankton biomass, under various impact scenarios.

Discussion. The results indicate that mathematical modelling is an effective tool for predicting the dynamics of phytoplankton populations under changing hydrological conditions. The model allows for assessing the influence of biological regulation and salinization scenarios, providing a basis for management decisions in the field of ecological rehabilitation of water bodies.

Conclusion. The application of *Chlorella vulgaris* may be a promising biomelioration method but requires further verification based on field observations and controlled field experiments. The modelling results indicate the possibility of adaptive ecological management of the Taganrog Bay and minimizing the risk of toxic blooms.

Keywords: phytoplankton dynamics, *Chlorella vulgaris*, eutrophication modelling, hydrodynamic model, convection-diffusion equations, substance transport, cyanobacterial bloom, numerical modelling, biological regulation, Taganrog Bay

Acknowledgements. The authors express sincere gratitude to Alexander Ivanovich Sukhinov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, for his attentive attitude and assistance in the work, constructive comments, and valuable recommendations, which contributed to improving the quality of the research.

Funding. The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 22–11–00295–П, https://rscf.ru/en/project/22-11-00295/

For Citation. Belova Yu.V., Kolgunova O.V., Gabueva M.I. Mathematical Modelling of Green Microalgae Invasion and Rehabilitation of the Taganrog Bay: Ecological-Hygienic and Medical Consequences. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2025;9(4):56–67. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-4-56-67

Введение. Азовское море и особенно Таганрогский залив относятся к наиболее эвтрофным и экологически уязвимым акваториям России. Поступление биогенных веществ из бассейна Дона, высокая температура воды в летний период и слабый водообмен приводят к массированному развитию цианобактерий (*Microcystis, Aphanizomenon, Anabaena, Nodularia*) [1–3]. Ряд цианобактерий продуцирует токсичные метаболиты — микроцистины, нодулярин, цилиндроспермопсин, сакситоксин, представляющие угрозу для здоровья человека [4–8]. Синезелёные (цианобактериальные) водоросли *Microcystis aeruginosa, Aphanizomenon flos-aquae* и представители рода *Anabaena* являются основными видами, формирующими массовые «цветения» в опреснённой зоне Таганрогского залива [9–12]. При отмирании этих организмов в воде появляется анатоксины *a* и *a*(*c*), действующие на нервную систему. Ранее предполагалось, что отравление разлагающимися клетками сине-зеленых водорослей вызывает так называемую Гаффскую болезнь [2].

Мониторинг Южного научного центра РАН показывает, что пиковые концентрации фитопланктона, в первую очередь цианобактерий, в Таганрогском заливе достигают уровней, классифицируемых ВОЗ как высокий риск для населения при купании и контакте с водой [2–4]. Концентрацию токсичных водорослей, в первую очередь продуцентов цианотоксинов, можно понизить за счет территориально-распределенного внедрения биологически значимых количеств зеленых микроводорослей *Chlorella vulgaris*, обеспечивающих эффективную конкуренцию за питательные (биогенные) вещества. В работе представлена гидробиологическая модель и результаты численного моделирования различных сценариев территориального (пространственного) распределения зеленых водорослей, обеспечивающих приемлемые эколого-гигиенические результаты биологического регулирования численности цианобактерий.

Приведем исходные данные, демонстрирующие биологические и эколого-гигиенические характеристики токсичных видов микроводорослей (гидробиоты) Таганрогского залива. По данным многолетних наблюдений ЮНЦ РАН [2, 3] фоновая летняя численность фитопланктона составляет 7,5–53 тыс. кл/мл, а на пике цветения (2015 г.) — до 152 тыс. кл/мл. При этом биомасса составляет 23,8 г/м³ [2]; максимум биомассы за многолетний период равен 70–80 г/м³ [3]; доля цианобактерий в структуре биомассы достигает 90 % [2, 3]. Такие концентрации соответствуют вредоносным цветениям (НАВ), а по классификации ВОЗ, которая представлена в таблице 1, относятся к уровням, при которых возможны неблагоприятные последствия для здоровья населения [4].

Таблица 1

Концентрации цианобактерий и классификация риска по ВОЗ

Показатель	Концентрация	Условия	Риск (ВОЗ)	Источники
Фоновая численность	7500–53000 кл/мл	Лето	Низкий	[2, 3]
Пик цветения	≈152000 кл/мл	Таганрогский залив	Высокий (> 100 000)	[2]
Биомасса (фон)	0,9–5,5 г/м³	Лето	Низкий	[2]
Биомасса (цветение)	23,8 г/м³	Цветение	Средний–высокий	[2]
Многолетний максимум	70–80 г/м³	Азовское море	НАВ	[3]
Микроцистин-LR (ПДК питьевой воды)	1 мкг/л	Вода	Допустимо	[4, 5]
Микроцистин-LR (рекреационные воды)	> 20 мкг/л	Купание	Опасно	[4]

В настоящее время известны следующие пути воздействия цианотоксинов на человека: контакт с кожей (кожный путь), вдыхание, гемодиализ и прием внутрь (оральный путь). При различении этих путей следует иметь в виду, что одновременно может действовать несколько путей воздействия на человека. Случаи раздражения кожи и аллергических реакций после контакта с цианобактериями в морских прибрежных водах регистрируются по меньшей мере в течение 30 лет. Симптомы включали сыпь, волдыри, аллергические реакции, напоминающие сенную лихорадку, астму, конъюнктивит, раздражение ушных раковин и глаз. У восьмидесяти пяти процентов пациентов после первоначального нейротоксикоза развились токсические симптомы, включая болезненную гепатомегалию, а также биохимические и гистологические признаки повреждения печени. Сообщалось о шестидесяти смертельных исходах, вызванных либо непосредственно гепатотоксичностью, либо косвенно осложнениями, включая желудочно-кишечное кровотечение, сепсис и сердечно-сосудистые проблемы [8].

Исследование Жидковой А.Ю. с соавторами показало, что повышение уровня эвтрофикации в Таганрогском заливе сопровождается ростом заболеваний ЖКТ, кожных заболеваний, аллергических реакций у населения прибрежных территорий [1]. Авторы отмечают прямую связь между ухудшением качества воды и динамикой обращений в лечебные учреждения.

Следует также отметить рост острых аллергических и токсических реакций при купании. При концентрациях цианобактерий более 20–100 тыс. кл/мл (уровни, типичные для Таганрогского залива летом) возможны: кожный зуд, дерматиты, сыпь, конъюнктивит, ринит, кашель, першение в горле, обострение астмы, тошнота, рвота, диарея при случайном заглатывании воды.

Эти эффекты описаны в отчетах ВОЗ и EPA [4, 7, 8] и подтверждаются статистически состоятельными данными по региону, примыкающему к побережью Азовского моря [1, 2]. Особое внимание привлекают случаи тяже-

лых и острых интоксикаций, в том числе приводящих к гепатотоксическим эффектам (микроцистин, нодулярин). Подтвержденные случаи последствий, в том числе заболеваний острым токсическим гепатитом, резким ростом трансаминазы, поражения сосудов печени, геморрагического некроза и другие, изложены в работах [4, 6, 8]. Для обеспечения целостности анализа учтены как острые нейротоксические воздействия (сакситоксин, анатоксин), так и гепато- и нефротоксические эффекты, а также долгосрочные хронические последствия влияния цианотоксинов, включая потенциальные канцерогенные риски. Сводные данные о концентрациях цианобактерий и их токсинов, характере токсического действия и возможных клинических проявлениях представлены в таблице 2.

Таким образом, вредоносные цветения цианобактерий являются значимой угрозой для здоровья населения Азовского региона и требуют системного мониторинга и профилактики. Относительно недорогим, быстрым и доступным методом прогнозирования неблагоприятных ситуаций, связанных с обильным цветением цианобактерий в летнее время, является математическое моделирование.

Моделированию цветения потенциально вредоносных цианобактерий посвящен ряд отечественных и зарубежных публикаций. В работе [13] исследуется влияние фосфора в стимулировании развития сине-зеленых водорослей. В статье [14] была представлена нестационарная трехкомпонентная математическая модель конкуренции двух типов фитопланктона, в том числе токсичного, и их выедание зоопланктоном.

Таблица 2

Концентрации цианобактерий и цианотоксинов,
типы воздействия и возможные клинические проявления у человека

Концентрация цианобактерий:	Воздействие	Клинические проявления	Источники
7,5–53 тыс. кл/мл	Контакт	Лёгкие кожные реакции	[2, 3]
~152 тыс. кл/мл	Купание	Сыпь, зуд, ЖКТ-расстройства	[1, 2, 4]
20–80 г/м³ биомассы	Повторный контакт	Диарея, рвота, дерматиты	[3, 4]
Микроцистина-LR ≥ 1 мкг/л	Питьевая вода	Гепатотоксичность	[4, 5, 6]
Микроцистина-LR ≥ 20 мкг/л	Купание	Острый токсикоз	[4]
Сакситоксина > 3 мкг/л	Поступление с водой/рыбой	Нейротоксические симптомы, паралич	[7]
Цилиндроспермопсина ~1 мкг/л	Контакт, вода	Гепато- и нефротоксичность	[9]
Хронические низкие дозы	Длительное проживание	Повышение риска онкологических и хронических заболеваний	[1, 8]

Одним из методов ограничения массовых цветений цианобактерий является биологическая регуляция (биомелиорация) водоёмов путём контролируемого внесения культур зелёных микроводорослей *Chlorella vulgaris* [15]. Суть метода заключается в том, что зеленые водоросли вносятся в водоем до начала вегетационного периода сине-зеленых водорослей, где они поглощают большую часть питательных веществ, что позволяет ограничить или даже остановить размножение и рост вредоносных цианобактерий. В свою очередь, зелёные микроводоросли служат кормовой базой для зоопланктона и молоди рыб, что способствует стабилизации трофической структуры водоёма [16]. При типичных концентрациях зеленых водорослей не обнаружено их негативное воздействие на экосистему водоема, а также вредоносное влияние на здоровье человека. Кроме того, зеленые водоросли нашли применение в сельском хозяйстве в качестве удобрений, прикорма для сельскохозяйственных животных, а также для очистки сточных вод [17].

Однако следует различать контролируемое внесение культур *Chlorella vulgaris* в рамках биомелиорации и неконтролируемое массовое развитие зелёных водорослей. Последнее может ухудшать органолептические свойства воды, повышать концентрацию растворённого органического вещества и усиливать бактериальную обсеменённость, что в свою очередь, приводит к увеличению образования побочных продуктов дезинфекции при хлорировании [5–7, 9]. Эти эффекты относятся не к биотехнологии биомелиорации, а к самопроизвольным цветениям зелёных водорослей при избытке биогенных элементов.

С учётом выраженной эвтрофикации прибрежных вод Азовского моря особый интерес представляет использование зелёных микроводорослей *Chlorella vulgaris* в качестве биологического регулятора численности цианобактерий. Результаты лабораторных и полуполевых экспериментов показывают, что при совместном культивировании *Chlorella vulgaris* и токсичных видов (*Microcystis aeruginosa, Aphanizomenon flos-aquae, Anabaena spp*) наблюдается выраженная конкуренция за доступные формы азота и фосфора, приводящая к снижению темпов роста цианобактерий и частичной гибели их клеток в пределах нескольких недель вегетационного периода. Эти данные позволяют рассматривать контролируемое внесение зелёных микроводорослей как потенциальный инструмент биологической регуляции, эффективность которого во многом определяется пространственным распределением биомассы, начальными концентрациями фитопланктона и уровнем биогенной нагрузки [18, 19].

Ввиду вышесказанного математическое моделирование биологической реабилитации водоема является актуальной задачей и представляет интерес с точки зрения регулирования численности сине-зеленых водорослей при

географически распределенном их внесении в водную среду Таганрогского залива. Цель данной работы — провести математическое моделирование оздоровления Таганрогского залива путем внесения зеленых микроводорослей и оценить эколого-гигиенические и медицинские последствия.

Для достижения цели авторами данного исследования предложено использовать комплекс математических моделей динамики фитопланктонных популяций и гидродинамики, учитывающих адвективный и диффузионный перенос, погодные условия, геометрию расчетной области, лимитирование роста микроводорослей наличием питательных веществ, режимы солености и температуры [20]. Для решения поставленной задачи использованы современные разностные схемы и численные методы.

Материалы и методы. Математическая модель биологической кинетики базируется на работах А.И. Сухинова и Е.В. Якушева [21, 22]. Подробно математическая модель, нелинейные правые части уравнений, постановка начально-краевой задачи приводятся в работе [22]. Приведем краткое описание математической модели и ее линеаризацию.

Данная модель основана на системе нестационарных уравнений конвекции-диффузии-реакции параболического типа с нелинейными функциями источников и младшими производными. Адвективные члены представлены в симметричной форме, что гарантирует кососимметричность оператора переноса и позволяет осуществить корректную постановку задачи. Для каждой субстанции F_i, входящей в модель, уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial q_i}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\nabla\cdot\left(\mathbf{V}q_i\right)+\left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)q_i\right)=\operatorname{div}\left(k\cdot\nabla q_i\right)+R_{q_i}, \tag{1}$$

где q_i — концентрация i-ой ($i=\overline{1,8}$) компоненты, мг/л; $\mathbf{V}$ = {u, v, w} — вектор скорости водного потока, м/с; $k=(k_h, k_h, k_v)$ — коэффициенты турбулентного обмена, м^2/с; ∇ — обозначение оператора градиента; $(x, y, z)\in G$; $0<t\le T$; R_{qi} — функция-источник биогенных веществ, мг/(л·с); $i\in M$, $M=\{F_1, F_2, DOP, POP, PO_4, NO_3, NO_2, NH_4\}$; F_1 означает, что рассматривается концентрация зеленой водоросли, F_2 — сине-зеленой водоросли. Далее указаны биогенные компоненты: DOP означает принадлежность компоненты к растворенному фосфору, POP — органическому фосфору во взвешенном состоянии, PO_4 — фосфатам, NO_3 — нитратам, NO_2 — нитритам, NH_4 — аммонию (аммонийному азоту).

Биохимические взаимодействия между компонентами системы (1), функции правых частей $R_{qi}=R_{qi}(x, y, z, t)$, в общем случае — нелинейные зависимости, которые могут зависеть от температуры водной среды и её солености, имеют вид:

$$\begin{gathered}
R_{F_i}=C_{F_i}(1-K_{F_iR})q_{F_i}-K_{F_iD}q_{F_i}-K_{F_iE}q_{F_i},\ i=1,2,\\
R_{DOP}=\sum_{i=1}^{3}s_PK_{F_iE}q_{F_i}+K_{PD}q_{POP}-K_{DN}q_{DOP},\\
R_{POP}=\sum_{i=1}^{3}s_PK_{F_iD}q_{F_i}-K_{PD}q_{POP}-K_{PN}q_{POP},\\
R_{PO_4}=\sum_{i=1}^{3}s_PC_{F_i}\left(K_{F_iR}-1\right)q_{F_i}+K_{PN}q_{POP}+K_{DN}q_{DOP},\\
R_{NO_3}=\sum_{i=1}^{3}s_NC_{F_i}\left(K_{F_iR}-1\right)\frac{f_N^{(1)}\left(q_{NO_3},q_{NO_2},q_{NH_4}\right)}{f_N\left(q_{NO_3},q_{NO_2},q_{NH_4}\right)}\cdot\frac{q_{NO_3}}{q_{NO_2}+q_{NO_3}}q_{F_i}+K_{23}q_{NO_2},\\
R_{NO_2}=\sum_{i=1}^{3}s_NC_{F_i}(K_{F_iR}-1)\frac{f_N^{(1)}\left(q_{NO_3},q_{NO_2},q_{NH_4}\right)}{f_N\left(q_{NO_3},q_{NO_2},q_{NH_4}\right)}\cdot\frac{q_{NO_2}}{q_{NO_2}+q_{NO_3}}q_{F_i}+K_{42}q_{NH_4}-K_{23}q_{NO_2},\\
R_{NH_4}=\sum_{i=1}^{3}s_NC_{F_i}\left(K_{F_iR}-1\right)\frac{f_N^{(2)}\left(q_{NH_4}\right)}{f_N\left(q_{NO_3},q_{NO_2},q_{NH_4}\right)}q_{F_i}+\sum_{i=1}^{3}s_N\left(K_{F_iD}+K_{F_iE}\right)q_{F_i}-K_{42}q_{NH_4},
\end{gathered} \tag{2}$$

где K_{F_iR} — удельная скорость дыхания фитопланктона; K_{F_iD} — удельная скорость гибели фитопланктона; K_{F_iE} — удельная скорость экскреции фитопланктона; K_{PD} — удельная скорость автолиза POP; K_{PN} — коэффициент фосфатофикации POP; K_{DN} — коэффициент фосфатофикации DOP; K_{42} — удельная скорость окисления аммония в нитриты в процессе нитрификации; K_{23} — удельная скорость окисления нитритов в нитраты в процессе нитрификации, S_P, S_N — коэффициенты нормировки между содержанием N, P в органическом веществе. Скорость роста фитопланктонных популяций выражается функцией зависимости от солености S, температуры T:

$$C_{F_{1,2}}=K_{NF_{1,2}}f_T(T)f_S(S)min\left\{f_P\left(q_{PO_4}\right), f_N\left(q_{NO_3},q_{NO_2},q_{NH_4}\right)\right\},$$

где K_{NF} — максимальная удельная скорость роста фитопланктона.

Также рост микроводорослей зависит от концентрации основных питательных веществ — соединений азота (нитраты, нитриты, аммиак) и фосфора (фосфаты, растворенный органический фосфор, взвешенный органический фосфор), функциональные зависимости для которых записаны в форме Михаэлиса-Ментен. Все эти факторы являются лимитирующими и их влияние отражает закон Либиха.

Функциональные зависимости от абиогенных факторов выражены следующими формулами:

$$f_T(T) = \exp\left(-a_i\left\{\left(T - T_{opt}\right)/T_{opt}\right\}^2\right),$$

$$f_S(S) = \exp\left(-b_2\left\{\left(S - S_{opt}\right)/S_{opt}\right\}^2\right),$$

$$f_S(S) = \begin{cases} k_s, \text{ for } S \le S_{opt}, \\ \exp\left(-b_1\left\{\left(S - S_{opt}\right)/S_{opt}\right\}^2\right), \text{ для } S > S_{opt}, \end{cases}$$

где $k_s = 1$; T_{opt}, S_{opt} — оптимальные температура и солёность для данного вида водных организмов; $a_i > 0$, $b_i > 0$; $i = 1,2$ — коэффициенты, характеризующие ширину диапазона толерантности водных организмов к температуре и солёности соответственно.

Для системы (1) ставится начально-краевая задача, добавляются соответствующие начальные и граничные условия. Начальные условия для системы (1) имеют вид:

$$\begin{gathered} q_i(x,y,z,0) = q_{0i}(x,y,z),\ i \in M,\ t = 0,\ (x,y,z) \in \overline{G}, \\ \mathbf{V}(x,y,z,0) = \mathbf{V}_0(x,y,z),\ T(x,y,z,0) = T_0(x,y,z),\ S(x,y,z,0) = S_0(x,y,z), \end{gathered} \tag{3}$$

где G — расчетная область замкнутого водоема, ограниченная боковой поверхностью (цилиндрической области) σ, дном $\partial\Sigma_H = \partial\Sigma_H(x,y)$ и Σ_0 — невозмущенной свободной поверхностью водоёма; Σ — кусочно-гладкая граница G, заданная для $0 < t \le T$ при $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_H \cup \sigma$.

С учетом введенных обозначений граничные условия для уравнения (1) формулируются следующим образом на σ:

$$\begin{gathered} q_i = 0, \text{ если } u_n < 0, \\ \frac{\partial q_i}{\partial n} = 0, \text{ если } u_n \ge 0, \\ \frac{\partial q_i}{\partial z} = 0 \text{ на } \Sigma_o, \\ \frac{\partial q_i}{\partial z} = -\varepsilon_i q_i \text{ на дне } \Sigma_H, \end{gathered} \tag{4}$$

где ε_i — неотрицательные постоянные, $i \in M$; ε_i учитывают опускание водорослей на дно, их затопление и поглощение питательных веществ донными отложениями для $i \in \{F_1, F_2\}$.

На равномерной временной сетке $\omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0,1..., N;\ N\tau = T\}$ в промежутке $0 < t \le T$ для непрерывной модели проведена линеаризация нелинейной относительно функций правых частей системы начально-краевых задач (1)–(4). Решения линеаризованной задачи будем обозначать как функции вида $\tilde{q}_i^n$, $n = 1,2..., N$ с учетом начальных и граничных условий. Линеаризация предполагает задание функций концентраций субстанций, входящих в правые части уравнений на предыдущем временном слое t_{n-1}. Если $n = 1$, то привлекаются известные начальные условия (3).

Сформулируем нелинеаризованную (исходную) систему (1) в виде цепочки связанных начально-краевых задач вида:

$$\frac{\partial q_i^n}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\operatorname{div}\left(\mathbf{V} \cdot q_i^n\right) + q_i^n \cdot \operatorname{div}\mathbf{V}\right) = \operatorname{div}\left(\mathbf{k} \cdot \operatorname{grad}\ q_i^n\right) + R_{q_i}^n, \tag{5}$$

где $i \in M$, $(x, y, z) \in G$, $n = 1,2..., N$, $t_{n-1} < t \le t_n$, $t \in \omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = ,2..., N\}$ с начальными и граничными условиями, рассматриваемыми на промежутке $t_{n-1} < t \le t_n$ для каждого из уравнений.

Линеаризация предполагает задание функций концентраций субстанций, входящих в правые части уравнений на предыдущем, по отношению к текущему, временном слое:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \tilde{q}_i^n}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\operatorname{div}\left(\mathbf{V} \cdot \tilde{q}_i^n\right) + \tilde{q}_i^n \cdot \operatorname{div}\mathbf{V}\right) = \operatorname{div}\left(\mathbf{k} \cdot \operatorname{grad}\ \tilde{q}_i^n\right) + \tilde{R}_{q_i}^n, \\ \tilde{R}_{q_i}^{n-1} = R_{q_i}\left(x,y,z,t_{n-1},\tilde{q}_i^{n-1}\right),\ i \in M. \end{gathered} \tag{6}$$

Доказано стремление нормы погрешности $\left\|z_i^n\right\|_{L_2(G)}$ к нулю для любого n и i при выполнении условий, мотивированных на основе гидрофизических и биогеохимических ограничений. Получены неравенства, гарантирующие близость решений линеаризованной и нелинейной задач для каждой из субстанций F_i в $L_2(G)$ на последовательности сеток ω_τ при $\tau \to 0$:

$$\left\|z_1^n(x,y,z,t_n)\right\|_{L_2(G)} \underset{C_1 \equiv const > 0}{\le} C_1\tau \underset{n=1,2,...,N}{}.$$

Представленную математическую модель необходимо оснастить входными данными с начальными значениями концентраций исследуемых субстанций, солености, температуры, скоростей движения водной среды и др. В 2022–2024 годах сотрудниками Азово-Черноморского филиала ФГБУН «ВНИРО» — «АзНИИРХ» были исследованы гидробиологические характеристики Азовского моря, в частности соленость и температура вод. Значения величин солености в точках на сетке гидробиологических съемок представлены в работе [11]. Данные натурных измерений согласуются с предположением авторов данной статьи об увеличении солености Азовского моря в части Таганрогского залива на 30 % от нормальных для водоема значений, что отражено в работе [10]. Также был сделан прогноз развития основных видов фитопланктонных популяций в летнее время при различных сценариях осолонения Азовского моря.

В результате осолонения Азовского моря ареал синезеленых водорослей сместился к восточной части Таганрогского залива, в основной части моря они почти отсутствуют, что подтверждено данными «АзНИИРХ» [10].

Принимая во внимание вышесказанное, можно предположить, что полученные ареалы фитопланктонных популяций при значениях солености, увеличенных на 30 % от нормальных, могут быть использованы в качестве начальных распределений концентраций фитопланктонных популяций для проведения вычислительного эксперимента по биологической реабилитации водоема. Представленный на рис. 1 прогноз географического положения фитопланктонных популяций отражает соотношение зеленых и синезеленых водорослей, биомасса которых в Таганрогском заливе составляет 60–70 % от общей биомассы фитопланктона [3].

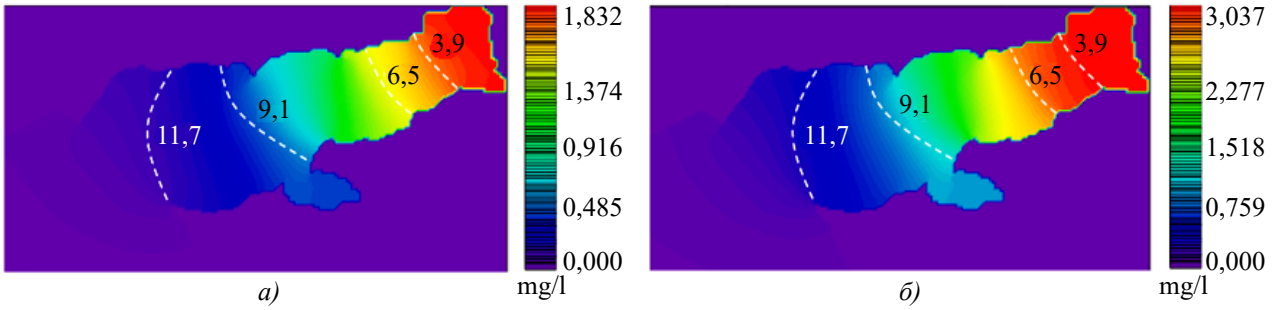


Рис. 1. Ареалы фитопланктонных популяций в летнее время:
а — зеленые водоросли; *б* — сине-зеленые водоросли

В начале вегетационного периода питательные вещества находятся в изобилии, они поступают в Таганрогский залив со стоками реки Дон в зимний период. В начале эксперимента распределения основных питательных веществ задаются равномерными. Концентрация фосфатов равна 0,04 мг/л, нитратов — 0,204 мг/л. По данным «АзНИИРХ» [10] средняя концентрация биомассы фитопланктона в Таганрогском заливе составляет 1 мг/л, на биомассу цианобактерий приходится 70 %. Ареалы начальных распределений фитопланктонных популяций изображены на рис. 1, максимальная концентрация зеленых водорослей — 0,1 мг/л, цианобактерий — 0,7 мг/л. Оптимальная температура при проведении эксперимента для зеленых водорослей принята равной 25 °С, для синезеленых — 28 °С. Распределения значений солености и температуры, подаваемые на вход программного модуля для моделирования биологической реабилитации водоема, изображены на рис. 2 [23].

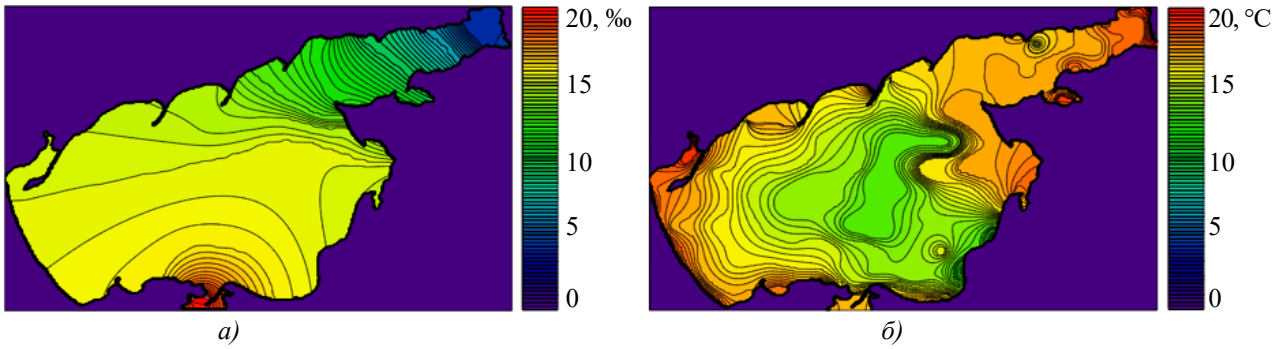


Рис. 2. Начальные данные. Распределения значений: *а* — солености; *б* — температуры

При решении линеаризованной задачи (1)–(10) в качестве входных данных используются значения компонент вектора водного потока в узлах гидродинамической расчетной сетки, который рассчитывается на основе 3D модели гидродинамики, реализованной в комплексе программ «Azov3D» [24], значения солености S_0, температуры T_0 и рассчитываемых концентраций q_{0i} в момент времени t_0. Для определения границ расчетной области использовались значения глубин, полученные в результате обработки лоцманских карт [25].

Численное решение задачи заключается в построении дискретной модели (разностной схемы) с использованием входных данных и применении метода численного решения сеточных уравнений. Область моделирования

предполагается вписанной в трехмерную ступенчатую область и покрывается расчетной сеткой $\omega_\tau \times \omega_h$, равномерной по времени и трем пространственным направлениям:

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0,1..., N,\ N\tau = T\},$$

$$\bar{\omega}_h = \{x_j = j \cdot h_x,\ y_k = k \cdot h_y,\ z_l = l \cdot h_z;\ j = 0,1..., N_x,\ k = 0,1..., N_y,\ l = 0,1..., N_z\},$$

где τ — шаг по времени; $0 \le t \le T$ — временной отрезок; h_x, h_y, h_z — шаги в пространственных направлениях *Ox*, *Oy* и *Oz* соответственно; N_x, N_y, N_z —максимальное число узлов сетки по каждому пространственному направлению; L_x, L_y, L_z — максимальные размеры расчетной области в пространстве.

Рассмотренная выше линеаризация позволяет получить систему линейных сеточных уравнений. Дискретизация задачи (1), основанная на системе уравнений конвекции-диффузии-реакции, осуществляется на основе неявных монотонных схем, построенных на гидродинамических сетках.

Эксперимент по биологической реабилитации состоит в следующем: вводится суспензия зеленых водорослей в начале их вегетационного периода, то есть в марте-апреле. К началу вегетационного периода сине-зеленых водорослей (в мае-июне) зеленые водоросли потребляют большую часть питательных веществ и их становится недостаточно для бурного цветения сине-зеленых водорослей.

Суспензию хлореллы лучше всего вносить в те области водоема, где конвекция имеет наибольшую величину, например, русла рек, оконечности кос и др. Значения скоростей водного потока получены в результате работы программного комплекса «Azov3D», реализующего трехмерную нестационарную математическую модель гидродинамики. В Азовском море преобладают восточные и северо-восточные ветра в период с октября по апрель. Такие направления складываются под влиянием отрога сибирского антициклона [26], поэтому картина течений, полученная при восточном направлении ветра, выбрана в качестве входных данных для проведения вычислительного эксперимента по биологической реабилитации Таганрогского залива в условиях повышенной солености. Картина течений в Азовском море при скорости восточного ветра 5 м/с изображена на рис. 3. Красными точками отмечены места внесения суспензии. При выборе точек учитывалась скорость течений и тот факт, что *Chlorella Vulgaris* — пресноводные водоросли, а также доступность для внесения суспензии с берега. Концентрация *Chlorella Vulgaris* в суспензии — 1167 мг/л, скорость выпуска — 5 л/с, всего выпущено 25 тонн, по 2,5 тонны в каждой из 10 точек выпуска.

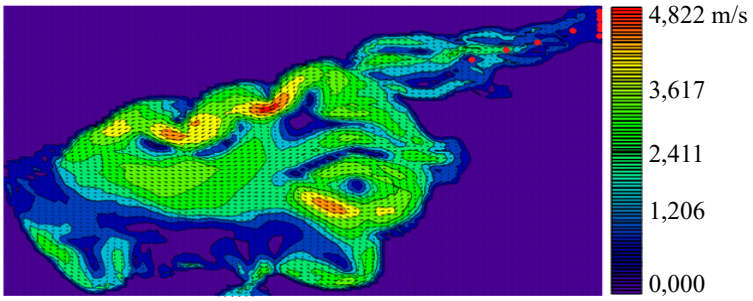
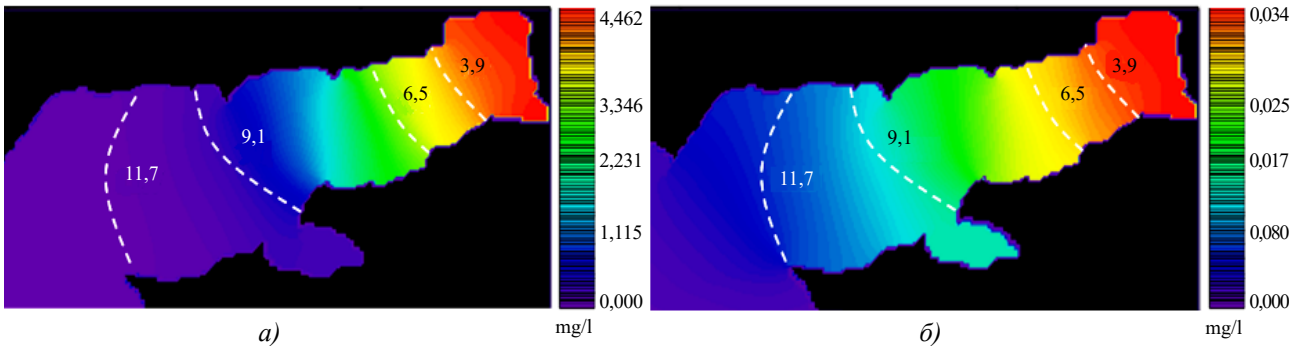


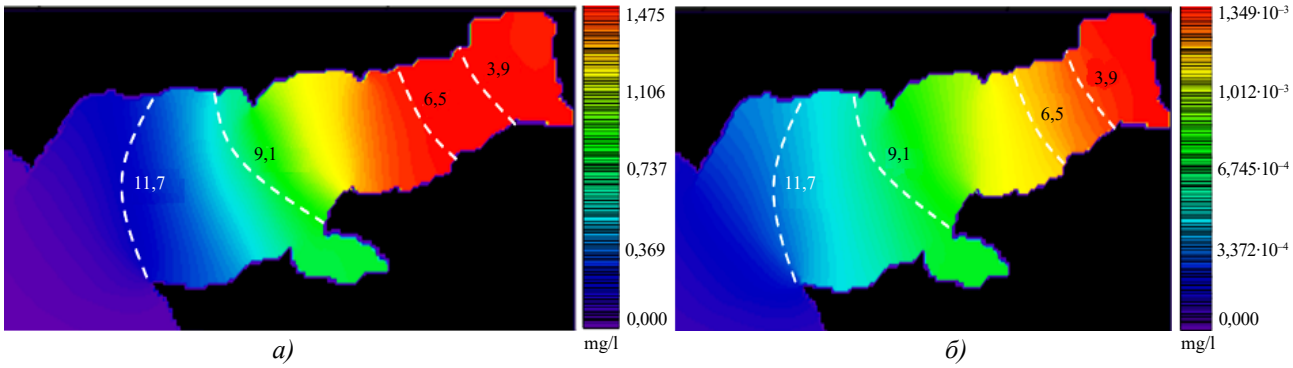
Рис. 3. Картина течений в Азовском море при восточном ветре 5 м/с

Результаты исследования. В рамках данного исследования проведено моделирование биологической реабилитации Таганрогского залива в условиях его осолонения на основе внедрения зеленых микроводорослей. В результате проведенного вычислительного эксперимента авторы получили распределения концентраций зеленых водорослей и сине-зеленых водорослей на временных интервалах 15 дней (рис. 4) и 30 дней (рис. 5) для концентрации *Chlorella Vulgaris* в суспензии 1167 мг/л, объем 25 тонн.



а) *б)*

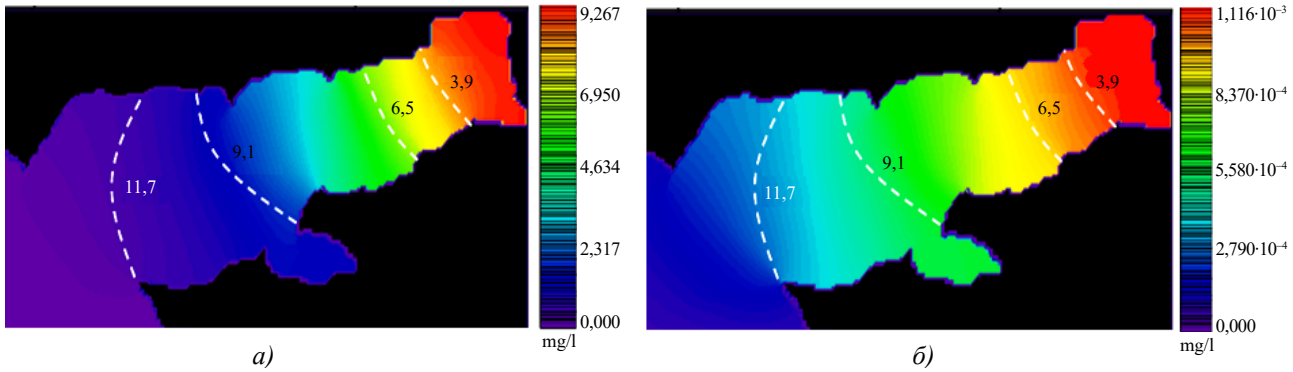
Рис. 4. Распределения концентраций спустя 15 дней
после внесения суспензии *Chlorella Vulgaris* (концентрация 1167 мг/л):
а — зеленых водорослей; *б* — сине-зеленых водорослей



а) *б)*

Рис. 5. Распределения концентраций спустя 30 дней
после внесения суспензии *Chlorella Vulgaris* (концентрация 1167 мг/л):
а — зеленых водорослей; *б* — сине-зеленых водорослей

На рис. 6 изображены распределения концентраций зеленых водорослей и сине-зеленых водорослей (поверхностный слой) на временном интервале 30 дней для концентрации *Chlorella Vulgaris* в суспензии 2333 мг/л и объема 25 тонн.



а) *б)*

Рис. 6. Распределения концентраций спустя 30 дней
после внесения суспензии *Chlorella Vulgaris* (концентрация 2333 мг/л):
а — зеленых водорослей; *б* — сине-зеленых водорослей

На рис. 4–6 изображены значения концентраций двух видов микроводорослей на поверхности водоема.

Обсуждение. Полученные в результате моделирования распределения концентраций зеленых и сине-зеленых водорослей говорят об успешности поставленного вычислительного эксперимента по биологической реабилитации Таганрогского залива при заданных значениях концентрации и объема вносимой суспензии. Моделировалось внесение в водоем суспензии фитопланктона *Chlorella Vulgaris* в весенний период до начала вегетационного периода потенциально токсичных сине-зеленых водорослей *Aphanizomenon flos-aquae*. Точки внесения были выбраны в распресненной зоне (значения солености до 7–8 %), что позволило пресноводным зеленым водорослям выжить и успешно вегетировать. Зеленые микроводоросли потребили фосфаты (PO_4) и нитраты (NH_4), поэтому к началу вегетационного периода сине-зеленых водорослей питательные вещества были в недостатке. Концентрация сине-зеленых водорослей превосходила концентрацию зеленых водорослей в начале эксперимента (0,7 мг/л и 0,1 мг/л соответственно). Через 15 суток концентрация сине-зелёных водорослей была в 131 раз меньше концентрации зелёных (0,034 мг/л и 4,462 мг/л соответственно). Через 30 суток разница в концентрациях ещё больше увеличилась ($1{,}349 \cdot 10^{-3}$ мг/л и 1,475 мг/л соответственно). Также, как показано на рис. 6, при увеличении концентрации внесённой зелёной водоросли вдвое (до 2333 мг/л при том же объёме) концентрация *Chlorella Vulgaris* через 30 суток становится потенциально опасной (9,267 мг/л). Такое значение концентрации зеленой водоросли в совокупности с другими видами фитопланктона может привести к эвтрофикации водоема и заморам рыб.

Также увеличение количества вносимых зеленых водорослей является дорогим, а, следовательно, экономически невыгодным. В результате вычислительного эксперимента эмпирическим путем определены оптимальные концентрация и объем вносимой суспензии *Chlorella Vulgaris*. Следует отметить, что результаты вычислительного эксперимента получены с использованием достоверных данных о значениях солености, температуры и распределений моделируемых субстанций, подтвержденных натурными исследованиями и многолетними наблюдениями. Ситуация, когда концентрация зеленых водорослей превышает концентрацию сине-зеленых водорослей (рис. 5) с позиций оценки эколого-гигиенических и медицинских последствий является благоприятной и не следует ожидать существенных негативных последствий от наличия сине-зеленых водорослей для рекреационных условий в Таганрогском заливе. При этом концентрация зеленых водорослей не выше предельно допустимых значений и является приемлемой.

Заключение. Результаты моделирования получены с применением современных и высокоточных методов математического моделирования. Результаты исследования показывают преимущество использования комплексного подхода в математическом моделировании процессов, происходящих в сложных природных системах. Они могут успешно использоваться для моделирования различных сценариев развития и реабилитации водоемов. Несмотря на полученные результаты, инвазию хлореллы в экосистему Таганрогского залива нельзя рассматривать в качестве единственного метода улучшения экологического состояния водоема, но он может быть эффективным инструментом реабилитации водоемов в сочетании с другими методами.

Список литературы / References

1. Zhidkova A.Y., Podberesnij V.V., Zarubina R.V., Kononova O.A. The effect of eutrophication on human health on the example of the Gulf of Taganrog of the Sea of Azov. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science.* 2020;548:052053. https://doi.org/10.1088/1755-1315/548/5/052053

2. Матишов Г.Г., Фуштей Е.В. К проблеме вредоносных цветений воды в Азовском море. *Исследовано в России.* 2003;6:213–225.

Matishov G.G., Fushtei T.V. On the problem of harmful algal blooms in the Azov Sea. *Electronic Journal "Research in Russia"*. 2003;6:213–225. (In Russ.)

3. Ковалева Г.В. Том VIII: Моделирование и анализ опасных природных явлений в Азовском регионе. В кн.: *Труды Южного научного центра Российской академии наук*. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮНЦ РАН; 2020. 328 с.

Kovaleva G.V. Issue VIII: Modelling and Analysis of Natural Hazards in the Sea of Azov Region. In book: *Studies of the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences (Series)*. Rostov-on-Don: SSC RAS Publishers; 2020. 328 p. (In Russ.)

4. World Health Organization. Guidelines on recreational water quality: Volume 1 — Coastal and Fresh Waters. *Geneva: WHO*; 2021. ISBN: 978-92-4-003130-2. URL: https://www.who.int/publications/i/item/9789240031302 (дата обращения: 11.09.2025).

5. Гигиенические нормативы и требования к обеспечению безопасности и (или) безвредности для человека факторов среды обитания. СанПиН 1.2.3685–21. № 62296. Москва: Минздрав России; 2021. URL: https://docs.cntd.ru/document/573500115 (дата обращения: 09.09.2025).

Hygienic standards and safety requirements for environmental factors. SanPiN 1.2.3685–21. No. 62296. Moscow: Ministry of Health of Russia; 2021. URL: https://docs.cntd.ru/document/573500115 (accessed: 09.09.2025).

6. Чернова Е.Н., Шевченко А.Н. Определение цианотоксинов в питьевой воде методом ВЭЖХ. *Гигиена и санитария*. 2018;97(8):692–697. https://doi.org/10.18821/0016-9900-2018-97-8-692-697

Chernova E.N., Shevchenko A.N. Determination of cyanotoxins in drinking water by HPLC. *Hygiene and Sanitation.* 2018;97(8):692–697. https://doi.org/10.18821/0016-9900-2018-97-8-692-697

7. Hallegraeff G.M. Harmful algal blooms: A global overview. *Elsevier Oceanography Series*. 2003;65:25–50. https://doi.org/10.1016/S0422-9894(03)80050-9

8. Backer L.C., Carmichael W.W. Human health effects from exposure to cyanobacteria and their toxins. *Environmental Health Perspectives*. 2016;124(11):1333–1343. https://doi.org/10.1289/EHP.1510459

9. Griffiths D.J., Saker M.L. Cylindrospermopsis raciborskii and cylindrospermopsin. *Environmental Toxicology*. 2003;18(2):78–93. https://doi.org/10.1002/tox.10113

10. О летних цветениях синезелёных водорослей в Таганрогском заливе АзНИИРХ. URL: https://azniirkh.vniro.ru/content/read/archive/novosti/o-letnih-tsveteniyah-sinezelenyih-vodorosley-v-taganrogskom-zalive (дата обращения: 11.09.2025).

AzNIIRKH. Summer cyanobacterial blooms in the Taganrog Bay. 7 September 2018. (In Russ.) URL: https://azniirkh.vniro.ru/ (accessed: 11.09.2025).

11. Бердников С.В., Кулыгин В.В., Дашкевич Л.В. Причины стремительного роста солёности воды Азовского моря в XXI веке. *Морской гидрофизический журнал*. 2023;39(6):760–778.

Berdnikov S.V., Kulygin V.V., Dashkevich L.V. Causes of the rapid increase in salinity of the Sea of Azov in the 21st century. *Marine Hydrophysical Journal*. 2023;39(6):760–778. (In Russ.)

12. Chorus I., Welker M., editors. *Toxic cyanobacteria in water: A guide to their public health consequences, monitoring and management*. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press; 2021.

13. Xiao M., Burford M.A., Wood S.A., et al. Schindler's legacy: From eutrophic lakes to phosphorus utilization strategies. *FEMS Microbiology Reviews*. 2022;46(6):fuac029. https://doi.org/10.1093/femsre/fuac029

14. Neverova G., Zhdanova O. Mathematical modeling of plankton evolutionary dynamics. *Mathematics*. 2023;11(22):4673. https://doi.org/10.3390/math11224673

15. Богданов Н.И. *Биологическая реабилитация водоёмов*. Пенза: ПГСХА; 2008.126 с.

Bogdanov N.I. *Biological rehabilitation of water bodies*. Penza: PGSKhA Publishing; 2008;18–26. (In Russ.)

16. Aly S.M., ElBanna N.I., Fathi M. Chlorella in aquaculture. *Aquaculture International*. 2024;32:1559–1586. https://doi.org/10.1007/s10499-023-01229-x

17. Богданов Н.И. *Суспензия хлореллы в рационе сельскохозяйственных животных*. Пенза: НП «Здоровье и экология»; 2007; 48 с.

Bogdanov N.I. *Chlorella suspension in the diet of farm animals. Russian Academy of Agricultural Sciences, Research Institute of Agriculture*. 2nd ed. Penza; 2007;17. (In Russ.)

18. Pavlyuk T.E., Nikolaev A.D., Ivanova I.V., et al. Correction of algal communities with Chlorella introduction. *Water Resources*. 2023;50(3):324–333. https://doi.org/10.31857/S0321059623030106

19. Gao J., Shao N., Sun Y., et al. Impact of Chlorella vulgaris on pond microbiota. *Sustainability*. 2023;15(9):7362. https://doi.org/10.3390/su15097362

20. Kudinov N.V., Filina A.A., Nikitina A.V., Bondarenko D.V., Razveeva I.F. Simulation of vertical movements of seawater in stratified reservoirs. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2023;23(2):212–224. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-2-212-224

21. Yakushev E.V., Pollehne F., Jost G., et al. Analysis of oxic/anoxic interfaces. *Marine Chemistry*. 2007;107:388–410. https://doi.org/10.1016/j.marchem.2007.06.003

22. Sukhinov A., Belova Y., Chistyakov A., Beskopylny A., Meskhi B. Modeling phytoplankton population geographic dynamics. *Mathematics*. 2021;9:3025. https://doi.org/10.3390/math9233025

23. Белова Ю.В., Чистяков А.Е. Моделирование динамики концентрации вредоносных видов фитопланктона в Таганрогском заливе Азовского моря. *Безопасность техногенных и природных систем*. 2025;9(4):284–293. https://doi.org/10.23947/2541-9129-2025-9-4-284-293

Belova Yu.V., Chistyakov A.E. Modeling the Dynamics of Harmful Phytoplankton Species Concentration in Taganrog Bay of the Azov Sea. *Safety of Technogenic and Natural Systems*. 2025;9(4):284–293. https://doi.org/10.23947/2541-9129-2025-9-4-284-293

24. Сухинов А.И., Никитина А.В., Атаян А.М., и др. Суперкомпьютерное моделирование гидробиологических процессов. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2022;14:677–690. https://doi.org/10.20948/mm-2022-01-06

Sukhinov A.I., Nikitina A.V., Atayan A.M., Litvinov V.N., Belova Yu.V., Chistyakov A.E. Supercomputer simulation of hydrobiological processes. *Mathematical Models and Computer Simulations.* 2022;14:677–690. (In Russ.) https://doi.org/10.20948/mm-2022-01-06

25. Рахимбаева Е.О., Алышов Т.А., Белова Ю.В. Автоматическое распознавание значений глубины на лоцманских картах с использованием методов глубокого обучения. *Computational Mathematics and Information Technologies.* 2025;9(1):52–60. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-52-60

Rakhimbaeva E.O., Alyshov T.A., Belova Yu.V. Automatic depth value recognition. Computational Mathematics and Information Technologies. 2025;9(1):52–60. (In Russ.) https://doi.org/10.23947/2587-8999-2025-9-1-52-60

26. Единая государственная система информации об обстановке в Мировом океане (ЕСИМО). *Океанографический портал данных.* URL: http://esimo.oceanography.ru/ (дата обращения: 11.09.2025).

Unified State System of Information on the World Ocean (ESIMO). *Oceanographic data portal*; 2025. URL: http://esimo.oceanography.ru/ (accessed: 11.09.2025).

Об авторах:

Юлия Валериевна Белова, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), ORCID, SPIN-код, yvbelova@yandex.ru

Олеся Владимировна Колгунова, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики Северо-Осетинского государственного университета (362025, Российская Федерация, г. Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46), ORCID, SPIN-код, kolev2003@mail.ru

Мария Игоревна Габуева, студент четвертого курса лечебного факультета Северо-Осетинской государственной медицинской академии (362019, Российская Федерация, г. Владикавказ, ул. Пушкинская, 40), ORCID, gabueva72@xmail.ru

Заявленный вклад авторов:

Ю.В. Белова: формулирование основной концепции исследования; осуществление научно-исследовательского процесса, включая проведение вычислительных экспериментов; создание и подготовка рукописи: визуализация результатов исследования и полученных данных; оформление графических материалов.

О.В. Колгунова: формулирование целей и задач исследования; создание и подготовка рукописи: критический анализ черновика рукописи; корректировка выводов; доработка текста.

М.И. Габуева: создание и подготовка рукописи: написание черновика рукописи; оформление научной статьи; работа с источниками.

Конфликт интересов: **авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Yulia V. Belova, Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics and Computer Science at the Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), ORCID, SPIN-code, yvbelova@yandex.ru

Olesya V. Kolgunova, Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Senior Lecturer at the Department of Applied Mathematics and Computer Science, North Ossetian State University (44–46, Vatutina St., Vladikavkaz, 362025, Russian Federation), ORCID, SPIN-code, kolev2003@mail.ru

Maria I. Gabuyeva, fourth-year student of the Medical Faculty of the North Ossetian State Medical Academy (40, Pushkinskaya St., Vladikavkaz, 362019, Russian Federation), ORCID, gabueva72@xmail.ru

Contributions of the authors:

Yu.V. Belova: ideas; conducting a research and investigation process, specifically performing the computational experiments; preparation, creation of the published work, specifically visualization; making graphic materials.

O.V. Kolgunova: formulation of overarching research goals and aims; preparation, creation of the published work, specifically critical review; conclusions correction; text revision.

M.I. Gabueva: Preparation, creation of the published work, specifically writing the initial draft; formatting the research article; working with sources.

Conflict of Interest Statement: **the authors declare no conflict of interest.**

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 27.10.2025
Поступила после рецензирования / Reviewed 28.11.2025
Принята к публикации / Accepted 15.12.2025